SOLUCIONES DE LOS EJERCICIOS DE LA HOJA 6

1) A continuación diremos de qué tipo son las ecuaciones diferenciales ordinarias (e. d. o.) planteadas y cuál es su solución:

(a) $y' = 2-y$ es una e. d. o. lineal completa. Para resolverla, la escribimos de la forma $y' = a(t)\,y + b(t)$ para $a(t) = -1$. Entonces, $A(t) = \int a(t)\,dt = -\int dt = -t$, y el factor integrante es:

$$e^{-A(t)} = e^{t}.$$

Multiplicando a ambos lados de la ecuación diferencial por el factor integrante, obtenemos:

$$\frac{d}{dt}\left(e^{t}\,y\right) = 2\,e^{t}.$$

Integrando a ambos lados de la expresión anterior:

$$\int \frac{d}{dt}\left(e^{t}\,y\right)\,dt = 2\int e^{t}\,dt \quad \Rightarrow \quad e^{t}\,y = 2\,e^{t} + c \quad \Rightarrow \quad y(t) = 2 + c\,e^{-t}.$$

La solución general es entonces $\boxed{y(t) = 2 + c\,e^{-t},\ c \in \mathbb{R}}$.

Obsérvese que también se podría resolver como una e. d. o. de variables separables. En ese caso, la escribiríamos de la forma:

$$y' = 2 - y \quad \Rightarrow \quad \frac{dy}{2-y} = dt$$

y resolviéndola (integrando a izquierda respecto de y y a derecha respecto de t), llegaríamos a la misma solución.

Si imponemos que $y(1) = 1$, entonces:

$$1 = 2 + c\,e^{-1} \qquad \Rightarrow \qquad c = -e,$$

por tanto, la solución particular para $y(1) = 1$ es:

$$y(t) = 2 - e^{1-t}.$$

(b) $y' = 3 + t$ es una e. d. o. de variables separables que se puede resolver de la forma:

$$\frac{dy}{dt} = 3 + t \quad \Rightarrow \quad dy = (3+t)\,dt \quad \Rightarrow \quad \int dy = \int (3+t)\,dt$$

luego la solución general es $\boxed{y(t) = 3t + \frac{t^2}{2} + c,\ c \in \mathbb{R}}$.

Si imponemos que $y(1) = 1$, entonces:

$$1 = 3 + \frac{1}{2} + c \qquad \Rightarrow \qquad c = -\frac{5}{2},$$

por tanto, la solución particular para $y(1) = 1$ es:

$$y(t) = 3t + \frac{t^2}{2} - \frac{5}{2}.$$

(c) $y' = 2\,y\,(t+1)$ es una e. d. o. de variables separables que se puede resolver de la forma:

$$y' = 2\,y\,(t+1) \quad \Rightarrow \quad \frac{dy}{y} = 2\,(t+1)\,dt \quad \Rightarrow \quad \int \frac{dy}{y} = \int 2\,(t+1)\,dt$$

luego

$$\ln|y| = t^2 + 2t + c \quad \Rightarrow \quad |y| = e^{t^2+2t+c} \quad \Rightarrow \quad y = A\,e^{t^2+2t}$$

con $A = \pm e^c \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$. Observemos que si $A = 0$, entonces $y(t) \equiv 0$, que es también una solución válida del problema. Entonces, la solución general es $\boxed{y(t) = A\,e^{t^2+2t},\ A \in \mathbb{R}}$.

Si imponemos que $y(1) = 1$, entonces:

$$1 = A\,e^3 \qquad \Rightarrow \qquad A = e^{-3},$$

por tanto, la solución particular para $y(1) = 1$ es:

$$y(t) = e^{t^2+2t-3}.$$

(d) $y\,y' + (1+y^2)\,\operatorname{sen} t = 0$ es una e. d. o. de variables separables que se puede resolver como sigue:

$$y\,\frac{dy}{dt} = -(1+y^2)\,\operatorname{sen} t \quad \Rightarrow \quad \frac{y}{1+y^2}\,dy = -\operatorname{sen} t\,dt$$

$$\Rightarrow \quad \int \frac{y}{1+y^2}\,dy = \int -\operatorname{sen} t\,dt \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{2}\ln(1+y^2) = \cos t + c$$

lo que implica que

$$1+y^2 = e^{2c}\,e^{2\cos t}$$

luego la solución general es $\boxed{y(t) = \pm\sqrt{A\,e^{2\cos t}-1}}$, con $A = e^{2c} > 0$.

Si imponemos que $y(1) = 1$, obtenemos:

$$1 = \pm\sqrt{A\,e^{2\cos 1}-1} \quad \Rightarrow \quad 1 = A\,e^{2\cos 1} - 1 \quad \Rightarrow \quad A = 2\,e^{-2\cos 1},$$

por tanto, la solución particular para $y(1) = 1$ es:

$$y(t) = \pm\sqrt{2\,e^{2(\cos t - \cos 1)} - 1}.$$

(e) $y' = 2^{t+y}$ es una e. d. o. de variables separables. La podemos resolver observando que:

$$y' = 2^{t+y} = 2^t\,2^y \quad \Rightarrow \quad 2^{-y}\,dy = 2^t\,dt \quad \Rightarrow \quad -\frac{2^{-y}}{\ln 2} = \frac{2^t}{\ln 2} + c, \quad c \in \mathbb{R}$$

luego

$$2^{-y(t)} = -2^t - A \;\; \text{con } A = c\,\ln 2 \in \mathbb{R} \quad \Rightarrow \quad -y\ln 2 = \ln(-2^t - A)$$

y la solución general es de la forma $y(t) = -\dfrac{1}{\ln 2}\ln(-2^t - A)$, $A \in \mathbb{R}$,

o lo que es lo mismo: $\boxed{y(t) = -\dfrac{1}{\ln 2}\ln(-2^t + c),\ c \in \mathbb{R}.}$

Si imponemos $y(1) = 1$, obtenemos:

$$1 = -\frac{1}{\ln 2}\ln(c-2) \quad \Rightarrow \quad \ln(c-2) = -\ln 2 \quad \Rightarrow \quad c-2 = -\frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad c = \frac{5}{2},$$

por tanto, la solución particular para $y(1) = 1$ es:

$$y(t) = -\frac{1}{\ln 2}\ln\left(-2^t + \frac{5}{2}\right).$$

(f) $e^{-y}\,(1+y')=1$ es una e. d. o. de variables separables. La podemos resolver observando que:

$$e^{-y}\left(1+\frac{dy}{dt}\right)=1 \quad\Rightarrow\quad e^{-y}\,(dt+dy)=dt \quad\Rightarrow\quad e^{-y}\,dy=(1-e^{-y})\,dt$$

luego

$$\frac{e^{-y}}{1-e^{-y}}\,dy=dt \quad\Rightarrow\quad \int\frac{e^{-y}}{1-e^{-y}}\,dy=\int dt \quad\Rightarrow\quad \ln|1-e^{-y}|=t+c$$

$$\Rightarrow\quad |1-e^{-y}|=e^c\,e^t \quad\Rightarrow\quad 1-e^{-y}=\pm e^c\,e^t=A\,e^t \quad A=\pm e^c\in\mathbb{R}.$$

El caso $A=0$ de la función corresponde a $e^{-y}=1$ es decir, $y(t)=0$ $\forall t$, también es solución de la e. d. o. Despejando, obtenemos:

$$1-A\,e^t=e^{-y} \quad\Rightarrow\quad \ln(1-A\,e^t)=-y$$

luego la solución general es $\boxed{y(t)=-\ln(1-A\,e^t)}$, con $A\in\mathbb{R}$.

