SOLUCIONES DE LOS EJERCICIOS DE LA HOJA 3

$\boxed{1}$

(a) En $x=1$, $f(1)=\frac{1}{e}$, y la recta tangente viene dada por la expresión:

$$y-f(1)=f'(1)\,(x-1), \quad \text{es decir,} \quad y-\frac{1}{e}=f'(1)\,(x-1).$$

Por tanto, tenemos que calcular $f'(1)$. Observemos que $f'(x)=-2\,x\,e^{-x^2}$, luego $f'(1)=-\frac{2}{e}$. La recta tangente viene dada pues por $y-\frac{1}{e}=-\frac{2}{e}(x-1)$, es decir:

$$y=\frac{1}{e}\,(3-2x).$$

(b) En $x=2$, $f(2)=\ln(3)$, y la recta tangente viene dada por la expresión:

$$y-f(2)=f'(2)\,(x-2), \quad \text{es decir,} \quad y-\ln(3)=f'(2)\,(x-2).$$

Por tanto, tenemos que calcular $f'(2)$. Observemos que $f'(x)=\frac{1}{x+1}$, luego $f'(2)=\frac{1}{3}$. La recta tangente viene dada pues por $y-\ln(3)=\frac{1}{3}(x-2)$, es decir:

$$y=\ln(3)+\frac{1}{3}\,(x-2).$$

$\boxed{2.}$ A continuación damos la expresión de las derivadas de las funciones y su dominio de definición:

a) El dominio de definición de f es $Dom(f)=[-\sqrt{3},\sqrt{3}]$. La derivada es $f'(x)=-\dfrac{x}{\sqrt{3-x^2}}$, y es válida en $(-\sqrt{3},\sqrt{3})$.

b) El dominio de definición de f es $Dom(f)=\mathbb{R}$. La derivada es $f'(x)=\dfrac{2x-1}{x^2-x+1}$, y es válida en $\mathbb{R}$.

c) El dominio de definición de f es $Dom(f)=\mathbb{R}$. La derivada es $f'(x)=-\dfrac{1}{2}\text{sen}\left(\dfrac{x}{2}\right)\,\text{sen}x+\cos\left(\dfrac{x}{2}\right)\,\cos x$, y es válida en $\mathbb{R}$.

d) El dominio de definición de f es $Dom(f)=(0,1]$. La derivada es $f'(x)=-\dfrac{1}{2x\sqrt{(1-x)x}}$, y es válida en $(0,1)$.

e) El dominio de definición de f es $Dom(f)=\mathbb{R}$. La derivada es $f'(x)=(-2x)\,e^{-x^2+3}$, y es válida en $\mathbb{R}$.

f) El dominio de definición de f es $Dom(f)=\mathbb{R}\backslash\{-1\}$. La derivada es

$$f'(x)=2\,\text{sen}\left(\frac{x+2}{x+1}\right)\,\cos\left(\frac{x+2}{x+1}\right)\,\left(\frac{-1}{(x+1)^2}\right),$$

y es válida en $\mathbb{R}\backslash\{-1\}$.

g) El dominio de definición de f es $Dom(f) = \mathbb{R}$. La derivada es

$$f'(x) = \cos^2 x\ [-\cos(1-x)\cos x - 3\,\mathrm{sen}(1-x)\,\mathrm{sen} x]\,,$$

y es válida en $\mathbb{R}$.

h) El dominio de definición de f es $Dom(f) = \mathbb{R}$. La derivada es $f'(x) = 2^{x^3-3x^2}\,(3x^2 - 6x)\ln 2$, y es válida en $\mathbb{R}$.

i) El dominio de definición de f es $Dom(f) = [-1, 3]$. La derivada es $f'(x) = -\dfrac{1}{\sqrt{-x^2+2x+3}}$, y es válida en $(-1, 3)$.

j) El dominio de definición de f es $Dom(f) = \mathbb{R}$. La derivada es $f'(x) = \dfrac{1}{2}\,(1-\cos x)^{-1/2}\,\mathrm{sen} x$, y es válida en $\mathbb{R}\backslash\{2\,n\,\pi,\ n \in \mathbb{Z}\}$ (múltiplos pares de π), que es donde se anula $1 - \cos x$.

k) El dominio de definición de f es $Dom(f) = \mathbb{R}$. La derivada es $f'(x) = \dfrac{e^x}{(1+e^x)^2}$, y es válida en $\mathbb{R}$.

l) El dominio de definición de f es $Dom(f) = (-1, 1)$. La derivada es $f'(x) = \dfrac{1}{x^2-1}$, y es válida en $(-1, 1)$.

m) El dominio de definición de f es $Dom(f) = \mathbb{R}\backslash\{-2\}$. La derivada es $f'(x) = -14\,\dfrac{3x-1}{(x+2)^3}\,\mathrm{sen}\left(\dfrac{3x-1}{x+2}\right)^2$, y es válida en $\mathbb{R}\backslash\{-2\}$.

n) El dominio de definición de f es $Dom(f) = (-\infty, -2] \cup [2, +\infty)$. La derivada es $f'(x) = \dfrac{x^2-2}{\sqrt{x^2-4}}$, y es válida en $(-\infty, -2) \cup (2, +\infty)$.

o) El dominio de definición de f es $Dom(f) = \mathbb{R}$. La derivada es $f'(x) = \dfrac{2x}{x^4+1}$, y es válida en $\mathbb{R}$.

p) El dominio de definición de f es $Dom(f) = \mathbb{R}\backslash\{1,\ \frac{n\pi}{3},\ n \in \mathbb{Z}\}$. La derivada es

$$f'(x) = \frac{\frac{2}{x-1}\,\mathrm{sen}(3x) - \ln(x^2-2x+1)\,3\cos(3x)}{\mathrm{sen}^2(3x)},$$

y es válida en $\mathbb{R}\backslash\{1,\ \frac{n\pi}{3},\ n \in \mathbb{Z}\}$.

q) El dominio de definición de f es $Dom(f) = \mathbb{R}$. La derivada es $f'(x) = \dfrac{2}{x^2+1}$, y es válida en $\mathbb{R}$.

r) El dominio de definición de f es $Dom(f) = [-1, 1]$. La derivada es $f'(x) = \dfrac{-sgn(x)}{\sqrt{1-x^2}}$, y es válida en $(-1, 1)$.

$\boxed{3.}$

(a) La función es continua en $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$. Estudiamos separadamente lo que ocurre en $x = 0$:

$$\begin{aligned} f(0^-) &= \lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} (1 + x^2) = 1 \\ f(0^+) &= \lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} \cos x = 1 \\ f(0) &= 1 \end{aligned}$$

Entonces, f es continua en $x = 0$.
Estudiamos ahora la derivabilidad:

- la función es derivable en $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$, la derivada en esos puntos es:

$$f'(x) = \begin{cases} -\operatorname{sen} x & \text{si } x > 0; \\ 2\,x & \text{si } x < 0. \end{cases}$$

- Veamos qué ocurre en $x = 0$. Calculamos las derivadas laterales:

$$\begin{aligned} \lim_{h\to 0^-} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} &= \lim_{h\to 0^-} \frac{\cos(h) - 1}{h} = \text{“}\frac{0}{0}\text{”} = \lim_{h\to 0^-} \frac{-\operatorname{sen} h}{1} = 0 \\ \lim_{h\to 0^+} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} &= \lim_{h\to 0^+} \frac{1 + h^2 - 1}{h} = \lim_{h\to 0^+} h = 0. \end{aligned}$$

Entonces, f es derivable en $x = 0$ y $f'(0) = 0$.

(b) La función es continua en $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$. Estudiamos separadamente lo que ocurre en $x = 0$:

$$\begin{aligned} f(0^-) &= \lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} x\,e^{-x^2} = 0 \\ f(0^+) &= \lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} (x^2 + 2x) = 0 \\ f(0) &= 0 \end{aligned}$$

Entonces, f es continua en $x = 0$.
Estudiamos ahora la derivabilidad:

- la función es derivable en $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$, la derivada en esos puntos es:

$$f'(x) = \begin{cases} (1 - 2x^2)\,e^{-x^2} & \text{si } x < 0, \\ 2x + 2 & \text{si } x > 0. \end{cases}$$

- Veamos qué ocurre en $x = 0$. Calculamos las derivadas laterales:

$$\begin{aligned} \lim_{h\to 0^-} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} &= \lim_{h\to 0^-} \frac{h\,e^{-h^2}}{h} = \lim_{h\to 0^-} e^{-h^2} = 1 \\ \lim_{h\to 0^+} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} &= \lim_{h\to 0^+} \frac{h^2 + 2h}{h} = \lim_{h\to 0^+} (h + 2) = 2. \end{aligned}$$

Entonces, f no es derivable en $x = 0$.

$\boxed{4.}$

(a) La función es continua en $(-\infty,1)\cup(1,+\infty)$. Estudiamos separadamente lo que ocurre en $x=1$:

$$\begin{aligned} f(1^-) &= \lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^-}(a\,x+b) = a+b \\ f(1^+) &= \lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^+} x^2 = 1 \\ f(1) &= 1 \end{aligned}$$

Entonces, f es continua en $x=1$ si y sólo si $a+b=1$.

