SOLUCIONES DE LOS EJERCICIOS DE LA HOJA 2

$\boxed{1}$ Una relación lineal es una expresión de la forma $f(x) = ax + b$. Si llamamos $x$ a la temperatura en °C, e $y = f(x)$ a la temperatura en °F, necesitamos determinar los valores $a$ y $b$.

- Como a 0°C le corresponden 32°F, eso significa que $f(0) = 32$, es decir, $b = 32$.
- Como a 100°C le corresponden 212°F, eso significa que $f(100) = 212$, es decir, $100a + b = 212$.

Resolvemos entonces el sistema:

$$\left\{ \begin{array}{l} b = 32 \\ 100a + b = 212 \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} b = 32 \\ a = \dfrac{9}{5}. \end{array} \right\}$$

La relación lineal es entonces $f(x) = \dfrac{9}{5}x + 32$.

El incremento de temperatura en °F viene dado por la expresión $\Delta f(x) = f(x_2) - f(x_1)$, mientras que el incremento de temperatura en °C viene dado por la expresión $\Delta x = x_2 - x_1$. En el caso de una función lineal se tiene que:

$$\Delta f(x) = f(x_2) - f(x_1) = a\,x_2 + b - (a\,x_1 + b) = a\,(x_2 - x_1) = a\,\Delta x.$$

Un incremento de 1°C supone que $\Delta x = 1$. Por tanto, un incremento de 1°C se corresponde con:

$$\Delta f(x) = a = \frac{9}{5} = 1{,}8^{o}F.$$

$\boxed{2.}$ De la información proporcionada por el enunciado, deducimos que:

- La longitud de las ballenas azules $L$ (en dm.) es una función lineal del tiempo $t$ (en meses) de la forma $L = f(t) = at + b$. Como recién nacidas ($t = 0$) miden 73 dm, y a los 7 meses ($t = 7$) miden 162 dm., deducimos que:

$$\left\{ \begin{array}{l} b = 73 \\ 7a + b = 162 \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} a = \frac{89}{7} \\ b = 73 \end{array} \right\} \Rightarrow L = f(t) = \frac{89}{7}\,t + 73.$$

- El peso de las ballenas azules $W$ (en toneladas) es una función lineal del tiempo de la forma $W = g(t) = ct + d$. Como recién nacidas ($t = 0$) pesan 3 toneladas, y a los 7 meses ($t = 7$) pesan 23 toneladas, deducimos que:

$$\left\{ \begin{array}{l} d = 3 \\ 7c + d = 23 \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} c = \frac{20}{7} \\ d = 3 \end{array} \right\} \Rightarrow W = g(t) = \frac{20}{7}\,t + 3.$$

El incremento en longitud viene dado por la expresión $\Delta f(t) = f(t_2) - f(t_1)$, mientras que el incremento en tiempo viene dado por la expresión $\Delta t = t_2 - t_1$. En el caso de una función lineal se tiene que:

$$\Delta f(t) = f(t_2) - f(t_1) = a\,t_2 + b - (a\,t_1 + b) = a\,(t_2 - t_1) = a\,\Delta t.$$

Un incremento de un día supone que $\Delta x = \frac{1}{30}$. Por tanto, un incremento de 1 día se corresponde con:

$$\Delta f(t) = \frac{89}{7} \cdot \frac{1}{30} = 0{,}423\,dm.$$

De manera análoga en el caso del peso obtenemos que:

$$\Delta g(t) = g(t_2) - g(t_1) = c\,t_2 + d - (c\,t_1 + d) = c\,(t_2 - t_1) = c\,\Delta t,$$

luego un incremento de un día supone que $\Delta x = \frac{1}{30}$. Por tanto, un incremento de 1 día se corresponde con:

