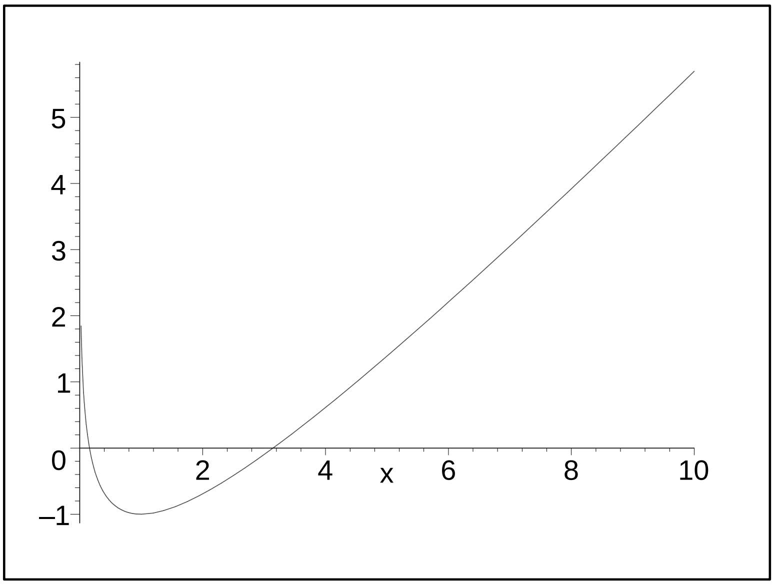
SOLUCIONES DE LOS EJERCICIOS DE LA HOJA 4

$\boxed{1}$

a) La función $f(x) = x - \ln x - 2$ está definida en el dominio $(0, +\infty)$. En dicho dominio f es continua, derivable y su derivada es $f'(x) = 1 - \dfrac{1}{x}$, luego es decreciente en $(0, 1)$ y creciente en $(1, +\infty)$. Entonces, f tiene un mínimo global en $x = 1$. Además, conocemos los siguientes datos:

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = +\infty, \qquad f(1) = -1, \qquad \lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty.$$

Por tanto, f posee exactamente dos raíces: una en $(0, 1)$ y otra en $(1, +\infty)$. La gráfica es de la forma:



Para aproximar las raíces, necesitamos encontrar intervalos en los que se verifiquen las hipótesis de la Regla de Fourier.

- Para la primera raíz consideramos el intervalo $[0'1, 0'5]$, donde f es dos veces continuamente diferenciable y:
  - $f(0'1) \cdot f(0'5) < 0$;
  - $f'(x) = 1 - \frac{1}{x} \neq 0 \ \forall x \in [0'1, 0'5]$;
  - $f''(x) = \dfrac{1}{x^2} > 0, \ \forall x \in [0'1, 0'5]$.

  Por tanto, como $f(0'1) > 0$ y $f(0'5) < 0$, elegimos como punto inicial $x_0 = 0'1$. Aplicando el método de Newton, obtenemos:

$$x_1 = 0'144731677$$
$$x_2 = 0'157864356$$
$$x_3 = 0'158592342$$
$$x_4 = 0'158592342$$

  Observemos que para conseguir tres cifras decimales exactas necesitamos calcular hasta x_4.

- Para la segunda raíz consideramos el intervalo $[e, e^2]$, donde f es dos veces continuamente diferenciable y:
    - $f(e) \cdot f(e) < 0$;
    - $f'(x) = 1 - \frac{1}{x} \neq 0 \ \forall x \in [e, e^2]$;
    - $f''(x) = \dfrac{1}{x^2} > 0, \ \forall x \in [e, e^2]$.

  Por tanto, como $f(e) < 0$ y $f(e^2) > 0$, elegimos como punto inicial $x_0 = e^2$. Aplicando el método de Newton, obtenemos:

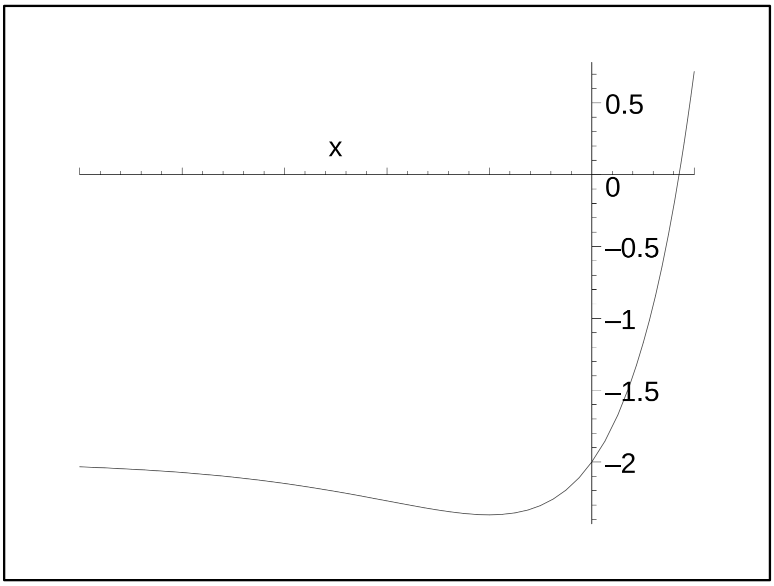
$$\begin{aligned} x_1 &= 3'469552928 \\ x_2 &= 3'152702666 \\ x_3 &= 3'146196347 \\ x_4 &= 3'146193221 \end{aligned}$$