Estudiamos ahora la derivabilidad:

- la función es derivable en $(-\infty,1)\cup(1,+\infty)$, la derivada en esos puntos es:

$$f'(x)=\begin{cases} 2\,x & \text{si } x>1; \\ a & \text{si } x<1. \end{cases}$$

- Veamos qué ocurre en $x=1$. Observemos que debemos considerar el caso $a+b=1$, en el que la función es continua (pues si una función no es continua en un punto, no puede ser derivable en dicho punto). Calculamos las derivadas laterales:

$$\begin{aligned} \lim_{h\to 0^-}\frac{f(1+h)-f(1)}{h} &= \lim_{h\to 0^-}\frac{a\,(1+h)+b-1}{h} = a \\ \lim_{h\to 0^+}\frac{f(1+h)-f(1)}{h} &= \lim_{h\to 0^+}\frac{(1+h)^2-1}{h} \\ &= \lim_{h\to 0^+}\frac{1+2\,h+h^2-1}{h} = \lim_{h\to 0^+}(2+h) = 2. \end{aligned}$$

Entonces, f es derivable en $x=1$ si y sólo si $a=2$. Por tanto como también se debe verificar la condición de continuidad en $x=1$, para que f sea derivable en $x=1$ se tiene que verificar:

$$\left\{\begin{array}{l} a+b=1 \\ a=2 \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} a=2 \\ b=-1 \end{array}\right.$$

(b) La función es continua en $(0,1)\cup(1,+\infty)$. Estudiamos separadamente lo que ocurre en $x=1$:

$$\begin{aligned} f(1^-) &= \lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^-} x\ln x = 0 \\ f(1^+) &= \lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^+}(x^2+ax+b) = 1+a+b \\ f(1) &= 1+a+b \end{aligned}$$

Entonces, f es continua en $x=1$ si y sólo si $a+b=-1$.

Estudiamos ahora la derivabilidad:

- la función es derivable en $(0,1)\cup(1,+\infty)$, la derivada en esos puntos es:

$$f'(x)=\begin{cases} \ln x+1 & \text{si } 0<x<1, \\ 2\,x+a & \text{si } x>1. \end{cases}$$

- Veamos qué ocurre en $x = 1$. Observemos que debemos considerar el caso $a+b = -1$, en el que la función es continua (pues si una función no es continua en un punto, no puede ser derivable en dicho punto). Calculamos las derivadas laterales:

$$\lim_{h\to 0^-} \frac{f(1+h) - f(1)}{h} = \lim_{h\to 0^-} \frac{(1+h)\,\ln(1+h)}{h} =$$

$$= \lim_{h\to 0^-} \frac{\text{“}0\text{”}}{0} \text{ (indet.)} = \text{(l'Hôpital)} \lim_{h\to 0^-} \frac{\ln(1+h)+1}{1} = 1$$

$$\lim_{h\to 0^+} \frac{f(1+h) - f(1)}{h} = \lim_{h\to 0^+} \frac{(1+h)^2 + a(1+h) + b}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0^+} \frac{h^2 + h(a+2)}{h} = \lim_{h\to 0^+} (h + a + 2) = a + 2.$$

Entonces, f es derivable en $x = 1$ si y sólo si $a + 2 = 1$. Por tanto como también se debe verificar la condición de continuidad en $x = 1$, para que f sea derivable en $x = 1$ se tiene que verificar:

$$\left\{ \begin{array}{l} a+b=-1 \\ a=-1 \end{array} \right\} \quad \Rightarrow \quad \left\{ \begin{array}{l} a=-1 \\ b=0 \end{array} \right.$$

$\boxed{5.}$ Para ver que las ecuaciones dadas poseen una única raíz real, intentaremos aplicar el teorema de Bolzano a funciones adecuadas y haremos razonamientos de monotonía según el signo de la derivada de dichas funciones.

(a) La función auxiliar $f(x) = x - 2^{-x}$ es continua y cumple que $\lim_{x\to -\infty} f(x) = -\infty$, y que $\lim_{x\to +\infty} f(x) = +\infty$. Así, es posible dar un intervalo $[a, b]$ conveniente en el que aplicar el teorema de Bolzano. En conclusión: $f(x)$ posee al menos una raíz.

Por otro lado, $f'(x) = 1 + 2^{-x} \ln 2$, que es una función de signo constante (positiva siempre), por lo que f es estrictamente creciente. Eso implica que f sólo corta al eje una única vez.

(b) La función auxiliar $f(x) = 2x - \cos x$ es continua y cumple que $\lim_{x\to -\infty} f(x) = -\infty$, y que $\lim_{x\to +\infty} f(x) = +\infty$. Así, es posible dar un intervalo $[a, b]$ conveniente en el que aplicar el teorema de Bolzano. En conclusión: $f(x)$ posee al menos una raíz.

Por otro lado, $f'(x) = 2 + \operatorname{sen} x$ que es una función de signo constante (positiva siempre), por lo que f es estrictamente creciente. Eso implica que f sólo corta al eje una única vez.

$\boxed{6.}$ Probar que existe (al menos) un instante en que ambas poblaciones coinciden es equivalente a demostrar que $p_1(t) = p_2(t)$, es decir, $e^t = t + 3$, o lo que es lo mismo: calcular los valores de t ($t \geq 0$ según el enunciado) tales que $f(t) = e^t - t - 3$ verifica $f(t) = 0$.

Sabemos que $f(t)$ es una función continua y derivable en $[0, +\infty)$ (en realidad en todo $\mathbb{R}$) y que $f'(t) = e^t - 1$. Observemos que $\left\{ \begin{array}{ll} f'(0) = 0 & \\ f'(t) > 0 & \text{si } t > 0. \end{array} \right.$

Por tanto, $f(t)$ es una función creciente en $(0, +\infty)$, tal que $f(0) = -2$ y $\lim_{x\to +\infty} f(t) = +\infty$. De todo lo anterior, usando el Teorema de Bolzano, deducimos que existe un único instante $t > 0$ en el que ambas poblaciones coinciden.

Teniendo en cuenta que $f(1) = -1{,}281718172$ y que $f(2) = 2{,}389056099$, podemos deducir que dicho instante t_0 se encuentra en el intervalo de tiempo $(1, 2)$.

$\boxed{7.}$ Se puede comprobar que todas las funciones que aparecen en este ejercicio son continuas. Al estar definidas sobre intervalos cerrados y acotados, poseen extremos absolutos (Teorema de Weierstrass).

Para calcularlos, tomamos los "candidatos" a extremos, esto es: los extremos del intervalo, los puntos donde la función es derivable y la derivada se anula, y los puntos donde la función no es derivable. Evaluamos la función en dichos puntos para concluir quién(es) dan el máximo y mínimo absoluto de la función.

(a) Candidatos:

- extremos: $x=-1$, $x=2$, y sus valores son $f(-1)=2$, $f(2)=e+1$,
- puntos en $(-1,2)$ donde $f'(x)=0$: $x=0$, y su valor es $f(0)=1$,
- puntos donde la función no es derivable (o no estamos seguros de ello): $x=1$, y su valor es $f(1)=2$.

Máximo de $f: e+2$, alcanzado en $x=2$. Mínimo de $f: 1$, y se alcanza en $x=0$.

(b) Candidatos:

- extremos: $x=-2$, $x=\pi$, y sus valores son $f(-2)=0$, $f(\pi)=0$,
- puntos en $(-2,\pi)$ donde $f'(x)=0$: $x=-1$, $x=\pi/2$, y sus valores son $f(-1)=-1$, $f(\pi/2)=1$,
- puntos donde la función no es derivable (o no estamos seguros de ello): $x=0$, y su valor es $f(0)=0$.

Máximo de $f: 1$, alcanzado en $x=\pi/2$. Mínimo de $f: -1$, y se alcanza en $x=-1$.

(c) Candidatos:

- extremos: $x=-2$, $x=e$, y sus valores son $f(-2)=-1$, $f(e)=e^2+1$,
- puntos en $(-2,e)$ donde $f'(x)=0$: $x=e^{-1/2}$, y sus valores son $f(e^{-1/2})=-\frac{1}{2e}+1>0$,
- puntos donde la función no es derivable (o no estamos seguros de ello): $x=0$, y su valor es $f(0)=1$.

Máximo de $f: e^2+1$, alcanzado en $x=e$. Mínimo de $f: -1$, y se alcanza en $x=-2$.

$\boxed{8.}$ Las funciones que aparecen en este ejercicio están definidas en intervalos no acotados. Por tanto, no podemos asegurar la existencia de extremos absolutos usando el Teorema de Weierstrass. Se hace necesario entonces hacer un estudio de la gráfica de la función.

(a) La función $f(x)$ es continua y derivable en $(-\infty,-1)\cup(-1,0)$, pues tanto $1/x$ como $x^2-1/2$ lo son (al ser composición de funciones continuas y derivables), pero no es continua (ni derivable) en $x=-1$. La derivada de la función en $(-\infty,-1)\cup(-1,0)$ viene dada por:

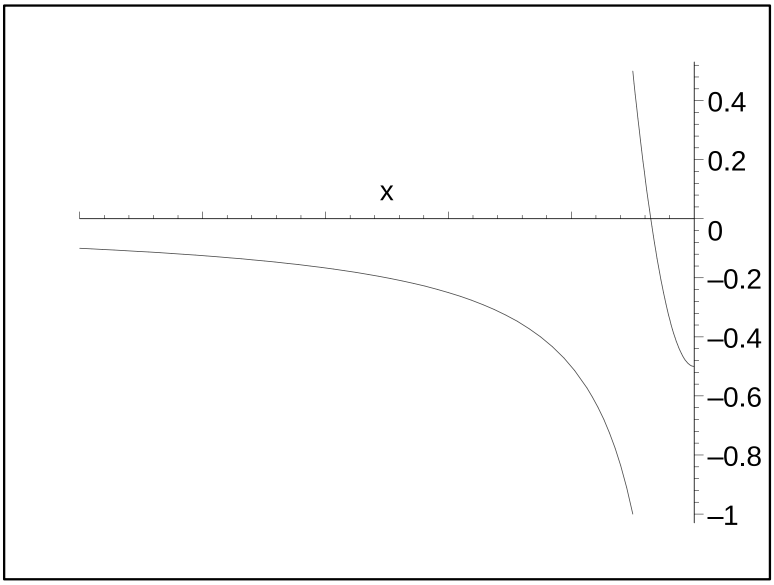
$$f'(x)=\begin{cases} -\frac{1}{x^2} & \text{si } x<-1, \\ 2x & \text{si } -1<x<0. \end{cases}$$

Deducimos entonces que f es una función decreciente en $(-\infty,-1)\cup(-1,0)$, que verifica además que:

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{x}=0,\quad f(-1)=-1,\quad \lim_{x\to-1^+} f(x)=\lim_{x\to-1^+}(x^2-\frac{1}{2})=\frac{1}{2},\quad f(0)=-\frac{1}{2}.$$

Luego el supremo de f es $\frac{1}{2}$, pero no se alcanza (no es, por tanto, un máximo de f); y el mínimo de f es -1, y se alcanza en $x=-1$.