$$\Delta g(t) = \frac{20}{7} \cdot \frac{1}{30} = 0{,}095\,\text{toneladas}.$$

$\boxed{3.}$

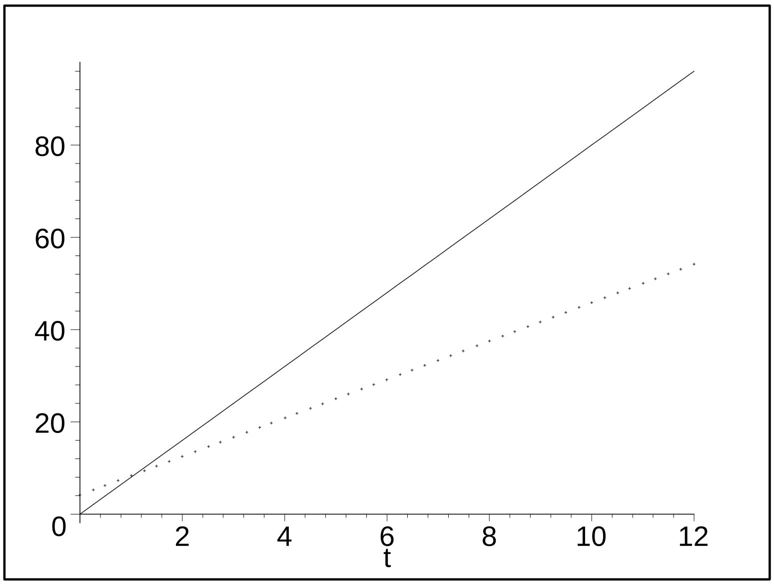
(a) $V_0$ es el volumen ocupado por el gas a 0°C, ya que se obtiene para $T = 0$.

(b) Para ello, debemos resolver la ecuación $V = 2\,V_0$, es decir,

$$2\,V_0 = V_0\left(1 + \frac{1}{273}\,T\right) \quad\Leftrightarrow\quad 2 = 1 + \frac{1}{273}\,T \quad\Leftrightarrow\quad T = 273\,^oC$$

Como $V(T = 0) = V_0$ y $V(T = 273) = 2\,V_0$, deducimos que la temperatura debe aumentar 273°C.

$\boxed{4.}$ La siguiente gráfica representa conjuntamente la Regla de Cowling (con puntos) y la Regla de Friend (con línea continua):




Las dos fórmulas especifican la misma dosis cuando coinciden para el mismo valor $y$, que es equivalente a resolver la ecuación:

$$\frac{t+1}{24} \cdot 100 = \frac{2}{25}\,t\,100 \quad\Leftrightarrow\quad \frac{t+1}{24} = \frac{2}{25}\,t \quad\Leftrightarrow\quad t = \frac{25}{23} = 1{,}086956522\,\text{años}.$$

Por tanto, ambas fórmulas especifican la misma dosis a los 1.0869 años, lo que corresponde a $y = 8{,}69$ mg.

$\boxed{5.}$ Si denotamos por $x$ la biomasa no enterrada (en g.) y por $y$ el número de semillas, la relación obtenida es $y = f(x) = a\,x$, donde $a$ es un valor a determinar. Para ello, usamos que si $x = 217$ g. entonces $y = 17$ semillas, o lo que es lo mismo:

$$17 = a\,217 \quad \Leftrightarrow \quad a = \frac{17}{217}.$$

De ese modo, la ecuación que relaciona ambas cantidades es $y = \dfrac{17}{217}\,x$.

$\boxed{6.}$ El área $A$ de un círculo viene dado por la fórmula $A = \pi\,r^2$, siendo $r$ el radio de dicho círculo. Decir que el radio del círculo aumenta a razón de 6m/min. es equivalente a decir que $r = 6\,t$, siendo $t$ el tiempo expresado en minutos. Por tanto, el área con fuego (medida en $\mathrm{m}^2$) como una función del tiempo $t$ viene dada por la expresión:

$$A = \pi\,(6\,t)^2 = 36\,\pi\,t^2.$$

$\boxed{7.}$ El área de la superficie de un cable de longitud $l$ y diámetro $d$ viene dado por la expresión:

$$A = \pi\,d\,l$$

Si suponemos que no hay corrosión en los extremos del cable (la longitud $l$ no varía), el área disminuye con el diámetro de dicho cable. Observemos entonces que la única variable que depende del tiempo es $d = d(t)$. Por tanto,

$$A(t) = \pi\,l\,d(t) \quad \Leftrightarrow \quad d(t) = \frac{A(t)}{\pi\,l}..$$

Observemos que:

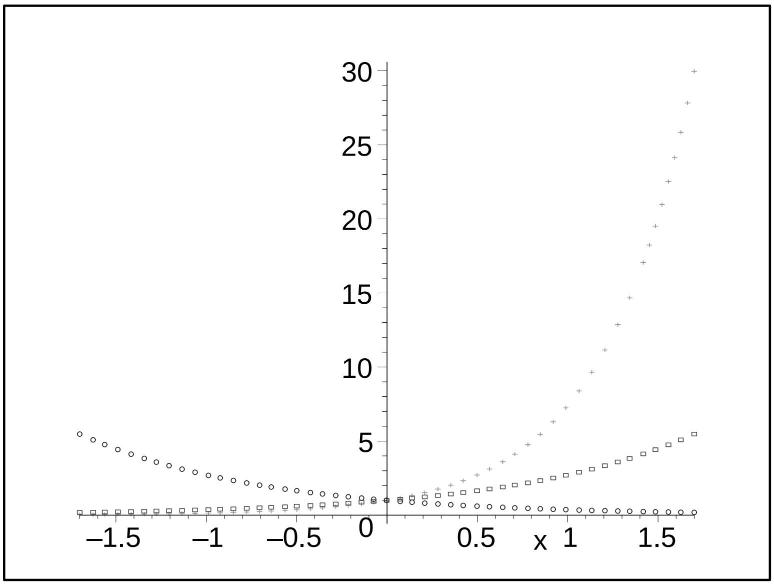
- Inicialmente $l = 30$ m y $d = 0{,}1$ m, luego $A(0) = \pi\,l\,d(0) = \pi \cdot 30 \cdot 0{,}1 = 3\pi$ $\mathrm{m}^2$.
- El área de la superficie del cable disminuye a razón de 4685 $\mathrm{cm}^2$ (0.4685 $\mathrm{m}^2$) por año, luego $A(t) = A(0) - 0{,}4685\,t$, siendo $t$ el tiempo expresado en años. Luego $A(t) = 3\,\pi - 0{,}4685\,t$.

En definitiva,

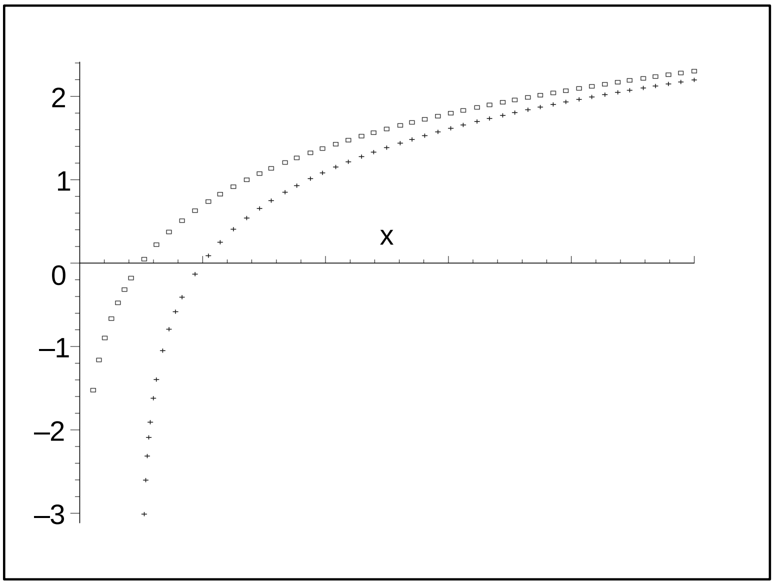
$$d(t) = \frac{3\,\pi - 0{,}4685\,t}{30\,\pi}.$$

$\boxed{8.}$ Notemos que para poder ver mejor las representaciones gráficas siguientes los ejes no tienen la misma escala.