  Observemos que para conseguir tres cifras decimales exactas necesitamos calcular hasta x_4.

b) La función $f(x) = xe^x - 2$ está definida en todo $\mathbb{R}$. En dicho dominio f es continua, derivable y su derivada es $f'(x) = (1+x)e^x$, luego es decreciente en $(-\infty, -1)$ y creciente en $(-1, +\infty)$. Entonces, f tiene un mínimo global en $x = 1$. Además, conocemos los siguientes datos:

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = 0, \qquad f(-1) = -1/e - 2 < 0, \qquad \lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty.$$

Por tanto, f posee exactamente 1 raíz. La gráfica es de la forma:



Para aproximar las raíces, necesitamos encontrar intervalos en los que se verifiquen las hipótesis de la Regla de Fourier. Consideramos el intervalo $[0, 1]$, donde f es dos veces continuamente diferenciable y:

- $f(0) \cdot f(1) < 0$;
- $f'(x) = (1 + x)e^x \neq 0 \ \forall x \in [0, 1]$;
- $f''(x) = (2 + x)e^x > 0, \ \forall x \in [0, 1]$.

Por tanto, como $f(0) = -2 < 0$ y $f(1) = e - 2 > 0$, elegimos como punto inicial $x_0 = 1$. Aplicando el método de Newton, obtenemos:

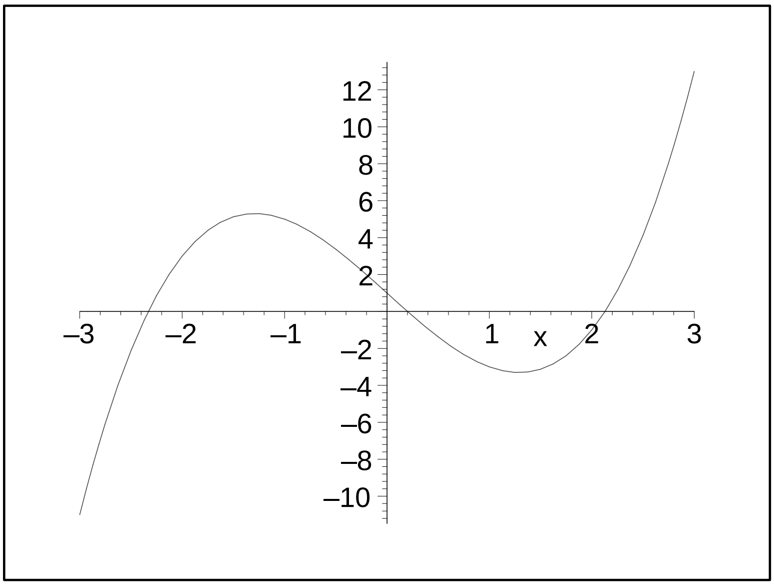
$$\begin{aligned} x_1 &= 0'867879441 \\ x_2 &= 0'852783373 \\ x_3 &= 0'852605526 \end{aligned}$$

Observemos que para conseguir tres cifras decimales exactas necesitamos calcular hasta x_3.

c) La función $f(x) = x^3 - 5x + 1$ está definida en todo $\mathbb{R}$. En dicho dominio f es continua, derivable y su derivada es $f'(x) = 3x^2 - 5$, luego es creciente en $(-\infty, -\sqrt{5/3}]$, decreciente en $[-\sqrt{5/3}, \sqrt{5/3}]$, y creciente de nuevo en $[\sqrt{5/3}, +\infty)$. Además, conocemos los siguientes datos:

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty, \quad f(-\sqrt{5/3}) \simeq 5'3, \quad f(\sqrt{5/3}) \simeq -3'3, \qquad \lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty.$$

Por tanto, f posee exactamente tres raíces: una en $(-\infty, -\sqrt{5/3})$, otra en $(-\sqrt{5/3}, \sqrt{5/3})$ y otra en $(\sqrt{5/3}, +\infty)$. La gráfica es de la forma:



Para aproximar las raíces, necesitamos encontrar intervalos en los que se verifiquen las hipótesis de la Regla de Fourier.