La siguiente gráfica corresponde a $y=f(x)$ en $x\in[-10,0]$:



(b) La función $f(x)$ es continua en $\mathbb{R}$, pues tanto e^x como $\frac{1}{x+1}$ lo son, y derivable en $\mathbb{R}\backslash\{0\}$, ya que f no es derivable en $x = 0$. La derivada de la función en $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$ viene dada por:

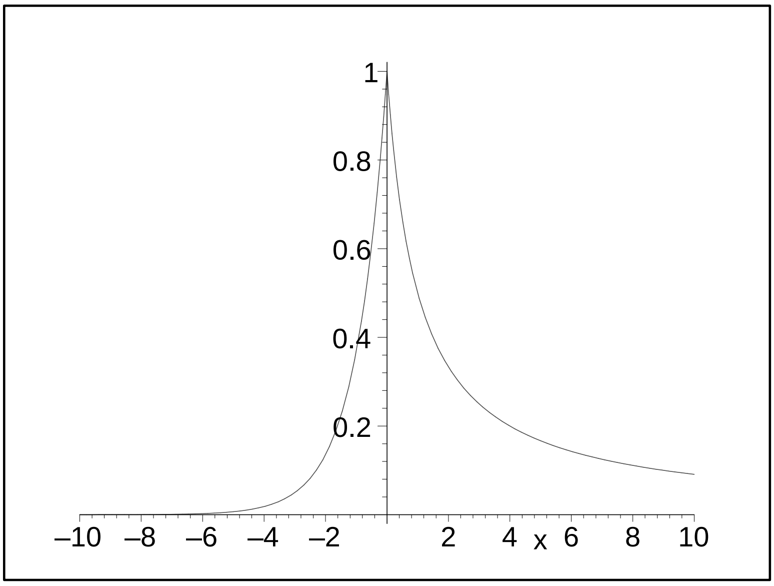
$$f'(x) = \begin{cases} e^x & \text{si } x < 0, \\ -\dfrac{1}{(x+1)^2} & \text{si } x > 0. \end{cases}$$

Deducimos entonces que f es una función creciente en $(-\infty, 0)$ y decreciente en $(0, +\infty)$, que verifica además que:

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} e^x = 0,\ f(0) = 1,\ \lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x+1} = 1,\ \lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x+1} = 0.$$

Luego el máximo de f es 1,; y el ínfimo de f es 0, pero no se alcanza (no es, por tanto, un mínimo de f).

La siguiente gráfica corresponde a $y = f(x)$ en $x \in [-10, 10]$:



$\boxed{9.}$

(a)

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^2-1}{x^3-1}=\frac{\text{“}0\text{”}}{0}\text{ (indet.)}=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(x+1)}{(x-1)(x^2+x+1)}=\lim_{x\to 1}\frac{x+1}{x^2+x+1}=\frac{2}{3}.$$

(b)

$$\lim_{x\to 0}\frac{2^x-3^x}{x}=\frac{\text{“}0\text{”}}{0}\text{ (indet.)}=\text{(L'Hôpital) }\lim_{x\to 0}\frac{2^x\ \ln 2-3^x\ \ln 3}{1}=\ln 2-\ln 3=\ln\left(\frac{2}{3}\right).$$

(c)

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{2x^2}=\frac{\text{“}0\text{”}}{0}\text{ (indet.)}=\text{(L'Hôpital) }\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen} x}{4x}=\frac{\text{“}0\text{”}}{0}\text{ (indet.)}=\text{(L'Hôpital) }\lim_{x\to 0}\frac{\cos x}{4}=\frac{1}{4}.$$

(d)

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0^+} x\ \ln x &= \text{“}0\cdot(-\infty)\text{” (indet.)}=\lim_{x\to 0^+}\frac{\ln x}{\frac{1}{x}}=\frac{\text{“}-\infty\text{”}}{+\infty}\text{ (indet.)}\\ &= \text{(L'Hôpital) }\lim_{x\to 0^+}\frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}}=\lim_{x\to 0^+}(-x)=0.\end{aligned}$$

(e)

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{\operatorname{sen}(2x)}{x}\right)^{1/x}=\text{“}\left(\frac{0}{0}\right)^{\infty}\text{ (indet.)}$$

Para resolverlo, calculamos primero el siguiente límite:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen}(2x)}{x}=\frac{\text{“}0\text{”}}{0}\text{ (indet.)}=\text{(L'Hôpital) }\lim_{x\to 0}\frac{2\cos(2x)}{1}=2.$$

Por tanto, tenemos que:

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{\operatorname{sen}(2x)}{x}\right)^{1/x}=\begin{cases}\lim_{x\to 0^-}\left(\frac{\operatorname{sen}(2x)}{x}\right)^{1/x}=2^{-\infty}=0\\ \lim_{x\to 0^+}\left(\frac{\operatorname{sen}(2x)}{x}\right)^{1/x}=2^{+\infty}=+\infty\end{cases}$$

En realidad, debido a que los límites por la derecha y por la izquierda son distintos, no podemos decir que exista dicho límite.

(f) Para resolver el siguiente límite, usamos la fórmula:

$$\text{si }\lim_{x\to a}f(x)=1,\ \lim_{x\to a}g(x)=\infty,\text{ entonces }\lim_{x\to a}f(x)^{g(x)}=\lim_{x\to a}e^{g(x)(f(x)-1)}$$

En ese caso,

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{\operatorname{sen} x}{x}\right)^{1/x}=\text{“}1^{\infty}\text{” (indet.)}=\lim_{x\to 0}e^{\frac{1}{x}\left[\frac{\operatorname{sen} x}{x}-1\right]}=\lim_{x\to 0}e^{\frac{\operatorname{sen} x-x}{x^2}}.$$

Calculamos primero el siguiente límite:

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen} x - x}{x^2} &= \frac{\text{“}0\text{”}}{0}\text{ (indet.)} = \text{(L‘Hôpital) }\lim_{x\to 0}\frac{\cos x - 1}{2x} = \frac{\text{“}0\text{”}}{0}\text{ (indet.)}\\ &= \text{(L‘Hôpital) }\lim_{x\to 0}\frac{-\operatorname{sen} x}{2} = 0.\end{aligned}$$

Por tanto,

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{\operatorname{sen} x}{x}\right)^{1/x} = \lim_{x\to 0} e^{\frac{\operatorname{sen} x - x}{x^2}} = e^0 = 1.$$

(g)

$$\lim_{x\to+\infty} x^a \ln x = \text{“}(+\infty)^a\cdot\ln(+\infty)\text{”} = \text{“}+\infty\cdot(+\infty)\text{”} = +\infty.$$

(h) Para calcular el siguiente límite hacemos una reescritura de la función que nos permite aplicar la Regla de ‘L’Hôpital:

$$\begin{aligned}\lim_{x\to+\infty} x^2\, e^{-x} &= \text{“}(+\infty)\cdot 0\text{” (indet.)} = \lim_{x\to+\infty}\frac{x^2}{e^x} = \text{“}\frac{+\infty}{+\infty}\text{” (indet.)}\\ &= \text{(L’Hôpital) }\lim_{x\to+\infty}\frac{2x}{e^x} = \text{“}\frac{+\infty}{+\infty}\text{” (indet.)} = \text{(L’Hôpital) }\lim_{x\to+\infty}\frac{2}{e^x} = 0.\end{aligned}$$

(i) Para resolver el siguiente límite, usamos la fórmula:

$$\text{si }\lim_{x\to a} f(x) = 1,\ \lim_{x\to a} g(x) = \infty,\text{ entonces }\lim_{x\to a} f(x)^{g(x)} = \lim_{x\to a} e^{g(x)(f(x)-1)}$$

En ese caso,

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{2^x+3^x}{2}\right)^{1/x} = \text{“}1^\infty\text{” (indet.)} = \lim_{x\to 0} e^{\frac{1}{x}\left[\frac{2^x+3^x}{2}-1\right]} = \lim_{x\to 0} e^{\frac{2^x+3^x-2}{2x}}.$$

Calculamos primero el siguiente límite:

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\frac{2^x+3^x-2}{2x} &= \frac{\text{“}0\text{”}}{0}\text{ (indet.)} = \text{(L’Hôpital) }\lim_{x\to 0}\frac{2^x\ \ln 2 + 3^x\ \ln 3}{2} =\\ &= \frac{\ln 2 + \ln 3}{2} = \frac{\ln 6}{2} = \ln(\sqrt{6}).\end{aligned}$$

Por tanto,

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{2^x+3^x}{2}\right)^{1/x} = \lim_{x\to 0} e^{\frac{2^x+3^x-2}{2x}} = e^{\ln(\sqrt{6})} = \sqrt{6}.$$

(j)

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x^2} = \text{“}\frac{+\infty}{+\infty}\text{” (indet.)} = \text{(L’Hôpital) }\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{1}{x}}{2x} = \lim_{x\to+\infty}\frac{1}{2x^2} = 0.$$

(k)

