SOLUCIONES DE LOS EJERCICIOS DE LA HOJA 5

1) Resolvemos las siguientes integrales inmediatas:

(a) $\displaystyle\int (x^3-2x^2+3x-7)\,dx = \frac{x^4}{4}-\frac{2x^3}{3}+\frac{3x^2}{2}-7x+C.$

(b) $\displaystyle\int \left(\frac{1}{x^2}+\frac{4}{x\sqrt{x}}+2\right) dx = \int (x^{-2}+4x^{-3/2}+2)\,dx = -\frac{1}{x}-\frac{8}{\sqrt{x}}+2x+C.$

(c) $\displaystyle\int \left(x+\frac{1}{\sqrt[3]{x}}\right) dx = \int (x+x^{-1/3})\,dx = \frac{x^2}{2}+3\frac{x^{2/3}}{2}+C.$

(d) $\displaystyle\int 3e^{2x}\,dx = \frac{3}{2}e^{2x}+C.$

(e) $\displaystyle\int \cos(a+bx)\,dx = \frac{1}{b}\operatorname{sen}(a+bx)+C.$

(f) $\displaystyle\int \frac{1}{\cos^2(7x)}\,dx = \frac{1}{7}\operatorname{tg}(7x)+C.$

(g) $\displaystyle\int \frac{5x^2-3}{x^2+1}\,dx = \int \left[5-\frac{8}{x^2+1}\right] dx = 5x-8\operatorname{arc\,tg}(x)+C.$

(h) $\displaystyle\int \operatorname{tg} x \sec^2 x\,dx = \frac{\operatorname{tg}^2 x}{2}+C.$

(i) $\displaystyle\int \operatorname{tg}(x)\,dx = \int \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}\,dx = -\ln|\cos x|+C.$

(j) $\displaystyle\int \frac{1}{1+2x^2}\,dx = \int \frac{1}{1+(\sqrt{2}x)^2}\,dx = \frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arc\,tg}(\sqrt{2}x)+C.$

(k) $\displaystyle\int \frac{e^x}{3+4e^x}\,dx = \frac{1}{4}\ln|3+4e^x|+C.$

(l) $\displaystyle\int \operatorname{sen}^2 x\,\cos x\,dx = \frac{\operatorname{sen}^3 x}{3}+C.$

2) Resolvemos por partes las siguientes integrales:

(a) $\displaystyle\int x\,\mathrm{sen}x\,dx \;=\; -x\cos x + \int \cos x\,dx = -x\cos x + \mathrm{sen}x + C,$ donde

$$\left\{\begin{array}{ll} u = x, & du = dx \\ dv = \mathrm{sen}x\,dx, & v = -\cos x \end{array}\right.$$

(b) $\displaystyle\int x\,e^x\,dx \;=\; xe^x - \int e^x\,dx = xe^x - e^x + C = e^x(x-1) + C,$ donde

$$\left\{\begin{array}{ll} u = x, & du = dx \\ dv = e^x\,dx, & v = e^x \end{array}\right.$$

(c)

$$\begin{aligned}\int x^2\cos(3x)\,dx &= \frac{x^2}{3}\,\mathrm{sen}(3x) - \frac{2}{3}\int x\,\mathrm{sen}(3x)\,dx\\ &= \frac{x^2}{3}\,\mathrm{sen}(3x) - \frac{2}{3}\left[-\frac{x}{3}\cos(3x) + \frac{1}{3}\int \cos(3x)\,dx\right]\\ &= \frac{x^2}{3}\,\mathrm{sen}(3x) + \frac{2x}{9}\cos(3x) - \frac{2}{27}\,\mathrm{sen}(3x) + C,\end{aligned}$$

donde $\left\{\begin{array}{ll} u = x^2, & du = 2x dx \\ dv = \cos(3x)\,dx, & v = \dfrac{\mathrm{sen}(3x)}{3} \end{array}\right\}$ en la primera integración,

y $\left\{\begin{array}{ll} u = x, & du = dx \\ dv = \mathrm{sen}(3x)\,dx, & v = -\dfrac{\cos(3x)}{3} \end{array}\right\}$ en la segunda integración.