- Para la primera raíz consideramos el intervalo $[-3, -2]$, donde f es dos veces continuamente diferenciable y:
  - $f(-3) \cdot f(-2) < 0$;
  - $f'(x) = 3x^2 - 5 \neq 0 \ \forall x \in [-3, -2]$;
  - $f''(x) = 6x < 0, \ \forall x \in [-3, -2]$.

  Por tanto, como $f(-3) < 0$ y $f(-2) > 0$, elegimos como punto inicial $x_0 = -3$. Aplicando el método de Newton, obtenemos:

  $$\begin{aligned} x_1 &= -2'5 \\ x_2 &= -2,345454545 \\ x_3 &= -2,330203408 \\ x_4 &= -2,330058753 \end{aligned}$$

  Observemos que para conseguir tres cifras decimales exactas necesitamos calcular hasta x_4.

- Para la segunda raíz consideramos el intervalo $[0, 1]$, donde f es dos veces continuamente diferenciable y:
  - $f(0) \cdot f(1) < 0$;
  - $f'(x) = 3x^2 - 5 \neq 0 \ \forall x \in [0, 1]$;

- ◦ $f''(x) = 6x > 0$, $\forall x \in [0, 1]$.

Por tanto, como $f(0) = 1 > 0$ y $f(1) = -3 < 0$ pero $f''(0) = 0$,no podemos elegir $x_0 = 0$ como punto que garantice la convergencia del método de Newton. Por tanto, elijo un intervalo más pequeño, concretamente el $[0'1, 1]$. Se puede comprobar que hay que elegir $x_0 = 0'1$. Aplicando el método de Newton, obtenemos:

$$x_1 = 0'200804829$$
$$x_2 = 0'20163959$$
$$x_3 = 0'201639676$$

Observemos que para conseguir tres cifras decimales exactas necesitamos calcular hasta x_3.

- Para la tercera raíz consideramos el intervalo $[2, 3]$, donde f es dos veces continuamente diferenciable y:
  - ◦ $f(2) \cdot f(3) < 0$;
  - ◦ $f'(x) = 3x^2 - 5 \neq 0$ $\forall x \in [2, 3]$;
  - ◦ $f''(x) = 6x > 0$, $\forall x \in [2, 3]$.

  Por tanto, como $f(2) = -1 < 0$ y $f(3) = 13 > 0$, elegimos $x_0 = 3$. Aplicando el método de Newton, obtenemos:

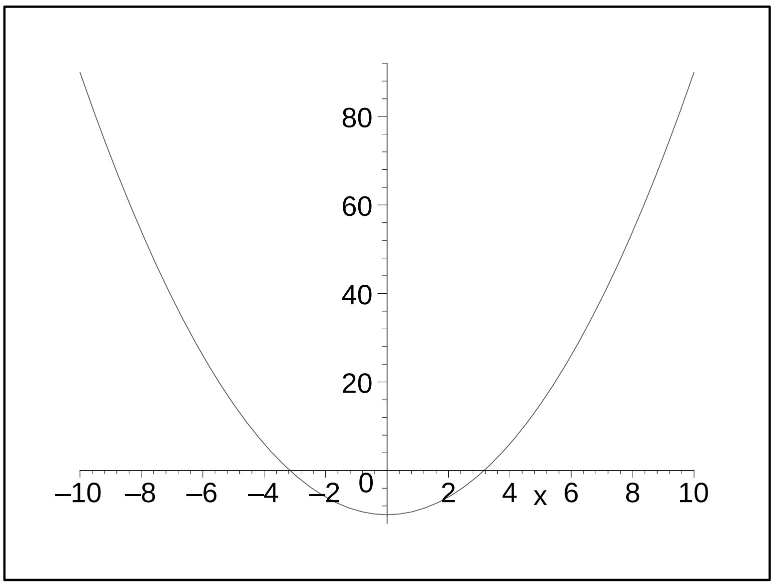
$$x_1 = 2'409090909$$
$$x_2 = 2'172510859$$
$$x_3 = 2'129793053$$
$$x_4 = 2'128420465$$
$$x_5 = 2'128419064$$

Observemos que para asegurar que se repiten las tres primeras cifras decimales, tenemos que calcular hasta x_5.