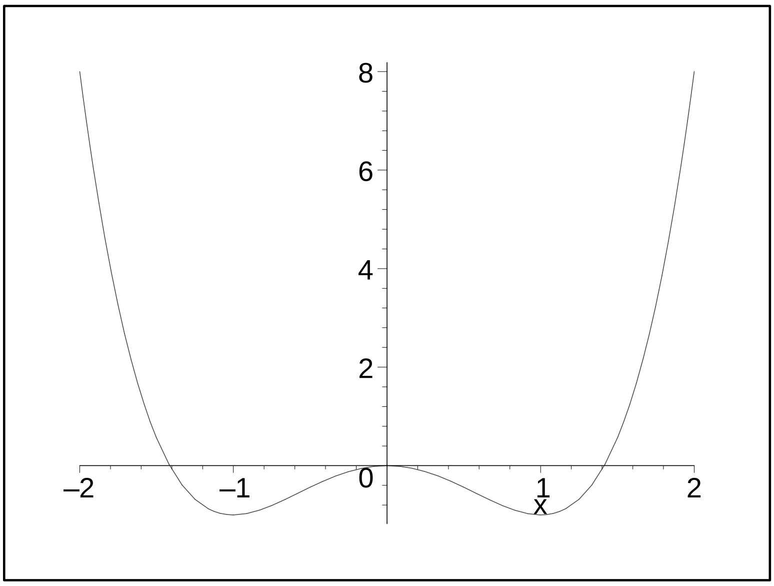
$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{\operatorname{sen} x}\right) &= \text{“}(+\infty-\infty)\text{”}\,(\text{indet.}) = \lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen} x - x}{x\,\operatorname{sen} x} = \frac{\text{“}0\text{”}}{0}\,(\text{indet.})\\ &= (\text{L'Hôpital})\ \lim_{x\to 0}\frac{\cos x - 1}{\operatorname{sen} x + x\,\cos x} = \frac{\text{“}0\text{”}}{0}\,(\text{indet.})\\ &= (\text{L'Hôpital})\ \lim_{x\to 0}\frac{-\operatorname{sen} x}{2\cos x - x\,\operatorname{sen} x} = \frac{0}{2} = 0.\end{aligned}$$

(l)

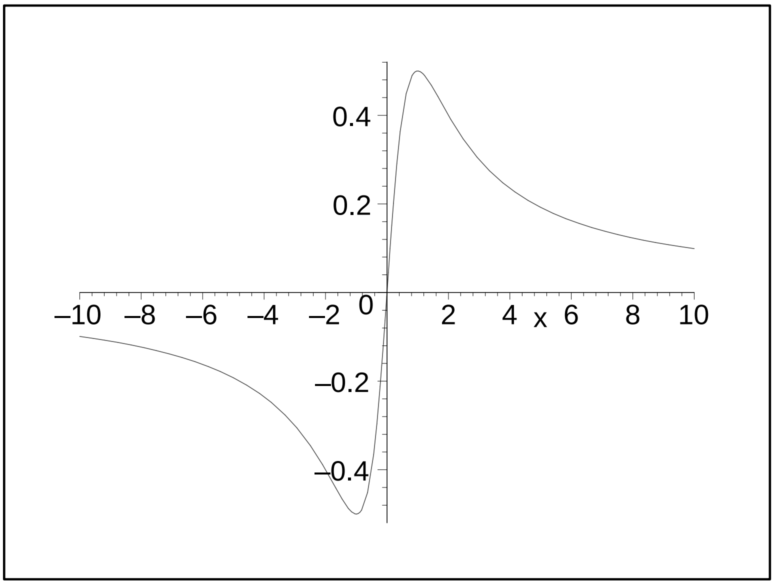
$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{\ln(1+x)}\right) &= \text{“}(+\infty-\infty)\text{”}\,(\text{indet.}) = \lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)-x}{x\,\ln(1+x)} = \frac{\text{“}0\text{”}}{0}\,(\text{indet.})\\ &= (\text{L'Hôpital})\ \lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{x+1}-1}{\ln(1+x)+\frac{x}{x+1}} = \lim_{x\to 0}\frac{-x}{(1+x)\,\ln(1+x)+x}\\ &= \frac{\text{“}0\text{”}}{0}\,(\text{indet.})\ \lim_{x\to 0}\frac{-1}{\ln(1+x)+2} = \frac{-1}{2}.\end{aligned}$$

$\boxed{10.}$ Cada uno de los apartados de este ejercicio requiere un estudio detallado. A modo de indicación, y dado que en el siguiente ejercicio se pide básicamente lo mismo, se incluyen simplemente sus representaciones gráficas:

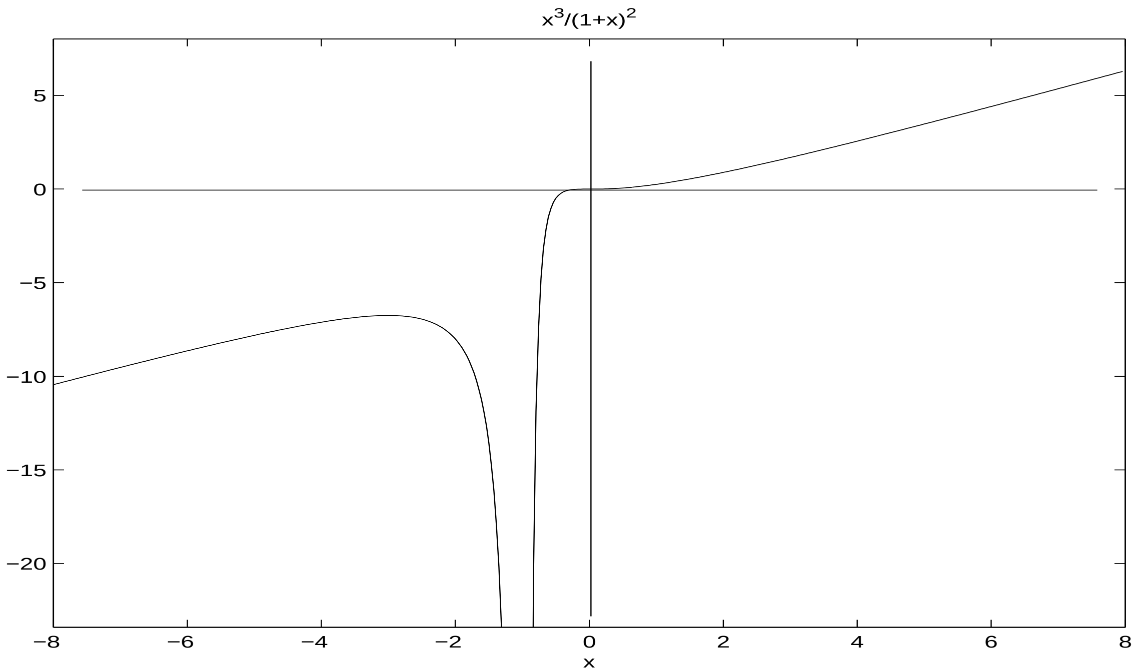
(a) La siguiente gráfica corresponde a la función $y = x^4 - 2x^2$ en el intervalo $[-2, 2]$:



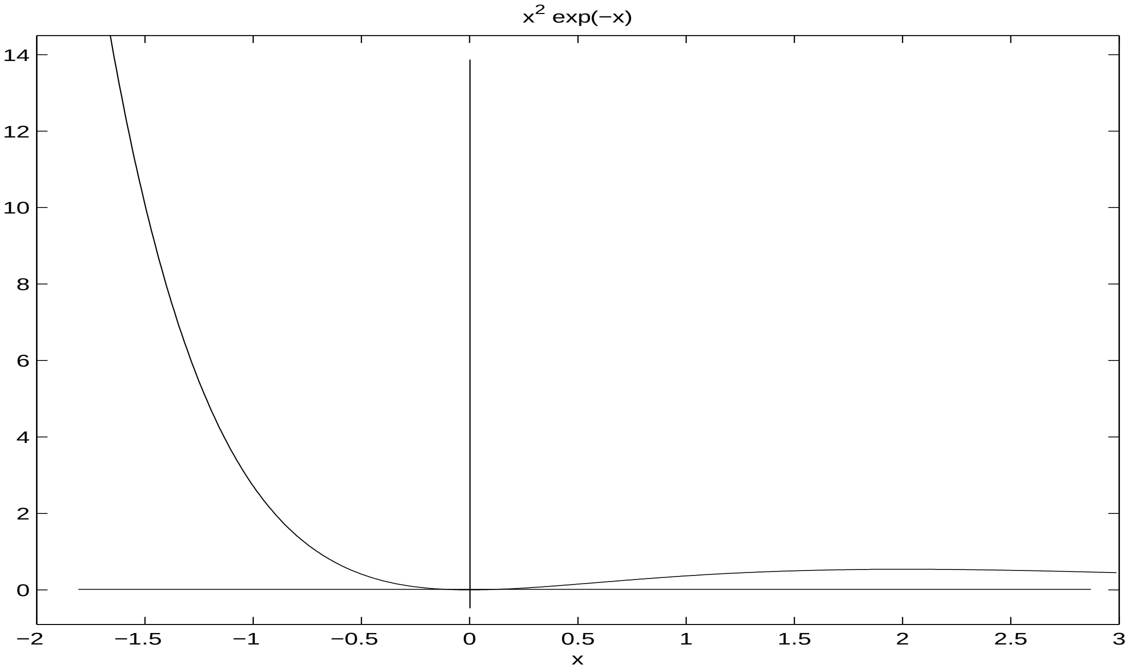
(b) La siguiente gráfica corresponde a la función $y = \dfrac{x}{1+x^2}$ en el intervalo $[-10, 10]$:



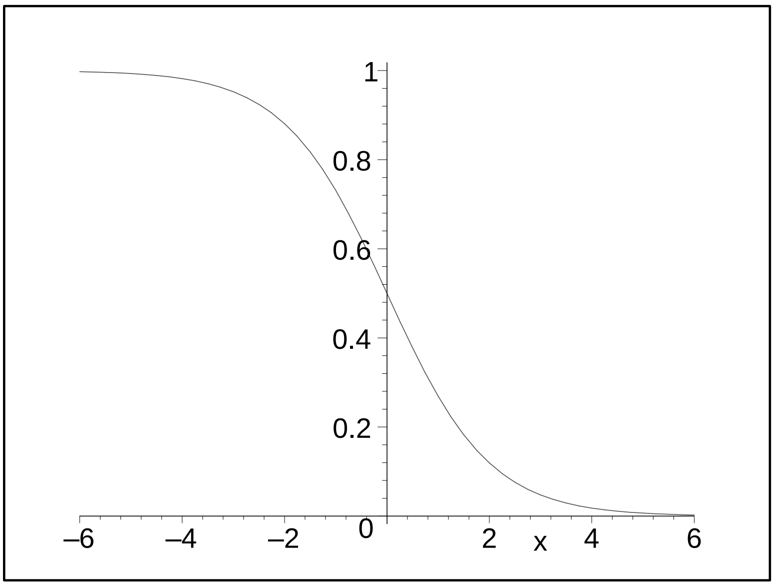
(c) La siguiente gráfica corresponde a la función $y = \dfrac{x^3}{(1+x)^2}$ en el intervalo $[-6, 6]$ (observemos que la función no está definida en $x = -1$):



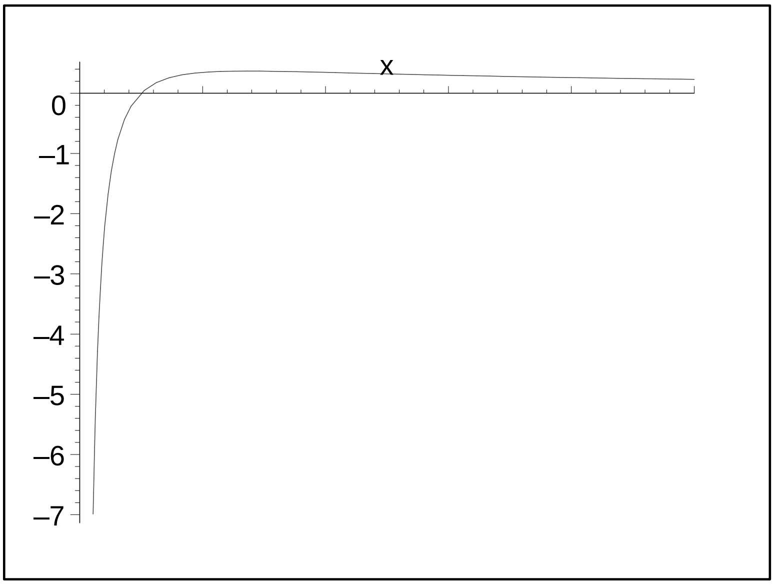
(d) La siguiente gráfica corresponde a la función $y = x^2\, e^{-x}$ en el intervalo $[-2, 3]$:



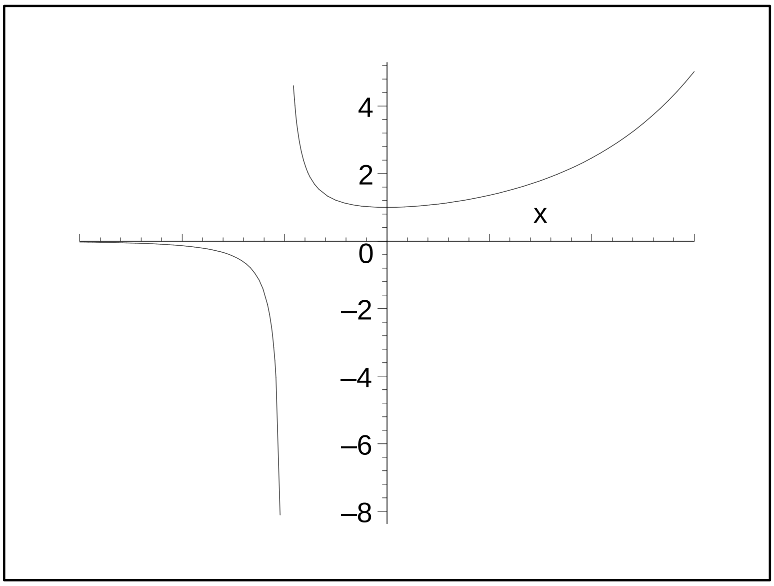
(e) La siguiente gráfica corresponde a la función $y = \dfrac{1}{1+e^x}$ en el intervalo $[-6, 6]$:



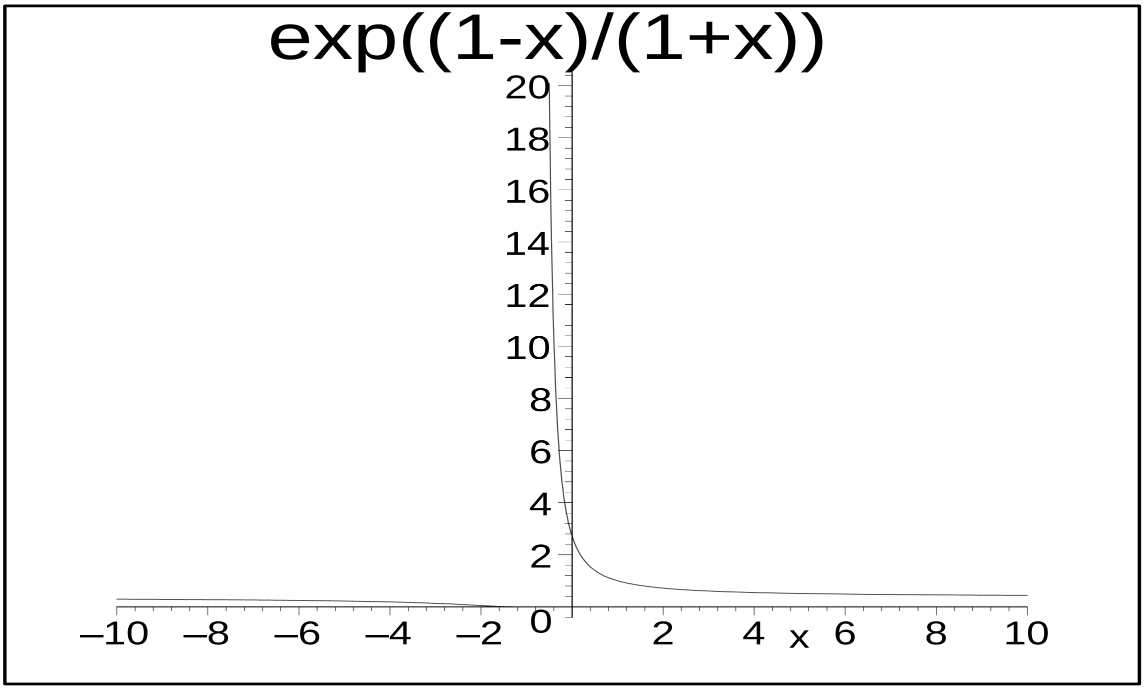
(f) La siguiente gráfica corresponde a la función $y = \dfrac{\ln(x)}{x}$ en el intervalo $(0, 10]$:



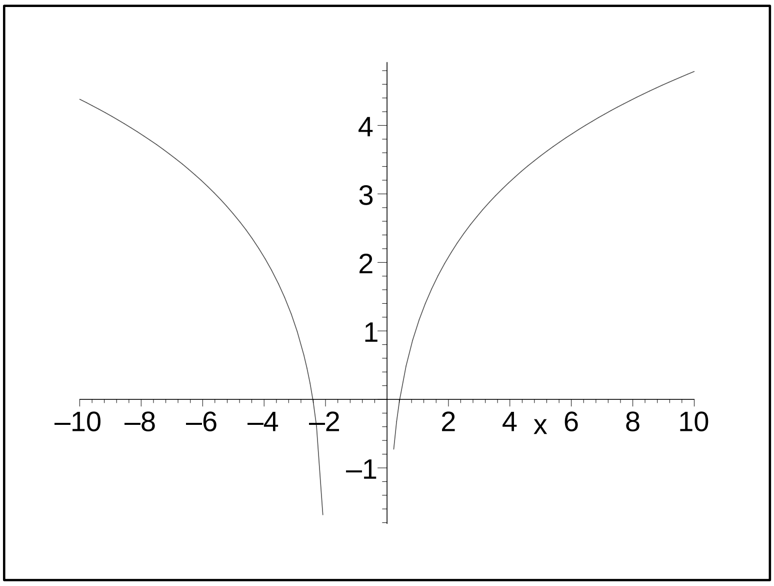
(g) La siguiente gráfica corresponde a la función $y = \dfrac{e^x}{1+x}$ en el intervalo $[-3, 3]$ (observemos que la función no está definida en $x = -1$):



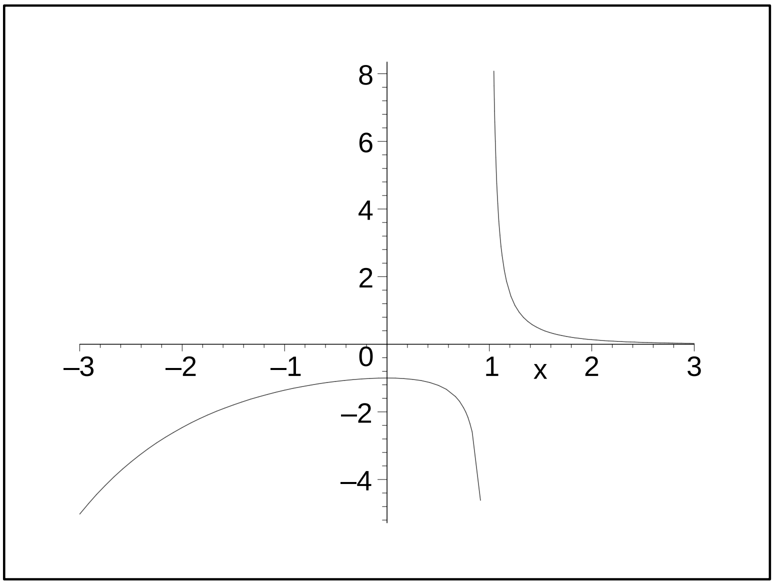
(h) La siguiente gráfica corresponde a la función $y = e^{\frac{1-x}{1+x}}$ en el intervalo $[-10, 10]$ (observemos que la función no está definida en $x = -1$):



(i) La siguiente gráfica corresponde a la función $y = \ln(x^2 + 2x)$ en el intervalo $[-10, 10]$ (observemos que la función no está definida en $[-2, 0]$):



(j) La siguiente gráfica corresponde a la función $y = \dfrac{e^{-x}}{x-1}$ en el intervalo $[-3, 3]$ (observemos que la función no está definida en $x = 1$):



$\boxed{11.}$ Según los datos, estudiamos la función $R(x) = 2\,(9-x)\,(7-x)$, que sólo tiene sentido para $x \in [0,7]$ (ya que una concentración debe ser positiva y la velocidad de reacción positiva).

