Universidad de Sevilla

Resúmenes teóricos de la asignatura

Matemática Aplicada

Licenciatura de Farmacia

Primer curso

Índice general

Tema 1

Funciones reales de variable real. Funciones elementales, límites, continuidad y propiedades

1.1. Preliminares: conjuntos numéricos

Las necesidades sucesivas del hombre han obligado a modificar sus herramientas de trabajo para resolver problemas más complejos. Así, hay una evolución en el desarrollo de los conjuntos numéricos, siendo los más frecuentes los siguientes.

Naturales $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$ (contar)
imposibilidad de resolver p.ej. $x + 7 = 0$.

Enteros $\mathbb{Z} = \mathbb{N} \cup \{0\} \cup \{-n : n \in \mathbb{N}\}$ $(\mathbb{N} \subset \mathbb{Z})$
imposibilidad de resolver p.ej. $3x = 2$.

Racionales $\mathbb{Q} = \{\frac{p}{q} \ : \ p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{N}\}$
$(\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q})$ imposible resolver p.ej. $x^2 - 2 = 0$.

Reales $\mathbb{R} =$ "clausura/completado" de $\mathbb{Q}$
$(\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R})$ recta real; axioma del supremo = Teor. de Cantor = Teor. de Bolzano
imposibilidad de resolver ecuaciones como $x^2 + 1 = 0$.

Complejos $\mathbb{C} = \{a + bi \ : \ a, b \in \mathbb{R},\ i^2 = -1\}$
$(\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C})$ Toda ecuación algebraica tiene solución en $\mathbb{C}$

Operaciones y orden. Propiedades

De la Suma $(+)$	$\mathbb{N}$	$\mathbb{Z}$	$\mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$
Asociativa: $a + (b + c) = (a + b) + c$	sí	sí	sí
Conmutativa: $a + b = b + a$	sí	sí	sí
El. Neutro: $a + 0 = 0 + a = a$		sí	sí
El. Simétrico: $a + (-a) = (-a) + a = 0$		sí	sí
Del Producto$(\cdot)$			
Asociativa: $a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$	sí	sí	sí
Conmutativa: $a \cdot b = b \cdot a$	sí	sí	sí
El. Neutro: $a \cdot 1 = 1 \cdot a = a$	sí	sí	sí
El. Simétrico: $a \cdot a^{-1} = a^{-1} \cdot a = 1$			sí
Prop. distributiva:			
$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$	sí	sí	sí

$\mathbb{Q}$ es un cuerpo ordenado

$(\mathbb{Q}, +, \cdot)$ es un cuerpo conmutativo.
Se define una relación $(\leq)$ de orden: dados $p, q, m, n \geq 0$, $\frac{p}{q} \leq \frac{m}{n} \Leftrightarrow pn \leq qm$.

Propiedades:

Reflexiva: $\forall a \in \mathbb{Q} : \; a \leq a$.
Antisimétrica: $a \leq b, \; b \leq a \Rightarrow a = b$.
Transitiva: $a \leq b, \; b \leq c \Rightarrow a \leq c$.
Además, dicha relación es total: $\forall a, b \in \mathbb{Q}, \; a \leq b$ ó $b \leq a$.
La relación de orden es compatible con la suma y el producto:

$$\begin{aligned} a \leq b \quad &\Rightarrow \quad a + c \leq b + c \qquad \forall a, b, c \in \mathbb{Q}, \\ a \leq b, \boxed{c \geq 0} \quad &\Rightarrow \quad a \cdot c \leq b \cdot c \qquad \forall a, b, c \in \mathbb{Q}. \end{aligned}$$

$(\mathbb{Q}, +, \cdot, \leq)$ es un cuerpo ordenado. Podemos representarlos en un recta, PERO **hay puntos en la recta que no se corresponden con ningún racional.**

Teorema 1.1. $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$, *es decir, no existe ningún número racional cuyo cuadrado sea* 2.

Demostración. Por Reducción al Absurdo: supongamos que existe $\frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$ tal que $\left(\frac{p}{q}\right)^2 = 2$ y llegaremos a una contradicción.

Sin pérdida de generalidad podemos suponer que p y $q \in \mathbb{Z}$ no tienen factores comunes. Como $\frac{p^2}{q^2} = 2$, se tiene $p^2 = 2q^2$, luego p^2 es par. Así también p es par $(p = 2k)$ (si fuera impar, p^2 también lo sería). Luego $p^2 = 4k^2$, con lo que q^2 es par y q también. $\square$

Para "completar" la recta hasta llenarla debemos ampliar hasta los números reales. [más adelante veremos axiomas sobre su construcción: del supremo, y el Teorema de Bolzano.]

$\mathbb{R}$ es un cuerpo ordenado

En todo $\mathbb{R}$ se pueden definir operaciones suma $(+)$ y producto $(\cdot)$ que extienden las definidas antes, y una relación de orden $(\leq)$ que también es total.

Dados $a, b \in \mathbb{R}$, diremos que
$a \geq b$ si $b \leq a$.
$a < b$ si $a \leq b$ y $a \neq b$.
$a > b$ si $b < a$.

Números reales. Axioma del supremo

Definición 1.2. *Sea $S \subset \mathbb{R}$. Se dice que:*
$a \in \mathbb{R}$ *es cota superior de* S *cuando* $x \leq a\ \forall x \in S$.
$a \in \mathbb{R}$ *es cota inferior de* S *cuando* $a \leq x\ \forall x \in S$.
S *está acotado superiormente si tiene una cota superior.*
S *está acotado inferiormente si tiene una cota inferior.*
S *está acotado si tiene cotas superior e inferior.*
supremo de S $(\sup S)$ *la menor cota superior.*
ínfimo de S $(\inf S)$ *la mayor cota inferior.*
máximo de S $(\max S)$ *al* $\sup S$ *si pertenece a* S.
mínimo de S $(\min S)$ *al* $\inf S$ *si pertenece a* S.

Axioma del supremo Todo subconjunto no vacío de $\mathbb{R}$ acotado superiormente tiene un supremo en $\mathbb{R}$.

$$\emptyset \neq S \subset \mathbb{R},\ S \,\text{acot. sup.} \Rightarrow\ \exists sup\, S \in \mathbb{R}.$$

ESTE AXIOMA NO SE CUMPLE EN $\mathbb{Q}$

$$S = \{x \in \mathbb{Q}\ :\ x^2 < 2\} \subset \mathbb{Q}\ \Rightarrow\ sup\, S = \sqrt{2} \notin \mathbb{Q}.$$

(La prueba usa propiedades de densidad.)

Propiedades de $\mathbb{R}$:

- Propiedad (axioma) del ínfimo: todo subconjunto no vacío de $\mathbb{R}$ acotado inferiormente tiene ínfimo.

- $\forall x \in \mathbb{R},\ x > 0,\ \exists n \in \mathbb{N}\ :\ x < n$.

- Propiedad arquimediana: $\forall x > 0\, \forall y \in \mathbb{R},\ \exists n \in \mathbb{N}\ :\ \ y < nx$. Una regla corta puede medir distancias largas.

- Densidad de los racionales:

$$\forall x, y \in \mathbb{R},\ \exists q \in \mathbb{Q} : x < q < y.$$

  Entre dos números reales distintos siempre existe un racional, y en consecuencia, infinitos racionales.

- Densidad de los irracionales:

$$\forall x, y \in \mathbb{R},\ \exists z \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q} : x < z < y.$$

Subconjuntos de $\mathbb{R}$. Intervalos

$[a,b] = \{x \in \mathbb{R}\ :\ a \leq x \leq b\}$ intervalo cerrado.
$(a,b) = \{x \in \mathbb{R}\ :\ a < x < b\}$ intervalo abierto.
$[a,b) = \{x \in \mathbb{R}\ :\ a \leq x < b\}$ semi-abierto semi-cerrado.
$(a,b] = \{x \in \mathbb{R}\ :\ a < x \leq b\}$ semi-abierto semi-cerrado.
$(-\infty,b] = \{x \in \mathbb{R}\ :\ x \leq b\}$ intervalo no acotado.
$(-\infty,b) = \{x \in \mathbb{R}\ :\ x < b\}$ intervalo no acotado.
$[a,+\infty) = \{x \in \mathbb{R}\ :\ a \leq x\}$ intervalo no acotado.
$(a,+\infty) = \{x \in \mathbb{R}\ :\ a < x\}$ intervalo no acotado.
$\mathbb{R} = (-\infty,+\infty),\ \mathbb{R}_- = (-\infty,0],\ \mathbb{R}_+ = [0,+\infty).$

Función valor absoluto

$$|x| = \begin{cases} x & \text{si } x \geq 0, \\ -x & \text{si } x < 0, \end{cases} \quad x \in \mathbb{R}.$$

Propiedades:

1. $|x| \geq 0\ \forall x \in \mathbb{R}$.
2. $|x| = 0 \ \Leftrightarrow\ x = 0$.
3. $|xy| = |x||y|,\ \forall x, y \in \mathbb{R}$.
4. $|-x| = |x|\ \forall x \in \mathbb{R}$.
5. Desigualdad triangular: $|x+y| \leq |x| + |y|\ \forall x, y \in \mathbb{R}$.
6. $|x| - |y| \leq \big||x| - |y|\big| \leq |x-y|\ \forall x, y \in \mathbb{R}$.
7. $|x| \leq a \ \Leftrightarrow\ -a \leq x \leq a\ \forall x \in \mathbb{R}, a > 0$.
8. $|x-b| \leq a \ \Leftrightarrow\ b-a \leq x \leq b+a\ \forall x, b \in \mathbb{R}, a > 0$.
9. $|x| \geq k \ \Leftrightarrow\ x \geq k$ ó $x \leq -k,\ \forall x \in \mathbb{R},\ k \geq 0$.

Las tres últimas propiedades también son ciertas con $<$ y $>$ en vez de $\leq$ y $\geq$.

1.2. Generalidades sobre funciones. Representación gráfica

Definición 1.3. *Se llama función (real de variable real) a toda aplicación*

$$\begin{aligned} f:\ \ \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto f(x) \end{aligned}$$

que a cada número x le hace corresponder otro valor $f(x)$.

Definición 1.4. *Se llama dominio de una función f (lo denotaremos por Dom f) al conjunto de valores para los que está bien definida $f(x)$:*

$$Domf = \{x \in \mathbb{R} : \exists f(x) \in \mathbb{R}\}.$$

$$f : Domf \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto f(x).$$

Habrá ocasiones en que nos den una fórmula y debamos hallar el dominio en que es válida aplicarla:
$f(x) = \sqrt{x}$ Dom$f = \mathbb{R}_+$.
$f(x) = \dfrac{1}{x}$ Dom$f = \mathbb{R}\backslash\{0\}$.

Imagen o rango o recorrido de $f \equiv$ valores que toma f :

$$\text{Im}f = \{f(x) \ : \ x \in \text{Dom}f\}.$$

Sea $f : \text{Dom}f \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Se dice que es:

Par si $f(-x) = f(x)$ $\forall x \in \text{Dom}f$.
Impar si $f(-x) = -f(x)$ $\forall x \in \text{Dom}f$.
Periódica si $\exists T > 0 \ : \ f(x+T) = f(x)$ $\forall x \in \text{Dom}f$.
(Representación) Gráfica de f a la representación en ejes cartesianos del siguiente conjunto de puntos del plano:

$$\{(x, f(x)) \in \mathbb{R}^2 \ : \ x \in \text{Dom}f\}.$$

1.3. Composición de funciones. Función inversa

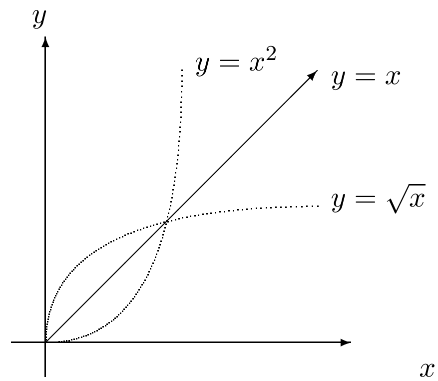
Antes incluso de describir las funciones elementales, debemos mostrar un procedimiento que ayudará, una vez tengamos definido un conjunto de funciones, a "combinarlas" para generar más, e incluso definir otras que cumplan determinadas propiedades respecto de estas combinaciones. Este procedimiento es la composición de funciones.

Definición 1.5. *Dadas dos funciones $f : S \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g : T \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tales que $f(S) \subset T$, se define la función compuesta $g \circ f : S \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto (g \circ f)(x) = g(f(x))$.*

Ejemplo 1.6. *En general $g \circ f \neq f \circ g$. Sean $f(x) = x^2$, $g(x) = x + 1$. $g(f(x)) = x^2 + 1$, $f(g(x)) = (x+1)^2$.*

Definición 1.7. *Llamamos función inversa o recíproca respecto de la composición de una función dada $f : S \to \mathbb{R}$ y notamos f^{-1}, a una función $f^{-1} : f(S) \to \mathbb{R}$ tal que $y \in f(S) \mapsto f^{-1}(y) = x$ con $f(x) = y$.*

Se cumple entonces que $(f \circ f^{-1})(x) = x$ $\forall x \in S$,
$(f^{-1} \circ f)(y) = y$ $\forall y \in f(S)$.
Además, se obtiene la siguiente relación de simetría entre las representaciones gráficas de una función y su inversa (ya que consiste en intercambiar los papeles de las variables x e y).
Simetría respecto la bisectriz del primer cuadrante:



Simetría respecto la bisectriz

1.4. Funciones elementales

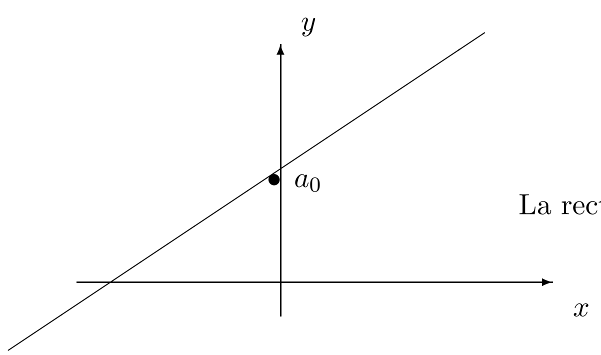
Funciones polinómicas

$p : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto p(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n$ donde $a_i \in \mathbb{R}$ $i = 0, 1, 2, \ldots, n$, siendo $a_n \neq 0$.

Dom$p = \mathbb{R}$

Caso $n = 1$. Recta

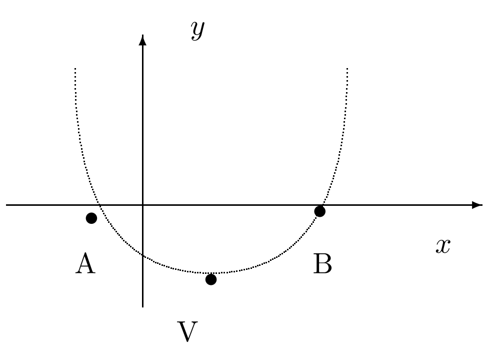
Sólo son necesarios dos valores



La recta $y = a_0 + a_1 x$

Caso $n = 2$. La parábola $p(x) = ax^2 + bx + c$ (con $a \neq 0$)

Puede tener hasta dos puntos de corte con el eje OX.



$V = \left(-\frac{b}{2a}, p(-\frac{b}{2a})\right)$

$$A, B = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Para grados superior a 2 debemos esperar a tener más herramientas para conocer su representación gráfica.

Para el estudio del signo de un polinomio, resultará muy útil conocer procedimientos de factorización. Recordamos brevemente con ejemplos cómo se aplica la Regla de Ruffini para dividir (y eventualmente factorizar) un polinomio de grado cualquiera entre otro de grado uno.

Se toman los coeficientes del polinomio del numerador y el elemento opuesto (cambio de signo) del coeficiente de grado cero del denominador y opera como en el ejemplo (se baja el primer coeficiente, multiplica, se sube el resultado y se suma):

Ejemplo 1.8. *Queremos calcular el cociente* $\dfrac{x^3 - 3x^2 - 7x - 8}{x - 5}$

$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & -3 & -7 & 8 \\ 5 & & 5 & 10 & 15 \\ \hline & 1 & 2 & 3 & \boxed{7} \end{array}$$

Observa los números obtenidos a través de la operación anterior. Salvo el último (recuadrado), que es el resto, los demás, denotan los coeficientes de un polinomio un grado menor, o sea, 2*:*

Esto nos dice que

$$x^3 - 3x^2 - 7x - 8 = (x - 5)(x^2 + 2x + 3) + 7$$

(compruébalo desarrollando la expresión de la derecha). Dicho de otro modo, si evaluamos $p(5)$*, siendo* $p(x) = x^3 - 3x^2 - 7x - 8$*, obtenemos* $p(5) = 7$*.*

El caso interesante se produce cuando el resto es cero (en lugar de 7), eso dice que cierto número (en este caso habría sido 5) **es un cero o raíz del polinomio** y, por tanto, que éste puede factorizarse como $(x - 5)$ por otro polinomio de un grado menos.

Ejemplo 1.9. *Sea* $q(x) = x^4 + x^3 - 7x^2 + 4$*. Puedes comprobar que* $q(2) = 0$*, eso indica que* $q(x) = (x - 2)r(x)$ *con* $r(x)$ *otro polinomio de grado* 3*. Para hallarlo desarrollamos por Ruffini (ojo, hay que poner los coeficientes de todos los monomios, incluidos* 0 *por aquéllos que no aparecen):*

$$\begin{array}{r|rrrrr} & 1 & 1 & -7 & 0 & 4 \\ 2 & & 2 & 6 & -2 & -4 \\ \hline & 1 & 3 & -1 & -2 & \boxed{0} \end{array}$$

Comprueba, desarrollando el producto, que se tiene la siguiente igualdad:

$$x^4 + x^3 - 7x^2 + 4 = (x - 2)(x^3 + 3x^2 - x - 2).$$

Funciones racionales

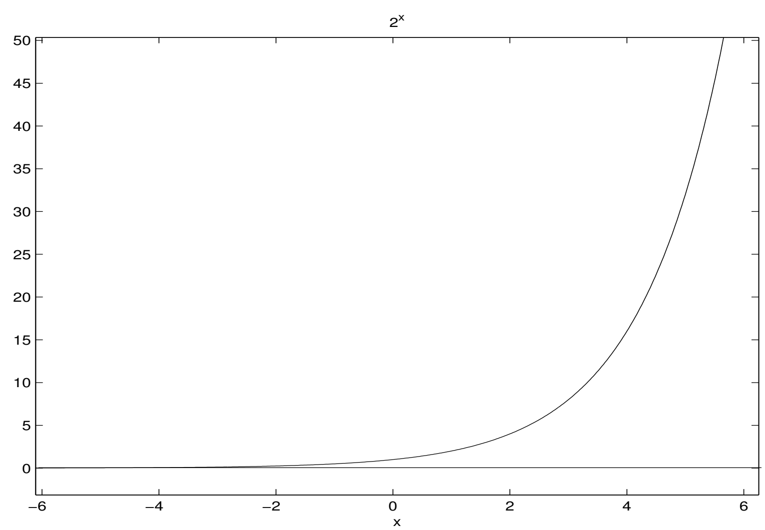
$f(x) = \dfrac{p(x)}{q(x)}$ con p y q funciones polinómicas.
$\text{Dom} f = \{x \in \mathbb{R} \ : \ q(x) \neq 0\} = \mathbb{R} \backslash \{x \in \mathbb{R} \ : \ q(x) = 0\}$.

Función exponencial

$f(x) = a^x, \ a \in \mathbb{R}, \ a > 0, x \in \mathbb{R}$. $\text{Dom} f = \mathbb{R}$.

Se define/construye usando sucesivamente exponentes de $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$ y $\mathbb{Q}$, y se extiende a todo $\mathbb{R}$ usando el axioma del supremo.

Propiedades:
$a^{r+s} = a^r a^s, \qquad (a^r)^s = a^{r \cdot s}, \qquad (a \cdot b)^r = a^r \cdot b^r$
Si $x, y \in \mathbb{R}$, $x < y$:
$a^x < a^y$ cuando $a > 1$ (creciente).
$a^x > a^y$ cuando $a < 1$ (decreciente).



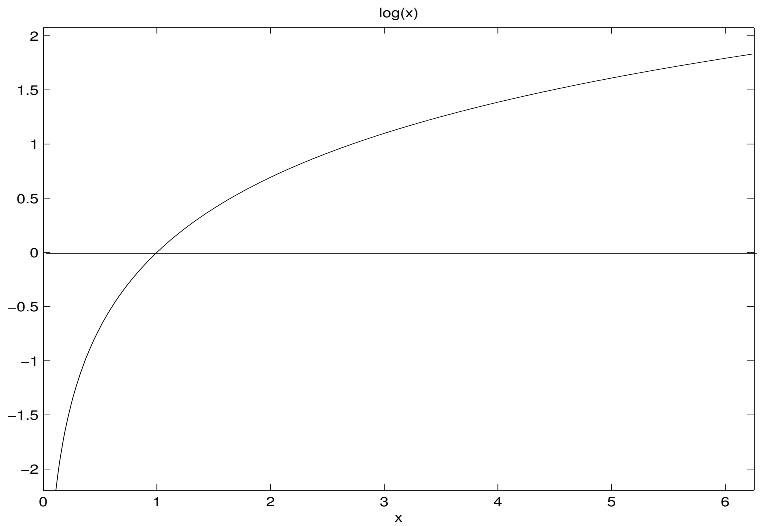
Función logarítmica $(a > 0, \ a \neq 1)$

$f : (0, +\infty) \to \mathbb{R} : x \mapsto f(x) = \log_a x$

$$\log_a x = y \ \Leftrightarrow \ a^y = x \text{ inversa exponencial.}$$

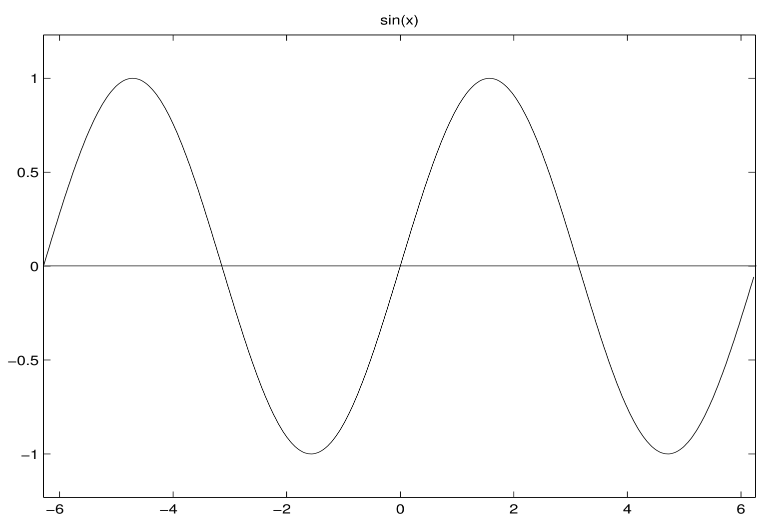
Propiedades:
$\log_a 1 = 0, \ \log_a a = 1, \ \log_a(x \cdot y) = \log_a x + \log_a y, \ \log_a(x^m) = m \cdot \log_a x, \ \log_a \frac{x}{y} = \log_a x - \log_a y$.