$\boxed{2.}$ El cálculo de la raíz cuadrada de 10 se "calcula"(pues realmente se aproxima) como la solución de $x^2 - 10 = 0$. Por tanto, estudiamos la función $f(x) = x^2 - 10$ que está definida en todo $\mathbb{R}$. En dicho dominio f es continua, derivable y su derivada es $f'(x) = 2x$, luego es decreciente en $(-\infty, 0)$ y creciente en $(0, +\infty)$. Además, conocemos los siguientes datos:

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty, \qquad f(0) = -10, \qquad \lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty.$$

Por tanto, f posee exactamente dos raíces: una en $(-\infty, 0)$ y otra en $(0, +\infty)$. La gráfica es de la forma:



Para aproximar las raíces, necesitamos encontrar intervalos en los que se verifiquen las hipótesis de la Regla de Fourier.

- Para la primera raíz consideramos el intervalo $[-4, -3]$, donde f es dos veces continuamente diferenciable y:
  - $f(-4) \cdot f(-3) < 0$;
  - $f'(x) = 2x \neq 0 \ \forall x \in [-4, -3]$;
  - $f''(x) = 2 > 0, \ \forall x \in [-4, -3]$.

  Por tanto, como $f(-4) = 6 > 0$ y $f(-3) = -1 < 0$, elegimos como punto inicial $x_0 = -4$. Aplicando el método de Newton, obtenemos:

$$
\begin{aligned}
x_1 &= -3'25 \\
x_2 &= -3'163461538 \\
x_3 &= -3'162277882 \\
x_4 &= -3'16227766
\end{aligned}
$$

  Observemos que para conseguir cinco cifras decimales exactas necesitamos calcular hasta x_4.

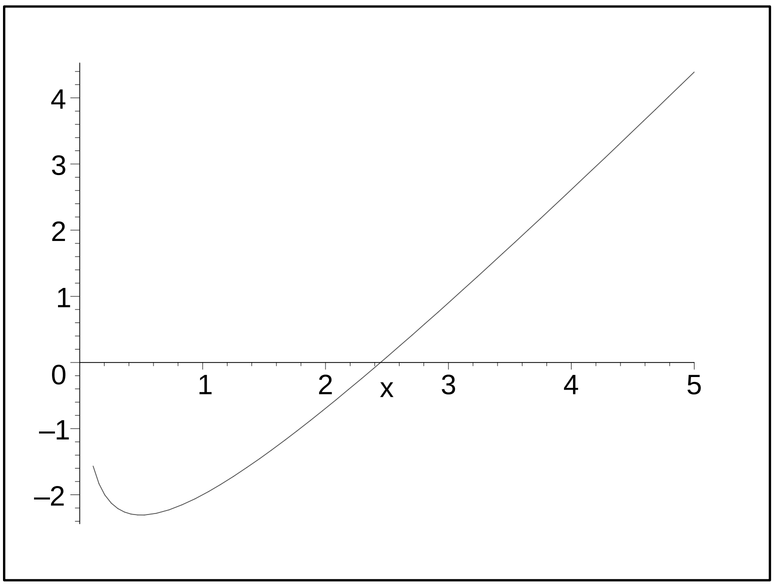
- Para la segunda raíz, podemos concluir por simetría.

$\boxed{3.}$

a) La función $f(x) = 2x - \ln x - 4$ está definida en el dominio $(0, +\infty)$. En dicho dominio f es continua, derivable y su derivada es $f'(x) = 2 - \dfrac{1}{x}$, luego es decreciente en $(0, 1/2)$ y creciente en $(1/2, +\infty)$. Además, conocemos los siguientes datos:

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = +\infty, \qquad f(1/2) = \ln 2 - 3 < 0, \qquad \lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty.$$

Por tanto, f posee exactamente dos raíces: una en $(0, 1/2)$ y otra en $(1/2, +\infty)$. La gráfica es de la forma:



b) Para aproximar las raíces, necesitamos encontrar intervalos en los que se verifiquen las hipótesis de la Regla de Fourier. Para la mayor de las raíces consideramos el intervalo $[2, 3]$, donde f es dos veces continuamente diferenciable y:

- $f(2) \cdot f(3) < 0$;
- $f'(x) = 2 - \frac{1}{x} \neq 0 \ \forall x \in [2, 3]$;
- $f''(x) = \dfrac{1}{x^2} > 0$, $\forall x \in [2, 3]$.