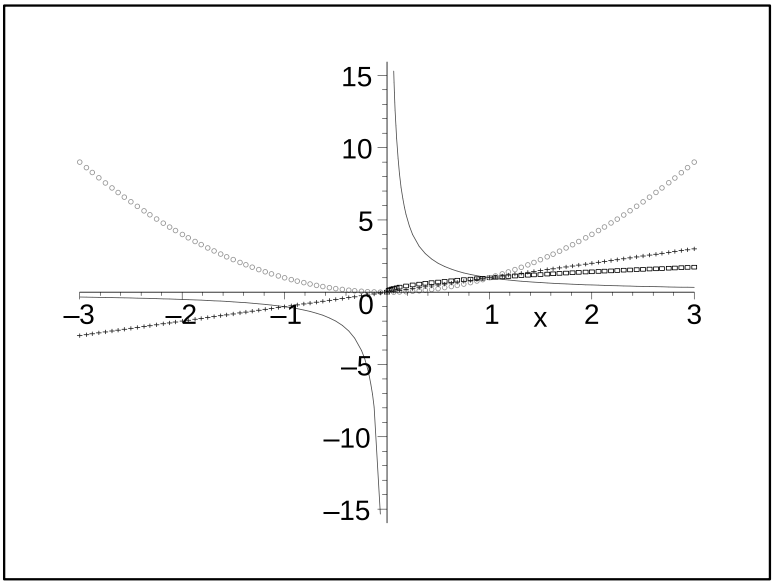
(a) En la siguiente gráfica la curva con $\square$ corresponde a $y = e^x$, la curva con $\circ$ corresponde a $y = e^{-x}$ y la curva con $x$ corresponde a la función $y = e^{2x}$:




(b) En la siguiente gráfica la curva con $\square$ corresponde a $y = \ln(x)$ y la curva con $x$ corresponde a la función $y = \ln(x - 1)$:




(c) En la siguiente gráfica la curva continua corresponde a $y = x^{-1} = \dfrac{1}{x}$, la curva con $x$ corresponde a $y = x$, la curva con $\circ$ corresponde a $y = x^2$, y la curva con $\square$ corresponde a la función $y = x^{1/2}$ (que sólo está definido para valores positivos de $x$):




$\boxed{9.}$

(a) El dominio de $f$ viene dado por el conjunto de números reales tales que $x - 2 \geq 0$, es decir $D(f) = [2, +\infty)$.

(b) El dominio de $f$ viene dado por el conjunto de números reales tales que $\dfrac{1-x}{1+x} \geq 0$. Dicha situación de puede dar si:

- $\left\{ \begin{array}{c} 1 - x \geq 0 \\ 1 + x > 0 \end{array} \right\}$, lo que se corresponde con $(-1, 1]$,
- $\left\{ \begin{array}{c} 1 - x \leq 0 \\ 1 + x < 0 \end{array} \right\}$, lo que se corresponde con $\emptyset$.

Es decir $D(f) = (-1, 1]$.

(c) El dominio de $f$ viene dado por el conjunto de números reales tales que $x \geq 0$ y $(1+3x)(x-1) \neq 0$, es decir $D(f) = [0, +\infty)\backslash\{1\} = [0, 1) \cup (1, +\infty)$.

(d) El dominio de $f$ viene dado por el conjunto de números reales tales que $x^2 + x - 2 \geq 0$. Observemos que $x^2 + x - 2 = (x-1)(x+2)$, luego $x^2 + x - 2$ es positiva o cero en $(-\infty, -2] \cup [1, +\infty)$ y negativa en $(-2, 1)$. Por tanto, $D(f) = (-\infty, -2] \cup [1, +\infty) = \mathbb{R}\backslash(-2, 1)$.

(e) El dominio de $f$ viene dado por el conjunto de números reales tales que $e^x - 1 \geq 0$, es decir $x \geq \ln(1) = 0$. Por tanto, $D(f) = [0, +\infty)$.

(f) El dominio de $f$ viene dado por el conjunto de números reales tales que $x > 0$ y $\ln x \neq 0$, es decir $x > 0$ y $x \neq 1$. Por tanto $D(f) = (0, 1) \cup (1, +\infty)$.

(g) El dominio de $f$ viene dado por el conjunto de números reales tales que $|x| \neq 0$, es decir $D(f) = \mathbb{R}\backslash\{0\} = (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$.