$a > 1$ y $0 < x < y \;\Rightarrow\; \log_a x < \log_a y$. (función creciente)
$a < 1$ y $0 < x < y \;\Rightarrow\; \log_a x > \log_a y$. (función decreciente)

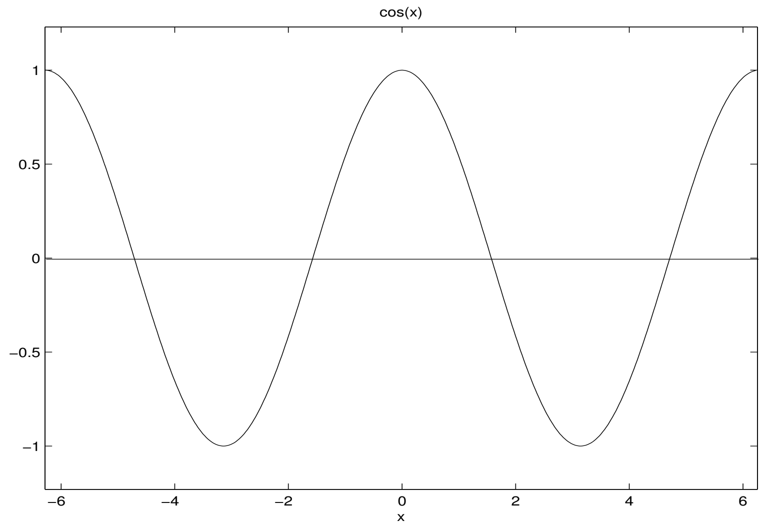


Funciones trigonométricas

$f(x) = \operatorname{sen} x$. $\operatorname{Dom} f = \mathbb{R}$, $\operatorname{Im} f = [-1, 1]$, $2\pi-$periódica.



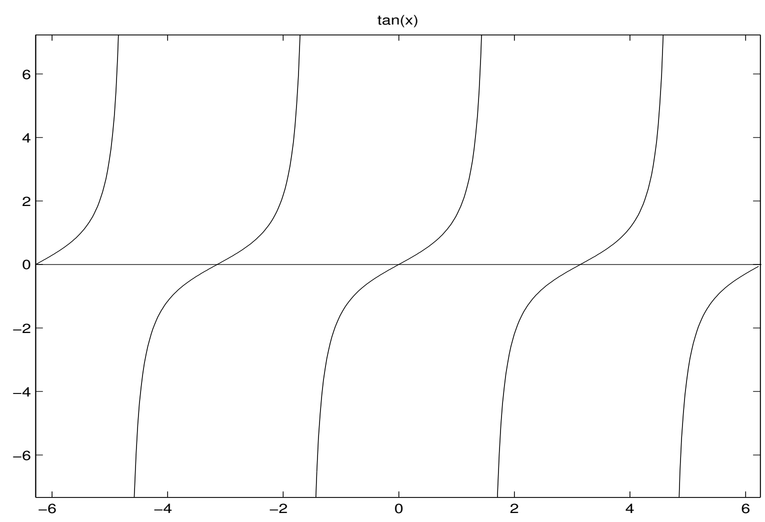
$f(x) = \cos x$. $\operatorname{Dom} f = \mathbb{R}$, $\operatorname{Im} f = [-1, 1]$, $2\pi-$periódica.



Teorema 1.10. *(Pitágoras) En un triángulo rectángulo el cuadrado de la hipotenusa es igual a la suma de los cuadrados de los catetos:* $h^2 = c_1^2 + c_2^2$.

Si normalizamos: $\boxed{(sen\, x)^2 + (cos\, x)^2 = 1.}$

Función tangente:
$f(x) = \operatorname{tg} x = \dfrac{\operatorname{sen} x}{\cos x}$.
$\mathrm{Dom} f = \mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + k\pi \; : \; k \in \mathbb{Z}\}$, $\mathrm{Im} f = \mathbb{R}$, $\pi-$periódica.



Sus respectivas funciones inversas (respecto de la división):

$$\operatorname{cosec} x = \frac{1}{\operatorname{sen} x}, \; \sec x = \frac{1}{\cos x}, \; \operatorname{cotg} x = \frac{1}{\operatorname{tg} x}.$$

Funciones inversas (respecto de la composición):

$$\operatorname{arcsen} x,\ \arccos x,\ \operatorname{arctg} x.$$

1.5. Límites de funciones

Aunque se puede hacer para un subconjunto real cualquiera, para evitar introducir nociones topológicas, en lo que sigue consideraremos funciones definidas sobre intervalos reales. En lo que sigue, denotaremos $S = (a, b) \subset \mathbb{R}$ y $\overline{S} = [a, b]$.

Definición 1.11. *Sean $f : S \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ y $x_0 \in \overline{S}$. Decimos que $l \in \mathbb{R}$ es el límite de f cuando x tiende a x_0, y lo denotamos $\lim_{x\to x_0} f(x) = l$ si*

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta\ :\ \forall x \in S\ \text{con}\ 0 < |x - x_0| < \delta\ \Rightarrow\ |f(x) - l| \leq \varepsilon.$$

El límite, si existe, es único.

Ejemplo 1.12. *$f : \mathbb{R}\backslash\{0\} \to \mathbb{R} : x \mapsto x \operatorname{sen} x$. Se tiene que $\lim_{x\to 0} f(x) = 0$ (basta tomar $\delta = \varepsilon$).*

Comprobar que ocurre lo mismo con la función
$$g(x) = \begin{cases} x & si\ x \in \mathbb{Q}, \\ 0 & si\ x \notin \mathbb{Q}. \end{cases}$$

También se puede adaptar al caso en que la función "explota"

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = +\infty \Leftrightarrow \quad \forall M > 0\ \exists\, \delta > 0\ :\ \forall x \in S \text{ con } 0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow f(x) > M.$$

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = -\infty \Leftrightarrow \quad \forall M > 0\ \exists\, \delta > 0\ :\ \forall x \in S \text{ con } 0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow f(x) < -M.$$

Ejemplo 1.13. $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{1}{|x|} = +\infty.$

Análogamente, el caso en que el límite existe cuando x tiende a infinito:

$$\lim_{x\to +\infty} f(x) = l \Leftrightarrow \quad \forall \varepsilon > 0\ \exists\, M > 0\ :\ \forall x \in S \text{ con } M < x \Rightarrow |f(x) - l| < \varepsilon.$$

$$\lim_{x\to -\infty} f(x) = l \Leftrightarrow \quad \forall \varepsilon > 0\ \exists\, M > 0\ :\ \forall x \in S \text{ con } x < -M \Rightarrow |f(x) - l| < \varepsilon.$$

Ejemplo 1.14. $\displaystyle\lim_{x\to +\infty} \frac{1}{x} = \lim_{x\to -\infty} \frac{1}{x} = 0.$

A veces no podemos asegurar la existencia de límite en torno a un punto, pero sí estudiar los límites laterales (por la derecha e izquierda respectivamente):

$$\lim_{x\to x_0^+} f(x) = l \Leftrightarrow \quad \forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta \; : \; \forall x \in S \text{ con}$$
$$0 < x - x_0 < \delta \;\Rightarrow\; |f(x) - l| \leq \varepsilon.$$

$$\lim_{x\to x_0^-} f(x) = l \Leftrightarrow \quad \forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta \; : \; \forall x \in S \text{ con}$$
$$0 < x_0 - x < \delta \;\Rightarrow\; |f(x) - l| \leq \varepsilon.$$

Ejemplo 1.15. *La función parte entera $E : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ verifica $\lim\limits_{x\to n^+} E(x) = n$ pero $\lim\limits_{x\to n^-} E(x) = n - 1$.*

Teorema 1.16. *Dada $f : S \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ se cumple que $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ existe y vale $l \in \mathbb{R}$ si y solo si existen los límites laterales $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)$ y $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)$ y tienen el mismo valor.*

El resultado, leído de forma negativa, dice que si los límites laterales no coinciden, no existe límite de la función en ese punto.

Teorema 1.17 (Fundamental del límite). *Sea $f : S \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Dado $x_0 \in \overline{S}$*

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = l \Leftrightarrow \left[\begin{array}{c} \forall \{x_n\} \subset S \\ x_n \neq x_0, x_n \to x_0 \end{array} \Rightarrow \{f(x_n)\} \to l. \right]$$

Ejemplo 1.18. *Considérese $f(x) = \text{sen}\,\frac{1}{x}$, y las sucesiones $x_n = \frac{1}{n\pi}$ e $y_n = \frac{1}{2\pi n + \pi/2}$. Se tiene que $f(x_n) \equiv 0$ y que $f(y_n) \equiv 1$ luego $\nexists \lim\limits_{x\to 0} \text{sen}\,\dfrac{1}{x}$.*

Propiedades de límites:

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = l < c \quad\Rightarrow\quad \exists \delta > 0 \,:\, \forall x \in S$$
$$0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow f(x) < c.$$

Análogamente con $c < l$.

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = l \neq 0 \Rightarrow \quad \exists \delta > 0 \,:\, \forall x \in S$$
$$0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow \text{signo} f(x) = \text{signo}\, l.$$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to x_0} f(x) = l, \; \lim\limits_{x\to x_0} g(x) = l', \\ \exists \delta > 0 : \; 0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow f(x) \leq g(x) \end{array}\right\} \Rightarrow l \leq l'.$$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \lim\limits_{x\to x_0} g(x) = l, \, \exists \delta > 0 : \\ 0 < \underset{x\in S}{|x - x_0|} < \delta \Rightarrow g(x) \leq h(x) \leq f(x) \end{array}\right\} \Rightarrow \lim_{x\to x_0} h(x) = l.$$

Teorema 1.19. *Sean $f, g : S \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tales que existen $l, l' \in \mathbb{R}$, y $\lim_{x\to x_0} f(x) = l$, $\lim_{x\to x_0} g(x) = l'$. Entonces existen los siguientes límites:*

$\lim_{x\to x_0} [f(x) \pm g(x)] = l \pm l'$,

$\lim_{x\to x_0} f(x) \cdot g(x) = l \cdot l'$,

Si $l' \neq 0$ $\lim_{x\to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{l}{l'}$.

Observación 1.20 (Indeterminaciones). *Cuando los valores l y l' no son reales, sino $+\infty$ ó $-\infty$, nos encontraremos con problemas. Se trata de expresiones que no tienen a priori un valor concreto (por ello las llamaremos indeterminaciones), sino que hay que hallarlo explícitamente en cada caso. Expresiones indeterminadas que pueden aparecer son:*

$$1^{\infty},\ 0\cdot\infty,\ \infty-\infty,\ \frac{\infty}{\infty},\ \frac{0}{0},\ \infty^0,\ 0^0.$$

Algunas que podremos resolver en este mismo tema usando las propiedades precedentes son $\infty - \infty$ (por ejemplo sacando factor común o multiplicando por el conjugado) o $\frac{\infty}{\infty}$ (será simple si se trata de funciones racionales). Un dominio total de las indeterminaciones requerirá herramientas del próximo tema de derivación, como por ejemplo la Regla de L'Hôpital.

1.6. Continuidad de funciones

Definición 1.21. *Sea $f : S \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ y $x_0 \in S$. Se dice que f es continua en x_0 cuando*

$$\exists \lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0).$$

Esto equivale a decir que

$$\forall\varepsilon > 0,\ \exists\delta > 0\ :\ |x - x_0| < \delta \Rightarrow\ |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon.$$

Igual que los límites laterales, podemos hablar de continuidad por la derecha e izquierda en x_0 :

$$\exists \lim_{x\to x_0^+} f(x) = f(x_0),\ \exists \lim_{x\to x_0^-} f(x) = f(x_0).$$

f es continua en $x_0 \Leftrightarrow$ lo es a derecha e izquierda en x_0.
Dado $A \subset S$, se dice que f es continua en A si lo es en todo punto de A.
Si $A = [a, b]$, entendemos que continuidad en a (resp. b) es por la izquierda (resp. derecha).

Teorema 1.22. *Dados $f : S \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x_0 \in S$, f es continua en $x_0 \Leftrightarrow \forall\{x_n\} \subset S,\ x_n \to x_0 \Rightarrow f(x_n) \to f(x_0)$.*

Ejemplo 1.23. *$f(x) = |x|$ es continua en todo $\mathbb{R}$.*

$f(x) = \begin{cases} x sen\,\frac{1}{x} & si \quad x \neq 0, \\ 0 & si \quad x = 0 \end{cases}$ *es continua en todo $\mathbb{R}$.*

$f(x) = \begin{cases} \frac{|x|}{x} & si \quad x \neq 0, \\ 0 & si \quad x = 0 \end{cases}$ *no es continua en $x = 0$.*

Las funciones elementales vistas antes (polinomiales, racionales, exponenciales, logarítmicas y trigonométricas) son continuas en sus dominios de definición.

Álgebra de funciones continuas

Teorema 1.24. *Sean* $f, g : S \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *funciones continuas en* $x_0 \in S$. *Entonces* $f \pm g$ *y* $f \cdot g$ *son continuas en* x_0. *Si* $g(x_0) \neq 0$, *también lo es* $\frac{f}{g}$.

Teorema 1.25. *Sean* $f : S \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g : T \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *tales que* $f(S) \subset T$. *Si* f *es continua en* $x_0 \in S$ *y* g *es continua en* $f(x_0)$, *entonces la función compuesta* $g \circ f$ *es continua en* x_0.

1.7. Discontinuidad de funciones. Clasificación

Definición 1.26. *Decimos que* f *es* ***discontinua*** *en* x_0 *si no es continua en* x_0. *Los posibles motivos:*

$x_0 \notin \mathrm{Dom} f$.
$\nexists \lim\limits_{x \to x_0} f(x)$.
$\exists \lim\limits_{x \to x_0} f(x) \neq f(x_0)$.

La clasificación de posibles discontinuidades es la siguiente.

a) Discontinuidad evitable: $\exists \lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ (un valor finito) pero $\left\{ \begin{array}{l} \nexists f(x_0), \\ \lim\limits_{x \to x_0} f(x) \neq f(x_0). \end{array} \right.$

Dos ejemplos: $f(x) = \left\{ \begin{array}{lll} |x| & \text{si} & x \neq 0, \\ 1 & \text{si} & x = 0. \end{array} \right.$ $\qquad g(x) = \dfrac{x^2 - 1}{x + 1}$.

b) Discontinuidad de salto (finito): $\exists \lim\limits_{x \to x_0^+} f(x)$ que notaremos $f(x_0^+)$, y $\exists \lim\limits_{x \to x_0^-} f(x)$ que notaremos $f(x_0^-)$ pero son distintos.

(Al valor $f(x_0^+) - f(x_0^-)$ se le llama **salto** de la función f en x_0).

$$f(x) = \mathrm{sig}(x) \left\{ \begin{array}{rll} 1 & \text{si} & x > 0, \\ 0 & \text{si} & x = 0, \\ -1 & \text{si} & x < 0. \end{array} \right.$$

c) Discontinuidad de salto infinito: cuando alguno de los límites laterales (o ambos) valen $\pm\infty$.

Ejemplos: $f(x) = \dfrac{1}{x}$, $g(x) = \dfrac{1}{|x|}$.

d) Discontinuidad esencial: $\nexists \lim\limits_{x \to x_0} f(x)$.

Por ejemplo, $f(x) = \left\{ \begin{array}{lll} \mathrm{sen}\,\frac{1}{x} & \text{si} & x \neq 0, \\ 0 & \text{si} & x = 0. \end{array} \right.$

1.8. Propiedades de funciones continuas

Sea $f : S \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Se dice que f está acotada superiormente (inferiormente) si el conjunto

$$f(S) = \{f(x) \ : \ x \in S\}$$

está acotado superiormente: $\exists M \ : \ \forall x \in S,\ f(x) \leq M$.

(inferiormente: $\exists m \ : \ \forall x \in S,\ f(x) \geq m$.)

Decimos que está acotada si lo está superior e inferiormente: $\exists M > 0 \ : \ \forall x \in S,\ |f(x)| \leq M$.

Dado un subconjunto $A \subset S$, podemos considerar las propiedades de acotación de f sólo en el conjunto A.

Ejemplo 1.27. $f(x) = |x|$ *está acotada inferiormente.*

$g(x) =$*sen*x *está acotada.*

$h(x) = -x^2$ *está acotada superiormente.*

$j(x) = x^3$ *no está acotada ni superior ni inferiormente.*

$k(x) = 1/x$ *está acotada en el intervalo* $[1, 2]$ *pero no lo está en* $(0, 1)$.

Ser continua sobre un intervalo abierto **no** asegura acotación.

Teorema 1.28.

• *(continuidad implica acotación local):* $f : (a, b) \to \mathbb{R}$, f *continua en* $x_0 \Rightarrow \exists \delta > 0 \ : \ f$ *acotada en* $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$.

• *Si* $a \in$*Dom*f, *y* f *es continua en* a *por la derecha, entonces* $\exists \delta > 0 \ : \ f$ *acotada en* $[a, a + \delta)$. *(Resultado análogo para el extremo* b*).*

• *(continuidad en intervalo cerrado y acotado sí implica acotación)* f *continua en* $[a, b] \Rightarrow f$ *acotada en* $[a, b]$.

Máximos y mínimos

Definición 1.29. *Sea* $f : S \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. *Se dice que* f *tiene un máximo absoluto en* $c \in S$ *(resp. mínimo) si* $f(x) \leq f(c)$ *para todo* $x \in S$ *(resp.* $f(x) \geq f(c)$*).*

Se dice que tiene un máximo (resp. mínimo) relativo o local en $c \in S$ *cuando existe* $\delta > 0$ *tal que* $f(x) \leq f(c)$ *(resp.* $f(x) \geq f(c)$*) para todo* $x \in (c - \delta, c + \delta)$.

En general hablamos de extremos para referirnos a máximos y mínimos.

Teorema 1.30.

•*[Weierstrass] Sea* $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *continua. Entonces* f *alcanza máximo y mínimo absolutos. (Nota: el resultado es falso si el intervalo de partida no es cerrado o no es acotado, incluso aunque* f *sea acotada.)*

• *[Bolzano]* $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *continua y con signo distinto en los extremos* $f(a)$ *y* $f(b)$, *entonces* $\exists c \in (a, b)$ *tal que* $f(c) = 0$.

• *[Darboux, valores intermedios]* $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *continua. Entonces* f *alcanza todos los valores comprendidos entre su máximo y su mínimo.*

Probar que todo polinomio de grado impar tiene al menos una raíz real, y que su imagen es todo $\mathbb{R}$

Probar que la ecuación $x - \mathrm{sen} x = 1$ tiene al menos una raíz real.

Funciones monótonas

Definición 1.31. *Sea* $f : S \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

- f *creciente si* $\forall x, y \in S \ : \ x < y \Rightarrow f(x) \leq f(y)$.
- f *decreciente si* $\forall x, y \in S \ : \ x < y \Rightarrow f(x) \geq f(y)$.
- f *estrictamente creciente si* $\forall x, y \in S \ : \ x < y \Rightarrow f(x) < f(y)$.
- f *estrictamente decreciente si* $\forall x, y \in S \ : \ x < y \Rightarrow f(x) > f(y)$.

En general, decimos f *monótona si cumple alguno de los casos anteriores.*

El siguiente resultado se extiende de forma similar para funciones decrecientes.

Teorema 1.32. *Sea* $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *una función creciente. Entonces para todo* $c \in (a, b)$ *se verifica:*

$$\exists \lim_{x \to c^-} f(x) = f(c^-), \ \exists \lim_{x \to c^+} f(x) = f(c^+).$$

Además, se cumple que $f(c^-) \leq f(c) \leq f(c^+)$.

Para los extremos del intervalo, se tiene $f(a) \leq f(a^+)$ *y* $f(b^-) \leq f(b)$.

Observación 1.33.

- *Una función monótona sólo puede tener discontinuidades de salto.*
- *Una función* f *estrictamente monótona en su dominio de definición admite a lo sumo una solución de la ecuación* $f(x) = 0$.
- *Para las funciones continuas y monótonas estrictas, es posible construir la función inversa respecto de la composición, y es también continua y estrictamente monótona.*

  Como ejemplo podemos considerar la función $f(x) : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+ : x \mapsto f(x) = x^n$ *con* $n \in \mathbb{N}$.

Tema 2

Derivadas: cálculo, propiedades y aplicaciones

En este tema comenzamos el estudio del cálculo diferencial, una herramienta que nos será muy útil tanto en la representación gráfica como en el cálculo de óptimos de una función dada.

2.1. Concepto de derivada

Definición 2.1. *Sea $f : S \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $a \in (b, c) \subseteq S$. Decimos que f* **es derivable en** *a si existe:*

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \in \mathbb{R}.$$

Dicho valor se denota como $f'(a)$, se llama **derivada de f en a** *y también se puede escribir como*

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(a + h) - f(a)}{h},$$

donde $x - a = h$.