Por tanto, como $f(2) < 0$ y $f(3) > 0$, elegimos como punto inicial $x_0 = 3$. Aplicando el método de Newton, obtenemos:

$$x_1 = 2'459167373$$
$$x_2 = 2'447549195$$

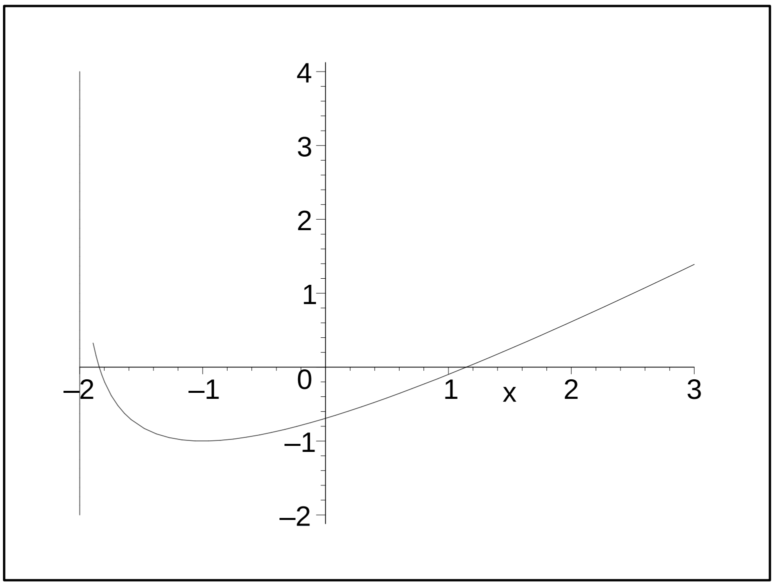
Observemos que sólo podemos asegurar una cifra decimal exacta.

$\boxed{4.}$

a) La función $f(x) = x - \ln(x + 2)$ está definida en el dominio $(-2, +\infty)$. En dicho dominio f es continua, derivable y su derivada es $f'(x) = 1 - \dfrac{1}{x+2}$, luego es decreciente en $(-2, -1)$ y creciente en $(-1, +\infty)$. Además, conocemos los siguientes datos:

$$\lim_{x \to -2^+} f(x) = +\infty, \qquad f(-1) = -1 < 0, \qquad \lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty.$$

Por tanto, f posee exactamente dos raíces: una en $(-2, -1)$ y otra en $(-1, +\infty)$. La gráfica es de la forma:



b) Para aproximar las raíces, necesitamos encontrar intervalos en los que se verifiquen las hipótesis de la Regla de Fourier. Para la mayor de las raíces consideramos el intervalo $[1, 2]$, donde f es dos veces continuamente diferenciable y:

- $f(1) \cdot f(2) < 0$;
- $f'(x) = 1 - \frac{1}{x+2} \neq 0 \ \forall x \in [1, 2]$;

- $f''(x) = \dfrac{1}{(x+2)^2} > 0$, $\forall x \in [1,2]$.

Por tanto, como $f(1) = 1 - \ln 3 < 0$ y $f(2) = 2 - \ln 4 > 0$, elegimos como punto inicial $x_0 = 2$. Aplicando el método de Newton, obtenemos:

$$x_1 = 1'181725815$$
$$x_2 = 1'146284845$$

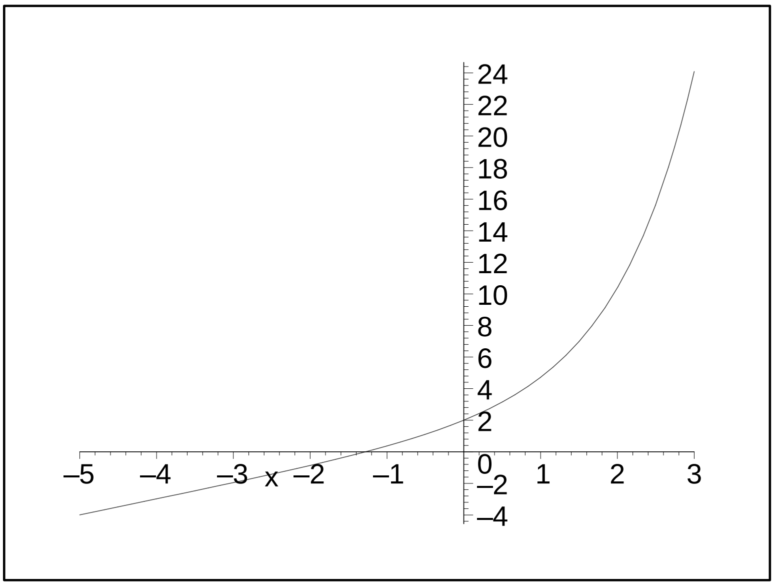
Observemos que sólo podemos asegurar una cifra decimal exacta.

$\boxed{5.}$

a) La función $f(x) = e^x + x + 1$ está definida en todo $\mathbb{R}$. En dicho dominio f es continua, derivable y su derivada es $f'(x) = e^x + 1 > 0$, luego es creciente en todo su dominio. Además, conocemos los siguientes datos:

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty, \qquad \lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty.$$

Por tanto, f posee exactamente 1 raíz. La gráfica es de la forma:



Para aproximar dicha raíz, necesitamos encontrar un intervalo donde que se verifiquen las hipótesis de la Regla de Fourier. Consideramos el intervalo $[-2,-1]$, donde f es dos veces continuamente diferenciable y:

- $f(-2) \cdot f(-1) < 0$;
- $f'(x) = e^x + 1 > 0$ $\forall x \in [-2,-1]$;
- $f''(x) = e^x > 0$, $\forall x \in [-2,-1]$.