Si imponemos que $y(1)=1$, entonces:

$$1=-\ln(1-A\,e^1) \quad\Rightarrow\quad e=\frac{1}{1-A\,e^1} \quad\Rightarrow\quad A=(e-1)\,e^{-2}=e^{-1}-e^{-2},$$

por tanto, la solución particular para $y(1)=1$ es:

$$y(t)=\ln(1-e^{t-1}+e^{t-2}).$$

(g) $y'-2\,t\,y=t$ es una e. d. o. que se puede clasificar como de variables separables y lineal completa. Para resolverla, la escribimos de la forma $y'=a(t)\,y+b(t)$ con $a(t)=2\,t$. Entonces, $A(t)=\displaystyle\int a(t)\,dt=\int 2\,t\,dt=$ t^2 y el factor integrante es:

$$e^{-A(t)}=e^{-t^2}.$$

Multiplicando a ambos lados de la ecuación diferencial por el factor integrante, obtenemos:

$$\frac{d}{dt}\left(e^{-t^2}\,y\right)=t\,e^{-t^2}.$$

Integrando a ambos lados de la expresión anterior:

$$e^{-t^2}\,y=\int t\,e^{-t^2}\,dt=-\frac{1}{2}\,e^{-t^2}+c.$$

La solución general es entonces $\boxed{y(t) = -\dfrac{1}{2} + c\, e^{t^2},\ c \in \mathbb{R}}$.

Obsérvese que también se podría resolver como una e. d. o. de variables separables. En ese caso, la escribiríamos de la forma:

$$y' = t + 2\,t\,y = t\,(1 + 2\,y) \quad \Rightarrow \quad \frac{dy}{1 + 2\,y} = t\,dt$$

Integrando a izquierda respecto de y y a derecha respecto de t:

$$\int \frac{dy}{1 + 2\,y} = \int t\,dt \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{2}\,\ln|2y + 1| = \frac{t^2}{2} + c$$

$$\Rightarrow \quad |2y + 1| = e^c\, e^{t^2} \quad \Rightarrow \quad y = -\frac{1}{2} + A\, e^{t^2}, \quad A = \pm e^c \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$$

El caso $A = 0$ es también solución de la e. d. o. De ese modo, llegamos a la misma solución que antes.

Si imponemos que $y(1) = 1$, entonces:

$$1 = -\frac{1}{2}\,e + c \qquad \Rightarrow \qquad K = \frac{3}{2}\,e^{-1},$$

por tanto, la solución particular para $y(1) = 1$ es:

$$y(t) = -\frac{1}{2} + \frac{3}{2}\,e^{t^2-1}.$$

(h) $y' - 5\,y = -\dfrac{5}{2}t$ es una e. d. o. lineal completa. Para resolverla, la escribimos de la forma $y' = a(t)\,y + b(t)$ con $a(t) = 5$. Entonces, $A(t) = \displaystyle\int a(t)\,dt = \int 5\,dt = 5\,t$, y el factor integrante es:

$$e^{-A(t)} = e^{-5t}.$$

Multiplicando a ambos lados de la e. d. o. por el factor integrante, obtenemos:

$$\frac{d}{dt}\left(e^{-5t}\,y\right) = -\frac{5}{2}\,t\,e^{-5t}.$$

Integrando a ambos lados de la expresión anterior:

$$e^{-5t}\,y = -\frac{5}{2}\int t\,e^{-5t}\,dt.$$

Integrando por partes,

$$\begin{aligned}
-\frac{5}{2}\int t\,e^{-5t}\,dt &= -\frac{5}{2}\left[-\frac{1}{5}\,t\,e^{-5t}+\int\frac{1}{5}\,e^{-5t}\,dt\right]\\
&= -\frac{5}{2}\left[-\frac{1}{5}\,t\,e^{-5t}-\frac{1}{25}\,e^{-5t}\,dt+c\right]\\
&= \frac{1}{2}\,t\,e^{-5t}+\frac{1}{10}\,e^{-5t}+c.
\end{aligned}$$

La solución general es entonces $\boxed{y(t)=\frac{1}{2}\,t+\frac{1}{10}+c\,e^{5t},\ c\in\mathbb{R}}$.

Si imponemos que $y(1)=1$, entonces:

$$1=\frac{1}{2}+\frac{1}{10}+c\,e \qquad \Rightarrow \qquad c=\frac{2}{5}\,e^{-1},$$

por tanto, la solución particular para $y(1)=1$ es:

$$y(t)=\frac{1}{2}\,t+\frac{1}{10}+\frac{2}{5}\,e^{5t-1}.$$

2) Denotamos por $y(t)$ a cantidad de ejemplares de una especie de peces en el año t. Observemos que $y(1990)=1000$, $y(1997)=3000$. Si la tasa de crecimiento es constante, quiere decir que $\frac{y'(t)}{y(t)}=k$, donde k es una constante a determinar. En ese caso, significa que:

$$y(t)=c\,e^{k\,t}, \quad k,\, c\in\mathbb{R}.$$

Para determinar k y c, usamos los datos anteriores:

$$\left.\begin{cases} y(t) &= c\,e^{k\,t}\\ y(1990) &= 1000\end{cases}\right\}\Rightarrow c\,e^{1990\,k}=1000$$

$$\left.\begin{cases} y(t) &= c\,e^{k\,t}\\ y(1997) &= 3000\end{cases}\right\}\Rightarrow c\,e^{1997\,k}=3000$$

Dividiendo ambas ecuaciones obtenemos que $e^{7k}=3$, luego $k=\frac{\ln 3}{7}$. A partir, por ejemplo, de $c\,e^{1990k}=1000$, se tiene que $c=1000\,e^{-\frac{\ln 3}{7}\,1990}$. Luego la función $y(t)$ viene dada por la expresión:

$$y(t)=1000\,e^{\frac{\ln 3}{7}(t-1990)}.$$

Ahora podemos resolver el ejercicio:

$$y(2000) = 1000\, e^{\frac{\ln 3}{7}(2000-1990)} = 1000\, e^{\frac{10}{7}\ln 3} \sim 4803,98.$$

$$y(2001) = 1000\, e^{\frac{\ln 3}{7}(2001-1990)} = 1000\, e^{\frac{21}{7}\ln 3} = 27000.$$

3) Denotamos por $y(t)$ el número de bacterias contenidas en 1 litro de leche en el instante t.