Observación 2.2. *Para que la derivada exista tiene que existir el límite, es decir, deben existir los límites laterales y coincidir.*

Definición 2.3. *Una función f se dice* **derivable en A** *si lo es en todo punto $a \in A$.*

Ejemplo 2.4. *a) $f(x) = x^2$ es derivable en $a = 2$ y su derivada vale $f'(2) = 4$, ya que:*

$$f'(2) = \lim_{h \to 0} \frac{f(2 + h) - f(2)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{(2 + h)^2 - 2^2}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{h^2 + 4h}{h} = \lim_{h \to 0} (h + 4) = 4.$$

b) $f(x) = |x|$ no es derivable en $a = 0$, pues

$$f'_+(0) = \lim_{h \to 0^+} \frac{|h| - |0|}{h} = \lim_{h \to 0^+} \frac{h}{h} = 1$$

pero

$$f'_-(0) = \lim_{h\to 0^-} \frac{|h|-|0|}{h} = \lim_{h\to 0^-} \frac{-h}{h} = -1.$$

Luego existen las derivadas laterales, pero los límites no coinciden. Entonces, la función valor absoluto no es derivable en $a = 0$.

c) $f(x) = x^{1/3}$ *no es derivable en $a = 0$, ya que:*

$$f'(0) = \lim_{h\to 0} \frac{h^{1/3} - 0^{1/3}}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{1}{h^{2/3}} = +\infty$$

luego no se trata de un número real. En este caso, se dice que la función tiene derivada $+\infty$ en $a = 0$.

Definición 2.5 (Función derivada). *Sean $f : S \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ y $T = \{x \in S / \exists\, f'(x)\}$. La función:*

$$x \in T \quad \mapsto \quad f'(x) \in \mathbb{R}$$

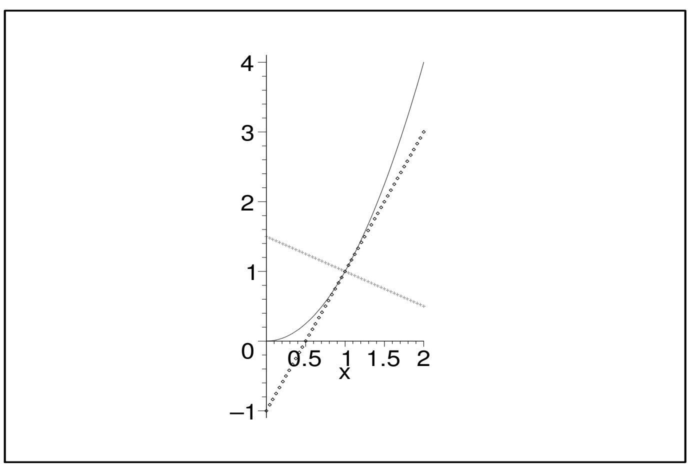
se llama **función derivada primera de** f *y se representa por f'.*

Análogamente se pueden definir las derivadas sucesivas:

$$f'' = (f')', \quad f''' = (f'')', \quad f^{iv)} = (f''')', \quad \ldots$$

2.2. Interpretación geométrica de la derivada

Si f es derivable en a, $f'(a)$ es un número real que coincide con la pendiente de la recta tangente a la curva $y = f(x)$ en el punto $(a, f(a))$.



$- - - -$ es la función $y = x^2$

$\diamond \diamond \diamond \diamond$ es la tangente en el punto $(1, 1)$, $y = 2x - 1$

$\times \times \times \times$ es la recta normal en el punto $(1, 1)$, $y = (3 - x)/2$

Definición 2.6. *Se define la recta de pendiente m que pasa por el punto (x_0, y_0) como:*

$$y - y_0 = m\,(x - x_0)$$

Dos rectas de pendientes m y $\widetilde{m}$, respectivamente, se dice que son **perpendiculares** *cuando forman un ángulo de 90^o. Entonces, se puede comprobar que la relación entre sus pendientes es $\widetilde{m} = -1/m$.*

Definición 2.7. *Si f es derivable en a y $f'(a) \neq 0$, entonces la pendiente de la recta tangente en el punto $(a, f(a))$ es $f'(a)$, y la pendiente de la recta normal es $-\frac{1}{f'(a)}$.*

$\boxed{y - f(a) = f'(a)\,(x - a)}$ es la recta tangente a $y = f(x)$ en el punto $(a, f(a))$.

$\boxed{y - f(a) = -\dfrac{1}{f'(a)}\,(x - a)}$ es la recta normal a $y = f(x)$ en el punto $(a, f(a))$.

Observación 2.8. *Si $f'(a) = 0$, entonces la recta tangente es horizontal. Si $f'(a) = \pm\infty$, entonces la recta tangente es vertical.*

Teorema 2.9. *Si f es derivable en a, entonces f es continua en a.*

Demostración: Supongamos que f es derivable en a. Entonces, existe $\lim_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = f'(a)$. Para la continuidad de f en a, vemos que $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$. Notemos que si $x \neq a$, $f(x) - f(a) = \dfrac{f(x) - f(a)}{x - a} \cdot (x - a)$, luego $\lim_{x\to a} f(x) - f(a) = f'(a) \cdot \lim\limits_{x\to a} (x - a) = 0$ ■

Observación 2.10. *El recíproco no es cierto, es decir, una función continua en un punto no tiene por qué ser derivable en ese punto. Considérese el ejemplo $f(x) = |x|$ en $a = 0$.*

2.3. Álgebra de derivadas

Teorema 2.11. *Sean f, $g : S \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dos funciones derivables en a. Entonces, se verifica:*

1. *$f \pm g$ es derivable en a, siendo:*

$$(f \pm g)'(a) = f'(a) \pm g'(a)$$

2. *Si $\lambda \in \mathbb{R}$, entonces $\lambda \cdot f$ es derivable, siendo:*

$$(\lambda \cdot f)'(a) = \lambda \cdot f'(a)$$

3. *$f \cdot g$ es derivable en a, siendo:*

$$(f \cdot g)'(a) = f'(a) \cdot g(a) + f(a) \cdot g'(a)$$

4. *Si $g'(a) \neq 0$, $\dfrac{f}{g}$ es derivable en a, siendo:*

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(a) = \frac{f'(a) \cdot g(a) - f(a) \cdot g'(a)}{(g(a))^2}$$

2.4. Derivadas de las funciones elementales

Derivadas de funciones elementales	Regla de la cadena
Potencia	
$(x^n)' = nx^{n-1}$	$(f(x)^n)' = nf(x)^{n-1}f'(x)$
Exponenciales	
$(e^x)' = e^x$	$\left(e^{f(x)}\right)' = e^{f(x)}f'(x)$
$(a^x)' = a^x \cdot (\ln a)$	$\left(a^{f(x)}\right)' = (\ln a)a^{f(x)}f'(x)$
Logarítmicas	
$(\ln x)' = \dfrac{1}{x},\ x > 0$	$(\ln f(x))' = \dfrac{1}{f(x)}\, f'(x)$
$(\log_a(x))' = \dfrac{1}{\ln a}\,\dfrac{1}{x}$	$(\log_a f(x))' = \dfrac{1}{\ln a}\,\dfrac{1}{f(x)}\,f'(x)$
Trigonométricas	
$(\text{sen}x)' = \cos x$	$(\text{sen}f(x))' = f'(x)\cos f(x)$
$(\cos x)' = -\text{sen}x$	$(\cos f(x))' = -f'(x)\,\text{sen}f(x)$
$(\tan x)' = 1 + (\tan x)^2 = \dfrac{1}{(\cos x)^2}$	$(\tan f(x))' = [1 + (\tan f(x))^2]\, f'(x)$
$(\text{cotan}x)' = -(1 + (\text{cotan}x)^2) = \dfrac{-1}{(\text{sen}x)^2}$	$(\text{cotan}f(x))' = -\left[1 + (\text{cotan}f(x))^2\right]\ f'(x)$
Inversas trigonométricas	
$(\text{arcsen}x)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}},\quad \text{si } \lvert x\rvert < 1$	$(\text{arcsen}f(x))' = \dfrac{f'(x)}{\sqrt{1-f(x)^2}}$
$(\text{arccos}x)' = \dfrac{-1}{\sqrt{1-x^2}},\quad \text{si } \lvert x\rvert < 1$	$(\arccos f(x))' = \dfrac{-f'(x)}{\sqrt{1-f(x)^2}}$
$(\text{arctan}x)' = \dfrac{1}{1+x^2}$	$(\arctan f(x))' = \dfrac{f'(x)}{1+f(x)^2}$
$(\text{arccotan}x)' = \dfrac{-1}{1+x^2}$	$(\text{arccotan}f(x))' = \dfrac{-f'(x)}{1+(f(x))^2}$

Teorema 2.12 (Regla de la cadena). *Sean* $f : S \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g : T \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *tales que* $\boxed{f(S) \subset T}$. *Si* f *es derivable en* $a \in S$ *y* g *es derivable en* $f(a) \in T$, *entonces* $g \circ f$ *es derivable en* a, *y además,*

$$(g \circ f)'(a) = g'(f(a)) \cdot f'(a)$$

Ejercicio 2.13. *Calcular la derivada de la función*

$$y = (x^3 + 2x + 3)^4.$$

Observemos que si $f(x) = x^3 + 2x + 3$ *y* $g(x) = x^4$, *la función* y *es la composición* $g \circ f$.

2.5. Cálculo de extremos absolutos

Teorema 2.14. *Sea* $f : S \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, *derivable en* $a \in S$ *con* $f'(a) > 0$ *(ó* $+\infty$*) (respectivamente,* $f'(a) < 0$ *(ó* $-\infty$*)). Entonces, existe un intervalo* $(a-\delta, a+\delta)$ *tal que* $\forall x \in (a-\delta, a+\delta)$, $x \neq a$ *se tiene:*

$$\begin{cases} f(x) < f(a) & \text{si } x < a \quad (\text{respectivamente, } f(x) > f(a)) \\ f(x) > f(a) & \text{si } x > a \quad (\text{respectivamente, } f(x) < f(a)) \end{cases}$$

es decir, f *es estrictamente creciente localmente en* a *(o estrictamente decreciente localmente en* a*).*

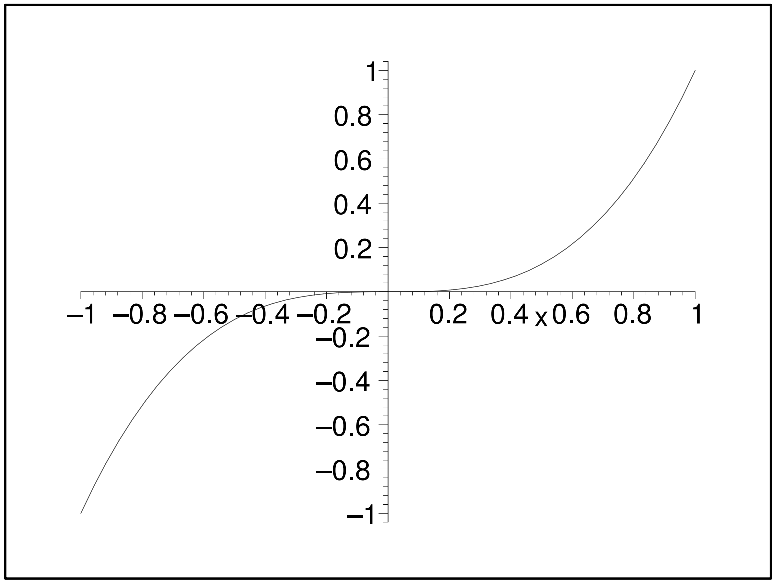
Corolario 2.15 (Condición necesaria de extremo). *Si* $f : S \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *es derivable en* $a \in (b, c) \subset S$ *y* f *tiene un máximo o un mínimo relativo en* $x = a$, *entonces* $f'(a) = 0$.

Demostración: Si $f'(a) > 0$, entonces por el Teorema anterior f sería localmente estrictamente creciente en un intervalo $(a - \delta, a + \delta)$. Luego no tendría ni máximo ni mínimo en a.

Si $f'(a) < 0$, entonces por el Teorema anterior f sería localmente estrictamente decreciente en un intervalo $(a - \delta, a + \delta)$. Luego no tendría ni máximo ni mínimo en a.

Luego, $f'(a) = 0$. ■

Observación 2.16. *El recíproco no es cierto. Consideremos, por ejemplo, la función* $f(x) = x^3$, *donde* $f'(x) = 3x^2$, $f'(0) = 0$. *Pero* f *no tiene ni máximo ni mínimo en* $x = 0$, *siendo su representación gráfica:*



Observación 2.17. *La condición necesaria de extremo relativo nos proporciona un método para calcular los máximos y mínimos relativos de una función f. Sin embargo, no todos los puntos de $Dom(f)$ que verifican dicha condición son extremos relativos de f.*

Aplicación: Búsqueda de máximos y mínimos de una función continua.
Debemos distinguir entre intervalos acotados e intervalos no acotados:

1. **Intervalos cerrados y acotados.** Si $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ es una función continua, sabemos que $\exists \max\limits_{x \in [a,b]} f(x)$ y $\exists \min\limits_{x \in [a,b]} f(x)$. Entonces, buscaremos dichos puntos entre los siguientes:

   a) extremos del intervalo: a, b,

   b) puntos $x \in (a, b)$ en los que f no es derivable,

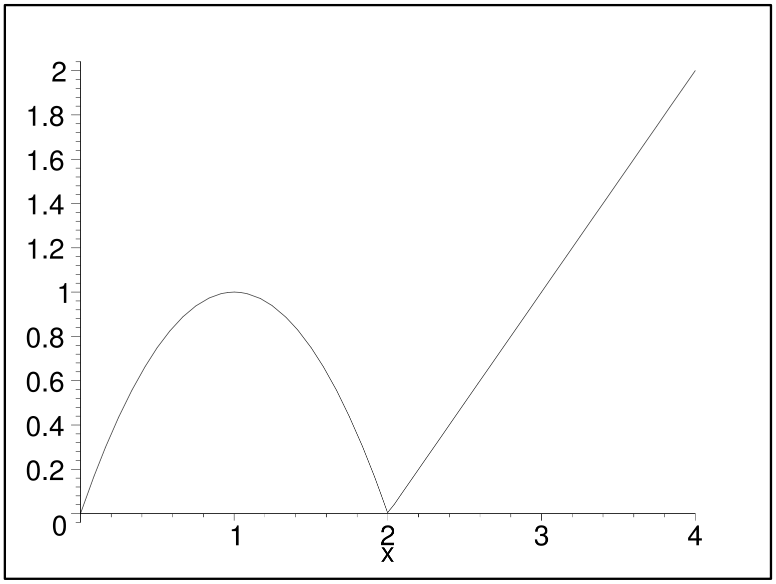
   c) puntos x en los que $f'(x) = 0$.

   Se calculan las imágenes de estos puntos y en el (los) punto (puntos) con imagen mayor, f alcanza el valor máximo absoluto. En el (los) punto (puntos) con imagen menor, f alcanza el valor mínimo absoluto.

   Ejemplo 2.18. *Estudio de los extremos de la función $f : [0, 4] \to \mathbb{R}$, definida por:*

$$f(x) = \begin{cases} 2x - x^2 & si\ x \in [0, 2], \\ x - 2 & si\ x \in (2, 4], \end{cases}$$

   cuya gráfica es la siguiente:



Puede comprobarse que f *es continua en* $[0,4]$*. Estudiamos cada uno de los puntos:*

a) *Extremos del intervalo:* 0, 4, *donde* $\boxed{f(0)=0}$, $\boxed{f(4)=2}$.

b) *Puntos* x *en los que la función no es derivable:* f *es derivable en* $[0,2)\cup(2,4]$. *Veamos qué ocurre en el punto* $x=2$.

$$f'_+(2) = \lim_{h\to 0^+}\frac{f(2+h)-f(2)}{h} = \lim_{h\to 0^+}\frac{(2+h)-2-0}{h} = 1.$$

$$\begin{aligned} f'_-(2) &= \lim_{h\to 0^-}\frac{f(2+h)-f(2)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0^-}\frac{2(2+h)-(2+h)^2-0}{h} \\ &= \lim_{h\to 0^-}\frac{-h^2-2h}{h} = \lim_{h\to 0^-}(-h-2) = -2. \end{aligned}$$

Como $f'_-(2)\neq f'_+(2)$, *entonces* f *no es derivable en* $x=2$. *Luego calculamos* $\boxed{f(2)=0}$.

c) *Puntos en los que* $x\in(0,4)$ *donde* $f'(x)=0$.

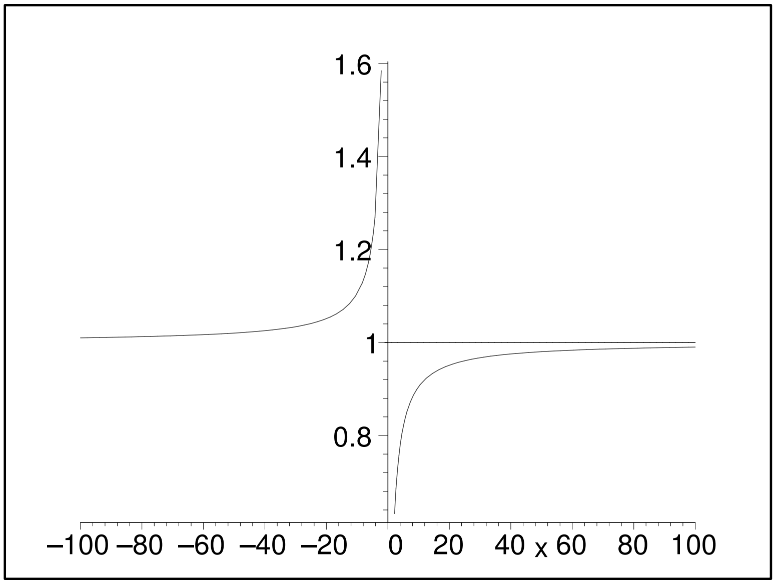
$$f'(x) = \begin{cases} 2-2x & si\ x\in(0,2), \\ 1 & si\ x\in(2,4). \end{cases}$$

Los puntos $x\in(2,4)$ *no pueden tener derivada primera nula. Resolvemos la ecuación* $2-2x=0 \Rightarrow x=1\in(0,2)$. *Luego calculamos* $\boxed{f(1)=1}$.

Comparando las imágenes de los puntos calculados, obtenemos que el **valor máximo absoluto de** f **en** $[0,4]$ *es* 2 *y se alcanza en* $x=4$, *y el* **valor mínimo absoluto de** f **en** $[0,4]$ *es* 0 *y se alcanza en los puntos* $x=0$ *y* $x=2$.

2. **Intervalos no acotados.** Se requiere el estudio gráfico de la función: estudio de $\lim_{x\to+\infty} f(x)$, $\lim_{x\to-\infty} f(x)$, asíntotas, acotación de f, etc.

Ejemplo 2.19. *Estudio de la función $f(x) = e^{-1/x}$ en $Dom(f) = \mathbb{R}\backslash\{0\}$:*



Se observa que no existen máximos absolutos de la función (ni supremos de f), pues la función no está acotada superiormente. Tampoco existen mínimos absolutos de la función, pero sí un ínfimo de f, que es el 0.

2.6. Monotonía de la función

Teorema 2.20. *Sea $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ continua en $[a,b]$ y derivable en (a,b).*

a) Si $f'(x) > 0\ \forall x \in (a,b)$, entonces f es estrictamente creciente en (a,b).

b) Si $f'(x) < 0\ \forall x \in (a,b)$, entonces f es estrictamente decreciente en (a,b).

Teorema 2.21. *Sea $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ continua en $[a,b]$. Supongamos que f es derivable en (a,b) salvo quizás un punto $c \in (a,b)$.*

a) Si existe $\delta > 0$ tal que $(c-\delta, c+\delta) \subset (a,b)$ y $f'(x) > 0\ \forall x \in (c-\delta, c)$ y $f'(x) < 0\ \forall x \in (c, c+\delta)$, entonces f tiene un **máximo relativo** *en c.*

b) Si existe $\delta > 0$ tal que $(c-\delta, c+\delta) \subset (a,b)$ y $f'(x) < 0\ \forall x \in (c-\delta, c)$ y $f'(x) > 0\ \forall x \in (c, c+\delta)$, entonces f tiene un **mínimo relativo** *en c.*

Observación 2.22. *Este resultado se puede usar para determinar la existencia de extremos relativos en puntos en los que la función no es derivable.*

2.7. Regla de L'Hôpital

Teorema 2.23 (Regla de L'Hôpital). *Sean f y g dos funciones tales que:*

i) $\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} g(x) = 0$,

ii) existe un entorno $(a-\delta, a+\delta)$ del punto a en el que f' y g' están definidas,

iii) g' no se anula en $(a-\delta, a+\delta)\setminus\{a\}$.

Entonces, si $\exists \lim_{x\to a} \dfrac{f'(x)}{g'(x)} = l$ *(finito o infinito) también*
existe $\lim_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = l$.

Observación 2.24.

1. *El Teorema es válido para $x \to a^+$ y $x \to a^-$. En esos casos, hay que aplicar el Teorema en los entornos $(a, a+\delta)$ y $(a-\delta, a)$ respectivamente.*

2. *El Teorema es válido para $x \to \infty$, $x \to +\infty$ y $x \to -\infty$. En estos casos, las hipótesis son que f' y g' existan en $|x| > M$, $x > M$ y $x < -M$, respectivamente; y que g' no se anule en $|x| > M$, $x > M$ y $x < -M$, respectivamente.*

3. *El Teorema es válido si* $\lim_{x\to a,\infty} f(x) = \infty$ *y* $\lim_{x\to a,\infty} g(x) = \infty$.