(d)

$$\begin{aligned}\int e^x\cos x\,dx &= e^x\,\mathrm{sen}x - \int e^x\,\mathrm{sen}x\,dx = e^x\,\mathrm{sen}x - \left[e^x\,(-\cos x) - \int e^x\,(-\cos x)\,dx\right]\\ &= e^x\,(\mathrm{sen}x + \cos x) - \int e^x\cos x\,dx\end{aligned}$$

donde $\left\{\begin{array}{ll} u = e^x, & du = e^x dx \\ dv = \cos x\,dx, & v = \mathrm{sen}\,x \end{array}\right\}$ en la primera integración, y

$\left\{\begin{array}{ll} u = e^x, & dv = e^x dx \\ dv = \mathrm{sen}x\,dx, & v = -\cos x \end{array}\right\}$ en la segunda integración. Despejando $\displaystyle\int e^x\cos x\,dx$, obtenemos:

$$\int e^x\cos x\,dx = \frac{1}{2}\,e^x\,(\mathrm{sen}x + \cos x) + C.$$

Esta integral recibe el nombre de **integral cíclica**.

(e) $\displaystyle\int \ln x\,dx \;=\; x\,\ln x - \int dx = x\,\ln x - x + C = x(\ln x - 1) + C,$ donde $\left\{\begin{array}{l} u = \ln x, \quad du = \dfrac{1}{x}\,dx \\ dv = dx, \quad v = x \end{array}\right.$

(f)

$$\begin{aligned}\int e^{2x}\operatorname{sen} x\,dx &= -e^{2x}\cos x + 2\int e^{2x}\,\cos x\,dx \\ &= -e^{2x}\cos x + 2\left[e^{2x}\operatorname{sen} x - 2\int e^{2x}\operatorname{sen} x\,dx\right] \\ &= e^{2x}[-\cos x + 2\operatorname{sen} x] - 4\int e^{2x}\operatorname{sen} x\,dx + C,\end{aligned}$$

donde $\left\{\begin{array}{ll} u = e^{2x}, & du = 2e^{2x}dx \\ dv = \operatorname{sen} x\,dx, & v = -\cos x \end{array}\right\}$ en la primera integración, y $\left\{\begin{array}{ll} u = e^{2x}, & du = 2e^{2x}dx \\ v = \cos x\,dx, & v = \operatorname{sen} x \end{array}\right\}$ en la segunda integración. Despejando $\displaystyle\int e^{2x}\operatorname{sen} x\,dx$ obtenemos:

$$\int e^{2x}\operatorname{sen} x\,dx = \frac{e^{2x}}{5}\,(2\operatorname{sen} x - \cos x) + C.$$

Observemos que esta integral también es cíclica.

(g) $\displaystyle\int \operatorname{arctg} x\,dx \;=\; x\operatorname{arctg} x - \int \frac{x}{1+x^2}\,dx = x\,\operatorname{arc\,tg} x - \frac{1}{2}\ln(1+x^2) + C,$

donde $\left\{\begin{array}{ll} u = \operatorname{arctg} x, & du = \dfrac{1}{1+x^2}\,dx \\ dv = dx, & v = x \end{array}\right.$

3) Calculamos las siguientes integrales:

(a) $\displaystyle\int \frac{dx}{3x+5} = \frac{1}{3}\ln|3x+5| + C$

(b) $\displaystyle\int \frac{2x^2-3x+2}{2x-1}\,dx = \int \left[x - 1 + \frac{1}{2x-1}\right] dx = \frac{x^2}{2} - x + \frac{1}{2}\ln|2x-1| + C$