(h) El dominio de $f$ viene dado por el conjunto de números reales tales que $x(2-x)(x+3) > 0$. Tenemos varias situaciones posibles:

- $\left\{\begin{array}{l} x>0 \\ 2-x>0 \\ x+3>0 \end{array}\right\}$, lo que corresponde con $(0,2)$,
- $\left\{\begin{array}{l} x>0 \\ 2-x<0 \\ x+3<0 \end{array}\right\}$, lo que corresponde con $\emptyset$,
- $\left\{\begin{array}{l} x<0 \\ 2-x>0 \\ x+3<0 \end{array}\right\}$, lo que corresponde con $(-\infty,-3)$,
- $\left\{\begin{array}{l} x<0 \\ 2-x<0 \\ x+3>0 \end{array}\right\}$, lo que corresponde con $\emptyset$.

Por tanto, $D(f)=(-\infty,-3)\cup(0,2)$.

$\boxed{10.}$ La teoría nos dice que la composición de dos funciones continuas en un punto es una función continua en dicho punto. Por tanto, una función obtenida por composición es continua, al menos, en los puntos que las funciones que la componen son continuas.

(a)

$$(f\circ g)(x)\ =f(g(x))=f\left(\frac{1}{x}\right)=\frac{1}{1+\frac{1}{x}}=\frac{x}{x+1},\quad (g\circ f)(x)\ =g(f(x))=g\left(\frac{1}{1+x}\right)=1+x.$$

Observemos que $D(f)=\mathbb{R}\backslash\{-1\}$, $D(g)=\mathbb{R}\backslash\{0\}$, $D(f\circ g)=\mathbb{R}\backslash\{-1\}$ y $D(g\circ f)=\mathbb{R}$.

(b)

$$(f\circ g)(x)\ =f(g(x))=f(x^2+2x)=1-2x-x^2,\quad (g\circ f)(x)\ =g(f(x))=g(1-x)=x^2-4x+3.$$

Las funciones $f$ y $g$ son polinómicas, luego son continuas en todo $\mathbb{R}$. Por tanto, $f\circ g$ y $g\circ f$ son continuas en todo $\mathbb{R}$ (de hecho, son polinómicas).

$\boxed{11.}$ Calcular la inversa de una función $f(x)$ consiste en encontrar una función $x=f^{-1}(y)$ tal que $f(x)=y$. Por tanto,

(a)

$$f(x)=y\quad\Leftrightarrow\quad\frac{3}{4+x}=y\quad\Leftrightarrow\quad x=\frac{3}{y}-4\quad\Leftrightarrow\quad f^{-1}(y)=\frac{3}{y}-4.$$

(b)

$$f(x)=y\quad\Leftrightarrow\quad e^x=y\quad\Leftrightarrow\quad x=\ln(y)\quad\Leftrightarrow\quad f^{-1}(y)=\ln(y).$$

(c)

$$f(x)=y\quad\Leftrightarrow\quad\ln(2x)=y\quad\Leftrightarrow\quad x=\frac{1}{2}\,e^y\quad\Leftrightarrow\quad f^{-1}(y)=\frac{1}{2}\,e^y.$$

$\boxed{12.}$

(a) Para calcular el límite descomponemos los polinomios del numerador y denominador en factores simples:

$$\lim_{x\to 2} \frac{x^2+x-6}{x^2-4} = \frac{\text{“}0\text{”}}{0} \text{ (indet.)} = \lim_{x\to 2} \frac{(x-2)(x+3)}{(x-2)(x+2)} = \lim_{x\to 2} \frac{x+3}{x+2} = \frac{5}{4}.$$

(b) $\lim_{x\to 1} \frac{x}{x-1} = \frac{\text{“}1\text{”}}{0} = \infty$. Si queremos calcular el signo de $\infty$, debemos calcular los límites laterales:

$$\lim_{x\to 1^-} \frac{x}{x-1} = -\infty, \qquad \lim_{x\to 1^+} \frac{x}{x-1} = +\infty.$$

(c) $\lim_{x\to 0} \frac{|x|}{x^2+x} = \frac{\text{“}0\text{”}}{0}$ (indet.). Si queremos calcular el límite, debemos calcular los límites laterales:

$$\lim_{x\to 0^-} \frac{|x|}{x^2+x} = \lim_{x\to 0^-} \frac{-x}{x^2+x} = \lim_{x\to 0^-} \frac{-1}{x+1} = -1,$$
$$\lim_{x\to 0^+} \frac{|x|}{x^2+x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{x}{x^2+x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x+1} = 1$$

Como ambos límites laterales no coinciden, concluimos que dicho límite no existe.