Como la tasa de multiplicación es constante, la función $y(t)$ verifica la siguiente e. d. o.:

$$y'(t) = k\, y(t),$$

cuyas soluciones son de la forma $y(t) = c\, e^{kt}$. Los datos del problema nos dicen lo siguiente:

1. El número de bacterias se duplica en 4 horas: si fijamos que en el instante inicial $t = 0$ la cantidad es y_0, es decir,

   $$y(0) = y_0,$$

   entonces $y(4) = 2\, y_0$.

2. Queremos saber en qué instante t se alcanza una cantidad 25 veces mayor que en el instante inicial, es decir, encontrar t tal que $y(t) = 25\, y_0$.

De las observaciones anteriores obtenemos lo siguiente:

1. $\left\{ \begin{array}{rcl} y(t) & = & c\, e^{kt} \\ y(0) & = & y_0 \end{array} \right\} \Rightarrow c = y_0$, luego $\left\{ \begin{array}{rcl} y(t) & = & y_0\, e^{kt} \\ y(4) & = & 2\, y_0 \end{array} \right\} \Rightarrow e^{4k} = 2$,

   es decir, $k = \dfrac{1}{4}\ln 2$. Por tanto,

   $$y(t) = y_0\, e^{\frac{t}{4}\ln(2)}.$$

2. Resolvemos

   $$\left\{ \begin{array}{rcl} y(t) & = & 25\, y_0 \\ y(t) & = & y_0\, e^{\frac{t}{4}\ln(2)} \end{array} \right\} \Rightarrow 25 = e^{\frac{t}{4}\ln(2)} \Rightarrow t = 4\, \frac{\ln 25}{\ln 2} = 18,5754.$$

4) La ley de enfriamiento de Newton viene dada por:

$$T'(t) = k\ (T_A - T(t))\,,$$

donde $T(t)$ es la temperatura del objeto en el instante de tiempo t y T_A es la temperatura del aire que lo rodea.

Los datos del problema nos dicen lo siguiente:

1. $T_A = 70$, luego la ley de enfriamiento se escribe:

$$T'(t) = k\ (70 - T(t))\,,$$

es decir,

$$\frac{dT(t)}{dt} = k\ (70 - T(t)) \quad \Rightarrow \quad \frac{dT(t)}{70 - T(t)} = k\,dt.$$

Integrando la e. d. o., obtenemos:

$$-\ln|70 - T(t)| = k\,t + c \quad \Rightarrow \quad T(t) = 70 + C\,e^{-kt},$$

donde $C = \pm e^{-c}$. En realidad, $C \equiv 0$ también genera una solución, es decir, vale cualquier constante $C \in \mathbb{R}$.

Observemos que la ecuación anterior también se puede resolver como una e.d.o. lineal completa.

2. $$\left\{ \begin{array}{rcl} T(t) & = & 70 + C\,e^{-kt} \\ T(0) & = & 350 \end{array} \right\} \Rightarrow C = 280.$$

3. $$\left\{ \begin{array}{rcl} T(t) & = & 70 + 280\,e^{-kt} \\ T(45) & = & 150 \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} 70 + 280\,e^{-45\,k} = 150 \\ \Rightarrow 7\,e^{-45\,k} = 2 \Rightarrow e^{-45\,k} = \dfrac{2}{7}, \end{array} \right.$$

luego

$$k = -\frac{1}{45}\ln\left(\frac{2}{7}\right) \sim 0,0278.$$

La temperatura del objeto viene dada entonces por:

$$T(t) = 70 + 280\,e^{\frac{t}{45}\ln\left(\frac{2}{7}\right)}.$$

4. Queremos saber en qué instante t el objeto alcanza una temperatura de 80^o F, es decir, $T(t) = 70 + 280\,e^{\frac{t}{45}\ln\left(\frac{2}{7}\right)} = 80$, luego:

$$280\,e^{\frac{t}{45}\ln\left(\frac{2}{7}\right)} = 10 \quad \Rightarrow \quad e^{\frac{t}{45}\ln\left(\frac{2}{7}\right)} = \frac{1}{28} \quad \Rightarrow \quad \frac{t}{45}\ln\left(\frac{2}{7}\right) = \ln\left(\frac{1}{28}\right)$$

$$\Rightarrow \quad t = 45\,\frac{\ln\left(\frac{1}{28}\right)}{\ln\left(\frac{2}{7}\right)} \quad \Rightarrow \quad t = 45\,\frac{\ln 28}{\ln 7 - \ln 2} = 119,6947$$

es decir, el objeto adquiere la temperatura de 80^o cuando han pasado 119 minutos y 42 segundos, aproximadamente.

5) La ley de enfriamiento de Newton viene dada por:

$$T'(t) = k\,(T_A - T(t))\,,$$

donde $T(t)$ es la temperatura del cadáver en el instante de tiempo t y T_A es la temperatura del aire que lo rodea.

Los datos del problema nos dicen lo siguiente:

- $T_A = 20^oC$, luego la ley de enfriamiento se escribe:

  $$T'(t) = k\,(20 - T(t))\,,$$

  es decir,

  $$\frac{dT(t)}{dt} = k\,(20 - T(t)) \quad \Rightarrow \quad \frac{dT(t)}{20 - T(t)} = k\,dt.$$

  Integrando la e. d. o., obtenemos:

  $$-\ln|20 - T(t)| = k\,t + c \quad \to \quad T(t) = 20 + C\,e^{-kt},$$

  donde $C = \pm e^{-c}$. En realidad, $C \equiv 0$ también genera una solución, es decir, vale cualquier constante $C \in \mathbb{R}$.

  Observemos que la ecuación anterior también se puede resolver como una e.d.o. lineal completa.

- $$\left.\begin{cases} T(t) &= 20 + C\,e^{-kt} \\ T(0) &= 35 \end{cases}\right\} \Rightarrow C = 15.$$

- $$\left.\begin{cases} T(t) &= 20 + 15\,e^{-kt} \\ T(1) &= 34 \end{cases}\right\} \Rightarrow \quad 20 + 15\,e^{-k} = 34 \quad \Rightarrow e^{-k} = \frac{14}{15},$$

  luego

  $$k = -\ln\left(\frac{14}{15}\right) = \ln 15 - \ln 14 \sim 0,0689.$$

  La temperatura del cuerpo viene dada entonces por:

  $$T(t) = 20 + 15\,e^{t\ln\frac{14}{15}}.$$

- Queremos saber en qué instante t el cuerpo tenía temperatura de 37^o, es decir, $T(t) = 20 + 15\,e^{t\ln\frac{14}{15}} = 37$.