(c) $\displaystyle\int \frac{3x}{x^2+1}\,dx = \frac{3}{2}\ln|x^2+1| + C$

(d)

$$\begin{aligned}\int \frac{dx}{4x-x^2} &= \int \left(\frac{1/4}{x}+\frac{1/4}{4-x}\right) dx = \frac{1}{4}\left(\ln|x| - \ln|4-x|\right) + C \\ &= \frac{1}{4}\ln\left|\frac{x}{4-x}\right| + C\end{aligned}$$

(e) $$\int \frac{dx}{x^2-2x+1} = \int \frac{dx}{(x-1)^2} = \int (x-1)^{-2}\,dx = -\frac{1}{x-1} + C$$

(f) $$\int \frac{4}{3x^2+4}\,dx = \int \frac{dx}{1+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right)^2} = \frac{2}{\sqrt{3}}\operatorname{arc\,tg}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right) + C$$

(g) $$\int \frac{3}{x^2-1}\,dx = 3\int \left[\frac{1/2}{x-1} - \frac{1/2}{x+1}\right] dx = \frac{3}{2}\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right| + C$$

(h) $$\int \frac{dx}{x^3+x}\,dx = \int \left[\frac{1}{x} - \frac{x}{1+x^2}\right] dx = \ln|x| - \frac{1}{2}\ln|1+x^2| + C$$

(i) $$\int \frac{5x}{2x^2+3}\,dx = \frac{5}{4}\ln(2x^2+3) + C$$

4) Calculamos las siguientes primitivas mediante un cambio de variable:

(a)

$$\begin{aligned}\int \frac{\sqrt{\ln x}}{x}\,dx &= \text{(usando el cambio } t = \ln x \Rightarrow dt = \frac{1}{x}\,dx) \\ &= \int t^{1/2}\,dt = \frac{2}{3}t^{3/2} + C = \frac{2}{3}(\ln x)^{3/2} + C\end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned}\int \frac{e^x-3e^{2x}}{1+e^x}\,dx &= \text{(usando el cambio } t = e^x \Rightarrow dt = e^x\,dx \Rightarrow dx = \frac{1}{t}\,dt) \\ &= \int \frac{t-3t^2}{t(1+t)}\,dt = \int \frac{1-3t}{1+t}\,dt = \int \left[-3+4\,\frac{1}{1+t}\right] dt \\ &= -3t + 4\,\ln|1+t| + C = -3e^x + 4\ln|1+e^x| + C\end{aligned}$$

(c)

$$\begin{aligned}
\int \frac{1}{\sqrt{x}\,(4-9x)}\,dx &= \left(\text{usando el cambio } x = t^2 \Rightarrow dx = 2\,t\,dt\ \right) \\
&= \int \frac{2}{4-9t^2}\,dt \\
&= \frac{1}{2}\int \frac{dx}{2-3t} + \frac{1}{2}\int \frac{dx}{2+3t} = -\frac{1}{6}\int \frac{(-3)\,dx}{2-3t} + \frac{1}{6}\int \frac{3\,dx}{2+3t} \\
&= -\frac{1}{6}\left(\ln(2-3t) - \ln(2+3t)\right) + C \\
&= -\frac{1}{6}\ln\left(\frac{2-3t}{2+3t}\right) + C = -\frac{1}{6}\ln\left(\frac{2-3x^{1/2}}{2+3x^{1/2}}\right) + C
\end{aligned}$$

(d)

$$\begin{aligned}
\int \frac{\sqrt[4]{x}}{1+\sqrt{x}}\,dx &= \left(\text{usando el cambio } x = t^4 \Rightarrow dx = 4\,t^3\,dt\right) \\
&= \int \frac{4t^4}{1+t^2}\,dt \\
&= \left(\text{función racional}\right) \int 4\left(t^2 - 1 + \frac{1}{1+t^2}\right)\,dt \\
&= 4\left(\frac{1}{3}\,t^3 - t + \operatorname{arctg}(t)\right) + C \\
&= \frac{4}{3}\,x^{3/4} - 4\,x^{1/4} + 4\operatorname{arctg}(x^{1/4}) + C.
\end{aligned}$$