(a) Para estudiar la monotonía de la función calculamos su derivada que es $R'(x) = 4\,(x-8)$. Observemos que dicha función se anula en $x = 8$ y que $R'(x) < 0$ para $x \in [0,7]$. Por tanto, la función es estrictamente decreciente en $x \in [0,7]$.

(b) Observemos que se trata de una función continua definida en $[0,7]$. Estamos entonces ante un problema de calculo de extremos absolutos de una función, para una función continua en un intervalo cerrado y acotado. Por tanto, para calcular los extremos absolutos de la función tenemos que estudiar los valores de dicha función en los posibles candidatos:

- extremos: $x = 0$, $x = 7$, y sus valores son $R(0) = 126$, $R(7) = 0$,
- puntos en $(0,7)$ donde $R'(x) = 0$: en este caso no hay.
- puntos donde la función no es derivable: en este caso no hay.

Máximo de $R : 126$, alcanzado en $x = 0$. Mínimo de $R : 0$, y se alcanza en $x = 7$.

Otra forma de resolver el problema es estudiando su gráfica. Observamos que:

$$R'(x) = 4\,(x-8), \quad R'(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = 8.$$

Luego R es decreciente (estrictamente) en $(0,7)$, ya este es su dominio de definición en este caso. Como $R(0) = 126$ y $R(7) = 0$, deducimos que la función alcanza un máximo absoluto en $x = 0$ y un mínimo absoluto en $x = 7$.

12. Según los datos del enunciado estudiamos la función $R(x) = \dfrac{5x}{1+x}$.

(a) Tenemos que resolver la ecuación $R(x) = 4$, es decir:

$$\frac{5x}{1+x} = 4 \quad \Leftrightarrow \quad x = 4,$$

luego la velocidad de crecimiento vale 4 cuando la concentración del nutriente es $x = 4$.

(b) Para estudiar la monotonía de la función calculamos la derivada de $R(x)$:

$$R'(x) = \frac{5}{(1+x)^2} > 0,$$

luego la función es estrictamente creciente allí donde esté definida. Aunque $D(R) = \mathbb{R}\backslash\{-1\}$, como la variable x mide la concentración de un nutriente, sólo tiene sentido en $[0, +\infty)$. Por tanto, la función es estrictamente creciente en $[0, +\infty)$, y nunca es decreciente.

(c) Para ello, estudiamos el límite de $R(x)$ cuando $x \to +\infty$:

$$\lim_{x \to +\infty} R(x) = 5.$$

Esto significa que la velocidad de crecimiento crece hacia el valor 5, pero nunca se alcanza aunque tiende asintóticamente a dicho valor.

13.

(a) Para estudiar la monotonía de la función calculamos la derivada de $L(t)$:

$$L'(t) = l\, e^{-t} > 0,$$

que es siempre creciente, es decir, es estrictamente creciente en $[0, +\infty)$ que es el dominio considerado. No es decreciente en ningún conjunto.

(b) Para calcular a qué tiende la longitud cuando $t \to +\infty$, calculamos:

$$\lim_{t \to +\infty} l\,(1 - e^{-t}) = l.$$

Por tanto, l es la cota superior de la longitud que pueden alcanzar los peces en toda su vida. Como $L(t)$ es una función estrictamente creciente, dicha cota nunca puede alcanzarse, pero la longitud tiende asintóticamente a ella.

$\boxed{14.}$ Según los datos del enunciado estudiamos la función $W(t) = 2\,e^{-0{,}01t}$:

(a) Para comprobar que la función es decreciente calculamos la derivada de $W(t)$:

$$W'(t) = -0{,}02\,e^{-0{,}01t} < 0,$$

luego es estrictamente decreciente en $[0, +\infty)$, que es el dominio considerado.

(b) Para saber qué le pasa a la cantidad de C^{14} cuando pasa mucho tiempo calculamos:

$$\lim_{t\to+\infty} W(t) = 0,$$

es decir, esa cantidad es cada vez más pequeña y tiende a desaparecer, pero no se hace cero en tiempo finito.

(c) Para calcular en qué momento $W = 1$, tenemos que resolver:

$$2\,e^{-0{,}01t} = 1 \quad \Leftrightarrow \quad e^{-0{,}01t} = \frac{1}{2} \quad \Leftrightarrow \quad -0{,}01t = \ln\left(\frac{1}{2}\right) \quad \Leftrightarrow \quad t = 100\,\ln(2) = 69{,}31471806$$

$\boxed{15.}$

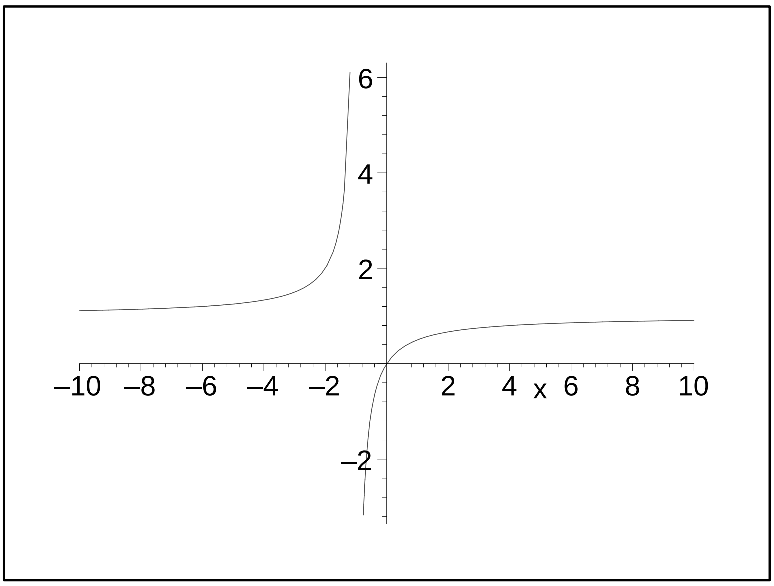
(a) Para estudiar la monotonía de la función calculamos la derivada de $f(x)$:

$$f'(x) = \frac{1}{(1+x)^2} > 0,$$

luego f es una función estrictamente creciente en todo su dominio $D(f) = \mathbb{R}\backslash\{-1\} = (-\infty, -1) \cup (-1, +\infty)$. Observemos que:

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = 1, \quad \lim_{x\to-1^-} f(x) = +\infty, \quad \lim_{x\to-1^+} f(x) = -\infty, \quad \lim_{x\to+\infty} f(x) = 1,$$

y que su gráfica viene dada por la función:



Se trata de una función estrictamente creciente definida en un dominio no acotado, luego no posee extremos absolutos ni relativos.

(b) Para calcular los puntos en los que la función es cóncava o convexa, calculamos $f''(x)$:

$$f''(x) = \frac{-2}{(1+x)^3}.$$

Observemos que $f''(x) > 0$ en $(-\infty, -1)$ y $f''(x) < 0$ en $(-1, +\infty)$. No existe ningún punto que anule $f''(x)$, luego no hay puntos de inflexión.

(c)

$$\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = 1,$$

eso significa que la función posee una asíntota horizontal en la recta $y = 1$.

$\boxed{16.}$ Para $a, k > 0$ la función f tiene como dominio $D(f) = \mathbb{R}$. Sin embargo, sólo estudiaremos lo que pasa en $[0, +\infty)$, ya que x representa a una densidad, que es una magnitud positiva. Para calcular en qué puntos es máxima dicha función debemos tener una idea de su gráfica. Observemos que:

$$f'(x) = \frac{a\,(k - x^2)}{(k + x^2)^2}.$$

Por tanto, f es creciente (estrictamente) en $(0, \sqrt{k})$ y decreciente (estrictamente) en $(\sqrt{k}, +\infty)$, luego f posee un máximo local en $x = \sqrt{k}$ que es $f(\sqrt{k}) = \dfrac{a}{2\sqrt{k}}$. Notemos también,

$$f(0) = 0 \quad \text{y} \quad \lim_{x \to +\infty} f(x) = 0,$$

con lo que podemos deducir que dicho máximo es absoluto. Por tanto, la cantidad de gusanos para la que la velocidad de depredación es máxima es $x = \sqrt{k}$.

$\boxed{17.}$ La función f tiene como dominio $D(f) = \mathbb{R}$. Sin embargo, sólo estudiaremos lo que pasa en $[0, +\infty)$, ya que N representa el nivel de nitrógeno, que es una magnitud positiva. Para calcular en qué puntos es máxima dicha función debemos tener una idea de su gráfica. Observemos que:

$$f'(N) = \frac{1 - N^2}{(1 + N^2)^2}.$$

Por tanto, f es creciente (estrictamente) en $(0, 1)$ y decreciente (estrictamente) en $(1, +\infty)$, luego f posee un máximo local en $x = 1$ que es $f(1) = \dfrac{1}{2}$. Notemos también,

$$f(0) = 0 \quad \text{y} \quad \lim_{N \to +\infty} f(N) = 0,$$

con lo que podemos deducir que dicho máximo es absoluto. Por tanto, el nivel de nitrógeno del suelo que maximiza la cosecha es $N = 1$.