4. *Si* $\lim_{x\to a,\infty} f(x) = 0$ *y* $\lim_{x\to a,\infty} g(x) = \infty$, *entonces se puede intentar aplicar el Teorema de L'Hôpital al cálculo de* $\lim_{x\to a,\infty} f(x)\cdot g(x)$ *escribiéndolo de la forma:*

$$f(x)\cdot g(x) = \frac{f(x)}{\frac{1}{g(x)}} \quad o \quad f(x)\cdot g(x) = \frac{g(x)}{\frac{1}{f(x)}}.$$

5. *Si* $\lim_{x\to a,\infty} f(x) = \infty = \lim_{x\to a,\infty} g(x)$, *entonces se puede usar el Teorema para hallar* $\lim_{x\to a,\infty}(f(x)-g(x)) = \text{"}\infty - \infty\text{"}$. *Para ello, se escribe:*

$$f(x) - g(x) = \frac{\frac{1}{g(x)} - \frac{1}{f(x)}}{\frac{1}{f(x)\cdot g(x)}}.$$

6. *Para las indeterminaciones 0^0, ∞^0, 1^∞, se expresa $f(x)^{g(x)} = e^{g(x)\cdot ln(f(x))}$ y se aplica al exponente las observaciones anteriores.*

7. *En el caso en que* $\lim_{x\to a} \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$ *también fuese indeterminado del tipo* $\dfrac{0}{0}$, *se puede usar de nuevo el Teorema de L'Hôpital siempre que f' y g' verifiquen las 3 hipótesis de dicho teorema.*

Ejemplo 2.25. *Calcular los siguientes límites:*

1. $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x^3-3x^2+4}{x^2-4x+4}$

$$\lim_{x\to 2} \frac{x^3-3x^2+4}{x^2-4x+4} = \text{“}\left(\frac{0}{0}\right)\text{”} = \lim_{x\to 2} \frac{3x^2-6x}{2x-4} = \lim_{x\to 2} \frac{6x-6}{2} = 3$$

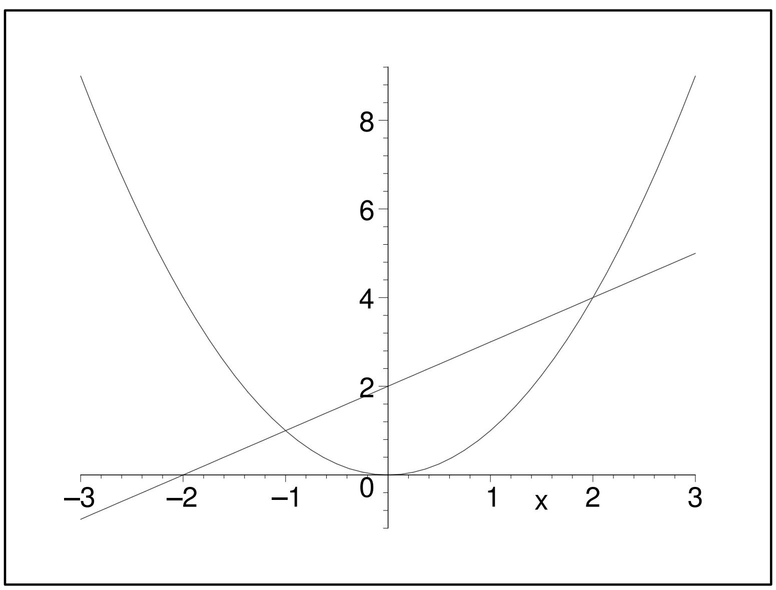
2. $\lim\limits_{x\to +\infty} x(arctgx - \dfrac{\pi}{2})$

$$\lim_{x\to +\infty} x(arctgx - \frac{\pi}{2}) = \text{“}\infty\cdot 0\text{”} = \lim_{x\to +\infty} \frac{arctgx - \frac{\pi}{2}}{\frac{1}{x}}$$
$$= \frac{\text{“}0\text{”}}{0} = \lim_{x\to +\infty} \frac{\frac{1}{1+x^2}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to +\infty} \frac{-x^2}{1+x^2} = -1$$

Observación 2.26. *De la no existencia de* $\lim \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$ *no se implica nada sobre* $\lim \dfrac{f(x)}{g(x)}$.

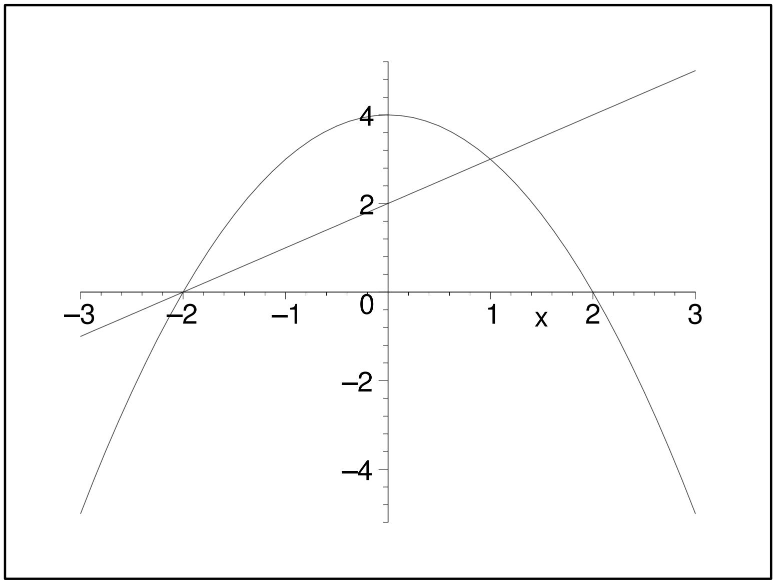
2.8. Concavidad y convexidad

Definición 2.27. *Una función f definida en un intervalo (a,b) se dice* **convexa en** (a,b) *si $\forall x, y \in (a,b)$, $x<y$, el segmento que une los puntos $(x,f(x))$ e $(y,f(y))$ está por encima de la gráfica de la función entre esos dos puntos.*



f es convexa en $(-1,2)$

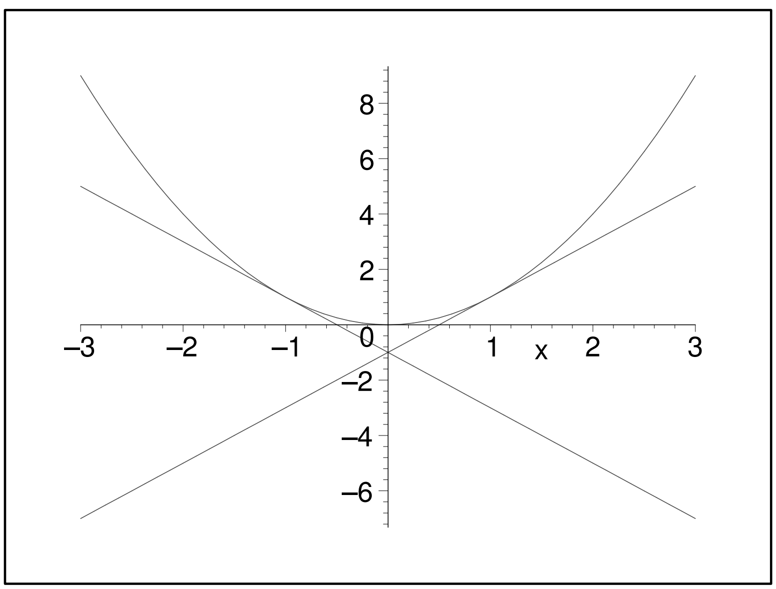
Si el segmento está por debajo, se dice que f **es cóncava en** (a,b)**.**



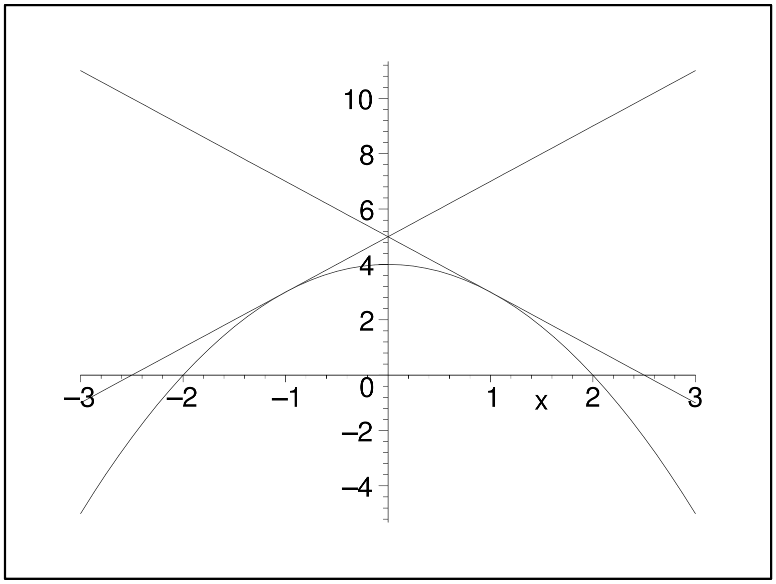
f es cóncava en $(-2, 1)$

Observación 2.28. *Las funciones cóncavas y convexas no son necesariamente derivables.*

Definición 2.29. *Una función derivable en un punto a se dice que es* **convexa** *(respectivamente* **cóncava***) en a si existe un entorno de dicho punto en el que la curva se mantiene por encima (respectivamente, por debajo) de la recta tangente a ella en el punto $x = a$.*

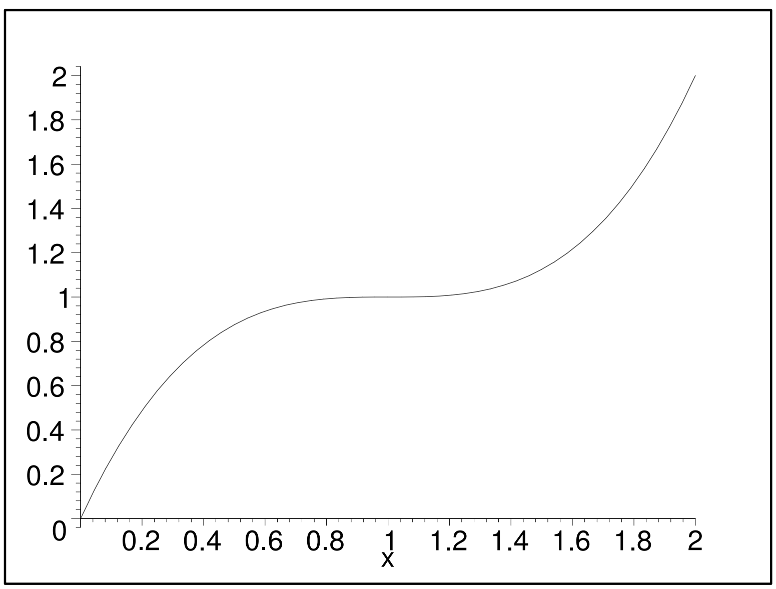


f es convexa en $(-2, 2)$

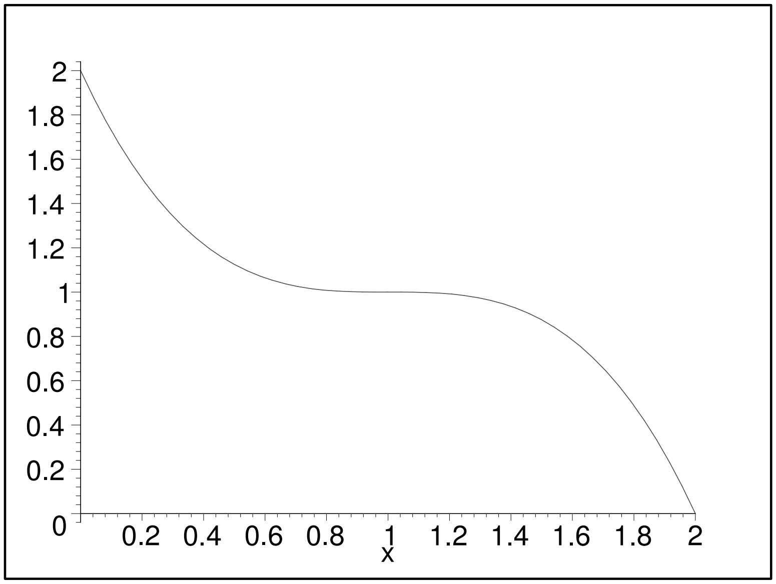


f es cóncava en $(-2, 2)$

Definición 2.30. *Decimos que f tiene un punto de inflexión en $(a, f(a))$ si f cambia en $x = a$ de cóncava a convexa o de convexa a cóncava.*



f pasa de cóncava a convexa en $(1, 1)$



f pasa de convexa a cóncava en $(1, 1)$

2.9. Representación Gráfica de Funciones

En la representación gráfica de funciones, podemos seguir los siguientes pasos:

1. **Dominio**: $Dom(f) = \{x \in \mathbb{R} / f(x) \in \mathbb{R}\}$.

2. **Simetrías:** funciones pares e impares.

3. **Periodicidad**

4. **Cortes con los ejes:**

   a) Corte con el eje OX, es decir, puntos donde $f(x) = 0$, y cuyas coordenadas son $(x, 0)$.

   b) Corte con el eje OY, es decir, es el punto de la forma $(0, f(0))$, si $0 \in Dom(f)$.

5. **Regionamiento:** con las abscisas donde la función se anula y aquellas donde la función no es continua se forman intervalos en los que la función existe y tiene signo constante (es decir, zonas donde es positiva y zonas donde es negativa).

6. **Asíntotas:**

   a) **Asíntotas horizontales:** Son las rectas horizontales de la forma $y = c$, donde $c = \lim_{x \to \pm\infty} f(x)$.

   Para conocer la posición de la curva respecto de la asíntota horizontal, tenemos que estudiar el signo de la expresión $\lim_{x \to \pm\infty} f(x) - c$:

Si $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) - c \begin{cases} > 0, & \text{la curva está sobre la asíntota} \\ < 0, & \text{la curva está debajo de la asíntota} \end{cases}$

Para saber si la curva corta a la asíntota horizontal o no, tenemos que resolver la ecuación:

$$f(x) = c$$

b) **Asíntotas verticales:** Son las rectas verticales de la forma $x = k$, tales que $\lim_{x\to k} f(x) = \pm\infty$.

Generalmente, los puntos k son puntos que no pertenecen al dominio de la función f pero están cercanos al dominio. Por ejemplo, si $Dom(f) = (a, b)$, los puntos a y b son posibles valores k.

c) **Asíntotas oblicuas:** Son las rectas oblicuas de la forma $y = mx + n$, donde

$$m = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} \in \mathbb{R}$$

y $n = \lim_{x\to\pm\infty} (f(x) - mx) \in \mathbb{R}$.

Ahora bien, dependiendo del valor de m razonamos de la siguiente forma:

1) Si $m = 0$, se trata de una rama parabólica en la dirección del eje OX (asíntota horizontal en $y = 0$), y no se calcula n.
2) Si $m = \infty$, se trata de una rama parabólica en la dirección del eje OY, y no se calcula n.
3) Si $m \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$, entonces
   - Si $n \in \mathbb{R}$, entonces $y = mx + n$ es una asíntota oblicua.
   - Si $n = \infty$, entonces no hay asíntota oblicua (se trata de una rama parabólica en la dirección de la recta $y = mx$).

Los puntos de corte de la curva con una asíntota oblicua de la forma $y = mx + n$ se calculan resolviendo el sistema:

$$\begin{cases} y &= f(x) \\ y &= mx + n \end{cases}$$

7. **Crecimiento y decrecimiento:** Se estudian las zonas en las que la función es creciente y las zonas en las que es decreciente. Para ello, estudiamos:

   - los valores de $x \in Dom(f)$ en los que f' se anula (si $f'(x) > 0$ la función es creciente, y si $f'(x) < 0$ la función es decreciente),
   - los puntos $x \in Dom(f)$ para los que la derivada no existe.

   Recordemos que si $x = k \notin Dom(f)$, entonces puede existir una asíntota vertical en $x = k$.

8. **Máximos y mínimos:** Con las herramientas estudiadas se buscan los puntos en los que se alcanzan los máximos y mínimos relativos de la función.

9. **Concavidad y convexidad:** Como se vió anteriormente, se estudian las zonas en las que la función es convexa ($x \in Dom(f)$ tales que $f''(x) > 0$) y las zonas en las que es cóncava ($x \in Dom(f)$ tales que $f''(x) < 0$).

   Observemos que las zonas de concavidad/convexidad pueden estar separadas por:

   - puntos $x \in Dom(f)$ donde $f''(x) = 0$,
   - puntos $x \in Dom(f)$ donde f'' no está definida,
   - o puntos $x \notin Dom(f)$.

10. **Puntos de inflexión:** Son los puntos en los que la función pasa de cóncava a convexa o de convexa a cóncava. Si f es 2 veces derivable en su dominio, entonces se encuentran entre los puntos que verifican que $f''(x) = 0$, PERO no todos los que verifican dicha condición son puntos de inflexión.

Tema 3

Métodos numéricos: Método de Newton e interpolación polinómica

Presentamos en este tema dos herramientas muy útiles de la Matemática Aplicada. Se trata de métodos numéricos en los que un algoritmo intenta dar respuesta en un número (finito) de pasos a dos grandes problemas.

El primero de ellos será la aproximación de los ceros de una función dada. El segundo problema consiste en la aproximación de una función a partir de unos cuantos valores de ésta por otra función (polinómica).

3.1. Aproximación de ceros de funciones. Método de Newton

Introducción / motivación: resolver $f(x) = 0$
Imposibilidad de resolver explícitamente algunas ecuaciones.
En general no es posible para polinomios de grado ≥ 5.
Niels Henrik Abel (1802-1829), Évariste Galois (1811-1832).

Objetivo:

Encontrar ceros o raíces de ecuaciones de forma aproximada, esto es, probada la existencia de x_0 tal que $f(x_0) = 0$, hallar explícitamente un valor $\bar{x}$, cercano a x_0, tal que $f(\bar{x}) \sim 0$.

Rigurosamente: dado $\epsilon > 0$, hallar x_ϵ tal que $|f(x_\epsilon)| < \epsilon$.
Generamos una sucesión x_0, x_1, $x_2, \ldots$ tq $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = 0$.

Análisis previo (separación de raíces):

$\exists\,!\, x_0 \in [a, b] \mid f(x_0) = 0$ argumentos de continuidad
crecimiento y decrecimiento

Método de Newton:

1. exige derivabilidad
2. usa la recta tangente a $f(x)$

3. es un método de aproximación rápida

Nota: existe otro método más simple, pero más lento: el método de subdivisiones sucesivas, también llamad0 de dicotomía. Sólo exige continuidad, se basa en el Th. Bolzano.

Método de Newton:
(Lo aplicaremos a aproximar $\sqrt{2}$ resolviendo $x^2 - 2 = 0$.)

IDEA CENTRAL: Localmente una curva $y = f(x)$ y su recta tangente se parecen.

Por tanto, para resolver $f(x) = 0$, aproximamos por el cero de “la recta tangente”.

Consideramos un punto inicial (cerca de la solución): p.ej. $x_0 = 2$, y la recta tangente a $f(x) = x^2 - 2$ en x_0 :

$$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0).$$

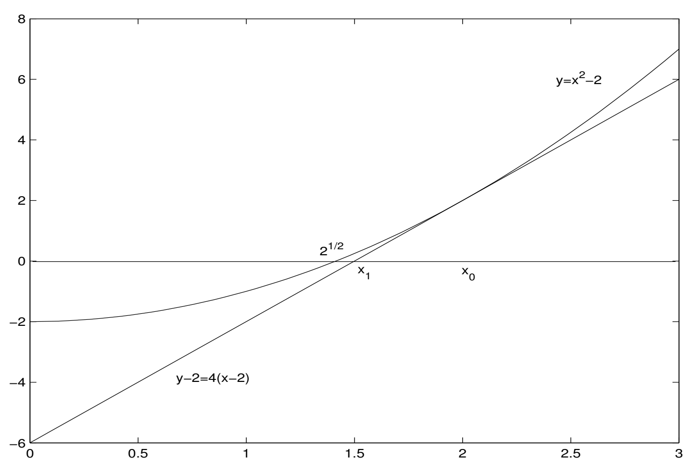
La raíz de esta recta es: $x_1 = x_0 - \dfrac{f(x_0)}{f'(x_0)}$.

No ocurre en general que x_1 sea raíz de f pero sí estará cerca, por lo que repetimos el proceso.

Construimos la recta tangente a f en $(x_1, f(x_1))$ y hallamos su corte con el eje OX:

$$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)}, \text{en general } x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}.$$

x_n	$f(x_n)$
2	2
$1,5$	$0,25$
$1,416666667$	$0,006944444$
$1,414215686$	$6,0073E-06$
$1,414213562$	$4,51061E-12$



Observación 3.1. 1. *Este método exige más cálculos que el uso reiterado del teorema de Bolzano (método de dicotomía), pero también es más rápido.*

2. *Necesitamos condiciones que aseguren la convergencia.*

   Teorema 3.2. *Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una función dos veces derivable con derivada segunda continua en $[a, b]$ tal que*

   a) $f(a) \cdot f(b) < 0$,

   b) $f'(x) \neq 0 \ \forall x \in [a, b]$

   c) o bien $f''(x) \geq 0 \ \forall x \in [a, b]$, *o bien* $f''(x) \leq 0 \ \forall x \in [a, b]$.

   Entonces, si tomamos $x_0 = a$ ó $x_0 = b$ tal que $signo f(x_0) = signo f''(x_0)$, el Método de Newton converge.

3. *Para asegurarnos de dar una buena aproximación podemos iterar el método hasta conseguir un número fijo de cifras que se repiten, o usar la expresión $|E_n| \leq \frac{M}{2m}(x_n - x_{n-1})^2$ con*

$$M = \max_{x \in [a,b]} |f''(x)| \ \ y \ \ m = \min_{x \in [a,b]} |f'(x)|.$$

3.2. Interpolación polinómica. Método de las diferencias divididas

Introducción / motivación:

datos experimentales: cantidad finita
necesidad de obtener una función "que pase por" (interpole a) dichos pares de valores, para representar y manipular.

Objetivo:

Encontrar métodos efectivos para interpolar datos.
(Distintos tipos de interpolación. Aquí veremos la polinómica)

Análisis previo (existencia y unicidad):

Dados una serie de datos (x_i, y_i) con $i = 0, \ldots, n$ (con x_i distintos entre si), $\exists!\, p(x)$ polinomio de grado $\leq n$ que interpola dichos valores: $p(x_i) = y_i$ para todo $i = 0, \ldots, n$.