(e)

$$\begin{aligned}
\int \frac{1}{\sqrt{x}\,(1+x)}\,dx &= \left(\text{usando el cambio } x = t^2 \Rightarrow dx = 2\,t\,dt\ \right) \\
&= \int \frac{2\,dt}{1+t^2} = 2\operatorname{arctg}(t) + C \\
&= 2\operatorname{arctg}(\sqrt{x}) + C.
\end{aligned}$$

(f)

$$\begin{aligned}
\int \frac{x^3}{\sqrt{x-1}}\,dx &= (\text{usando el cambio } x-1=t^2 \Rightarrow dx = 2\,t\,dt) \\
&= \int 2\,(1+t^2)^3\,dt = 2\int \left(1+3\,t^2+3\,t^4+t^6\right)\,dx \\
&= 2\left(t+t^3+\frac{3}{5}\,t^5+\frac{1}{7}\,t^7\right)+C \\
&= 2(x-1)^{1/2}+2(x-1)^{3/2}+\frac{6}{5}\,(x-1)^{5/2}+\frac{2}{7}\,(x-1)^{7/2}+C
\end{aligned}$$

(g)

$$\begin{aligned}
\int \frac{\ln(2x)}{x\ln(4x)}\,dx &= (\text{usando el cambio } t=\ln(2x) \Rightarrow dt = \frac{1}{x}\,dx) \\
&= \int \frac{t}{\ln 2+t}\,dt = \int \left[1-\frac{\ln 2}{t+\ln 2}\right]\,dt \\
&= t-\ln 2\,\ln|t+\ln 2|+C = \ln(2x)-\ln 2\,\ln|\ln(4x)|+C
\end{aligned}$$

5) Calculamos las siguientes integrales definidas:

(a) $\displaystyle\int_{-1}^{1} \operatorname{sen} x\,dx = -\cos x\big|_{x=-1}^{x=1} = -\cos(1)+\cos(-1).$

(b)

$$\begin{aligned}
\int_1^e \frac{\operatorname{sen}(\ln x)}{x}\,dx &= (\text{usando el cambio } t=\ln x \Rightarrow dt=\frac{1}{x}\,dx) \\
&= \int_0^1 \operatorname{sen} t\,dt = -\cos t\big|_{t=0}^{t=1} = 1-\cos(1)
\end{aligned}$$

(c) $\displaystyle\int_0^{\pi/2} (\operatorname{sen} x + x^2)\,dx = \left[-\cos x+\frac{x^3}{3}\right]\Big|_{x=0}^{x=\pi/2} = 1+\frac{\pi^3}{24}.$

(d) $\displaystyle\int_0^1 (1+x-\operatorname{tg} x)\,dx = \left[x+\frac{x^2}{2}+\ln|\cos x|\right]\Big|_{x=0}^{x=1} = \frac{3}{2}+\ln|\cos(1)|$

(e) $\displaystyle\int_0^{\pi/4} \operatorname{tg}^2 x\,dx = \int_0^{\pi/4}\left[1+\operatorname{tg}^2 x-1\right]\,dx = [\operatorname{tg} x - x]\Big|_{x=0}^{x=\pi/4} = 1-\frac{\pi}{4}$