$\boxed{18.}$ Si el polinomio $p(x) = x^2 + ax + b$ posee un mínimo en $x = 2$ significa que $p'(2) = 0$ y $p''(2) > 0$. Si su valor en $x = 2$ es -1, significa que $p(2) = -1$. Por tanto:

$$p'(x) = 2x + a, \quad p'(2) = 4 + a = 0, \quad \Rightarrow a = -4.$$

Se trata de un mínimo ya que $p''(x) = 2 > 0$, luego $p''(2) = 2 > 0$. Además,

$$p(2) = -1 \quad \Rightarrow \quad 4 + 2a + b = -1 \quad \Rightarrow \quad b = -5 - 2a = 3.$$

De ese modo, el polinomio que buscamos es $p(x) = x^2 - 4x + 3$.

$\boxed{19.}$

(a) El campo abierto sólo requiere 3 lados de cerca, ya que el lado del rectángulo que falta tiene como frontera el río. Al tratarse de un rectángulo, habrá 2 lados de longitud x y un lado de longitud y. Por tanto, el perímetro viene dado por $2x + y$ y según el enunciado debe ser igual a 80, es decir, $2x + y = 80$. Por otra parte, el área de dicha figura (que es un rectángulo) viene dada por $A = x \cdot y$. Si queremos deducir la expresión del área A en función de x, hacemos lo siguiente:

$$\left.\begin{array}{l} A = x \cdot y \\ 2x + y = 80 \end{array}\right\} \quad \Rightarrow \quad A(x) = x\,(80 - 2x) = 80x - 2x^2.$$

Observemos que se trata de una función continua definida en $[0, 40]$, pues fuera de dicho intervalo la función $A(x)$ toma valores negativos (y eso no tiene sentido).

Estamos entonces ante un problema de calculo de extremos absolutos de una función, para una función continua en un intervalo cerrado y acotado. Por tanto, para calcular los extremos absolutos de la función tenemos que estudiar los valores de dicha función en los posibles candidatos:

- extremos: $x = 0$, $x = 40$, y sus valores son $A(0) = 0$, $A(40) = 0$,
- puntos en $(0, 40)$ donde $A'(x) = 0$: $x = 20$, y su valor es $A(20) = 800$,
- puntos donde la función no es derivable: en este caso no hay.

Máximo de $A : 800$, alcanzado en $x = 20$. Mínimo de $A : 0$, y se alcanza en $x = 0$, $x = 40$.

Otra forma de resolver el problema es estudiando su gráfica. Observamos que:

$$A'(x) = 80 - 4x, \quad A'(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = 20.$$

Luego A es creciente (estrictamente) en $(0, 20)$ y decreciente (estrictamente) en $(20, 40)$. Por tanto, la función $A(x)$ alcanza un máximo local en $x = 20$, que es $A(20) = 800$. Como $A(0) = 0$ y $A(40) = 0$, deducimos que dicho máximo es global.

En definitiva, debe haber 2 lados de 20m. y un lado de 40 m. para que el área encerrada por la cerca sea la máxima posible.

(b) En este caso, los datos del problema nos llevan a la conclusión siguiente, donde P es el perímetro de la superficie que se desea vallar:

$$\left.\begin{array}{l} x \cdot y = 18 \\ P = 2x + y \end{array}\right\} \quad \Rightarrow \quad P(x) = 2x + \frac{18}{x}.$$

Observemos que se trata de una función continua definida en $(0, +\infty)$, pues fuera de dicho intervalo la función $P(x)$ toma valores negativos (y eso no tiene sentido).

Estamos entonces ante un problema de calculo de extremos absolutos de una función, para una función continua en un intervalo semiabierto y no acotado. Por tanto, para calcular los extremos absolutos de la función sólo podemos usar el segundo razonamiento del apartado anterior. Observemos que:

$$P'(x) = 2 - \frac{18}{x^2}, \quad P'(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = 3.$$

La función $P(x)$ es decreciente en $(0,3)$ y creciente en $(3,+\infty)$, por tanto posee un mínimo local en $x = 3$ que vale $P(3) = 12$. Como además $\lim_{x\to 0^+} P(x) = +\infty$ y $\lim_{x\to+\infty} P(x) = +\infty$, podemos deducir que dicho mínimo es global.

En definitiva, debe haber 2 lados de 3m. y un lado de 6 m. para que se requiera la mínima cantidad de valla.

$\boxed{20.}$ Si cortamos el alambre en 2, obtenemos un trozo de longitud x y otro de longitud y, tales que $x + y = 4$. El perímetro de una circunferencia viene dado por $2\,\pi\,r$, siendo r su radio, y el perímetro de un cuadrado viene dado por $4l$, siendo l su lado. Si con el trozo de longitud x hacemos una circunferencia y con el trozo de longitud y hacemos un cuadrado, obtenemos que:

$$\{2\,\pi\,r = x, \quad 4l = y\} \quad \Rightarrow \quad \{r = \frac{x}{2\pi}, \quad l = \frac{y}{4}\}.$$

El área de un círculo viene dado por $A_1 = \pi\,r^2$, y el de un cuadrado por $A_2 = l^2$, es decir:

$$A_1 = A_1(x) = \pi\left(\frac{x}{2\pi}\right)^2 = \frac{x^2}{4\pi}, \quad A_2 = A_2(y) = \left(\frac{y}{4}\right)^2 = \frac{y^2}{16}$$

Observemos que el área del cuadrado en función de x viene dado por la expresión $A_2 = A_2(x) = \dfrac{(4-x)^2}{16}$.

Queremos maximizar y minimizar el área de la suma, es decir:

$$A(x) = \frac{x^2}{4\pi} + \frac{(4-x)^2}{16}, \qquad x \in [0,4].$$

Observemos que se trata de una función continua definida en $[0,4]$. Estamos entonces ante un problema de calculo de extremos absolutos de una función, para una función continua en un intervalo cerrado y acotado. Por tanto, para calcular los extremos absolutos de la función tenemos que estudiar los valores de dicha función en los posibles candidatos:

- extremos: $x = 0$, $x = 4$, y sus valores son $A(0) = 1$, $A(4) = \dfrac{4}{\pi}$,
- puntos en $(0,4)$ donde $A'(x) = 0$. Como $A'(x) = \dfrac{x}{2\pi} - \dfrac{4-x}{8}$, la derivada de A se anula en $x = \dfrac{4\pi}{4+\pi}$, y su valor es $A\left(\dfrac{4\pi}{4+\pi}\right) = \dfrac{4}{4+\pi}$,
- puntos donde la función no es derivable: en este caso no hay.

Máximo de A : $\dfrac{4}{\pi}$, alcanzado en $x = 4$. Mínimo de A : $\dfrac{4}{4+\pi}$, y se alcanza en $x = \dfrac{4\pi}{4+\pi}$.

Otra forma de resolver el problema es estudiando su gráfica. Observamos que:

$$A'(x) = \frac{x}{2\pi} - \frac{4-x}{8}, \quad A'(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = \frac{4\pi}{4+\pi}.$$

Luego A es decreciente (estrictamente) en $(0, \dfrac{4\pi}{4+\pi})$ y creciente (estrictamente) en $(\dfrac{4\pi}{4+\pi}, 4)$. Por tanto, la función $A(x)$ alcanza un mínimo local en $x = \dfrac{4\pi}{4+\pi}$, que es $A\left(\dfrac{4\pi}{4+\pi}\right) = \dfrac{4}{4+\pi}$. Como $A(0) = 1$ y $A(4) = \dfrac{4}{\pi}$, deducimos que dicho mínimo es global. Además, de la monotonía de la función deducimos que la función alcanza un máximo (global) en $x = 4$, que es $\dfrac{4}{\pi}$.

En definitiva, si queremos que la suma de las áreas de las dos figuras sea máxima, las longitudes de los trozos en los que tenemos que dividir $L = 4$ son $\{x = 4, y = 0\}$. Si por el contrario, queremos que el área sea mínima, las longitudes deben ser $\left\{x = \dfrac{4\pi}{4+\pi}, y = \dfrac{16}{4+\pi}\right\}$.

$\boxed{21.}$ El área de un rectángulo de lados x, y viene dado por la expresión $A = x \cdot y$. Si dicho rectángulo está inscrito en una circunferencia de radio $r = 4$ significa que la diagonal del rectángulo tiene longitud $2r = 8$. Usando el Teorema de Pitágoras, eso significa que:

$$x^2 + y^2 = 8^2 \quad \Rightarrow \quad y = \sqrt{64 - x^2}, \qquad x \in [0, 8].$$

Por tanto, la expresión del área del rectángulo en función de x es:

$$A(x) = x\,\sqrt{64 - x^2}, \quad x \in [0, 8].$$

Observemos que se trata de una función continua definida en $[0, 8]$. Estamos entonces ante un problema de calculo de extremos absolutos de una función, para una función continua en un intervalo cerrado y acotado. Por tanto, para calcular los extremos absolutos de la función tenemos que estudiar los valores de dicha función en los posibles candidatos:

- extremos: $x = 0$, $x = 8$, y sus valores son $A(0) = 0$, $A(8) = 0$,
- puntos en $(0, 8)$ donde $A'(x) = 0$. Como $A'(x) = \dfrac{2\,(32 - x^2)}{\sqrt{64 - x^2}}$, la derivada de A se anula en $x = 4\sqrt{2}$, y su valor es $A(4\sqrt{2}) = 32$,
- puntos donde la función no es derivable: en este caso no hay.

Máximo de $A : 32$, alcanzado en $x = 4\sqrt{2}$. Mínimo de $A : 0$, y se alcanza en $x = 0$, $x = 8$.

Otra forma de resolver el problema es estudiando su gráfica. Observamos que:

$$A'(x) = \frac{2\,(32 - x^2)}{\sqrt{64 - x^2}}, \quad A'(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = 4\sqrt{2}.$$

Luego A es creciente (estrictamente) en $(0, 4\sqrt{2})$ y decreciente (estrictamente) en $(4\sqrt{2}, 8)$. Por tanto, la función $A(x)$ alcanza un máximo local en $x = 4\sqrt{2}$, que es $A(4\sqrt{2}) = 32$. Como $A(0) = 0$ y $A(8) = 0$, deducimos que dicho máximo es global. Además, de la monotonía de la función deducimos que la función alcanza un mínimo (global) en $x = 0$, $x = 8$, que es 0.