Teorema 3.3 (Unicidad del polinomio de interpolación). *Si $p(x)$ y $q(x)$ son dos polinomios de grado $\leq n$ tales que $p(x_i) = q(x_i)$ para $i = 0, 1, \ldots, n$ con x_i distintos entre si, entonces $p(x) = q(x) \ \forall x \in \mathbb{R}$.*

3.2.1. Método de las Diferencias Divididas

Proposición 3.4. *Dados* $\{(x_i, y_i)\}_{i=0,\dots,n}$ *con los* x_i *distintos entre si, el polinomio de interpolación de grado* $\leq n$ *que los interpola es:*

$$p(x) = \mathbf{y_0} + \mathbf{y_{01}}(x - x_0) + \mathbf{y_{012}}(x - x_0)(x - x_1) + \cdots + \mathbf{y_{01\cdots n}}(x - x_0)(x - x_1)\cdots(x - x_{n-1})$$

donde

$$\begin{array}{cccccccc}
x_0 & \mathbf{y_0} & & & & & & \\
 & & \mathbf{y_{01}} = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0} & & & & & \\
x_1 & y_1 & & \mathbf{y_{012}} = \frac{y_{12} - y_{01}}{x_2 - x_0} & & & & \\
 & & y_{12} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} & & \mathbf{y_{0123}} = \frac{y_{123} - y_{012}}{x_3 - x_0} & \cdots & & \\
x_2 & y_2 & & y_{123} = \frac{y_{23} - y_{12}}{x_3 - x_1} & & & & \\
 & & y_{23} = \frac{y_3 - y_2}{x_3 - x_2} & & & & & \\
x_3 & y_3 & & & & & & \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & &
\end{array}$$

Ejemplo 3.5. *Hallar el polinomio de grado* ≤ 3 *que interpola*

x_i	-2	-1	1	2
y_i	-5	1	1	7

Comenzamos calculando los coeficientes:

$$\begin{array}{cccccc}
x_i & y_i & y_{ij} & y_{ijk} & y_{ijkl} \\
 & & & & \\
-2 & \mathbf{-5} & & & \\
 & & \frac{1-(-5)}{-1-(-2)} = \mathbf{6} & & \\
-1 & 1 & & \frac{0-6}{1-(-2)} = \mathbf{-2} & \\
 & & \frac{1-1}{1-(-1)} = 0 & & \frac{2-(-2)}{2-(-2)} = \mathbf{1} \\
1 & 1 & & \frac{6-0}{2-(-1)} = 2 & \\
 & & \frac{7-1}{2-1} = 6 & & \\
2 & 7 & & &
\end{array}$$

Entonces, los coeficientes de la diagonal superior señalados **en negrita** nos permiten obtener el polinomio del siguiente modo:

$$p(x) = -5 + 6(x + 2) - 2(x + 2)(x + 1) + (x + 2)(x + 1)(x - 1).$$

Simplificamos y vemos que obtenemos el polinomio $p(x) = x^3 - x + 1$.
Ventaja: si hiciera falta introducir algún par de valores más, se podría hacer sin problema y aprovechando los ya calculados (los x_i no tienen porqué estar ordenados).
Ahora es claro el nombre que recibe el algoritmo.

Tema 4

La integral definida. Aplicaciones

Las integrales formalizan un concepto bastante sencillo e intuitivo, el de área (y volúmenes, y longitudes entre otras aplicaciones). Los orígenes del cálculo de áreas se pueden encontrar en el "método de exhaución" desarrollado por los griegos hace más de 2000 años, pero fueron Newton y Leibnitz quienes le dieron el enfoque riguroso actual.

Se comprobará que los problemas del cálculo integral y diferencial son inversos el uno del otro, y una sencilla regla (de Barrow) servirá para dar respuesta al objetivo del tema: cómo calcular un área concreta.

4.1. Cálculo de primitivas

Definición 4.1. *Dadas $f,\ F : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, decimos que F es una primitiva de la función f si:*

$$F'(x) = f(x), \quad \forall x \in D.$$

Está claro que si F es una primitiva de f, $F + C$ es también primitiva de f para cualquier $C \in \mathbb{R}$.

Definición 4.2. *Al conjunto de todas las primitivas de f se le llama* **integral indefinida de** *f:*

$$\int f(x)\,dx = F(x) + C, \quad \forall C \in \mathbb{R}.$$

Propiedades:

1. Si $k \in \mathbb{R}$, entonces $\displaystyle\int k\,f(x)\,dx = k \int f(x)\,dx$.

2. $\displaystyle\int (f(x) \pm g(x))\,dx = \int f(x)\,dx \pm \int g(x)\,dx$

4.2. Reglas de cálculo de primitivas

Integrales inmediatas	Integrales funciones compuestas
Tipo potencial $\int x^n\,dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C, \quad n \neq -1$	$\int f(x)^n\, f'(x)\,dx = \frac{f(x)^{n+1}}{n+1} + C, \quad n \neq -1$
Tipo logarítmico $\int \frac{1}{x}\,dx = \ln\lvert x\rvert + C$	$\int \frac{f'(x)}{f(x)}\,dx = \ln\lvert f(x)\rvert + C$
Tipo exponencial $\int e^x\,dx = e^x + C$ $\int a^x\,dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$	$\int e^{f(x)}\, f'(x)\,dx = e^{f(x)} + C$ $\int a^{f(x)}\, f'(x)\,dx = \frac{a^{f(x)}}{\ln a} + C$
Tipo trigonométricas directas $\int \mathrm{sen} x\,dx = -\cos x + C$ $\int \cos x\,dx = \mathrm{sen} x + C$ $\int \frac{1}{\cos^2 x}\,dx = \mathrm{tg} x + C$ $\int \frac{1}{\mathrm{sen}^2 x}\,dx = -\mathrm{cotg} x + C$	$\int \mathrm{sen} f(x)\, f'(x)\,dx = -\cos f(x) + C$ $\int \cos f(x)\, f'(x)\,dx = \mathrm{sen} f(x) + C$ $\int \frac{1}{\cos^2(f(x))}\, f'(x)\,dx = \mathrm{tg}(f(x)) + C$ $\int \frac{1}{\mathrm{sen}^2(f(x))}\, f'(x)\,dx = -\mathrm{cotg}(f(x)) + C$
Tipo trigonométricas inversas $\int \frac{dx}{1+x^2} = \mathrm{arctg}\, x + C$ $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \mathrm{arcsen}\, x + C$	$\int \frac{f'(x)}{1+f(x)^2}\,dx = \mathrm{arctg}(f(x)) + C$ $\int \frac{f'(x)}{\sqrt{1-f(x)^2}}\,dx = \mathrm{arcsen}\,(f(x)) + C$

Ejemplo 4.3 (Tipo potencial).

1. $\int \left(5x^3 + \frac{2}{x^2} - \sqrt[3]{x^2} + 5\right)\,dx = 5\frac{x^4}{4} - \frac{2}{x} - \frac{3}{5}x^{5/3} + 5x + C.$

2. $\int (3x+5)^2\,dx = \frac{(3x+5)^3}{9} + C.$

3. $\int sen^4 x\, cos x\,dx = \frac{sen^5 x}{5} + C.$

Ejemplo 4.4 (Tipo logarítmico).

1. $\displaystyle\int \frac{1}{5x+3}\,dx = \frac{1}{5}\ln|5x+3| + C.$

2. $\displaystyle\int tgx\,dx = \int \frac{senx}{cosx}\,dx = -\ln|cosx| + C.$

Ejemplo 4.5 (Tipo exponencial).

1. $\displaystyle\int e^{x^2}\,x\,dx = \frac{1}{2}\,e^{x^2} + C.$

2. $\displaystyle\int cos(3x)\,2^{sen(3x)}\,dx = \frac{1}{3}\,\frac{2^{sen(3x)}}{\ln 2} + C.$

3. $\displaystyle\int \frac{6^{\ln x}}{x}\,dx = \frac{6^{\ln x}}{\ln 6} + C.$

Ejemplo 4.6 (Tipo trigonométricas directas).

1. $\displaystyle\int cos(mx)\,dx = \frac{1}{m}\,sen(mx) + C, \quad m \neq 0.$

2. $\displaystyle\int \frac{sen(lnx)}{x}\,dx = -cos(lnx) + C.$

3. $\displaystyle\int \frac{x}{cos^2(x^2)}\,dx = \frac{1}{2}\,tg(x^2) + C.$

Ejemplo 4.7 (Tipo trigonométricas inversas).

1.
$$\int \frac{5}{2+3x^2}\,dx = \int \frac{5/2}{1+\frac{3}{2}x^2}\,dx = \frac{5}{2}\int \frac{1}{1+(\sqrt{\frac{3}{2}}x)^2}\,dx$$
$$= \frac{5}{\sqrt{6}}\int \frac{\sqrt{\frac{3}{2}}}{1+\left(\sqrt{\frac{3}{2}}\,x\right)^2}\,dx = \frac{5}{\sqrt{6}}\,arctg\left(\sqrt{\frac{3}{2}}x\right) + C.$$

2.
$$\int \frac{e^x}{\sqrt{4-e^{2x}}}\,dx = 2\int \frac{\frac{e^x}{2}}{2\sqrt{1-(\frac{e^x}{2})^2}}\,dx = arcsen\left(\frac{e^x}{2}\right) + C.$$

4.2.1. Método de sustitución

Consiste en hacer un cambio de variable que transforme la integral en otra que sepamos calcular. No hay que olvidar, una vez resuelta, deshacer el cambio. Veamos algunos ejemplos:

$$\begin{aligned}
\int \frac{e^x}{\sqrt{4-e^{2x}}}\,dx &= \qquad (e^x = t \;\Rightarrow\; e^x\,dx = dt) \\
&= \int \frac{dt}{\sqrt{4-t^2}} = \int \frac{dt}{2\sqrt{1-(\frac{t}{2})^2}} \\
&= \operatorname{arcsen}\left(\tfrac{t}{2}\right) + C = \operatorname{arcsen}\left(\tfrac{e^x}{2}\right) + C.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\int \frac{\sqrt{x}}{\sqrt[3]{x}+1}\,dx &= \qquad (x = t^6 \;\Rightarrow\; dx = 6\,t^5\,dt) \\
&= 6\int \frac{t^8}{t^2+1}\,dt \quad \text{(dividimos)} \\
&= 6\int (t^6 - t^4 + t^2 - 1)\,dt + 6\int \frac{dt}{1+t^2} \\
&= 6\left(\frac{t^7}{7} - \frac{t^5}{5} + \frac{t^3}{3} - t\right) + 6\,\operatorname{arctg}(t) + C \\
&= 6\left(\frac{x^{\frac{7}{6}}}{7} - \frac{x^{\frac{5}{6}}}{5} + \frac{x^{\frac{1}{2}}}{3} - x^{\frac{1}{6}}\right) + 6\,\operatorname{arctg}(x^{1/6}) + C.
\end{aligned}$$

4.2.2. Método de integración por partes

Consiste en aplicar la siguiente regla:

$$\int u\,dv = u\,v - \int v\,du.$$

Veamos algunos ejemplos:

$$\begin{aligned}
\int x\,e^x\,dx &= \left\{\begin{array}{rcl} u &=& x \quad\Rightarrow\quad du = dx \\ dv &=& e^x\,dx \quad\Rightarrow\quad v = e^x \end{array}\right. \\
&= x\,e^x - \int e^x\,dx = x\,e^x - e^x + C \\
&= (x-1)\,e^x + C.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\int \operatorname{arctg} x\,dx &= \left\{\begin{array}{rcl} u &=& \operatorname{arctg} x \quad\Rightarrow\quad du = \frac{dx}{1+x^2} \\ dv &=& dx \quad\Rightarrow\quad v = x \end{array}\right. \\
&= x\,\operatorname{arctg} x - \int \frac{x}{1+x^2}\,dx \\
&= x\,\operatorname{arctg} x - \tfrac{1}{2}\,\ln|x^2+1| + C.
\end{aligned}$$

4.2.3. Integración de funciones racionales

Las funciones racionales son aquellas que se escriben de la forma $f(x) = \dfrac{p(x)}{q(x)}$, donde $p(x)$ y $q(x)$ son polinomios.

- Si $grado(p) < grado(q)$, podemos aplicar el método de descomposición que presentamos a continuación.

- Si no, debemos efectuar la división de polinomios, y escribirlo como:

  $$f(x) = \frac{p(x)}{q(x)} = c(x) + \frac{r(x)}{q(x)},$$

  donde $c(x)$ es el polinomio cociente que resulta al hacer la división y $r(x)$ es el polinomio resto de la división. Observemos que entonces $grado(r) < grado(q)$.

El método: El primer paso es descomponer el denominador en factores simples. Si $grado(q) = n$ y **todas las raíces son simples**, es decir,

$$q(x) = a_0\,(x - x_1)\,(x - x_2)\,\ldots\,(x - x_n),$$

se hace una descomposición de la forma (con $A_1, \ldots, A_n$ constantes reales):

$$\frac{p(x)}{q(x)} = \frac{A_1}{x - x_1} + \frac{A_2}{x - x_2} \cdots + \frac{A_n}{x - x_n},$$

y se integra cada uno de los sumandos que aparecen.

Ejemplo 4.8.

$$\begin{aligned} &\int \frac{2x-3}{2x^3 - x^2 - x}\,dx \;= \\ &\left[dado\ \ que\ 2x^3 - x^2 - x = x\,(x-1)\,(2x+1)\right] \\ &\qquad\qquad = \int \left(\frac{A}{x} + \frac{B}{x-1} + \frac{C}{2x+1}\right) \\ &= \;3\,\ln|x| - \frac{1}{3}\ln|x-1| - \frac{8}{3}\,\ln|2x+1| + C. \end{aligned}$$

donde los coeficientes A, B y C se han calculado resolviendo:

$$\begin{aligned} \frac{2x-3}{2x^3 - x^2 - x} &= \frac{A}{x} + \frac{B}{x-1} + \frac{C}{2x+1} \\ &= \frac{A(x-1)(2x+1) + Bx(2x+1) + Cx(x-1)}{x(x-1)(2x+1)} \\ &= \frac{x^2(2A + 2B + C) + x(-A + B - C) - A}{2x^3 - x^2 - x} \end{aligned}$$

para lo que se debe cumplir que:

$$\left\{\begin{array}{rcl} 0 & = & 2A+2B+C \\ 2 & = & -A+B-C \\ -3 & = & -A \end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{rcl} A & = & 3 \\ B & = & -\dfrac{1}{3} \\ C & = & -\dfrac{16}{3} \end{array}\right.$$

También podemos dar valores convenientes a x para obtener un sistema de ecuaciones más simple para A, B y C.

Si hay alguna **raíz múltiple**, de multiplicidad k, aparecen k sumandos asociados a esa raíz. Es decir, si en la descomposición del polinomio del denominador, $q(x)$, aparece $(x-x_0)^k$, entonces descomponemos $\dfrac{p(x)}{q(x)}$ como:

$$\frac{A_1}{x-x_0}+\frac{A_2}{(x-x_0)^2}+\frac{A_3}{(x-x_0)^3}+\cdots+\frac{A_k}{(x-x_0)^k}$$

Ejemplo 4.9.

$$\begin{aligned}
&\int \frac{2x-3}{x^3-3x^2+3x-1}\,dx = \\
&\left[\textit{dado que } x^3-3x^2+3x-1=(x-1)^3\right] \\
&= \int \left(\frac{A}{x-1}+\frac{B}{(x-1)^2}+\frac{C}{(x-1)^3}\right) dx \\
&= \int \left(\frac{0}{x-1}+\frac{2}{(x-1)^2}+\frac{-1}{(x-1)^3}\right) dx \\
&\qquad = -2\,\frac{1}{(x-1)}+\frac{1}{2}\,\frac{1}{(x-1)^2}+C
\end{aligned}$$

donde se ha resuelto:

$$\begin{aligned}
\frac{2x-3}{x^3-3x^2+3x-1} &= \frac{A}{x-1}+\frac{B}{(x-1)^2}+\frac{C}{(x-1)^3} \\
&= \frac{Ax^2+x(-2A+B)+(A-B+C)}{(x-1)^3}
\end{aligned}$$

lo que implica que $A=0$, $B=2$ y $C=-1$.

Hay otras muchas combinaciones, como mezcla de raíces reales y complejas (simples y/o múltiples). Nosotros sólo trataremos aquí el caso anterior, y el caso en que la raíz compleja es imaginaria pura, es decir, del tipo $\dfrac{1}{a^2+x^2}$, que ya sabemos es de tipo arcotangente.

4.2.4. Cambios de variable importantes

1. $\text{sen}x = t$:

   En este caso $\left\{ \begin{array}{rcl} \cos x\, dx & = & dt \\ \cos^2 x & = & 1 - t^2 \end{array} \right.$,

   lo que implica que $dx = \dfrac{dt}{\cos x} = \dfrac{dt}{\sqrt{1-t^2}}$.

   Por ejemplo,
   $$\int \frac{\text{sen}^3 x}{\cos x}\, dx = \int \frac{t^3}{\sqrt{1-t^2}} \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} = \int \frac{t^3}{1-t^2}\, dt$$
   que se ha transformado en una integral de tipo racional.

   También podemos intentar el cambio $\cos x = t$ o $\text{tg}x = t$.

   Observación 4.10. *Estos tres cambios no siempre funcionan, pero son fáciles de hacer. El cambio que más habitualmente funciona es* $tg\left(\frac{x}{2}\right) = t$*, pero los cálculos son más complicados.*

2. $x = t^n$

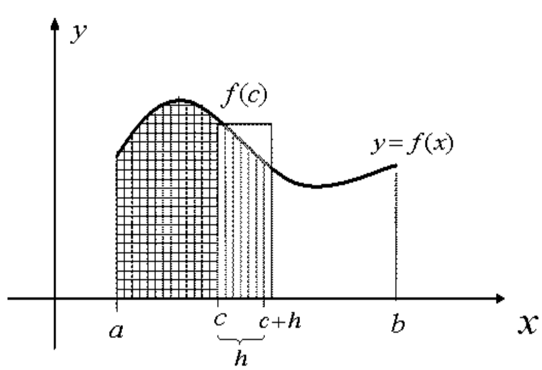
   Entonces $dx = nt^{n-1}\, dt$. Ver ejemplo segundo de la Sección 2.1.

4.3. La integral definida

Un anticipo de las aplicaciones que nos permite introducir el concepto de esta sección es el siguiente problema:

Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una función continua y positiva. Denotemos $A_f(c)$ al área contenida entre la función, el eje OX, y las rectas $x = a$ y $x = c$.

Veamos la relación entre las funciones A_f y f. Como la función f es continua en c, entonces, para cualquier $h > 0$ (pequeño), se tiene que $A_f(c+h) - A_f(c)$ es aproximadamente $f(c)h$, o lo que es lo mismo,
$$\frac{A_f(c+h) - A_f(c)}{h} \sim f(c).$$



Tomando ahora límites cuando $h \to 0$ en ambos miembros de la igualdad anterior (recordar la definición de derivada), se tiene que

$$\boxed{A'_f(c) = f(c),} \text{ es decir, } A_f \text{ es una primitiva de } f.$$

La propiedad anterior nos lleva a considerar el siguiente concepto:

Definición 4.11. *Llamamos* **integral definida** *a una expresión del tipo*

$$\int_a^b f(x)\,dx,$$

donde $a < b$. En caso de $a > b$, se considera:

$$\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx.$$

Observemos que sólo se diferencia de las primitivas o integrales indefinidas en que aparecen límites de integración a, b.

Si dada la función $f(x)$ conocemos una primitiva de ésta, $F(x)$, entonces se verifica la **Regla de Barrow:**

$$\boxed{\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a).}$$

Observemos que $\displaystyle\int f(x)\,dx = F(x) + C$, es decir, el valor de C no afecta a la aplicación del la Regla de Barrow.

Ejemplo 4.12. $\displaystyle\int_1^2 x^2\,dx = \left.\frac{x^3}{3}\right|_1^2 = \frac{8}{3} - \frac{1}{3} = \frac{7}{3}.$

La **fórmula de integración por partes** para integrales definidas es:

$$\int_a^b f(x)\,g'(x)\,dx = \left. f(x)\,g(x)\right|_a^b - \int_a^b f'(x)\,g(x)\,dx$$

4.3.1. Propiedades de la integral definida

1. Si $k \in \mathbb{R}$, entonces $\displaystyle\int_a^b k\,f(x)\,dx = k\int_a^b f(x)\,dx.$

2. $\displaystyle\int_a^b (f(x) \pm g(x))\,dx = \int_a^b f(x)\,dx \pm \int_a^b g(x)\,dx.$

3. Si $c \in [a, b]$, entonces:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx.$$

4. Si $f(x) \geq 0$, $\forall x \in [a, b]$, entonces $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx \geq 0$.

5. Si $f(x) \leq g(x)$ $\forall x \in [a, b]$, entonces $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx \leq \int_a^b g(x)\,dx$.

4.3.2. Aplicaciones de la integral definida. Cálculo de áreas de superficies planas

Queremos calcular el área A determinada por $x = a$, $x = b$, el eje OX e $y = f(x)$.

- Si $f(x) \geq 0$, entonces $A = \displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$.
- Si $f(x) \leq 0$, entonces $A = -\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$.
- Si la función tiene cambios de signo en $[a, b]$, hay que separar los intervalos donde $f(x)$ tiene signo constante y aplicar lo anterior. Por ejemplo, si $f(x) \geq 0$ en $[a, c]$ y $f(x) \leq 0$ en $[c, b]$, entonces:

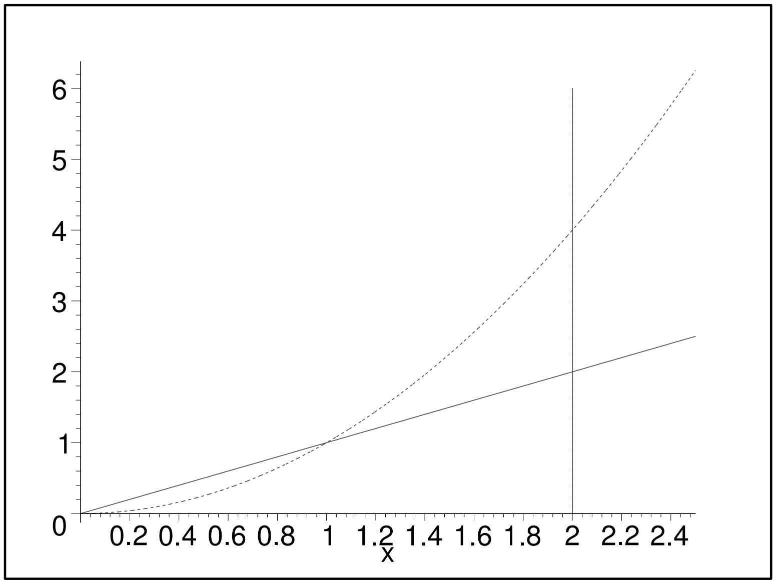
$$A = \int_a^c f(x)\,dx - \int_c^b f(x)\,dx.$$

Si queremos calcular el área determinada por $x = a$, $x = b$ y las curvas $y = f(x)$ e $y = g(x)$, donde $f(x) \geq g(x)$, entonces:

$$A = \int_a^b (f(x) - g(x))\,dx.$$

En otro caso, hay que separar $[a, b]$ en intervalos y se actúa como antes en cada intervalo.