  Entonces,

  $$\frac{17}{15} = e^{t\ln\frac{14}{15}} \Rightarrow \ln\left(\frac{17}{15}\right) = t\ln\left(\frac{14}{15}\right),$$

  luego:

  $$t = \frac{\ln\left(\frac{17}{15}\right)}{\ln\left(\frac{14}{15}\right)} = -1,8141.$$

  Pasando al sistema sexagesimal, eso corresponde a una hora y 48 minutos antes de que el comisario Maigret encontrase el cadáver.

6) Denotamos por $N(t)$ la cantidad de uranio 238 en el año t. Si la desintegración de dicha sustancia es proporcional a la cantidad de sustancia que no ha experimentado descomposición, esto quiere decir que la ley que habría que utilizar acorde al resultado sería:

$$N'(t) = -\lambda\, N(t), \quad \lambda > 0.$$

Como $-\lambda < 0$, la cantidad de moléculas va decreciendo (por la desintegración). Por tanto, la solución es:

$$N(t) = k\, e^{-\lambda\, t}, \quad \text{con } k \in \mathbb{R}.$$

En el tiempo inicial t_0 la cantidad era N_0, es decir, $N(t_0) = N_0$.

Transcurridos 15 años quedan $(1 - 0'000043)\, N_0$, lo que significa que $N(t_0 + 15) = (1 - 0'000043)\, N_0$.

Por tanto, sustituyendo los datos anteriores en la expresión de la solución obtenemos:

$$\left.\begin{array}{l} N(t_0) = N_0 \Rightarrow k\, e^{-\lambda\, t_0} = N_0, \\ N(t_0+15) = (1 - 0'000043)\, N_0 \Rightarrow k\, e^{-\lambda\,(t_0+15)} = (1 - 0'000043)\, N_0 \end{array}\right\}$$

$$\Rightarrow \left\{\begin{array}{l} \lambda = -\dfrac{1}{15}\ln(1 - 0'000043) = -0'2866728302 \cdot 10^{-5} \\ k = N_0\, e^{\frac{1}{15}\ \ln(0'999957)\, t_0} \end{array}\right.$$

Una vez conocidos λ y k, queremos determinar la semivida del uranio 238, es decir, el año t tal que verifica:

$$N(t) = \frac{N_0}{2} \quad \Rightarrow \quad k\, e^{-\lambda t} = \frac{N_0}{2} \quad \Rightarrow \quad e^{\frac{1}{15}\ \ln(0'999957)\,(t_0 - t)} = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \quad t = t_0 - \frac{15\, \ln 2}{\ln(0'999957)} = t_0 + 241790'3295,$$

es decir, la semivida es de 241.790’3295 años.

7) Tenemos que resolver el problema de valor inicial cuya e. d. o. es una ecuación que puede ser considerada lineal y de variables separables. Si la resolvemos como una ecuación de variables separables, tenemos que:

$$\frac{dL}{dt} = 2\,(34 - L) \quad \Rightarrow \quad \frac{dL}{34 - L} = 2\,dt \quad \Rightarrow \quad \int \frac{dL}{34 - L} = \int 2\,dt$$

$$\Rightarrow -\ln|34 - L| = e^{2t+c} \quad \Rightarrow \quad 34 - L = A\,e^{-2t} \quad \Rightarrow$$

con $A = \pm e^c$, $c \in \mathbb{R}$. Observemos que $A = 0$ es también una solución válida. Por tanto,

$$L(t) = 34 - A\,e^{-2t} \qquad \text{con } A \in \mathbb{R}.$$

Si la resolvemos como una ecuación lineal, entonces la escribimos de la forma $L' = a(t)\,L + b(t)$ con $a(t) = -2$. Entonces, $A(t) = \displaystyle\int a(t)\,dt = \int -2\,dt = -2\,t$, y el factor integrante es:

$$e^{-A(t)} = e^{2t}.$$

Multiplicando a ambos lados de la ecuación diferencial por el factor integrante, obtenemos:

$$\frac{d}{dt}\left(e^{2t}\,L\right) = 68\,e^{2t}.$$

Integrando a ambos lados de la expresión anterior:

$$e^{2t}\,L = 68\int e^{2t}\,dt = 34\,e^{2t} + c, \quad c \in \mathbb{R}.$$

La solución general es entonces $\boxed{L(t) = 34 + c\,e^{2t},\ c \in \mathbb{R}}$.

Si imponemos $L(0) = 2$, obtenemos que $A = 32$, luego:

$$L(t) = 34 - 32\,e^{-2t}.$$

8)

(a) Reescribimos la ecuación de la forma:

$$\frac{dy}{dt} = y - y^2 \quad \Rightarrow \quad \frac{dy}{y-y^2} = dt \quad \Rightarrow \quad \int \frac{dy}{y-y^2} = \int dt$$

Descomponemos $\dfrac{1}{y-y^2} = \dfrac{1}{y(1-y)}$ como suma de fracciones simples, de la forma:

$$\frac{1}{y(1-y)} = \frac{A}{y} + \frac{B}{1-y} = \frac{A(1-y)+By}{y(1-y)} = \frac{A+y(B-A)}{y(1-y)}.$$

Como los denominadores son iguales, los numeradores deben serlo. Se deduce entonces que $A = B = 1$, luego

$$t+c = \int \frac{dy}{y-y^2} \quad \Rightarrow \quad t+c = \int \frac{1}{y}\,dy + \int \frac{1}{1-y}\,dy \quad \Rightarrow \quad t+c = \ln|y| - \ln|1-y|$$

$$\Rightarrow \quad t+c = \ln\left|\frac{y}{1-y}\right| \quad \Rightarrow \quad \frac{y}{1-y} = A\,e^t \quad \text{con } A = \pm e^c,\ c \in \mathbb{R}.$$

Como la solución $A = 0$ también es válida, la solución general de la ecuación es:

$$\frac{y}{1-y} = A\,e^t \quad \text{con } A \in \mathbb{R}.$$

Sustituyendo $y(0) = 2$, obtenemos:

$$\frac{2}{1-2} = A \quad \Rightarrow \quad A = -2,$$

luego la solución particular es:

$$\frac{y}{1-y} = -2\,e^t \quad \Rightarrow \quad y(t) = \frac{2\,e^t}{2\,e^t - 1}.$$

(b) Reescribimos la ecuación de la forma:

$$\frac{dy}{dt} = 2\,y - y^2 \quad \Rightarrow \quad \frac{dy}{2y-y^2} = dt \quad \Rightarrow \quad \int \frac{dy}{2y-y^2} = \int dt$$

Descomponemos $\dfrac{1}{2y-y^2} = \dfrac{1}{y(2-y)}$ como suma de fracciones simples, de la forma:

$$\frac{1}{y(2-y)} = \frac{A}{y} + \frac{B}{2-y} = \frac{A(2-y)+By}{y(2-y)} = \frac{2A+y(B-A)}{y(2-y)}.$$