Por tanto, como $f(-2) = e^{-2} - 1 < 0$ y $f(-1) = 1/e > 0$, elegimos como punto inicial $x_0 = -1$. Aplicando el método de Newton, obtenemos:

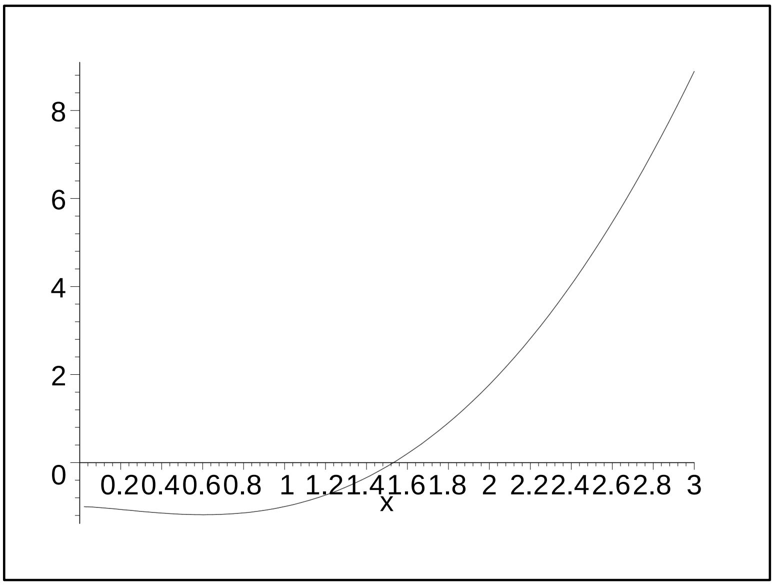
$$x_1 = -1'268941421$$
$$x_2 = -1'278454624$$
$$x_3 = -1'278464543$$

Observemos que para conseguir dos cifras decimales exactas necesitamos calcular hasta x_3 (y obtenemos hasta 4 cifras decimales exactas).

b) La función $f(x) = x^2 \ln x - 1$ está definida en el dominio $(0, +\infty)$. Su derivada es $f'(x) = x(2\ln x + 1)$, luego es decreciente en $(0, e^{-1/2})$ y creciente en $(e^{-1/2}, +\infty)$. Además, conocemos los siguientes datos:

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = 0, \qquad f(e^{-1/2}) = -\frac{1}{2e} - 1 < 0, \qquad \lim_{x\to +\infty} f(x) = +\infty.$$

Por tanto, f posee exactamente una raíz en el intervalo $(e^{-1/2}, +\infty)$. La gráfica es de la forma:



Para aproximar dicha raíz, necesitamos encontrar un intervalo donde se verifiquen las hipótesis de la Regla de Fourier. Consideramos el intervalo $[1, 2]$, donde f es dos veces continuamente diferenciable y:

- $f(1) \cdot f(2) < 0$;
- $f'(x) = x(2\ln x + 1) \neq 0 \ \forall x \in [1, 2]$;
- $f''(x) = 2\ln x + 3 > 0, \ \forall x \in [1, 2]$.

Por tanto, como $f(2) = 4\ln 2 - 1 > 0$ y $f(1) = -1 < 0$, elegimos como punto inicial $x_0 = 2$. Aplicando el método de Newton, obtenemos:

$$x_1 = 1'628589676$$
$$x_2 = 1'537339389$$
$$x_3 = 1'531606733$$

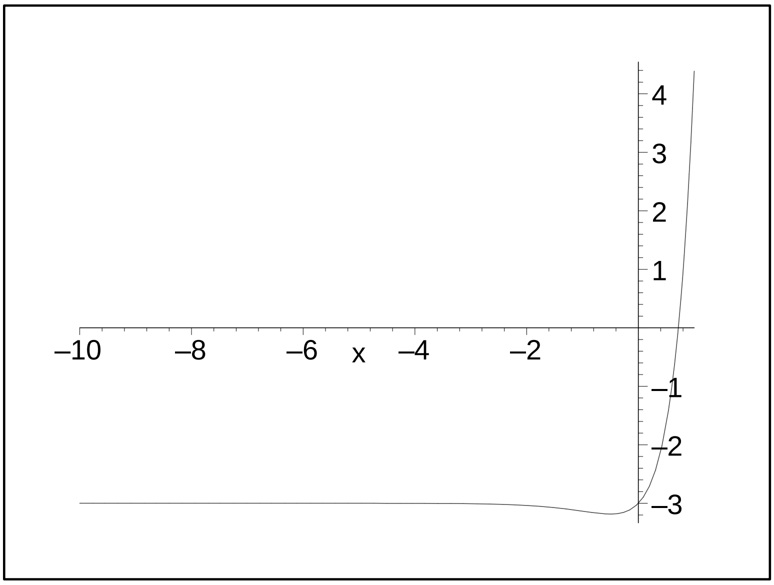
Observemos que para conseguir dos cifras decimales exactas necesitamos calcular hasta x_3.