Ejemplo 4.13. *Calcular el área encerrada por* $f(x) = x$, $g(x) = x^2$ *en el intervalo* $(0, 1)$ *y en el intervalo* $(0, 2)$.



donde la línea continua corresponde a $y = x$, y la línea discontinua corresponde a $y = x^2$.

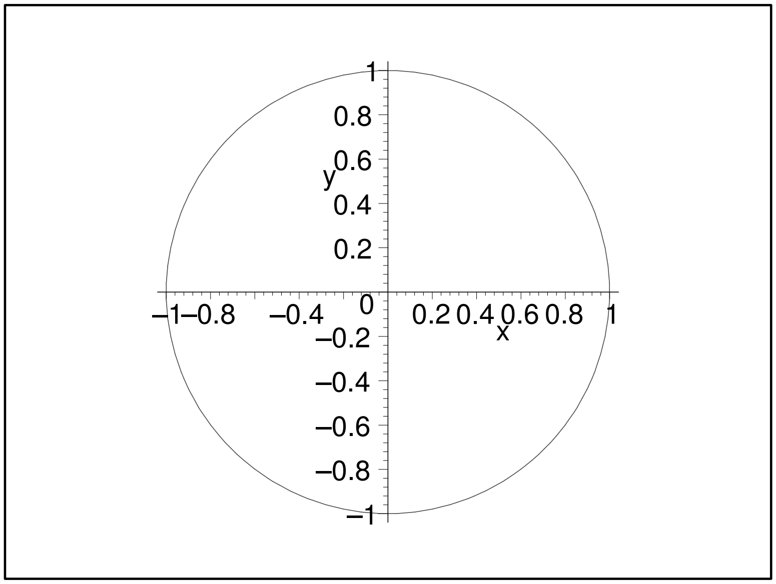
El área en el intervalo $(0, 1)$ es:

$$A = \int_0^1 (x - x^2)\,dx = \left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3}\right)\Big|_0^1 = \frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{1}{6}.$$

El área en el intervalo $(0, 2)$ es:

$$\begin{aligned} A &= \int_0^2 |f(x) - g(x)|\,dx = \int_0^1 (x - x^2)\,dx + \int_1^2 (x^2 - x)\,dx \\ &= \frac{1}{6} + \left(\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2}\right)\Big|_1^2 = \frac{1}{6} + \frac{8}{3} - 2 - \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{2}\right) \\ &= \frac{1}{6} + \frac{8}{3} - 2 - \frac{1}{3} + \frac{1}{2} = \frac{1 + 16 - 12 - 2 + 3}{6} = 1. \end{aligned}$$

Ejemplo: Área del círculo: La curva que define el contorno de un círculo de centro $(0, 0)$ y radio r es $x^2 + y^2 = r^2$, luego $y = \sqrt{r^2 - x^2}$.



Gracias a la simetría de la figura, para calcular el área lo hacemos para $x \in [0, r]$ y multiplicamos por 4:

$$\begin{aligned}
A &= 4\int_0^r \sqrt{r^2 - x^2}\,dx = 4\,r\int_0^r \sqrt{1 - \left(\frac{x}{r}\right)^2}\,dx \\
& \quad \text{haciendo el cambio de variable} \left\{ \begin{array}{rcl} \dfrac{x}{r} &=& \operatorname{sen} t \\ dx &=& r\cos t \end{array} \right. \\
&= 4r^2 \int_0^{\pi/2} \cos^2 t\,dt \\
& \quad \text{usando la fórmula trigonométrica } \cos^2(t) = \frac{1+\cos(2t)}{2} \\
&= 4r^2 \int_0^{\pi/2} \left(\frac{1+\cos(2t)}{2}\right) dt = 4r^2\left(\frac{t}{2} + \frac{\operatorname{sen}(2t)}{4}\right)\Bigg|_0^{\pi/2} = \pi\,r^2.
\end{aligned}$$

Tema 5

Ecuaciones diferenciales y algunas aplicaciones

Las ecuaciones diferenciales ordinarias, e. d. o. , aparecen al estudiar muchos fenómenos naturales. Grosso modo, se trata de una expresión que relaciona una función desconocida con sus derivadas.

En este tema presentamos algunos casos concretos para ilustrar su importancia, aprenderemos a plantear problemas en este marco, donde una magnitud concreta aparece relacionada con la velocidad a la que evoluciona, y por supuesto abordaremos formas de resolver los casos presentados.

5.1. Algunos ejemplos

1. **Modelos de origen físico**, como:

   a) **la ley de enfriamiento de Newton:**

   $$T'(t) = -k(T(t) - T_A)$$

   donde $T = T(t)$ es la temperatura, T_A es la temperatura ambiente y k es una constante positiva.

   b) **Fenómenos naturales como la descomposición de elementos radiactivos:**

   $$N'(t) = -\lambda\, N(t),$$

   donde $N = N(t)$ es el número relativo de moléculas sin desintegrar y λ es una constante positiva que depende del material.

2. **Modelos de la dinámica de poblaciones:**

   a) **Modelo de Malthus:** si $p(t)$ representa el número relativo de individuos de una población, esta ley lleva a

   $$p'(t) = \alpha\, p(t),$$

donde α es una constante que representa la diferencia entre la natalidad y la mortalidad de la población (=tasa de crecimiento instantáneo).

b) **Modelo logístico o de Verhulst:** para evitar el crecimiento ilimitado que puede ocurrir en el modelo de Malthus (de hecho ocurre para $\alpha > 0$), Verhulst propuso el siguiente modelo

$$p'(t) = \alpha\, p(t) - \beta\, (p(t))^2,$$

donde ahora $\beta > 0$ representa el nivel de competición de la propia especie frente a los recursos naturales del medio (factor de freno).

c) **Sistema de presa-depredador:** en este caso tenemos dos poblaciones, $x(t)$ que representa a los depredadores e $y(t)$ a las presas. El modelo es

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt}(t) = -\alpha\, x(t) + \beta\, x(t)\, y(t) \\ \dfrac{dy}{dt}(t) = \gamma\, y(t) - \delta\, x(t)\, y(t) \end{cases}$$

donde α, β, γ y δ son constantes positivas. α y γ representan el índice de crecimiento de $x = x(t)$ e $y = y(t)$ respectivamente, β y δ representan el grado de depredación de las especies.

5.2. Conceptos fundamentales

Definición 5.1. *Una* **ecuación diferencial ordinaria (e. d. o.) de primer orden** *es una relación entre una variable independiente t, una variable dependiente $y(t)$ y la derivada de ésta $y'(t)$. Dicha relación se escribe en notación matemática como:*

$$F(t, y(t), y'(t)) = 0.$$

El tipo de ecuaciones diferenciales ordinarias que vamos a estudiar en este tema son aquellas de la forma siguiente:

$$y'(t) = f(t, y(t)). \tag{5.1}$$

Definición 5.2. *Una* **solución de una e. d. o.** *es una función $\varphi(t)$ que verifica la ecuación (5.1) en un intervalo (a, b), es decir,*

$$\begin{aligned} \varphi \quad &: \quad (a, b) \to \mathbb{R} \\ & \varphi'(t) = f(t, \varphi(t)), \quad \forall t \in (a, b). \end{aligned}$$

Si depende de una constante, c, recibe el nombre de **solución general** *y se denota por $\varphi_c = \varphi_c(t)$. Entonces, para cada valor de c hay una solución. Por tanto, se trata de una* **familia de soluciones***.*

Si la solución no depende de una constante se llama **solución particular** *y se denota por $\varphi = \varphi(t)$. Esto ocurre, por ejemplo, si le damos un valor a la constante c que aparece en la solución general; pero puede haber soluciones particulares que no estén incluidas en la solución general.*

Ejemplo 5.3. *Para la ecuación $y'(t) = 2\,y(t)$, observamos:*

- $\varphi_1(t) = e^{2t}$ *es solución en todo $\mathbb{R}$, pues:*
$$\varphi_1'(t) = 2\,e^{2t} = 2\,\varphi_1(t).$$
- $\varphi_5(t) = 5\,e^{2t}$ *es solución en todo $\mathbb{R}$, pues:*
$$\varphi_5'(t) = 5 \cdot 2\,e^{5t} = 2\,\varphi_5(t).$$
- $\varphi_c(t) = c\,e^{2t}$ *es solución en todo $\mathbb{R}$, pues:*
$$\varphi_c'(t) = c \cdot 2\,e^{2t} = 2\,\varphi_c(t).$$

5.3. Problemas de valores iniciales

Las condiciones iniciales permiten seleccionar qué solución (de entre las dadas por la solución general) es la que resuelve el problema tratado).

Definición 5.4. *Se llama* **problema de Cauchy o de valores iniciales** *relativo a la función $f(t,y)$ y a los datos (t_0, y_0):*

$$(PC)\left\{\begin{array}{rcl} y'(t) & = & f(t, y(t)) \\ y(t_0) & = & y_0 \end{array}\right.$$

al problema de analizar la existencia de soluciones de la e. d. o. que satisface, además, la condición inicial $y(t_0) = y_0$.

Existen resultados que analizan en qué casos existe solución del dicho problema (PC), y cuando hay una única solución. Nosotros sólo trataremos los casos en los que dicha solución existe.

Hasta ahora hemos denotado por t la variable independiente. A partir de este momento usaremos x como variable independiente.

Estudiaremos sólo dos tipos (de los muchos que existen):

1) **Ecuaciones de variables separables:** Son aquellas en las que la derivada se expresa de la forma:
$$y'(x) = \frac{f(x)}{g(y)}.$$

2) **Ecuaciones lineales:** Distinguimos entre:

   a) **Homogéneas**, que se expresan de la forma:
   $$y'(x) + a(x)\,y(x) = 0.$$

   b) **Completas**, que se expresan como:
   $$y'(x) + a(x)\,y(x) = f(x).$$

Trataremos cada uno de los tipos de ecuaciones diferenciales ordinarias, centrándonos en su identificación y método de resolución.

5.3.1. Ecuaciones de variables separables

Las ecuaciones en variables separables se resuelven agrupando las funciones que sólo dependen de la variable x en uno de los miembros, y las funciones que sólo dependen de la variable y en otro, e integrando cada miembro respecto de la variable de la que depende. Es decir, agrupamos de la forma:

$$y'(x) = \frac{f(x)}{g(y)} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{f(x)}{g(y)} \Rightarrow g(y)\,dy = f(x)\,dx,$$

e integramos para obtener la **solución**:

$$\int g(y)\,dy = \int f(x)\,dx + c.$$

Observación 5.5. *Como vemos, la solución depende de una constante c. Se trata, por tanto, de una solución general.*

Ejercicio 5.6. *Resuelve la ecuación $y' = \dfrac{x-5}{y^2}$.*

Solución: *Escribimos la e. d. o. como*

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x-5}{y^2}, \quad \Rightarrow \quad y^2\,dy = (x-5)\,dx.$$

Integrando obtenemos:

$$\int y^2\,dy = \int (x-5)\,dx + c \quad \Rightarrow \quad \frac{y^3}{3} = \frac{x^2}{2} - 5x + c,$$

que es la solución general. Notemos que para dar la solución no es necesario despejar la función $y(x)$.

Ejercicio 5.7. *Resuelve el problema $y' = \dfrac{y-1}{x+3}$ con la condición $y(-1) = 0$.*

Solución: *Escribimos la e. d. o. como*

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y-1}{x+3}, \quad \Rightarrow \quad \frac{dy}{y-1} = \frac{dx}{x+3}.$$

Integrando obtenemos:

$$\int \frac{dy}{y-1} = \int \frac{dx}{x+3}$$

$$\Rightarrow \quad ln|y-1| = ln|x+3| + c \quad \Rightarrow \quad |y-1| = e^{\ln|x+3|+c}$$

$$\Rightarrow \quad |y-1| = |x+3|\,e^c \quad \Rightarrow \quad y-1 = \pm\,e^c\,(x+3) \quad \text{donde } e^c > 0$$

Por tanto, si escribimos $K = \pm\,e^c$, K es una constante cualquiera (positiva o negativa). Observemos que el caso $K = 0$, que corresponde a $y(x) \equiv 0$, también es solución de la ecuación. Entonces,

$$y - 1 = K\,(x+3), \quad K \in \mathbb{R}$$

es la solución general de la ecuación $y' = \dfrac{y-1}{x+3}$.

Buscamos la solución particular que verifica, además de la e. d. o., la condición $y(-1) = 0$. *Imponemos entonces que la solución general verifique dicha condición, es decir, sustituimos* $x = -1$ *e* $y = 0$ *en la solución general, de manera que obtenemos:*

$$-1 = 2\,K \quad \Rightarrow \quad K = -\frac{1}{2}.$$

La solución particular del **problema de valores iniciales***, es:*

$$y = 1 - \frac{1}{2}(x+3).$$

Ejercicio 5.8. *Resuelve la ecuación* $y' = \dfrac{6x^5 - 2x + 1}{cos(y) + e^y}$.

Solución: *Escribimos la e. d. o. como*

$$\frac{dy}{dx} = \frac{6x^5 - 2x + 1}{cos(y) + e^y},$$

$$\Rightarrow \quad (cos(y) + e^y)\,dy = (6x^5 - 2x + 1)\,dx.$$

Integrando obtenemos:

$$\int (cos(y) + e^y)\,dy = \int (6x^5 - 2x + 1)\,dx + c$$

$$\Rightarrow \quad (sen(y) + e^y) = x^6 - x^2 + x + c,$$

que es la solución general.

5.3.2. Ecuaciones diferenciales lineales

Se llama **ecuación diferencial lineal de primer orden** a una ecuación del tipo:

$$y'(x) + a(x)\,y(x) = f(x), \tag{5.2}$$

donde $a(x)$ y $f(x)$ son funciones continuas. La ecuación se llama **completa** si $f(x) \neq 0$, y se llama **homogénea o incompleta** si $f(x) = 0$. Para resolver la ecuación completa, hay que resolver en primer lugar la ecuación homogénea.

Resolución de la ecuación homogénea $y'(x) + a(x)y(x) = 0$

La resolvemos separando variables:

$$y' + a(x)y = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{dy}{dx} + a(x)y = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{dy}{dx} = -a(x)y$$

$$\Rightarrow \quad \frac{dy}{y} = -a(x)\,dx \quad \Rightarrow \quad \int \frac{dy}{y} = -\int a(x)\,dx + c$$

$$\Rightarrow \quad ln\,|y| = -\int a(x)\,dx + c \quad \Rightarrow \quad |y(x)| = e^{-\int a(x)dx + c}$$

$$\Rightarrow |y(x)| = e^{-\int a(x)\,dx} \cdot e^c \quad \Rightarrow \quad y(x) = \pm\, e^c \cdot e^{-\int a(x)dx} \quad \text{donde } e^c > 0,$$

luego

$$y(x) = K\, e^{-\int a(x)\, dx}$$

con $K = \pm\, e^c$ una constante cualquiera (positiva o negativa). Observemos que el caso $K = 0$, que corresponde a $y(x) \equiv 0$, también es solución de la ecuación.

La solución general de $y' + a(x)y = 0$ es entonces:

$$y(x) = K\, e^{-\int a(x)dx}, \quad K \in \mathbb{R}. \tag{5.3}$$

Resolución de la ecuación $y'(x) + a(x)y(x) = f(x)$

El método que usaremos se llama **método de variación de constantes o variación de parámetros**, y consiste en lo siguiente:

- A partir de la solución $y(x) = K\, e^{-\int a(x)dx}$, se considera que la constante K es un parámetro que depende de x, luego buscamos $K(x)$ para que:

$$y(x) = K(x)\, e^{-\int a(x)dx} \tag{5.4}$$

  sea solución de (5.2).

- Para ello, es necesario que la función (5.4) verifique la ecuación (5.2), por tanto,

$$\begin{aligned} y'(x) &= K'(x)\, e^{-\int a(x)dx} + K(x)\,(-a(x))\, e^{-\int a(x)dx} \\ &= K'(x)\, e^{-\int a(x)dx} - K(x)\, a(x)\, e^{-\int a(x)dx} \end{aligned}$$

  luego sustituyendo la expresión de $y'(x)$ en (5.2), obtenemos:

$$\begin{aligned} K'(x)\, e^{-\int a(x)dx} &- K(x)\, a(x)\, e^{-\int a(x)dx} + a(x)\, K(x)\, e^{-\int a(x)dx} \\ &= f(x), \end{aligned}$$

  lo que implica que:

$$\begin{aligned} K'(x)\, e^{-\int a(x)dx} = f(x) \quad &\Rightarrow \quad K'(x) = f(x)\, e^{\int a(x)dx} \\ &\Rightarrow \quad K(x) = \int f(x)\, e^{\int a(x)dx} dx + k. \end{aligned}$$

Por tanto, la solución de (5.2) es:

$$y(x) = \left(\int f(x)\, e^{\int a(x)dx} dx + k \right) e^{-\int a(x)dx}. \tag{5.5}$$

Ejercicio 5.9. *Resolver* $y'(x) + y\, cos(x) = 0$.

Solución: *Vamos a resolver separando previamente las variables. Obtenemos:*

$$y' = -y\, cos(x) \Rightarrow \frac{dy}{dx} = -y\, cos(x) \Rightarrow \frac{dy}{y} = -cos(x)\, dx$$

$$\Rightarrow ln\,|y| = -\int cos(x)\, dx = -sen(x) + c \quad \Rightarrow \quad |y(x)| = e^{-sen(x)+c}$$

$$\Rightarrow \quad |y(x)| = e^{-sen(x)} \cdot e^c \quad \Rightarrow y(x) = \pm\, e^c \cdot e^{-sen(x)}$$

Por tanto, $y(x) = K\, e^{-sen(x)}$*, donde* $K = \pm e^c$ *una constante cualquiera (positiva o negativa). Observemos que el caso* $K = 0$*, que corresponde a* $y(x) \equiv 0$*, también es solución de la ecuación. Es decir, la solución general de la ecuación* $y'(x) + y\, cos(x) = 0$ *es:*

$$y(x) = K\, e^{-sen(x)}, \quad K \in \mathbb{R}.$$

Ejercicio 5.10. *Resolver* $y'(x) + 2\, y = 0$.

Solución: *Vamos a resolver separando previamente las variables. Obtenemos:*

$$y' = -2\, y \quad \Rightarrow \quad \frac{dy}{dx} = -2\, y \quad \Rightarrow \quad \frac{dy}{y} = -2\, dx$$

$$\Rightarrow ln\,|y| = -\int 2\, dx = -2\, x + c \quad \Rightarrow \quad |y(x)| = e^{-2\, x + c}$$

$$\Rightarrow \quad |y(x)| = e^{-2\, x} \cdot e^c \quad \Rightarrow \quad y(x) = \pm\, e^c \cdot e^{-2\, x}$$

Por tanto, $y(x) = K\, e^{-2\, x}$ *con* $K = \pm\, e^c$ *una constante cualquiera (positiva o negativa). Observemos que el caso* $K = 0$*, que corresponde a* $y(x) \equiv 0$*, también es solución de la ecuación. Es decir, la solución general de la ecuación* $y'(x) + 2\, y = 0$ *es:*

$$y(x) = K\, e^{-2\, x}, \quad K \in \mathbb{R}.$$

Ejercicio 5.11. *Resolver* $x\, y'(x) + 2\, y = 0$.

Solución: *Escribimos primero la ecuación de forma explícita (despejando* y'*), para después aplicar el método de separación de variables, para obtener la solución, de la siguiente forma:*

$$y' + \frac{2}{x}\, y = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{dy}{dx} = -\frac{2}{x}\, y \quad \Rightarrow \quad \frac{dy}{y} = -\frac{2}{x}\, dx$$

$$\Rightarrow ln\,|y| = -2\, ln|x| + c \quad \Rightarrow \quad ln\,|y| = ln(x^{-2}) + c$$

$$\Rightarrow \quad |y(x)| = e^{\ln(x^{-2})+c} \quad \Rightarrow \quad |y(x)| = e^{\ln(x^{-2})} \cdot e^c$$

$$\Rightarrow \quad y(x) = \pm\, e^c \cdot x^{-2}$$

Po tanto, $y(x) = K\,x^{-2} = \dfrac{K}{x^2}$ *con* $K = \pm\, e^c$, *una constante cualquiera (positiva o negativa). Observemos que el caso* $K = 0$, *que corresponde a* $y(x) \equiv 0$, *también es solución de la ecuación. Es decir, la solución general de la ecuación* $x\,y'(x) + 2\,y = 0$ *es:*

$$y(x) = \frac{K}{x^2}, \quad K \in \mathbb{R}.$$

Ejercicio 5.12. *Resolver la ecuación* $y' + y\,cos(x) = \dfrac{1}{2}\,sen(2x)$.

Solución: *Resolvemos primero la ecuación lineal homogénea asociada* $y' + y\,cos(x) = 0$, *cuya solución calculamos en el Ejercicio 5.9:* $\quad y(x) = K\,e^{-sen(x)}$.