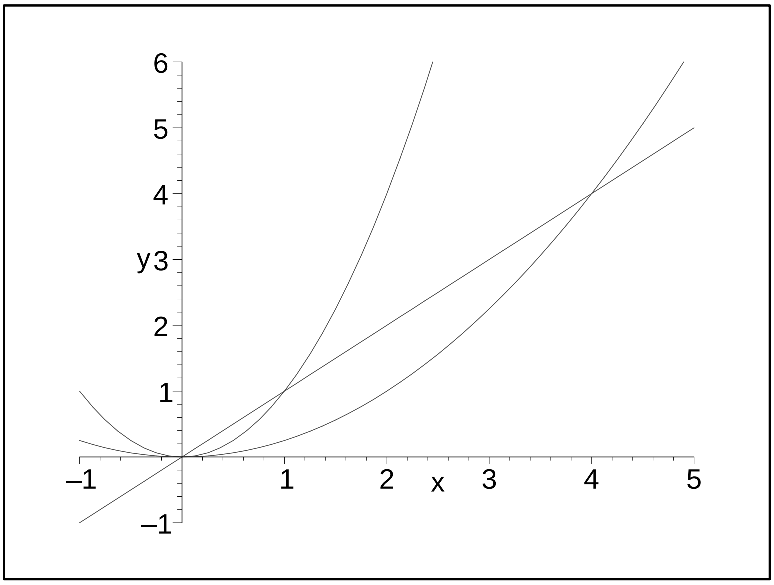
(f)

$$\begin{aligned}\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{dx}{\operatorname{sen} x\, \cos x} &= \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{\cos x}{\operatorname{sen} x} \frac{1}{\cos^2 x}\, dx = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} (\operatorname{tg} x)^{-1} \frac{1}{\cos^2 x}\, dx = \ln(\operatorname{tg} x))|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \\ &= \ln(\operatorname{tg}(\tfrac{\pi}{3})) - \ln(\operatorname{tg}(\tfrac{\pi}{4})) = \ln(\sqrt{3}).\end{aligned}$$

6) Las parábolas $y = 6x - x^2$ e $y = x^2 - 2x$ se cortan en los puntos: $x = 0$, $x = 4$. Se puede comprobar que, entre dichos puntos, la parábola $y = 6x - x^2$ se encuentra por encima de $y = x^2 - 2x$. Por tanto, el área encerrada por ambas parábolas viene dada por la expresión:

$$A = \int_0^4 \left[6x - x^2 - x^2 + 2x\right] dx = \int_0^4 \left[8x - 2x^2\right] dx = \left[4x^2 - \frac{2x^3}{3}\right] \Big|_{x=0}^{x=4} = \frac{64}{3}.$$

7) Las curvas $y = x$ e $y = x^2$ se cortan en los puntos $x = 0$, $x = 1$. Las curvas $y = x$ e $y = \frac{1}{4}x^2$ lo hacen en los puntos $x = 0$, $x = 4$. Las curvas $y = x^2$ e $y = \frac{1}{4}x^2$ sólo se cortan en $x = 0$. El recinto delimitado por las tres curvas es de la forma:



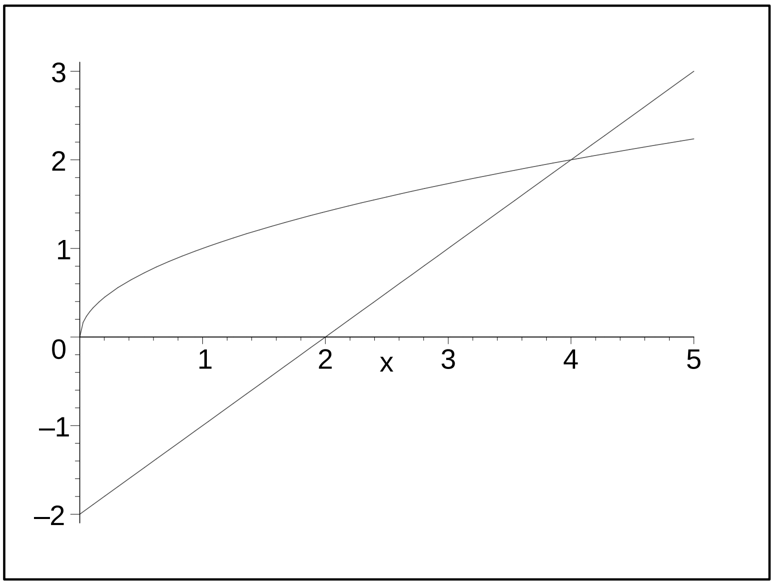
Por tanto, el área encerrada por dichas curvas viene dada por la expresión:

$$\begin{aligned} A &= \int_0^1 \left[x^2 - \frac{1}{4}x^2\right] dx + \int_1^4 \left[x - \frac{1}{4}x^2\right] dx = \int_0^1 \frac{3}{4}x^2\, dx + \int_1^4 \left[x - \frac{1}{4}x^2\right] dx \\ &= \frac{x^3}{4}\Big|_{x=0}^{x=1} + \left[\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{12}\right] \Big|_{x=1}^{x=4} = \frac{2}{3}.\end{aligned}$$