(d) Para calcular este límite, reescribimos las raíces como potencias fraccionarias:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x+\sqrt{x}}} = \frac{\text{“}\infty\text{”}}{\infty} \text{ (indet.)} = \lim_{x\to+\infty} \left(\frac{x}{x+x^{1/2}}\right)^{1/2} = \lim_{x\to+\infty} \left(\frac{1}{\frac{x+x^{1/2}}{x}}\right)^{1/2}$$
$$= \lim_{x\to+\infty} \left(\frac{1}{1+\frac{1}{x^{1/2}}}\right)^{1/2} = 1.$$

Observemos que se ha usado que $\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x^{1/2}} = 0$.

(e) Para calcular este límite, multiplicamos y dividimos la función por su conjugada:

$$\lim_{x\to+\infty} (\sqrt{x+2}-\sqrt{x}) = \text{“}\infty-\infty\text{”} \text{ (indet.)} = \lim_{x\to+\infty} (\sqrt{x+2}-\sqrt{x}) \frac{\sqrt{x+2}+\sqrt{x}}{\sqrt{x+2}+\sqrt{x}}$$
$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{2}{\sqrt{x+2}+\sqrt{x}} = 0.$$

(f) $\lim_{x\to 0} e^{\frac{|x|}{x}} = e^{\frac{\text{“}0\text{”}}{0}}$ (indet.). Si queremos calcular dicho límite, debemos calcular los límites laterales:

$$\lim_{x\to 0^-} e^{-\frac{x}{x}} = \lim_{x\to 0^-} e^{-1} = \frac{1}{e}, \qquad \lim_{x\to 0^+} e^{\frac{x}{x}} = \lim_{x\to 0^+} e = e.$$

Como ambos límites laterales no coinciden, deducimos que no existe dicho límite.

(g) Para calcular el siguiente límite dividimos numerador y denominador por la función $e^x$:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{2e^x+4} = \frac{\text{“}\infty\text{”}}{\infty} \text{ (indet.)} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{2+4e^{-x}} = \frac{1}{2}.$$

(h) Para calcular el siguiente límite, tenemos en cuenta que $|x-1| = x-1$ cuando $x \to +\infty$, y dividimos numerador y denominador por la función $x$:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x^2}{|x-1|} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2}{x-1} = \frac{\text{“}\infty\text{”}}{\infty} \text{ (indet.)} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x}{1-\frac{1}{x}} = +\infty.$$

(i) Para calcular el siguiente límite, descomponemos los polinomios del numerador y denominador en factores simples:

$$\lim_{x\to 1} \frac{x^2-1}{2x^2-x-1} = \frac{\text{“}0\text{”}}{0} \text{ (indet.)} = \lim_{x\to 1} \frac{(x-1)(x+1)}{(x-1)(2x+1)} = \lim_{x\to 1} \frac{x+1}{2x+1} = \frac{2}{3}.$$

(j) El siguiente límite se puede hacer de varias formas. La que presentamos a continuación se basa en que $\lim_{x\to a} \left(1+\frac{1}{f(x)}\right)^{f(x)} = e$, si $\lim_{x\to a} f(x) = \infty$:

$$\lim_{x\to+\infty} \left(\frac{x+1}{x}\right)^{x^2} = \text{“}1^{\infty}\text{” (indet.)} = \lim_{x\to+\infty} \left(1+\frac{1}{x}\right)^{x^2} = \lim_{x\to+\infty} \left[\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}\right]^{x} = e^{\lim_{x\to+\infty} x} = +\infty.$$

$\boxed{13.}$

a) La función es continua en $\mathbb{R}\backslash\{0\}$, pues tanto $\ln(x+1)$ (en $x \geq 0$) como $2e^{-x^2}-1$ (en $x<0$) lo son por ser composición de funciones continuas. Estudiamos separadamente lo que ocurre en $x=0$:

$$\begin{aligned} f(0^-) &= \lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} (2e^{-x^2}-1) = 1 \\ f(0^+) &= \lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} \ln(x+1) = 0 \\ f(0) &= \ln(1) = 0 \end{aligned}$$