En definitiva, el área del rectángulo inscrito en una circunferencia de radio $r = 4$ será máxima si sus lados son $\{x = 4\sqrt{2}, y = 4\sqrt{2}\}$, es decir, si es un cuadrado de lado $l = 4\sqrt{2}$.

$\boxed{22.}$ Si llamamos x a la base del rectángulo e y a su altura, el área del rectángulo viene dado por $A_1 = x \cdot y$. El semicírculo de diámetro igual a la base del rectángulo tiene por área $A_2 = \frac{\pi}{2}\left(\frac{x}{2}\right)^2 = \frac{\pi x^2}{8}$. Si el semicírculo está dispuesto encima del rectángulo para diseñar la ventana, su perímetro viene dado por $P = x + 2y + \frac{\pi x}{2}$. Como según el enunciado $P = 8$, tenemos que resolver el siguiente problema: Calcular el valor de x e y para que el área $A = A_1 + A_2$ sea máxima. Observemos que, usando que $x + 2y + \frac{\pi x}{2} = 8$ y que $x, y \geq 0$, obtenemos:

$$y = 4 - \frac{x}{2} - \frac{\pi x}{4} \quad \Rightarrow \quad A(x) = x \cdot \left(4 - \frac{x}{2} - \frac{\pi x}{4}\right) + \frac{\pi x^2}{8} = 4x - \frac{x^2}{2} - \frac{\pi x^2}{8}, \quad x \in \left[0, \frac{16}{2+\pi}\right].$$

Observemos que se trata de una función continua definida en $\left[0, \frac{16}{2+\pi}\right]$. Estamos entonces ante un problema de calculo de extremos absolutos de una función, para una función continua en un intervalo cerrado y acotado. Por tanto, para calcular los extremos absolutos de la función tenemos que estudiar los valores de dicha función en los posibles candidatos:

- extremos: $x = 0$, $x = \frac{16}{2+\pi}$, y sus valores son $A(0) = 0$, $A(\frac{16}{2+\pi}) = 0$,
- puntos en $\left(0, \frac{16}{2+\pi}\right)$ donde $A'(x) = 0$. Como $A'(x) = 4 - x - \frac{\pi x}{2}$, la derivada de A se anula en $x = \frac{16}{4+\pi}$, y su valor es $A\left(\frac{16}{4+\pi}\right) = \frac{32}{4+\pi}$,
- puntos donde la función no es derivable: en este caso no hay.

Máximo de $A : \frac{32}{4+\pi}$, alcanzado en $x = \frac{16}{4+\pi}$. Mínimo de $A : 0$, y se alcanza en $x = 0$, $x = \frac{16}{2+\pi}$.

Otra forma de resolver el problema es estudiando su gráfica. Observamos que:

$$A'(x) = 4 - x - \frac{\pi x}{2}, \quad A'(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = \frac{16}{4+\pi}.$$

Luego A es creciente (estrictamente) en $\left(0, \frac{16}{4+\pi}\right)$ y decreciente (estrictamente) en $\left(\frac{16}{4+\pi}, \frac{16}{2+\pi}\right)$. Por tanto, la función $A(x)$ alcanza un máximo local en $x = \frac{16}{4+\pi}$, que es $A\left(\frac{16}{4+\pi}\right) = \frac{32}{4+\pi}$. Como $A(0) = 0$ y $A\left(\frac{16}{2+\pi}\right) = 0$, deducimos que dicho máximo es global. Además, de la monotonía de la función deducimos que la función alcanza un mínimo (global) en $x = 0$, $x = \frac{16}{2+\pi}$, que es 0.

Por tanto, las dimensiones de la ventana para que el área sea máxima son $x = \frac{16}{4+\pi}$ e $y = \frac{8}{4+\pi}$.

$\boxed{23.}$ Si llamamos x al lado del cuadrado que se quiere cortar en cada esquina, las dimensiones de la caja sin tapa son: una base rectangular de lados $8 - 2x$, $5 - 2x$; 2 laterales de dimensiones $8 - 2x$, x; y 2 laterales de dimensiones $5 - 2x$, x. El volumen de la caja viene dado por:

$$V = \text{área base} \cdot \text{altura} = (8 - 2x)\,(5 - 2x)\,x.$$

Observemos que para que el volumen sea una magnitud positiva $x \in \left[0, \frac{5}{2}\right]$.

Observemos que se trata de una función continua definida en $\left[0, \frac{5}{2}\right]$. Estamos entonces ante un problema de calculo de extremos absolutos de una función, para una función continua en un intervalo cerrado y acotado. Por tanto, para calcular los extremos absolutos de la función tenemos que estudiar los valores de dicha función en los posibles candidatos:

- extremos: $x = 0$, $x = \frac{5}{2}$, y sus valores son $V(0) = 0$, $V\left(\frac{5}{2}\right) = 0$,
- puntos en $\left(0, \frac{5}{2}\right)$ donde $V'(x) = 0$. Como $V'(x) = 4(3x^2 - 13x + 10)$, la derivada de V se anula en $x = 1$, y su valor es $V(1) = 18$,
- puntos donde la función no es derivable: en este caso no hay.

Máximo de V : 18, alcanzado en $x = 1$. Mínimo de V : 0, y se alcanza en $x = 0$, $x = \frac{5}{2}$.

Otra forma de resolver el problema es estudiando su gráfica. Observamos que:

$$V'(x) = 4(3x^2 - 13x + 10), \quad V'(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = 1.$$

Luego V es creciente (estrictamente) en $(0, 1)$ y decreciente (estrictamente) en $\left(1, \frac{5}{2}\right)$. Por tanto, la función $V(x)$ alcanza un máximo local en $x = 1$, que es $V(1) = 18$. Como $V(0) = 0$ y $V\left(\frac{5}{2}\right) = 0$, deducimos que dicho máximo es global. Además, de la monotonía de la función deducimos que la función alcanza un mínimo (global) en $x = 0$, $x = \frac{5}{2}$, que es 0.

En definitiva, el volumen de la caja sin tapa será máximo si los cuadrados que se cortan en las esquinas tiene lado $l = 1$.

$\boxed{24.}$ La superficie de una lata cilíndrica viene dada por la suma del área de la base $A_1 = \pi x^2$, el área de la tapadera $A_2 = \pi x^2$ y el área del lateral $A_3 = 2\,\pi\,x\,y$ (si la altura es y).

Teniendo en cuenta que el volumen de la lata viene dado por $V = \pi\,x^2\,y$, y que es $V = 40$, deducimos que $y = \dfrac{40}{\pi x^2}$. Por tanto, el área A_3 en función de x es $A_3(x) = 2\,\pi\,x\left(\dfrac{40}{\pi x^2}\right) = \dfrac{80}{x}$.

La función coste de la lata viene dada por:

$$\begin{aligned} C(x) &= (\text{área fondo+área tapa}) \times \text{precio fondo/tapa} + \text{área lateral} \times \text{precio lateral} \\ &= 2\pi x^2 \times 2a + \frac{80}{x} \times a = \left(4\pi x^2 + \frac{80}{x}\right) a, \end{aligned}$$

siendo $a > 0$ el precio del lateral. Observemos que la función $C(x)$ está definida en $(0, +\infty)$.

Para resolver el problema estudiamos su gráfica. Observamos que:

$$C'(x) = \left(8\pi x - \frac{80}{x^2}\right) a, \quad C'(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = \left(\frac{10}{\pi}\right)^{1/3}.$$

Luego C es decreciente (estrictamente) en $\left(0, \left(\dfrac{10}{\pi}\right)^{1/3}\right)$ y creciente (estrictamente) en $\left(\left(\dfrac{10}{\pi}\right)^{1/3}, +\infty\right)$.

Por tanto, la función $C(x)$ alcanza un mínimo local en $x = \left(\dfrac{10}{\pi}\right)^{1/3}$, que es $C\left(\left(\dfrac{10}{\pi}\right)^{1/3}\right) = 12\,(100\pi)^{1/3}\,a$.

Como $\lim\limits_{x \to 0^+} C(x) = +\infty$ y $\lim\limits_{x \to +\infty} C(x) = +\infty$, deducimos que dicho mínimo es global.

En conclusión, para que la lata resulte más económica sus dimensiones deben ser $x = \left(\dfrac{10}{\pi}\right)^{1/3}$ e $y = 4\left(\dfrac{10}{\pi}\right)^{1/3}$.

$\boxed{25.}$ Haciendo el mismo razonamiento del ejercicio anterior, y teniendo en cuenta que, en este caso, $V = 48\pi$:

(a) Podemos deducir que la función que da el coste de la lata en función del radio x de la base viene dada por la expresión:

$$C(x) = 2\pi x^2 \times 3c + \frac{96\pi}{x} \times c = \left(6\pi x^2 + \frac{96\pi}{x}\right) c.$$

(b) Si $c = 1$, obtenemos que $C(x) = 6\pi x^2 + \frac{96\pi}{x}$. Como en el ejercicio anterior, para resolver el problema estudiamos su gráfica. Observamos que:

$$C'(x) = 12\pi x - \frac{96\pi}{x^2}, \quad C'(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = 2.$$

Luego C es decreciente (estrictamente) en $(0, 2)$ y creciente (estrictamente) en $(2, +\infty)$. Por tanto, la función $C(x)$ alcanza un mínimo local en $x = 2$, que es $C(2) = 72\,\pi$. Como $\lim_{x\to 0^+} C(x) = +\infty$ y $\lim_{x\to+\infty} C(x) = +\infty$, deducimos que dicho mínimo es global.

En conclusión, para que la lata resulte más económica sus dimensiones deben ser $x = 2$ y $y = 12$.