Como los denominadores son iguales, los numeradores deben serlo. Se deduce entonces que $A = B = \dfrac{1}{2}$, luego

$$t + c = \int \frac{dy}{2y - y^2} \quad \Rightarrow \quad t + c = \frac{1}{2} \int \frac{1}{y}\, dy + \frac{1}{2} \int \frac{1}{2 - y}\, dy$$

$$\Rightarrow \quad t + c = \frac{1}{2} \left[\ln|y| - \ln|2 - y|\right] \quad \Rightarrow \quad t + c = \frac{1}{2} \ln\left|\frac{y}{2 - y}\right|$$

$$\Rightarrow \quad \frac{y}{2 - y} = A\, e^{2t} \quad \text{con } A = \pm e^{2c},\ c \in \mathbb{R}.$$

Como la solución $A = 0$ también es válida, la solución general de la ecuación es:

$$\frac{y}{2 - y} = A\, e^{2t} \quad \text{con } A \in \mathbb{R}.$$

Sustituyendo $y(0) = 1$, obtenemos:

$$\frac{1}{2 - 1} = A \quad \Rightarrow \quad A = 1,$$

luego la solución particular es:

$$\frac{y}{2 - y} = e^{2t} \quad \Rightarrow \quad y(t) = \frac{2\, e^{2t}}{1 + e^{2t}}.$$

(c) Reescribimos la ecuación de la forma:

$$\frac{dy}{dt} = y - 3y^2 \quad \Rightarrow \quad \frac{dy}{y - 3y^2} = dt \quad \Rightarrow \quad \int \frac{dy}{y - 3y^2} = \int dt$$

Descomponemos $\dfrac{1}{y - 3y^2} = \dfrac{1}{y(1 - 3y)}$ como suma de fracciones simples, de la forma:

$$\frac{1}{y(1 - 3y)} = \frac{A}{y} + \frac{B}{1 - 3y} = \frac{A(1 - 3y) + By}{y(1 - 3y)} = \frac{A + y(B - 3A)}{y(1 - 3y)}.$$

Como los denominadores son iguales, los numeradores deben serlo. Se deduce entonces que $A = 1$ y $B = 3$, luego

$$t + c = \int \frac{dy}{y - 3y^2} \quad \Rightarrow \quad t + c = \int \frac{1}{y}\, dy + 3 \int \frac{1}{1 - 3y}\, dy$$

$$\Rightarrow \quad t + c = \ln|y| - \ln|1 - 3y| \quad \Rightarrow \quad t + c = \ln\left|\frac{y}{1 - 3y}\right|$$

$$\Rightarrow \quad \frac{y}{1 - 3y} = A\, e^{t} \quad \text{con } A = \pm e^{c},\ c \in \mathbb{R}.$$

Como la solución $A = 0$ también es válida, la solución general de la ecuación es:

$$\frac{y}{1-3y} = A\,e^t \quad \text{con } A \in \mathbb{R}.$$

Sustituyendo $y(0) = 2$, obtenemos:

$$\frac{2}{1-6} = A \quad \Rightarrow \quad A = -\frac{2}{5},$$

luego la solución particular es:

$$\frac{y}{1-3y} = -\frac{2}{5}\,e^t \quad \Rightarrow \quad y(t) = \frac{2\,e^t}{6\,e^t - 5}.$$

(d) Reescribimos la ecuación de la forma:

$$\frac{dy}{dt} = 3y - 2y^2 \quad \Rightarrow \quad \frac{dy}{3y-2y^2} = dt \quad \Rightarrow \quad \int \frac{dy}{3y-2y^2} = \int dt$$

Descomponemos $\dfrac{1}{3y-2y^2} = \dfrac{1}{y(3-2y)}$ como suma de fracciones simples, de la forma:

$$\frac{1}{y(3-2y)} = \frac{A}{y} + \frac{B}{3-2y} = \frac{A(3-2y)+By}{y(3-2y)} = \frac{3A + y(B-2A)}{y(3-2y)}.$$

Como los denominadores son iguales, los numeradores deben serlo. Se deduce entonces que $A = \dfrac{1}{3}$ y $B = \dfrac{2}{3}$, luego

$$t + c = \int \frac{dy}{3y-2y^2} \quad \Rightarrow \quad t + c = \frac{1}{3}\int \frac{1}{y}\,dy + \frac{2}{3}\int \frac{1}{3-2y}\,dy$$

$$\Rightarrow \quad t + c = \frac{1}{3}\left[\ln|y| - \ln|3-2y|\right] \quad \Rightarrow \quad t + c = \frac{1}{3}\ln\left|\frac{y}{3-2y}\right|$$

$$\Rightarrow \quad \frac{y}{3-2y} = A\,e^{3t} \quad \text{con } A = \pm e^c,\ c \in \mathbb{R}.$$

Como la solución $A = 0$ también es válida, la solución general de la ecuación es:

$$\frac{y}{3-2y} = A\,e^{3t} \quad \text{con } A \in \mathbb{R}.$$

Sustituyendo $y(0) = 1$, obtenemos:

$$\frac{1}{3-2} = A \quad \Rightarrow \quad A = 1,$$

luego la solución particular es:

$$\frac{y}{3-2y} = e^{3t} \quad \Rightarrow \quad y(t) = \frac{3\,e^{3t}}{1+2\,e^{3t}}.$$

9) Denotamos por $y(t)$ la cantidad de sal en el depósito en el minuto t. La cantidad inicial es $2,5\,g/l \times 100\,l = 250\,g$, es decir, $y(0) = 250$.

El depósito tiene 100 litros, pero la cantidad de sal disuelta va variando, ya que a la concentración inicial se le está inyectando una disolución con otra concentración distinta. La variación de sal, $y'(t)$, viene dada por la diferencia entre la cantidad de sal a la entrada y a la salida por unidad de tiempo.

Si llamamos c_e a la concentración de sal en la disolución de entrada, c_s a la concentración de sal en la disolución de salida, v_e a la velocidad de entrada y v_s a la velocidad de salida, entonces:

$$y'(t) = c_e \cdot v_e - c_s \cdot v_s.$$

Obsérvese la compatibilidad de las unidades:

$$y(t) \sim g. \quad \Rightarrow \quad y'(t) \sim g./s.$$

$$\left.\begin{array}{l} c \sim g./l. \\ v \sim l./s. \end{array}\right\} \Rightarrow \quad c \cdot v \sim g./s.$$

Según los datos del problema, $v_e = v_s = 5$, $c_e = 2$, y

$$c_s = \frac{\text{cantidad de sal}}{\text{n}^o \text{ litros}} = \frac{y(t)}{\text{volumen del depósito}},$$

es decir, $y'(t) = 2 \cdot 5 - \dfrac{y(t)}{100} \cdot 5 = 10 - \dfrac{1}{20}\, y(t)$. Por tanto, tenemos que resolver la ecuación lineal:

$$y'(t) + \frac{1}{20}\, y(t) = 10,$$

por cualquiera de los dos métodos aplicados en ejercicios previos. Si consideramos que se trata de una ecuación lineal completa, para resolverla la escribimos de la forma $y' = a(t)\, y + b(t)$ con $a(t) = -\dfrac{1}{20}$. Entonces, $A(t) = \displaystyle\int a(t)\, dt = \int -\frac{1}{20}\, dt = -\frac{1}{20}\, t$, y el factor integrante es:

$$e^{-A(t)} = e^{\frac{t}{20}}.$$

Multiplicando a ambos lados de la ecuación diferencial por el factor integrante, obtenemos:

$$\frac{d}{dt}\left(e^{\frac{t}{20}}\, y\right) = 10\, e^{\frac{t}{20}}.$$

Integrando a ambos lados de la expresión anterior:

$$e^{\frac{t}{20}}\, y = \int 10\, e^{\frac{t}{20}}\, dt = 200\, e^{\frac{t}{20}} + C.$$

La solución general es entonces $\boxed{y(t) = 200 + C\, e^{-\frac{t}{20}},\ C \in \mathbb{R}}$.