Entonces, $f$ no es continua en $x=0$. Se tiene una discontinuidad de salto finito.

b) La función es continua en $\mathbb{R}\backslash\{\frac{\pi}{2}\}$, pues tanto $\cos x$ como $(x+1)^2$ lo son por ser composición de funciones continuas. Estudiamos separadamente lo que ocurre en $x = \frac{\pi}{2}$:

$$\begin{aligned} f(\tfrac{\pi}{2}^-) &= \lim_{x\to \frac{\pi}{2}^-} f(x) = \lim_{x\to \frac{\pi}{2}^-} (x+1)^2 = \left(\frac{\pi}{2}+1\right)^2 \\ f(\tfrac{\pi}{2}^+) &= \lim_{x\to \frac{\pi}{2}^+} f(x) = \lim_{x\to \frac{\pi}{2}^+} \cos x = 0 \\ f(\tfrac{\pi}{2}) &= \cos\tfrac{\pi}{2} = 0 \end{aligned}$$

Entonces, $f$ no es continua en $x = \frac{\pi}{2}$. Se tiene una discontinuidad de salto finito.

$\boxed{14.}$

(a) El número de bacterias en $t = 0{,}1$ es $B(0{,}1) = 10000\, e^{0{,}01} = 10100{,}50167$. El número de bacterias en $t = 3$ es $B(3) = 10000\, e^{0{,}3} = 13498{,}58808$.

(b) El instante $t$ en el que el número de bacterias alcanza el valor 100000 se corresponde con resolver la ecuación $B(t) = 100000$, es decir:

$$10000\, e^{0{,}1t} = 100000 \quad \Leftrightarrow \quad 10 = e^{0{,}1t} \quad \Leftrightarrow \quad \ln(10) = 0{,}1t \quad \Leftrightarrow \quad t = 10\, \ln(10) = 23{,}02585093\,\text{horas}.$$

(c) Para ello, calculamos el límite de $B(t)$ cuando $t \to +\infty$. En ese caso,

$$\lim_{t\to+\infty} B(t) = +\infty,$$

luego el número de bacterias aumenta indefinidamente.

$\boxed{15.}$ **Caso** $B(t) = 40 \cdot 2^t$

(a) El número de bacterias en $t = 0{,}1$ es $B(0{,}1) = 40 \cdot 2^{0{,}1} = 42{,}87093852$. El número de bacterias en $t = 3$ es $B(3) = 40 \cdot 2^3 = 320$.

(b) El instante $t$ en el que el número de bacterias alcanza el valor 100000 se corresponde con resolver la ecuación $B(t) = 100000$, es decir:

$$40 \cdot 2^t = 100000 \quad \Leftrightarrow \quad 2^t = \frac{10000}{4} = 2500 \quad \Leftrightarrow \quad t = \log_2(2500) = 11{,}28771238\,\text{horas}.$$

(c) Para ello, calculamos el límite de $B(t)$ cuando $t \to +\infty$. En ese caso,

$$\lim_{t\to+\infty} B(t) = +\infty,$$

luego el número de bacterias aumenta indefinidamente.

**Caso** $B(t) = 250000e^{-2t}$

(a) El número de bacterias en $t = 0{,}1$ es $B(0{,}1) = 250000\, e^{-0{,}2} = 204682{,}6883$. El número de bacterias en $t = 3$ es $B(3) = 250000\, e^{-6} = 619{,}6880443$.

(b) El instante $t$ en el que el número de bacterias alcanza el valor 100000 se corresponde con resolver la ecuación $B(t) = 100000$, es decir:

$$250000\, e^{-2t} = 100000 \quad \Leftrightarrow \quad e^{-2t} = \frac{2}{5} \quad \Leftrightarrow \quad t = -\frac{1}{2}\, \ln\left(\frac{2}{5}\right) = 0{,}4581453660\,\text{horas}.$$

(c) Para ello, calculamos el límite de $B(t)$ cuando $t \to +\infty$. En ese caso,

$$\lim_{t\to+\infty} B(t) = 0,$$

luego la población de bacterias en la placa de Petri desaparece.

16.