Después aplicamos el método de variación de constantes, considerando que la solución es de la forma:

$$y(x) = K(x)\,e^{-sen(x)}, \tag{5.6}$$

donde lo que queda por determinar es la constante $K(x)$. *Para ello, derivamos la expresión (5.6), obteniendo:*

$$y'(x) = K'(x)\,e^{-sen(x)} + K(x)\,(-cos(x))\,e^{-sen(x)},$$

y la sustituimos en la ecuación que queremos resolver:

$$\begin{aligned} y'(x) &= K'(x)\,e^{-sen(x)} + K(x)\,(-cos(x))\,e^{-sen(x)} \\ &+ K(x)\,cos(x)\,e^{-sen(x)} = \frac{1}{2}\,sen(2x) = sen(x)\,cos(x), \end{aligned}$$

de donde obtenemos que:

$$\begin{aligned} &K'(x) = sen(x)\,cos(x)\,e^{sen(x)} \;\Rightarrow \\ \Rightarrow \quad &K(x) = \int sen(x)\,cos(x)\,e^{sen(x)}\,dx + k. \end{aligned}$$

Integrando por partes, considerando $u = sen(x)$, $dv = cos(x)\,e^{sen(x)}\,dx$, *obtenemos:*

$$K(x) = (sen(x) - 1)\,e^{sen(x)} + k,$$

lo que implica que la solución de la ecuación lineal completa es:

$$y(x) = \Big((sen(x) - 1)\,e^{sen(x)} + k\Big)\;e^{-sen(x)} = sen(x) - 1 + k\,e^{-sen(x)}.$$

Ejercicio 5.13. *Resolver la ecuación* $y' + 2\,y = x^2 + 2\,x$.

Solución: *Resolvemos primero la ecuación lineal homogénea asociada, que es* $y' + 2\,y = 0$, *cuya solución calculamos en el Ejercicio 5.10:* $\quad y(x) = K\,e^{-2\,x}$.

Después aplicamos el método de variación de constantes, considerando que la solución es de la forma:

$$y(x) = K(x)\,e^{-2\,x}, \tag{5.7}$$

donde lo que queda por determinar es la constante $K(x)$.

Para ello, derivamos la expresión (5.7), obteniendo:

$$y'(x) = K'(x)\, e^{-2\,x} + K(x)\,(-2)\, e^{-2\,x},$$

y la sustituimos en la ecuación que queremos resolver:

$$y'(x) = K'(x)\, e^{-2\,x} + K(x)\,(-2)\, e^{-2\,x} + K(x)\, 2\; e^{-2\,x} = x^2 + 2\,x,$$

de donde obtenemos que:

$$K'(x) = (x^2 + 2\,x)\, e^{2x} \quad \Rightarrow \quad K(x) = \int (x^2 + 2x)\, e^{2x}\, dx + k.$$

Integrando por partes, obtenemos:

$$K(x) = \frac{1}{2}\left(x^2 + x - \frac{1}{2}\right) e^{2x} + k,$$

lo que implica que la solución de la ecuación lineal completa es:

$$y(x) = \frac{1}{2}\left(x^2 + x - \frac{1}{2}\right) + k\, e^{-2x}.$$

Tema 6

Estadística Descriptiva. Distribuciones estadísticas. Representaciones gráficas

En un curso general de Matemática Aplicada suele haber, por necesidades de sus receptores, un bloque de estadística. La estadística pretende extraer información relevante a partir de una serie de experimentos realizados de forma repetitiva. Dada una tabla de valores, a veces existen relaciones entre los mismos, medidas características que apuntan a cierta dirección, o que señalan cuánto se ha alejado la muestra de un valor central.

El objetivo de éste y los siguientes temas es poder obtener este tipo de información de tablas dadas.

6.1. Conceptos fundamentales

La **Estadística** es el conjunto de métodos necesarios para recoger, clasificar, representar y resumir datos (Estadística Descriptiva), así como de obtener consecuencias científicas a partir de estos datos (Inferencia Estadística).

Población es el conjunto de todos los elementos observados al realizar un experimento.

Muestra es cualquier subconjunto de la población.

Individuo es cada uno de los elementos de la población.

Tamaño de la muestra es el número de elementos de la muestra.

Un **carácter estadístico** es cualquier propiedad que permite clasificar a los individuos de una población. Se clasifican en cualitativos y en cuantitativos.

Modalidad de un carácter es cada una de las diferentes situaciones que puede presentar un carácter. Éstas en un mismo carácter son incompatibles. Por ejemplo, el carácter *sexo*, presenta dos modalidades: *masculino* y *femenino*.

Variable estadística es la correspondencia que a cada modalidad de un carácter cuantitativo le asocia un número real. Se clasifican en discretas (por ejemplo, el número de hijas de una familia, el número de obreros en una fábrica) y continuas (temperaturas registradas en un observatorio, la presión sanguínea de enfermos). Se suelen representar por X, Y ó Z.

Distribución de frecuencias. Los datos recogidos se van a clasificar y representar en una tabla en la que aparecen distintas frecuencias.

Sean N el tamaño de la muestra, C el carácter a analizar presentando las modalidades $C_1, C_2, ..., C_k$.

Sea n_i la **frecuencia absoluta** de C_i, es decir, el número de individuos que presentan la modalidad C_i.

La **frecuencia relativa** de C_i es $f_i = \frac{n_i}{N}$.

El **porcentaje relativo** a 100 individuos de C_i es $p_i = 100 f_i$.

Se verifica que $\sum_{i=1}^{k} n_i = N$, $\sum_{i=1}^{k} f_i = 1$.

La **frecuencia absoluta acumulada** es $N_i = \sum_{j=1}^{i} n_j$ y la **frecuencia relativa acumulada** $F_i = \sum_{j=1}^{i} f_j = \sum_{j=1}^{i} \frac{N_i}{N}$. Entonces $N_k = N$, $F_k = 1$.

El **porcentaje relativo acumulado** es $P_i = \sum_{j=1}^{i} p_j$.

6.2. Tablas estadísticas

6.2.1. Muestra de tamaño N para analizar un carácter cualitativo

Supongamos dada la siguiente tabla, donde las variables $C_1, C_2, ..., C_k$ son posibles modalidades.

Modalidades	F. abs.	F. relativas	Porcentajes
C_1	n_1	f_1	$100f_1$
C_2	n_2	f_2	$100f_2$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
C_k	n_k	f_k	$100f_k$
Total	N	1	100 %

Ejemplo: Distribución del color de los ojos en una muestra de 50 personas:

Modalidades	F. abs.	F. relativas	Porcentajes
Azules	16	$0'32$	32 %
Verdes	12	$0'24$	24 %
Marrones	14	$0'28$	28 %
Negros	8	$0'16$	16 %
Total	50	1	100 %

6.2.2. Tabla estadística para una variable discreta

En una muestra de tamaño N se ordenan de menor a mayor los valores de la variable, $x_1 < x_2 < ... < x_k$, y se añaden la frecuencias absolutas y relativas junto con los porcentajes.

Valores	F. abs.	F. relativas	Porcentajes
x_1	n_1	f_1	$100f_1$
x_2	n_2	f_2	$100f_2$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
x_k	n_k	f_k	$100f_k$
Total	N	1	100 %

Se puede completar la tabla con las frecuencias acumuladas para facilitar posteriores cálculos.

Ejemplo: Distribución del número de hijos en una muestra de 100 familias españolas:

x_i	n_i	N_i	f_i	F_i	p_i
0	14	14	$0'14$	$0'14$	14 %
1	26	40	$0'26$	$0'40$	26 %
2	30	70	$0'30$	$0'70$	30 %
3	16	86	$0'16$	$0'86$	16 %
≥ 4	14	100	$0'14$	1	14 %
Total	100		1		100 %

6.2.3. Tabla estadística para una variable continua

Los datos se agrupan en clases, que van a ser intervalos semiabiertos, $[e_0, e_1)$, $[e_1, e_2)$, $\cdots, [e_{k-1}, e_k)$. Se considera que todos los individuos de una misma clase tienen el valor que señala la marca de clase, siendo

$$c_i = \frac{e_{i-1} + e_i}{2}, \ i = 1, \cdots, k.$$

La amplitud de la clase $[e_{i-1}, e_i)$ es $a_i = e_i - e_{i-1}$.

Ventaja: menor número de cálculos.

Desventaja: pérdida de información.

Clases	Marcas	n_i	N_i	f_i	F_i	p_i	P_i
$[e_0, e_1)$	c_1	n_1	N_1	f_1	F_1	p_1	P_1
$[e_1, e_2)$	c_2	n_2	N_2	f_2	F_2	p_2	P_2
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$[e_{k-1}, e_k)$	c_k	n_k	N_k	f_k	F_k	p_k	P_k
Total		N		1		100 %	

Ejemplo: Pesos en miligramos de 40 pastillas de ciertos medicamentos:

Peso	$[200, 210)$	$[210, 215)$	$[215, 220)$	$[220, 230)$
n_i	3	10	14	13

6.3. Representaciones gráficas

Van a completar la información recogida en la tabla estadística.

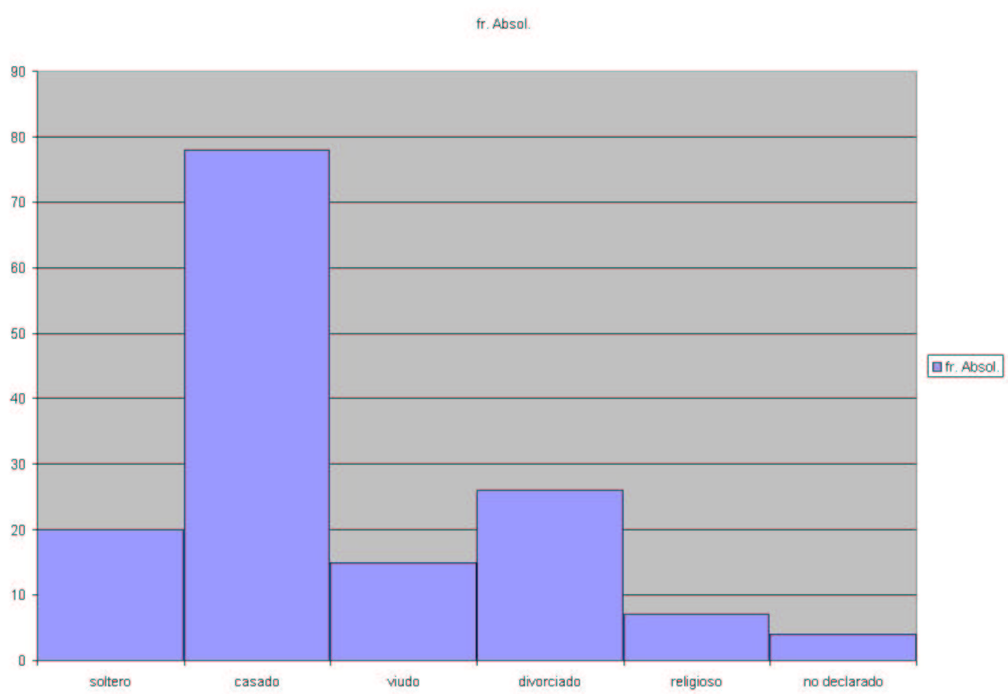
Dependiendo de la naturaleza del carácter estudiado hay diferentes tipos de representaciones.

6.3.1. Gráficas para caracteres cualitativos

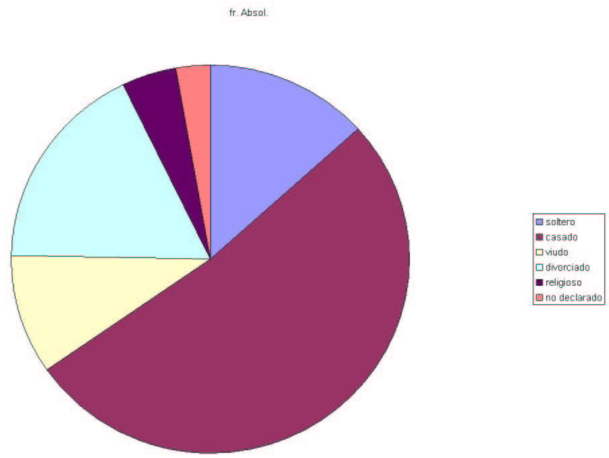
- **Diagramas de barras**. Sobre un sistema de ejes cartesianos en uno de los ejes se representan las distintas modalidades y en el otro los valores de la frecuencia. Sobre cada modalidad se levantan rectángulos de la misma base y altura proporcional (normalmente igual) a la frecuencia.

  Ejemplo. Distribución del estado civil de 150 personas:

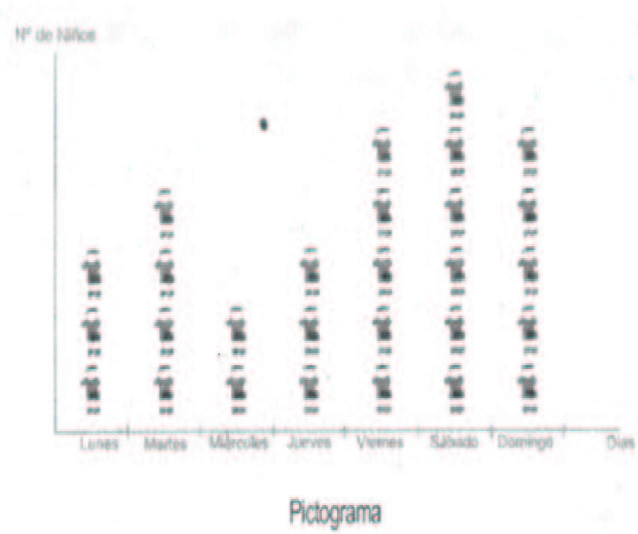
Estado	Solt.	Cas.	V.	Div.	Rel.	No declara
Fr.abs.	20	78	15	26	7	4



- **Diagramas de sectores**. Se traza una circunferencia de radio arbitrario y se divide su círculo en sectores. Cada sector se asocia a una modalidad siendo el ángulo correspondiente de cada sector proporcional a la frecuencia de cada modalidad.



- **Pictogramas**. Cada modalidad se representa por una figura no geométrica de tamaño proporcional a su frecuencia, o bien se toma un dibujo como modelo y se repite un número de veces proporcional a la frecuencia de la modalidad correspondiente[1].



[1]Tomado de la página web: http://www.me.gov.ve/SegundaEtapa/Glosario/matematica.htm

6.3.2. Gráficas para caracteres cuantitativos

Variable discreta

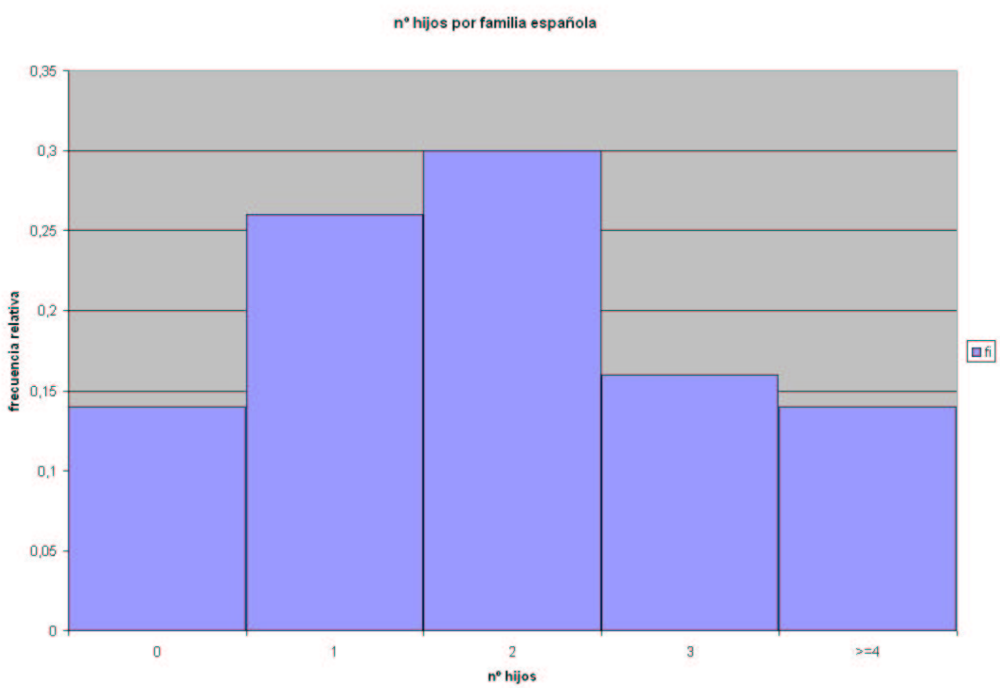
Diagramas de barras. Cuando la variable es discreta y toma pocos valores, el gráfico adecuado es el diagrama de barras o rectángulos. Se construye de la misma forma que para los caracteres cualitativos pero ahora sobre el eje x se sitúan los valores de la variable.

Uniendo los extremos superiores de las barras o los puntos medios de los lados superiores de los rectángulos se obtiene el **polígono de frecuencias simples**.

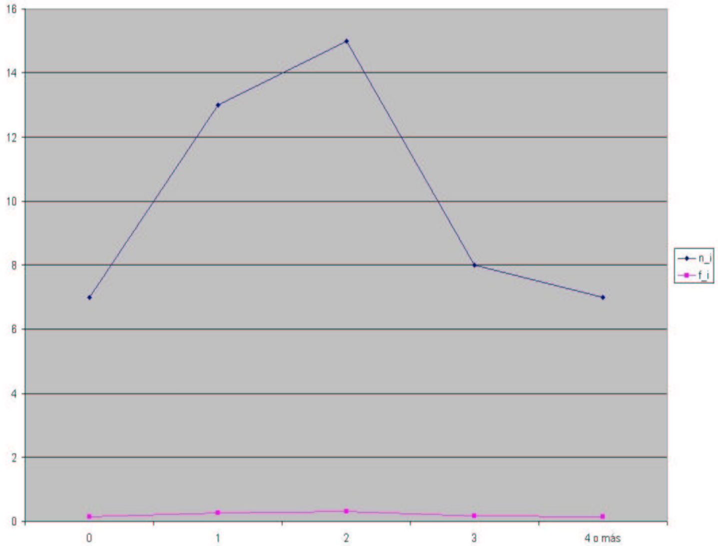
Ejemplo: Distribución del número de hijos en una muestra de 100 familias españolas:

x_i	n_i	f_i
0	14	$0'14$
1	26	$0'26$
2	30	$0'30$
3	16	$0'16$
≥ 4	14	$0'14$

El diagrama de barras es el siguiente:



Los polígonos de frecuencias simples para n_i y f_i (para ser precisos, y dado que cualquier columna proporcional es válida en estas representaciones, se aclara qué polígono de frecuencias se está construyendo: absolutas, relativas o porcentuales) vienen dados simplemente por:



Variable continua

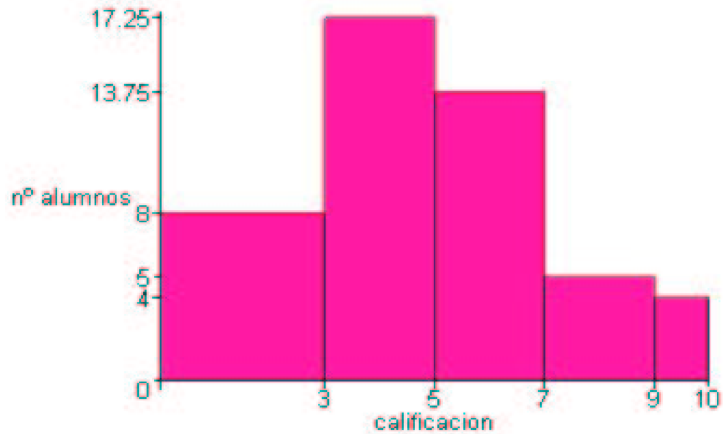
Histogramas. Como los datos usados en este caso proceden de una variable continua, se mantiene el tamaño real de la base de cada modalidad para no generar gráficas equívocas. Precisamente por ello sería igualmente tendencioso poner una altura proporcional a la frecuencia absoluta o cualquier otra (un intervalo con n_i grande puede deberse simplemente a ser demasiado grande). De modo que sobre cada intervalo de clase se levanta un rectángulo de **área igual o proporcional** a la frecuencia del correspondiente intervalo. Esto implica que leer meramente las alturas en un histograma es incorrecto, la información está codificada en las áreas.

Si las amplitudes son iguales, entonces las alturas se toman iguales a las frecuencias.

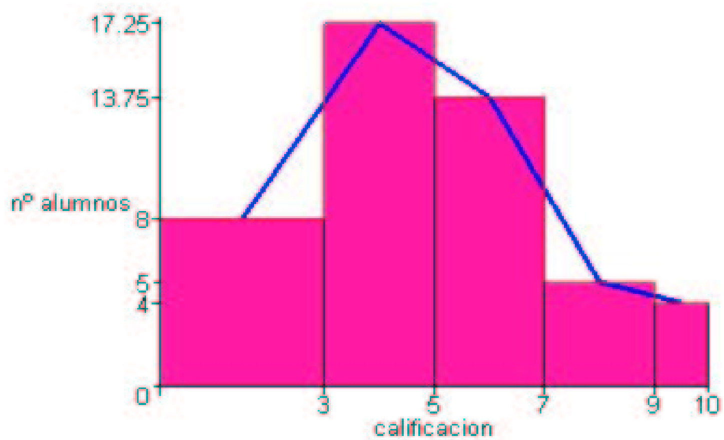
Amplitudes diferentes: En la clase $[e_{i-1}, e_i)$, considerando área igual a la frecuencia absoluta (también valdría cualquier otra columna proporcional: la relativa o la porcentual), tenemos $h_i = \frac{n_i}{a_i}$, donde h_i es la altura del rectángulo correspondiente a esa clase, y a_i la amplitud.

Ejemplo: Tabla, histograma y polígono de frecuencias acumuladas en las calificaciones de 200 alumnos:

Notas	n_i	p_i	h_i
$[0, 3)$	48	$24\,\%$	8
$[3, 5)$	69	$34'5\,\%$	$17'25$
$[5, 7)$	55	$27'5\,\%$	$13'75$
$[7, 9)$	20	$10\,\%$	5
$[9, 10)$	8	$4\,\%$	4



Uniendo los puntos medios de los lados superiores de los rectángulos se obtiene el **polígono de frecuencias simples enmarcado en el histograma**: para ser precisos, y dado que cualquier columna proporcional es válida en estas representaciones, se aclara qué polígono de frecuencias se está construyendo (absolutas, relativas o porcentuales), en este caso el de los porcentajes relativos.