$\boxed{6.}$

a) La función $f(x) = xe^{2x} - 3$ está definida en todo $\mathbb{R}$. En dicho dominio f es continua, derivable y su derivada es $f'(x) = (1 + 2x)e^{2x}$, luego es decreciente en $(-\infty, -1/2)$ y creciente en $(-1/2, +\infty)$. Además, conocemos los siguientes datos:

$$\lim_{x\to -\infty} f(x) = 0, \qquad f(-1/2) = -\frac{1}{2e} - 3 < 0, \qquad \lim_{x\to +\infty} f(x) = +\infty.$$

Por tanto, f posee exactamente una raíz en el intervalo $(-1/2, +\infty)$. La gráfica es de la forma:



b) Para aproximar dicha raíz, necesitamos encontrar un intervalo donde se verifiquen las hipótesis de la Regla de Fourier. Para la mayor de las raíces consideramos el intervalo $[0, 1]$, donde f es dos veces continuamente diferenciable y:

- $f(0) \cdot f(1) < 0$;
- $f'(x) = (1 + 2x)e^{2x} \neq 0 \ \forall x \in [0, 1]$;
- $f''(x) = 4(1 + x)e^{2x} > 0, \ \forall x \in [0, 1]$.

Por tanto, como $f(0) = -3 < 0$ y $f(1) = e^2 - 3 > 0$, elegimos como punto inicial $x_0 = 1$. Aplicando el método de Newton, obtenemos:

$$x_1 = 0'80200195$$
$$x_2 = 0'725683835$$

Observemos que no sabemos si hemos conseguido alguna cifra decimal exacta.

$\boxed{7.}$ Como el área encerrada por la curva y el eje OX es:

$$A = -\int_{-1}^{0} [x^2 + x]dx = \frac{1}{6},$$

suponemos que la recta $x = a$ es tal que $a < -1$ ó $a > 0$.

a) Para el caso $a < -1$, la integral viene dada por $A = \displaystyle\int_{a}^{-1} [x^2 + x]dx = \frac{1}{6} - \frac{a^3}{3} - \frac{a^2}{2}$, luego $A = 1$ si y sólo si $2a^3 + 3a^2 + 5 = 0$.

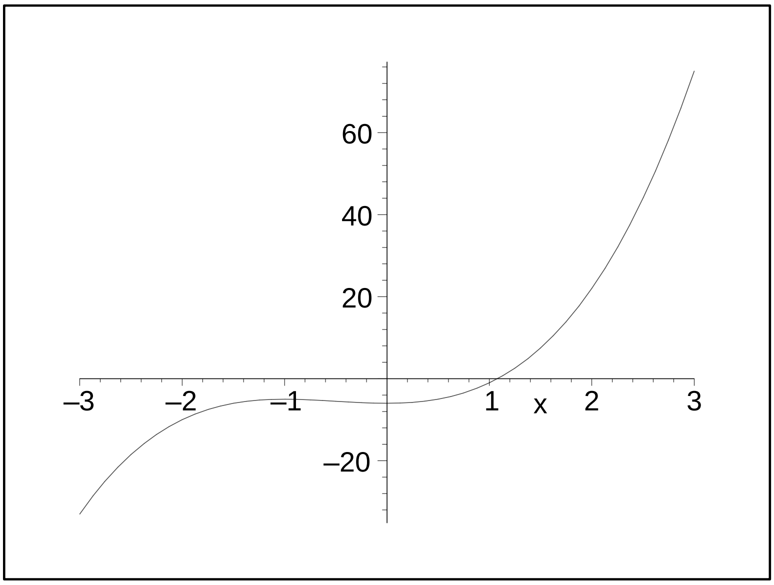
b) Para el caso $a > 0$, la integral viene dada por $A = \displaystyle\int_{0}^{a} [x^2 + x]dx = \frac{a^3}{3} + \frac{a^2}{2}$, luego $A = 1$ si y sólo si $2a^3 + 3a^2 - 6 = 0$.