(a) La función $f(t) = 0{,}05t(t-12)(t-24)$ es una ecuación polinómica de tercer grado. Sus raíces son 0, 12 y 24. Si estudiamos el signo, teniendo en cuenta que $t \in [0, 24]$ (pues se trata de horas diarias), obtenemos que:

- es positiva en $(0, 12)$,
- es negativa en $(12, 24)$.

Por tanto, la temperatura se encuentra por debajo de $0^o$ entre $t = 12$, que se corresponde con las 18 (6 de la tarde), y $t = 24$, que se corresponde con las 6 (6 de la mañana) horas.

(b) La función $f$ es continua en su dominio. A las 12 a. m. su valor es $f(t = 6) = 32{,}4^o$F, y a la 1 p. m. su valor es $f(t = 7) = 29{,}75^o$F. Por tanto, aplicando el Teorema del valor intermedio o de Darboux deducimos que existe algún valor intermedio $t \in (6, 7)$ (entre las 12 a. m. y la 1 p. m.) en el que se alcanzan los $32^o$F.

17.

(a) La función $f(x) = x - \operatorname{sen} x - 1$ es continua en $\mathbb{R}$, su valor en $x = 0$ es $f(0) = -1 < 0$ y su valor en $x = \pi$ es $f(\pi) = \pi - 1 > 0$. Por tanto, aplicando el Teorema de Bolzano deducimos que existe un valor intermedio $a \in (0, \pi)$ en el que $f(a) = 0$. Dicho valor se corresponde con una raíz real de la ecuación $x - \operatorname{sen} x = 1$.

(b) La función $f(x) = x + e^x - 14$ es continua en $\mathbb{R}$, su valor en $x = 0$ es $f(0) = -13 < 0$ y su valor en $x = 3$ es $f(3) = 9{,}08553692 > 0$. Por tanto, aplicando el Teorema de Bolzano deducimos que existe un valor intermedio $a \in (0, 3)$ en el que $f(a) = 0$. Dicho valor se corresponde con una raíz real de la ecuación $x + e^x + 1 = 15$.

(c) La función $f(x) = e^x + \operatorname{sen} x$ es continua en $\mathbb{R}$, su valor en $x = -\frac{\pi}{2}$ es $f(-\frac{\pi}{2}) = \frac{1}{e^{\pi/2}} - 1 < 0$ y su valor en $x = 0$ es $f(0) = 1 > 0$. Por tanto, aplicando el Teorema de Bolzano deducimos que existe un valor intermedio $a \in (-\frac{\pi}{2}, 0)$ en el que $f(a) = 0$. Dicho valor se corresponde con una raíz real de la ecuación $e^x + \operatorname{sen} x = 0$.

(d) La función $f(x) = x \ln(x+1) - 2 - x + 2x^2$ es continua en $(-1, +\infty)$, su valor en $x = 0$ es $f(0) = -2 < 0$ y su valor en $x = 2$ es $f(2) = 2 \ln(3) + 4 = 6{,}197224578 > 0$. Por tanto, aplicando el Teorema de Bolzano deducimos que existe un valor intermedio $a \in (0, 2)$ en el que $f(a) = 0$. Dicho valor se corresponde con una raíz real de la ecuación $x \ln(x+1) - 2 = x - 2x^2$.

(e) La función $f(x) = e^x + 2x - 1$ es continua en $\mathbb{R}$, su valor en $x = -1$ es $f(-1) = \frac{1}{e} - 3 < 0$ y su valor en $x = 1$ es $f(1) = e + 1 > 0$. Por tanto, aplicando el Teorema de Bolzano deducimos que existe un valor intermedio $a \in (-1, 1)$ en el que $f(a) = 0$. Dicho valor se corresponde con una raíz real de la ecuación $e^x + 2x = 1$. Observemos que en este caso $f(0) = 0$, luego ya hemos encontrado una raíz de dicha ecuación.

(f) La función $f(x) = x - 2^{-x}$ es continua en $\mathbb{R}$, su valor en $x = 0$ es $f(0) = -1 < 0$ y su valor en $x = 1$ es $f(1) = \frac{1}{2} > 0$. Por tanto, aplicando el Teorema de Bolzano deducimos que existe un valor intermedio $a \in (0, 1)$ en el que $f(a) = 0$. Dicho valor se corresponde con una raíz real de la ecuación $x - 2^{-x} = 0$.