Como $y(0) = 250$, entonces $C = 50$. Finalmente, la evolución de la cantidad de sal en el depósito es:

$$y(t) = 200 + 50\, e^{-\frac{t}{20}}.$$

Obsérvese que la cantidad de sal va disminuyendo indefinidamente y tiende a la concentración (de equilibrio) de 200 gramos.

10) Denotamos por $y(t)$ la cantidad de medicamento en un órgano en el segundo t.

El órgano tiene $125\,cm^3$, pero la cantidad de medicamento disuelto va variando, ya que al órgano se le está administrando un medicamento con otra concentración distinta. La variación de la concentración del medicamento, $y'(t)$, viene dada por la diferencia entre la cantidad de medicamento a la entrada y a la salida por unidad de tiempo.

Si llamamos c_e a la concentración de medicamento en la disolución de entrada, c_s a la concentración de medicamento en la disolución de salida, v_e a la velocidad de entrada y v_s a la velocidad de salida, entonces:

$$y'(t) = c_e \cdot v_e - c_s \cdot v_s.$$

Según los datos del problema, $v_e = v_s = 3$, $c_e = 0'2$, y

$$c_s = \frac{\text{cantidad de medicamento}}{\text{volumen}} = \frac{y(t)}{125\,cm^3},$$

es decir,

$$y'(t) = 0'2 \cdot 3 - \frac{y(t)}{125} \cdot 3 = 0'6 - \frac{3}{125}\,y(t)$$

Por tanto, tenemos que resolver la siguiente ecuación que de nuevo se puede considerar como de variables separables o como ecuación lineal. Para resolverla como lineal, la escribimos de la forma $y' = a(t)\,y + b(t)$ con $a(t) = -\frac{3}{125}$. Entonces, $A(t) = \int a(t)\,dt = \int -\frac{3}{125}\,dt = -\frac{3}{125}\,t$, y el factor integrante es:

$$e^{-A(t)} = e^{\frac{3t}{125}}.$$

Multiplicando a ambos lados de la ecuación diferencial por el factor integrante, obtenemos:

$$\frac{d}{dt}\left(e^{\frac{3t}{125}}\,y\right) = 0'6\,e^{\frac{3t}{125}}.$$

Integrando a ambos lados de la expresión anterior:

$$e^{\frac{3t}{125}}\,y = \int 0'6\,e^{\frac{3t}{125}}\,dt = 25\,e^{\frac{3t}{125}} + C.$$

La solución general es entonces $\boxed{y(t) = 25 + C\,e^{-\frac{3t}{125}},\ C \in \mathbb{R}}$.

(a) Si $y(0) = 0$, entonces $C = -25$, luego $y(t) = 25\left(1 - e^{-\frac{3t}{125}}\right)$ e $\frac{y(t)}{125}$ es la concentración en cualquier instante t.

(b) Buscamos el tiempo t en el que la concentración del medicamento en el órgano sea $0'1\,g/cm^3$, es decir, $\frac{y(t)}{125} = 0'1$. Para ello, se debe verificar:

$$\frac{1}{5}\left(1 - e^{-\frac{3t}{125}}\right) = 0'1 \quad \Rightarrow \quad t = -\frac{125}{3}\ln(0'5) = 28'88\,sg.$$

11) Denotamos por $y(t)$ la cantidad de humo en una habitación en la hora t.

La habitación tiene $300\,m^3$, pero la cantidad de humo en el aire va variando, ya que a la concentración inicial, que era cero, se le está añadiendo el humo del tabaco. La variación de la concentración de humo, $y'(t)$, viene dada por la diferencia entre la cantidad de humo que entra en la habitación por los fumadores y la mezcla que sale por la ventana.

Si llamamos c_e a la concentración de humo que se produce fumando, c_s a la concentración de humo que sale por la ventana, v_e a la velocidad de entrada y v_s a la velocidad de salida, entonces:

$$y'(t) = c_e \cdot v_e - c_s \cdot v_s.$$

Según los datos del problema, $v_e = v_s = 3$, $c_e = 0'04$, y $c_s = \dfrac{\text{cantidad de humo}}{m^3}$, es decir,

$$y'(t) = 0'04 \cdot 3 - \frac{y(t)}{300} \cdot 3 = 0'12 - \frac{1}{100}\, y(t)$$

(a) Por tanto, tenemos que resolver la ecuación siguiente, que de nuevo puede ser considerada como lineal o de variables separables. En caso de considerarla como ecuación lineal, para resolverla la escribimos de la forma $y' = a(t)\,y + b(t)$ con $a(t) = -\dfrac{1}{100}$. Entonces, $A(t) = \displaystyle\int a(t)\,dt = \int -\frac{1}{100}\,dt = -\frac{1}{100}\,t$, y el factor integrante es:

$$e^{-A(t)} = e^{\frac{t}{100}}.$$

Multiplicando a ambos lados de la ecuación diferencial por el factor integrante, obtenemos:

$$\frac{d}{dt}\left(e^{\frac{t}{100}}\, y\right) = 0'12\, e^{\frac{t}{100}}.$$

Integrando a ambos lados de la expresión anterior:

$$e^{\frac{t}{100}}\, y = \int 0'12\, e^{\frac{t}{100}}\, dt = 12\, e^{\frac{t}{100}} + C.$$

La solución general es entonces $\boxed{y(t) = 12 + C\, e^{-\frac{t}{100}},\ C \in \mathbb{R}}$.

(b) Buscamos el tiempo t en el que la concentración de humo sea superior a $0'0002\, g/m^3$, es decir, $\dfrac{y(t)}{300} \geq 0'0002$. Para ello, se debe verificar:

$$12\left(1 - e^{-\frac{t}{100}}\right) \geq 0'06 \quad \Rightarrow \quad t \geq 0'5012\,\text{horas},$$

que corresponde a 30 minutos y 4 segundos.