8) Las curvas $y = x^2 - 2x$ e $y = -x + 2$ se cortan en los puntos: $x = -1$, $x = 2$. Se puede comprobar que, entre dichos puntos, la recta $y = -x + 2$ se encuentra por encima de la parábola $y = x^2 - 2x$. Por tanto, el área encerrada por ambas curvas viene dada por la expresión:

$$\begin{aligned} A &= \int_{-1}^{2} \left[-x + 2 - x^2 + 2x\right]\, dx = \int_{-1}^{2} \left[-x^2 + x + 2\right]\, dx \\ &= \left[-\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + 2x\right]\Big|_{x=-1}^{x=2} = \frac{9}{2}. \end{aligned}$$

9) Las curvas $y = 0$ e $y = \sqrt{x}$ se cortan en el punto $x = 0$. Las rectas $y = 0$ e $y = x - 2$ lo hacen en $x = 2$. Las curvas $y = \sqrt{x}$ e $y = x - 2$ se cortan en $x = 4$. El recinto delimitado por las tres curvas es de la forma:



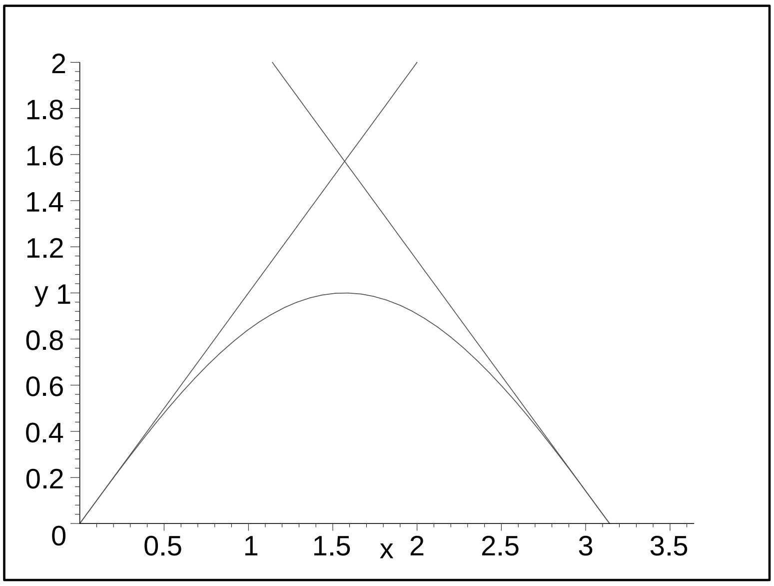
Por tanto, el área encerrada por dichas curvas viene dada por la expresión:

$$\begin{aligned} A &= \int_{0}^{2} \sqrt{x}\, dx + \int_{2}^{4} \left[\sqrt{x} - x + 2\right]\, dx = \frac{2x^{3/2}}{3}\Big|_{x=0}^{x=2} + \left[\frac{2x^{3/2}}{3} - \frac{x^2}{2} + 2x\right]\Big|_{x=2}^{x=4} \\ &= \frac{10}{3}. \end{aligned}$$

Otra posibilidad es calcular el área de la siguiente forma:

$$A = \int_{0}^{4} \sqrt{x}\, dx + \int_{2}^{4} [-x + 2]\, dx = \frac{2}{3}x^{3/2}\Big|_{x=0}^{x=4} + \left[-\frac{x^2}{2} + 2x\right]\Big|_{x=2}^{x=4} = \frac{10}{3}.$$