Tenemos por tanto que estudiar dos funciones distintas: $f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 6$ y $g(x) = 2x^3 + 3x^2 + 5$.

a) La función $f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 6$ está definida en todo $\mathbb{R}$. En dicho dominio f es continua, derivable y su derivada es $f'(x) = 6x^2 + 6x = 6x(x+1)$, luego es creciente en $(-\infty, -1) \cup (0, +\infty)$ y decreciente en $(-1, 0)$. Además, conocemos los siguientes datos:

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty, \qquad f(-1) = -5, \quad f(0) = -6, \qquad \lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty.$$

Por tanto, f posee exactamente una raíz, que está en el intervalo $(0, +\infty)$. La gráfica es de la forma:



Para aproximar dicha raíz, necesitamos encontrar un intervalo donde se verifiquen las hipótesis de la Regla de Fourier. Consideramos el intervalo $[1,2]$, donde f es dos veces continuamente diferenciable y:

- $f(1)\cdot f(2) < 0$;
- $f'(x) = 6x(x+1) \neq 0\ \forall x \in [1,2]$;
- $f''(x) = 12x + 6 > 0,\ \forall x \in [1,2]$.

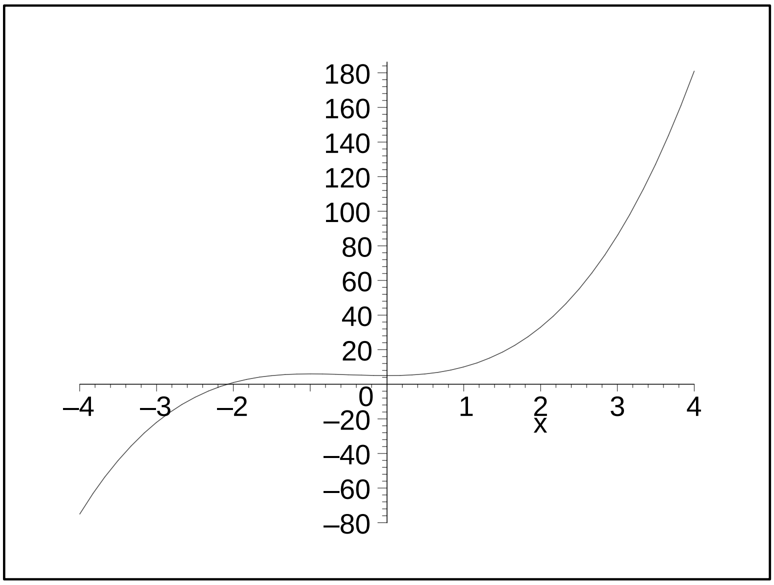
Por tanto, como $f(1) = -1 < 0$ y $f(2) = 22 > 0$, elegimos como punto inicial $x_0 = 2$. Aplicando el método de Newton, obtenemos:

$$\begin{aligned} x_1 &= 1'388888889 \\ x_2 &= 1'13042205 \\ x_3 &= 1'080414582 \\ x_4 &= 1'07861916 \\ x_5 &= 1'078616889 \end{aligned}$$

b) La función $g(x) = 2x^3+3x^2+5$ está definida en todo $\mathbb{R}$. En dicho dominio, f es continua, derivable y su derivada es $g'(x) = 6x^2+6x = 6x(x+1)$, luego es creciente en $(-\infty,-1)\cup(0,+\infty)$ y decreciente en $(-1,0)$. Además, conocemos los siguientes datos:

$$\lim_{x\to-\infty} g(x) = -\infty, \qquad g(-1) = 6, \quad g(0) = 5, \qquad \lim_{x\to+\infty} g(x) = +\infty.$$

Por tanto, f posee exactamente una raíz, que está en el intervalo $(-\infty,-1)$. La gráfica es de la forma:



Para aproximar dicha raíz, necesitamos encontrar un intervalo donde se verifiquen las hipótesis de la Regla de Fourier. Consideramos el intervalo $[-3,-2]$, donde f es dos veces continuamente diferenciable y:

- $g(-2) \cdot g(-3) < 0$;
- $g'(x) = 6x(x+1) \neq 0 \ \forall x \in [-3,-2]$;
- $g''(x) = 12x + 6 < 0, \ \forall x \in [-3,-2]$.

Por tanto, como $g(-2) = 1 > 0$ y $g(-3) = -22 < 0$, elegimos como punto inicial $x_0 = -3$. Aplicando el método de Newton, obtenemos:

$$
\begin{aligned}
x_1 &= -2'388888889\\
x_2 &= -2'13042205\\
x_3 &= -2'080414582\\
x_4 &= -2'07861916\\
x_5 &= -2'078616889\\
x_6 &= -2'078616889
\end{aligned}
$$

Observemos que la cifras decimales son exactas a partir de x_5.