12) Denotamos por $y(t)$ el número de estudiantes contagiados en el día t. Del enunciado del problema deducimos que la ecuación diferencial que rige la transmisión de la enfermedad es la siguiente:

$$\frac{dy}{dt} = k\,y\,(1000 - y)$$

y la condición inicial es $y(0) = 1$, ya que inicialmente hay un único portador del virus de la gripe.

(a) Para determinar el número de personas enfermas en el día t, necesitamos resolver la ecuación diferencial anterior. Para ello la escribimos de la forma:

$$\frac{dy}{dt} = ky(1000-y) \quad \Rightarrow \quad \frac{dy}{y(1000-y)} = k\,dt \quad \Rightarrow \quad \int \frac{dy}{y(1000-y)} = \int k\,dt$$

Descomponemos $\dfrac{1}{y(1000-y)}$ como suma de fracciones simples, de la forma:

$$\frac{1}{y(1000-y)} = \frac{A}{y} + \frac{B}{1000-y} = \frac{A(1000-y)+By}{y(1-y)}.$$

Como los denominadores son iguales, los numeradores deben serlo. Se deduce entonces que $A = B = \dfrac{1}{1000}$, luego

$$kt+c = \int \frac{dy}{y(1000-y)} \quad \Rightarrow \quad kt+c = \frac{1}{1000}\int \frac{1}{y}\,dy + \frac{1}{1000}\int \frac{1}{1000-y}\,dy$$

$$\Rightarrow \quad kt+c = \frac{1}{1000}\left[\ln|y| - \ln|1000-y|\right] \quad \Rightarrow \quad kt+c = \frac{1}{1000}\ln\left|\frac{y}{1000-y}\right|$$

$$\Rightarrow \quad \frac{y}{1000-y} = A\,e^{1000kt} \quad \text{con } A = \pm e^{c},\ c \in \mathbb{R}.$$

Como la solución $A = 0$ también es válida, la solución general de la ecuación es:

$$\frac{y}{1000-y} = A\,e^{1000kt} \quad \text{con } A \in \mathbb{R}.$$

Sustituyendo $y(0) = 1$, obtenemos:

$$\frac{1}{1000-1} = A \quad \Rightarrow \quad A = \frac{1}{999},$$

y como $y(4) = 50$, entonces:

$$\frac{50}{1000-50} = A\,e^{4000k} \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{19} = \frac{1}{999}e^{4000k} \quad \Rightarrow \quad \frac{999}{19} = e^{4000k},$$

$$\Rightarrow \quad k = \frac{1}{4000} \ln\left(\frac{999}{19}\right),$$

luego la solución particular es:

$$\frac{y}{1000-y} = \frac{1}{999}\, e^{\ln(\frac{999}{19})\frac{t}{4}} \quad \Rightarrow \quad y(t) = \frac{1000\, e^{\ln(\frac{999}{19})\frac{t}{4}}}{999 + e^{\ln(\frac{999}{19})\frac{t}{4}}}.$$

(b) Para calcular cuando habrá 500 estudiantes enfermos, necesitamos resolver:

$$y(t) = 500 \quad \Rightarrow \quad \frac{1000\, e^{\ln(\frac{999}{19})\frac{t}{4}}}{999 + e^{\ln(\frac{999}{19})\frac{t}{4}}} = 500 \quad \Rightarrow \quad t = \frac{4\ln(999)}{\ln(\frac{999}{19})} = 6'972442508.$$

Por tanto, habrá 500 estudiantes enfermos a los $6'972442508$ días, es decir, casi a los 7 días.

(c) El concepto mucho tiempo hace referencia a qué ocurrirá cuando $t \to +\infty$, es decir, debemos calcular:

$$\lim_{t\to+\infty} y(t) = 1000.$$

Por tanto, deducimos que toda la población del campus se infectará.

13) Denotamos por $y(t)$ la cantidad de herbívoros de la sabana africana, y por $x(t)$ la cantidad de hierba. Del enunciado del problema deducimos los siguientes datos:

- Si la cantidad de herbívoros crece con velocidad constante igual a 10, esto significa que $y'(t) = 10$.
- Si al comienzo del estudio hay 100 herbívoros, entonces $y(0) = 100$.
- Si la velocidad de destrucción de la hierba es proporcional a la suma de la cantidad de hierba y del número de herbívoros entonces, como en el ejercicio 6, $(x(0) - x(t))' = a\,(x(t) + y(t))$, es decir, llamando $k = -a$:

$$x'(t) = k\ (x(t) + y(t))$$

Con todo ello, obtenemos que:

(a) La ecuación diferencial para el número de herbívoros es $y'(t) = 10$, luego junto con la condición inicial nos da que:

$$y(t) = y(0) + y'(t)\,t = 100 + 10\,t.$$

(b) La ecuación diferencial para la cantidad de hierba es $x'(t) = k\ (x(t) + y(t))$, donde sustituyendo la expresión de $y(t)$ obtenemos:

$$x'(t) = k\ (x(t) + 100 + 10\,t)$$

que es linea completa, ya que se puede escribir de la forma:

$$x'(t) - k\,x(t) = 100\,k + 10\,k\,t.$$

Para resolverla, la escribimos de la forma $x' = a(t)\,x + b(t)$ con $a(t) = k$. Entonces, $A(t) = \displaystyle\int a(t)\,dt = \int k\,dt = k\,t$, y el factor integrante es:

$$e^{-A(t)} = e^{-kt}.$$

Multiplicando a ambos lados de la ecuación diferencial por el factor integrante, obtenemos:

$$\frac{d}{dt}\left(e^{-kt}\,x\right) = 10\,k\,(10 + t)\,e^{-kt}.$$

Integrando a ambos lados de la expresión anterior:

$$e^{-kt}\,x = \int 10\,k\,(10 + t)\,e^{-kt}\,dt$$

$$\Rightarrow \quad e^{-kt}\,x = \int 100\,k\,e^{-kt}\,dt + \int 10\,k\,t\,e^{-kt}\,dt$$

$$\Rightarrow \quad e^{-kt}\,x = -100\,e^{-kt} + \int 10\,k\,t\,e^{-kt}\,dt,$$

donde integrando por partes, obtenemos:

$$\begin{aligned}\int 10\,k\,t\,e^{-kt}\,dt &= 10\,k \int t\,e^{-kt}\,dt = 10\,k\left[-\frac{1}{k}\,t\,e^{-kt} + \frac{1}{k}\int e^{-kt}\,dt\right]\\ &= 10\,k\left[-\frac{t}{k}\,e^{-kt} - \frac{1}{k^2}\,e^{-kt} + C\right] = -10\,t\,e^{-kt} - \frac{10}{k}\,e^{-kt} + C,\end{aligned}$$

lo que implica que la solución general es:

$$x(t) = -100 - 10\,t - \frac{10}{k} + C\,e^{k\,t}.$$

(c) Si $k = -1$ y $x(0) = 300$, entonces se tiene que cumplir que:

$$-100 + 10 + c = 300 \quad \Rightarrow \quad c = 390,$$

con lo que la solución general se transforma en:

$$x(t) = -90 - 10\,t + 390\,e^{-t}$$

La cantidad de hierba que habrá al cabo de un año es $x(1) = -100 + 390\,e^{-1} = 43'47$.