10) La recta tangente a la curva $y = \operatorname{sen} x$ en el punto $x = 0$ es $y = x$. Por tanto, la curva $y = \operatorname{sen} x$ y la recta $y = x$ sólo se cortan en $x = 0$. La recta tangente a la curva $y = \operatorname{sen} x$ en el punto $x = \pi$ es $y = -x + \pi$. Por tanto, la curva $y = \operatorname{sen} x$ y la recta $y = -x + \pi$ sólo se cortan en $x = \pi$. Las rectas $y = x$ e $y = -x + \pi$ se cortan en $x = \pi/2$. El recinto delimitado por las tres curvas es de la forma:



Por tanto, el área encerrada por dichas curvas viene dada por la expresión:

$$
\begin{aligned}
A &= \int_0^{\pi/2} [x - \operatorname{sen} x]\, dx + \int_{\pi/2}^{\pi} [-x + \pi - \operatorname{sen} x]\, dx \\
&= \int_0^{\pi/2} x\, dx + \int_{\pi/2}^{\pi} (-x + \pi)\, dx - \int_0^{\pi} \operatorname{sen} x\, dx \\
&= \left[\frac{x^2}{2} + \cos x\right] \Big|_{x=0}^{x=\pi/2} + \left[-\frac{x^2}{2} + \pi x + \cos x\right] \Big|_{x=\pi/2}^{x=\pi} = \frac{\pi^2}{4} - 2.
\end{aligned}
$$

11) La curva $y = \dfrac{e^{(2+\sqrt{x})}}{\sqrt{x}}$ es una función estrictamente positiva entre los puntos $x = 1$,$x = 4$. Por tanto, el área encerrada entre dicha curva, el eje OX y las rectas $x = 1$, $x = 4$ viene dada por la expresión:

$$\begin{aligned} A &= \int_1^4 \frac{e^{(2+\sqrt{x})}}{\sqrt{x}}\,dx = (\text{haciendo el cambio } t = \sqrt{x} \Rightarrow dt = \frac{1}{2\sqrt{x}}\,dx) \\ &= \int_1^2 2e^{2+t}\,dt = 2e^{2+t}\Big|_{t=1}^{t=2} = 2e^3(e-1). \end{aligned}$$

12)

(a) La integral es de tipo racional:

$$\int \frac{1}{t^2-1}\,dt \;=\; \int \left[\frac{-1/2}{t+1} + \frac{1/2}{t-1}\right] dt = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{t-1}{t+1}\right| + C.$$

(b) La función $f(x)$ verifica las siguientes propiedades:

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = +\infty, \qquad \lim_{x\to+\infty} f(x) = 0, \qquad f'(x) = \frac{-e^{-x}(1+e^{-2x})}{(1-e^{-2x})^2} < 0 \quad \forall x > 0$$

Por tanto, la función es estrictamente positiva para $x > 0$.

(c)

$$\begin{aligned} A &= \int_1^2 f(x)\,dx = (\text{haciendo el cambio } t = e^{-x} \Rightarrow dt = -e^{-x}\,dx) \\ &= \int_{e^{-1}}^{e^{-2}} \frac{dt}{t^2-1} = (\text{usando (a)}) = \frac{1}{2}\left[\ln\left|\frac{t-1}{t+1}\right|\right]\Big|_{t=e^{-1}}^{t=e^{-2}} \\ &= \frac{1}{2}\ln\left|\frac{e^{-2}-1}{e^{-2}+1}\right| - \frac{1}{2}\ln\left|\frac{e^{-1}-1}{e^{-1}+1}\right| = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{(e^{-2}-1)(e^{-1}+1)}{(e^{-2}+1)(e^{-1}-1)}\right| \\ &= \frac{1}{2}\ln\left|\frac{(1+e)^2}{1+e^2}\right|. \end{aligned}$$