(d) Queremos saber si existe un tiempo t para el cual $x(t) = 0$. Para ello razonamos de siguiente modo: Definimos la función $f(t) = -90 - 10\,t + 390\,e^{-t}$ y observamos que $f'(t) = -10 - 390\,e^{-t} < 0$, $\forall t \geq 0$. Como, además, la función es continua, $f(0) = 300$ y $\lim\limits_{t\to+\infty} f(t) = -\infty$, entonces debe existir algún punto t en el que dicha función se anule, o lo que es lo mismo, en el que la hierba desaparezca.

14) Denotamos por $g(t)$ la cantidad de kilos de trigo almacenados en un granero, y por $r(t)$ la cantidad de roedores que se alimenta del trigo almacenado. Del enunciado del problema deducimos los siguientes datos:

- La cantidad de roedores crece con velocidad constante igual a 2, esto significa que $r'(t) = 2$.
- Al comienzo del estudio hay r_0 roedores, es decir, $r(0) = r_0$.
- El ritmo de decrecimiento del trigo (a causa de los roedores) es proporcional al producto de la cantidad de roedores y la cantidad de trigo con constante -1, entonces:

$$g'(t) = -g(t) \cdot r(t)$$

Con todo ello, obtenemos que:

(a) La ecuación diferencial para el número de roedores es $r'(t) = 2$, luego junto con la condición inicial nos da que:

$$r(t) = r(0) + r'(t)\,t = r_0 + 2\,t.$$

(b) La ecuación diferencial para la cantidad de trigo es $g'(t) = -g(t) \cdot r(t)$, donde sustituyendo la expresión de $r(t)$ obtenemos:

$$g'(t) = -g(t) \cdot (r_0 + 2\,t)$$

que se puede clasificar como lineal homogénea o de variables separables. Razonamos como sigue:

$$\frac{dg}{dt} = -g\ (r_0 + 2\,t) \quad \Rightarrow \quad \frac{dg}{g} = -\,(r_0 + 2\,t)\ dt$$

$$\Rightarrow \quad \ln|g(t)| = -r_0\,t - t^2 + c \quad \Rightarrow \quad |g(t)| = e^c\,e^{-r_0\,t - t^2}$$

luego $g(t) = A\,e^{-r_0 t - t^2}$ con $A = \pm e^c \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$. Observemos que $A = 0$, que corresponde a $g(t) \equiv 0$, es también una solución válida.

Como $g(0) = g_0$, entonces $A = g_0$ con lo que:

$$g(t) = g_0\,e^{-r_0 t - t^2}.$$

(c) Si $r_0 = 2$, entonces $g(t) = g_0\,e^{-2t-t^2}$.

El tiempo que tardarán los roedores en comerse $\dfrac{1}{4}$ de la cantidad de trigo inicial es el que verifique:

$$g(t) = \frac{3}{4}\,g_0 \quad \Longleftrightarrow \quad g_0\,e^{-2t-t^2} = \frac{3}{4}\,g_0 \quad \Longleftrightarrow \quad e^{-2t-t^2} = \frac{3}{4}.$$

Luego $-2t - t^2 = \ln\left(\frac{3}{4}\right)$. Tenemos que resolver entonces la ecuación de segundo grado:

$$t^2 + 2t + \ln\left(\frac{3}{4}\right) = 0,$$

cuyas raíces son $t = -1 \pm \sqrt{1 - \ln\left(\frac{3}{4}\right)}$. De ellas, la solución válida es la raíz positiva, es decir,

$$t = -1 + \sqrt{1 - \ln\left(\frac{3}{4}\right)} = 0'1347.$$

Y el tiempo que tardarán en comerse todo el trigo es aquel tiempo que verifica:

$$g(t) = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad g_0\, e^{-2t-t^2} = 0$$

Esta función va decreciendo hasta cero (cuando el tiempo se hace infinito) pero nunca se alcanza dicho valor.

15)

(a) Denotamos por $y(t)$ la cantidad de sal en el acuario en el minuto t.

El acuario contiene $60\,l$, pero la cantidad de sal disuelta va variando, ya que está llegando salmuera con $20\,g/l.$ a una velocidad de $2\,l/min$. La variación de la concentración de sal, $y'(t)$, viene dada por la diferencia entre la cantidad de sal entrante y saliente por unidad de tiempo.

Si llamamos c_e a la concentración de sal en la disolución de entrada, c_s a la concentración de sal en la disolución de salida, v_e a la velocidad de entrada y v_s a la velocidad de salida (y como $v_e = v_c$), entonces:

$$y'(t) = c_e \cdot v_e - c_s \cdot v_s.$$

Según los datos del problema, $v_e = v_s = 2$, $c_e = 20$, y

$$c_s = \frac{\text{cantidad de sal}}{\text{volumen}} = \frac{y(t)}{60},$$

es decir,

$$y'(t) = 20 \cdot 2 - \frac{y(t)}{60} \cdot 2 = 40 - \frac{1}{30}\,y(t)$$

Por tanto, tenemos que resolver la siguiente ecuación que de nuevo se puede considerar como de variables separables o como ecuación lineal. Para resolverla como lineal, la escribimos de la forma $y' = a(t)\,y + b(t)$ con $a(t) = -\frac{1}{30}$. Entonces, $A(t) = \int a(t)\,dt = \int -\frac{1}{30}\,dt = -\frac{t}{30}$, y el factor integrante es:

$$e^{-A(t)} = e^{\frac{t}{30}}.$$

Multiplicando a ambos lados de la ecuación diferencial por el factor integrante, obtenemos:

$$\frac{d}{dt}\left(e^{\frac{t}{30}}\,y\right) = 40\,e^{\frac{t}{30}}.$$

Integrando a ambos lados de la expresión anterior:

$$e^{\frac{t}{30}}\,y = \int 40\,e^{\frac{t}{30}}\,dt = 1200\,e^{\frac{t}{30}} + C.$$

La solución general es entonces $\boxed{y(t) = 1200 + C\,e^{-\frac{t}{30}},\ C \in \mathbb{R}}$.

Como inicialmente el agua es pura, $y(0) = 0$, luego:

$$1200 + C = 0 \quad \Rightarrow \quad C = -1200,$$

luego $y(t) = 1200\left(1 - e^{-\frac{t}{30}}\right)$ es la cantidad de sal que hay en el acuario en cada instante t.

(b) Buscamos el tiempo t en el que la concentración de sal sea $15\,g/l$, es decir, $\dfrac{y(t)}{60} = 15$. Para ello, se debe verificar:

$$20\left(1 - e^{-\frac{t}{30}}\right) = 15 \quad \Rightarrow \quad t = 30\ln(4) = 41'58883083\,min.,$$

es decir, a los 41 minutos, 37 segundos.