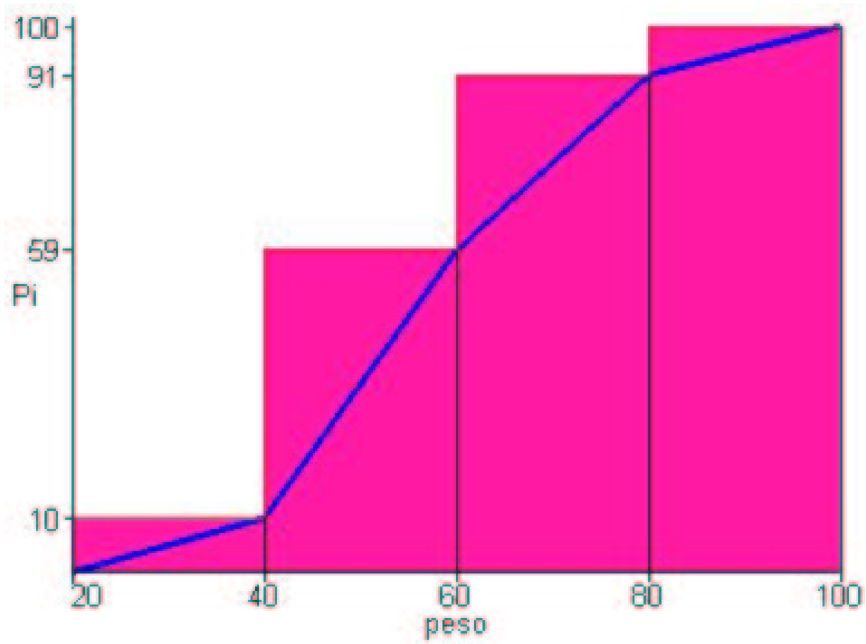


Polígono de frecuencias acumuladas. En el eje x se representan los extremos de las clases. A e_0 se le asigna ordenada 0 y a cada extremo derecho de las clases se le asigna como ordenada la frecuencia acumulada (absoluta, relativa o porcentual) de dicha marca. La poligonal que une dichos puntos es el polígono de frecuencias acumuladas. El hecho de tomar ahora la poligonal de los extremos a la derecha de los rectángulos es que, suponiendo uniformemente distribuido el número de individuos en cada clase, dicha poligonal debería reflejar al final de cada intervalo el total de individuos en él contenido.

Aplicación: supuesto conocido el polígono de frecuencias acumuladas y fijado un valor x_0 de la variable, la ordenada correspondiente, que se obtiene por interpolación lineal, es el porcentaje acumulado de individuos de la muestra para los que la variable es menor o igual que x_0.

Ejemplo: Peso en kg de 100 personas:

Peso	$[20, 40)$	$[40, 60)$	$[60, 80)$	$[80, 100)$
P_i	10	59	91	100



Porcentaje de individuos cuyo peso es menor o igual que 69: como $69 \in [60, 80)$, se calcula la recta que pasa por $(60, 59)$ y $(80, 91)$ y se sustituye la abcisa por 69:

$$y = 59 + \frac{91 - 59}{80 - 60}(69 - 60) = 73'4\,\%.$$

Tema 7

Medidas de posición y dispersión

Una vez agrupados los datos en distribuciones de frecuencias, se calculan unos valores que *sintetizan la información*. Estudiaremos dos grandes secciones:

Medidas de tendencia central o **de posición**: situación de los valores alrededor de los cuáles fluctúan los demás.

Medidas de dispersión: grado de desviación de los datos respecto de las medidas de tendencia central.

Acabaremos este resumen con el proceso de tipificación de una variable aleatoria.

7.1. Medidas de tendencia central

Estudiaremos la media aritmética, la mediana y la moda.

7.1.1. Media aritmética

Se suele representar por $\bar{x}$, aunque también por μ e incluso abusando de la notación probabilista EX (esperanza de la variable X). Es el valor de tendencia central de mayor interés.

Caso discreto

Sea X una variable discreta que toma los valores $x_1, x_2, \cdots, x_k$ con frecuencias absolutas $n_1, n_2, \cdots, n_k$ resp. La media aritmética de X viene dada por

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{k} x_i n_i}{N} = \sum_{i=1}^{k} x_i f_i.$$

Ejemplo. Calificaciones de 20 alumnos en Matemáticas:

x_i	n_i	N_i	P_i
2	3	3	15
4	6	9	45
5	5	14	70
6	3	17	85
8	1	18	90
10	2	20	100

La nota media es $\bar{x} = \frac{2\cdot3+4\cdot6+5\cdot5+6\cdot3+8\cdot1+10\cdot2}{20} = 5'05$.

Propiedades

1) La suma de todas las desviaciones a la media es cero: $\sum_{i=1}^{k}(x_i - \bar{x})n_i = 0$.

2) Si X toma los valores $x_1, x_2, \ldots, x_k$, e Y los valores $y_i = x_i + c, i = 1, 2, \ldots, k$, $c \in \mathbb{R}$, entonces $\bar{y} = \bar{x} + c$.

3) Si X toma los valores $x_1, x_2, \ldots, x_k$, e Y los valores $y_i = cx_i, i = 1, 2, \ldots, k$, $c \in \mathbb{R}$, entonces $\bar{y} = c\bar{x}$.

Aplicación: si X toma los valores $x_1, x_2, \ldots, x_k$, y Z los valores $z_i = \frac{x_i - c}{d}, i = 1, 2, \ldots, k$, con $c, d \in \mathbb{R}$, $d \neq 0$, entonces $\bar{z} = \frac{\bar{x} - c}{d}$, lo cual facilita a veces los cálculos cambiando de variable. Por ejemplo, se quiere calcular el diámetro medio de 100 émbolos cuyas medidas en mm son:

(x_i)	$153'7$	$153'8$	$153'9$	$154'0$	$154'1$	$154'2$	$154'3$
n_i	10	15	19	21	14	13	8

Definimos $Z = \frac{X - 154}{0'1}$ cuya distribución de frecuencias es

Diámetro (z_i)	-3	-2	-1	0	1	2	3
n_i	10	15	19	21	14	13	8

La media de Z es $\bar{z} = -0'15$, luego $\bar{x} = 0'1\bar{z} + 154 = 153'985$.

Caso continuo

Si la variable aleatoria es continua, para simplificar se calculará la media aritmética de una variable discreta cuyos valores son las marcas de clase de cada uno de los intervalos y las frecuencias absolutas las de cada clase. Con ello se pierde precisión, porque sólo se tendrá en cuenta el número de valores que está dentro de un intervalo de clase pero no la forma en la que están repartidos.

Ventajas de la media aritmética:

- Contiene toda la información de los datos de la distribución, por lo que es representativa.

- Siempre puede ser determinada, es fácil de calcular y admite operaciones aritméticas.

Desventaja: presenta una gran sensibilidad a valores extremos.

7.1.2. Percentiles. Caso particular: la mediana

Se suponen los valores de la variable ordenados en orden creciente. Si $n \in \mathbb{N}$, con $1 \leq n \leq 100$, el **percentil de rango** n es el valor de la variable estadística que deja por debajo de él al $n\,\%$ de los valores y al resto por encima. La **mediana** es el percentil de rango 50 (divide a la muestra en dos partes iguales; al menos la mitad de la muestra cumple estar por debajo del valor destacado).

Estudiaremos el valor de la variable correspondiente a un percentil dado; y dado un valor de la variable calcularemos el percentil correspondiente.

Caso discreto

Se realiza en primer lugar la tabla de frecuencias porcentuales acumuladas (f.p.a.).

a) Si el porcentaje n no figura en la columna de f.p.a. se toma como percentil de rango n el primer valor de la variable cuya f.p.a. sobrepasa a n.

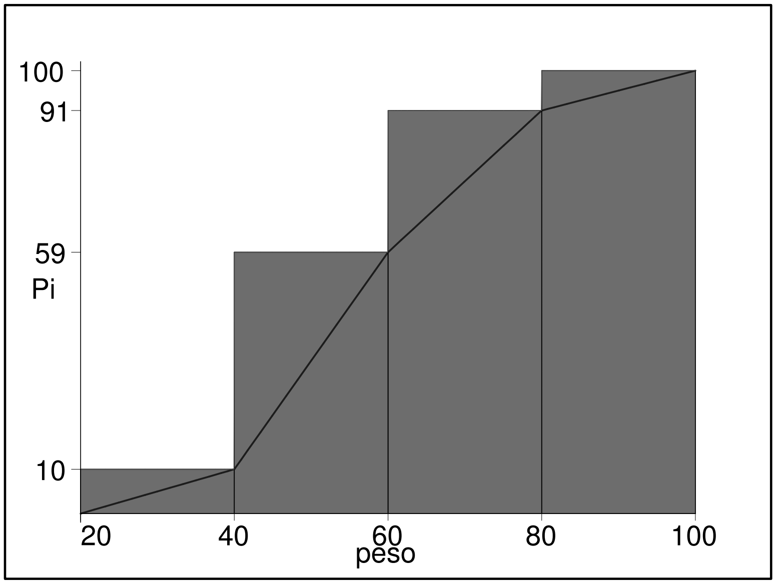
b) Si el porcentaje n coincide con la f.p.a. de algún valor x_i, se toma como percentil de rango n el valor $\frac{x_i+x_{i+1}}{2}$.

Ejemplo. Consideramos de nuevo la tabla dada en la página 74 sobre las calificaciones de 20 alumnos en Matemáticas.
La mediana es 5, el percentil de rango 84 es 6, mientras que el percentil de rango 85 es $\frac{6+8}{2} = 7$.

Caso continuo

Se construye el polígono de frecuencias porcentuales acumuladas (**no** debe construirse sobre el histograma, sino solo, pues las alturas deben reflejar el porcentaje correspondiente independientemente de la amplitud de cada clase). La abcisa correspondiente a la ordenada n es el percentil de rango n. El cálculo se hace por interpolación suponiendo que todos los individuos de un intervalo de clase están distribuidos homogéneamente.
Ejemplo. Peso en kg de 100 personas:

Peso	$[20,40)$	$[40,60)$	$[60,80)$	$[80,100)$
P_i	10	59	91	100



Recuérdese que la recta que pasa por los puntos (x_0, y_0) y (x_1, y_1) viene dada, por ejemplo, como $y - x_0 = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}(x - x_0)$.

En este caso la mediana está en el intervalo $[40, 60)$. Es aquel x tal que

$$50 - 10 = \frac{59 - 10}{60 - 40}(x - 40) \Rightarrow x = 41'6.$$

El percentil de rango 91 es 80.

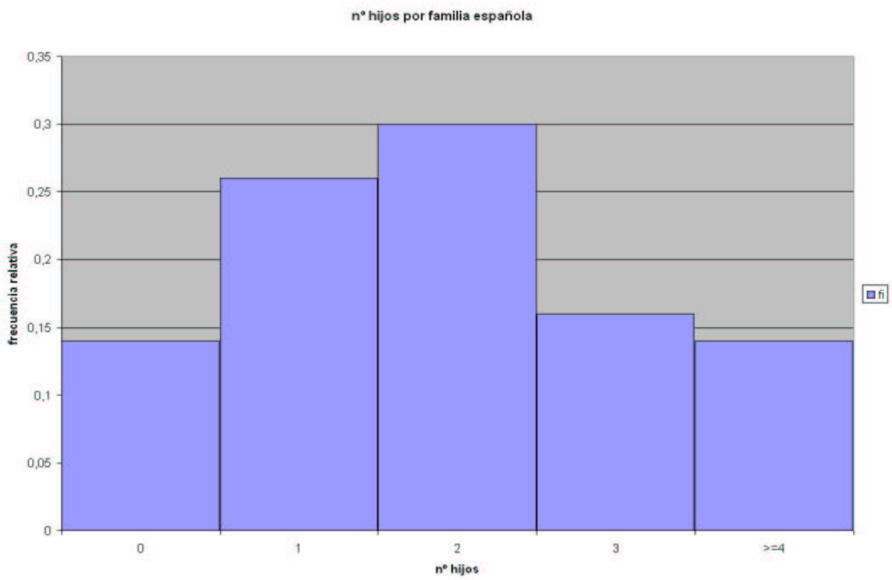
7.1.3. Moda

Es el valor de la variable estadística que corresponde al máximo del diagrama diferencial (diagrama de rectángulos o barras-histograma en caso continuo- y polígono de frecuencias simples). Se representa por Mo.

Caso discreto

La moda es el valor de la variable con mayor frecuencia. No tiene por qué ser única, puede haber dos o más valores que se repiten (frecuencia absoluta) igual número (máximo) de veces. En tal caso, todos esos valores son la moda.

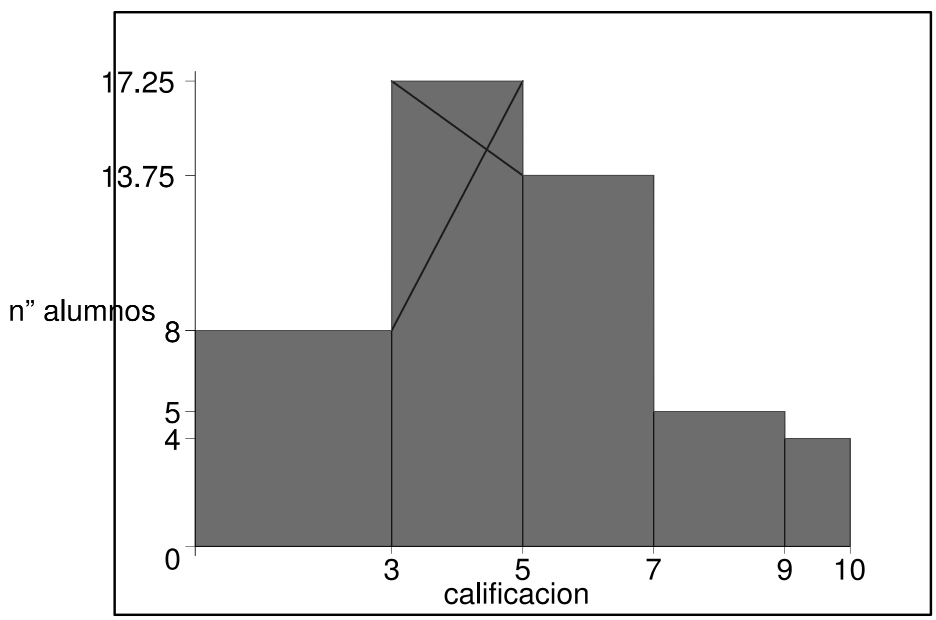
Ejemplo: En el caso de que estudiemos el número de hijos por familia española descrito por el siguiente diagrama de barras:



tenemos que $Mo = 2$.

Caso continuo

Se construye el histograma.



La moda está en el rectángulo de altura máxima, es decir, el de base $[3, 5)$. (Suponemos, igual que se hacía en el cálculo de la mediana, que la distribución a lo largo del intervalo es uniforme.) Así, ahora la moda se calcula hallando la intersección de los segmentos que aparecen en la figura. En este caso, la moda corresponde a la coordenada x del punto de intersección. Como dicho punto es $(4'45, 14'71)$, $Mo = 4'45$.

7.2. Medidas de dispersión

La *dispersión de una distribución* es la mayor o menor separación de sus datos respecto de una de las características de tendencia central, pretendiendo medir la representatividad de dicha característica.

Ejemplo. Calificaciones de 28 alumnos:

Física	3	9
n_i	14	14

Biología	3	6	9
n_i	5	6	7

La calificación media en ambas asignaturas es de 6 puntos, pero ¿dónde es más representativa?

Estudiaremos

- el recorrido,
- la desviación media,
- la varianza,
- la desviación típica y
- el coeficiente de variación de Pearson.

7.2.1. Recorrido

Viene definido como

$$R = \text{máx}(x_i) - \text{mín}(x_i).$$

Proporciona una primera información de la variabilidad de la distribución, pero es insuficiente ya que si la variable toma un valor muy alto o muy bajo en relación con el resto, puede inducir a engaño (de nuevo, como ocurría con la media, es muy sensible a valores extremos).

7.2.2. Desviación media

Dada una característica de tendencia central C, los valores $|x_i - C|$ representan la desviación a C. Estas cantidades definen una variable estadística que se usa como medida de dispersión. En concreto, la desviación media es la media aritmética de las desviaciones a la media:

$$D_{\bar{x}} = \frac{\sum_{i=1}^{k} |x_i - \bar{x}| n_i}{N}.$$

Problema: los valores absolutos no son muy adecuados para realizar cálculos y posteriores estudios.

7.2.3. Varianza

Se define como la media aritmética de los cuadrados de las desviaciones a la media:

$$s_X^2 = \frac{\sum_{i=1}^{k} (x_i - \bar{x})^2 n_i}{N}.$$

Si la varianza es nula, todos los valores de la variable coinciden con la media, es decir, dispersión nula. Cuanto más alejadas estén las observaciones de la media, mayor será la varianza. A veces también aparece (por ejemplo en muchas calculadoras) expresada como σ_n^2.

Propiedades: Sea X una variable, $c, d \in \mathbb{R}$, $d \neq 0$.

1) Si $Y = dX$, entonces $s_Y^2 = d^2 s_X^2$.

2) Si $Y = X + c$, entonces $s_Y^2 = s_X^2$.

Teorema 7.1 (de König). *la varianza es la diferencia entre la media de los cuadrados y el cuadrado de la media, es decir,*

$$\frac{\sum_{i=1}^{k} (x_i - \bar{x})^2 n_i}{N} = \frac{\sum_{i=1}^{k} {x_i}^2 n_i}{N} - \bar{x}^2$$

Problema: como todas las desviaciones están elevadas al cuadrado, la unidad de medida de la varianza viene dada en cuadrados de las unidades de los datos originales.

7.2.4. Desviación típica

Se define como la raíz cuadrada positiva de la varianza:

$$s_X = \left(\frac{\sum_{i=1}^{k} (x_i - \bar{x})^2 n_i}{N} \right)^{1/2}.$$

Esto aparece representado en muchas calculadoras como σ_n.

Propiedades: Sea X una variable, $c, d \in \mathbb{R}$, $d \neq 0$.

1) Si $Y = dX$, entonces $s_Y = d s_X$.

2) Si $Y = X + c$, entonces $s_Y = s_X$.

3) Usando de nuevo el Teorema de König:

$$s_X = \left(\frac{\sum_{i=1}^{k} {x_i}^2 n_i}{N} - \bar{x}^2 \right)^{1/2}$$

Ejemplo. Calificaciones de 20 alumnos en Matemáticas:

x_i	n_i	$(x_i - \bar{x})^2$	$(x_i - \bar{x})^2 n_i$	x_i^2	$x_i^2 n_i$
2	3	9’3025	27’9075	4	12
6	6	1’1025	6’6150	16	96
5	5	0’0025	0’0125	25	125
6	3	0’9025	2’7075	36	108
8	1	8’7025	8’7025	64	64
10	2	24’5025	49’0050	100	200
Total	20		94’95		605

Sabemos que $\bar{x} = 5'05$.

Usando la definición, $s_X^2 = \frac{\sum_{i=1}^{k} (x_i - \bar{x})^2 n_i}{N} = \frac{94'95}{20} = 4'7475$, y $s_X = 2'1788$.

Usando el Teorema de König, $s_X^2 = \frac{\sum_{i=1}^{k} {x_i}^2 n_i}{N} - \bar{x}^2 = \frac{605}{20} - (5'05)^2 = 4'7475$.

7.2.5. Coeficiente de variación de Pearson

A veces hay que comparar las dispersiones de dos distribuciones expresadas en distintas unidades. Es por ello que estudiamos una medida relativa de la variabilidad de la distribución mediante un número abstracto independiente de las unidades de medida de las variables. El coeficiente de variación de Pearson es

$$CV = \frac{s_X}{\bar{x}}.$$

Multiplicándolo por cien permite usar el lenguaje de porcentajes. Cuanto mayor sea CV menor será la representatividad de la media. Su valor mínimo es cero, cuando $s_X = 0$, en cuyo caso, obviamente, no hay dispersión.

Tipificación de la variable

En ocasiones interesa deducir el valor relativo de un dato respecto al grupo que pertenece, usando para ello la media y desviación típica del grupo.

Ejemplo. Se quiere asignar un puesto de trabajo entre dos candidatos. La plaza la consigue el que obtenga mejor calificación en una prueba que ambos realizaron en sus ciudades de procedencia. El candidato A obtuvo 55 puntos sobre 80, el candidato B 7 sobre 10 puntos. Son conocidas las medias y las desviaciones típicas de ambas pruebas: $\bar{x}_A = 45, s_A = 12; \bar{x}_B = 6, s_B = 2$.

¿Quién consigue entonces el puesto de trabajo? O dicho más generalmente: ¿cómo comparar datos de dos muestras distintas asociadas a un mismo tipo de estudio? Se hace un reescalamiento, denominado tipificación.

Se llama **tipificación de la variable** X, que toma los valores $x_1, x_2, \ldots, x_k$, a la transformación

$$z_i = \frac{x_i - \bar{x}}{s_X}.$$

A la variable Z que toma los valores $z_1, z_2, \ldots, z_k$, se le llama **variable tipificada**.

Gracias a las propiedades de la media y desviación típica, la variable tipificada tiene media nula y desviación típica uno (y ahora sí podemos compararlas).

Notamos Z_A y Z_B a dos nuevas variables estadísticas, las tipificaciones de las calificaciones habidas en las respectivas ciudades. Así, las notas de ambos individuos "tipificadas" son:

$$z_A = \frac{x_A - \bar{x}_A}{s_A} = 0'83; \quad z_B = \frac{x_B - \bar{x}_B}{s_B} = 0'5.$$

Estos valores ahora sí son comparables, y elegimos el valor mayor, es decir, el candidato de la ciudad A como el más apto.

Tema 8

Variables estadísticas bidimensionales

Los individuos de una población pueden ser clasificados atendiendo a dos caracteres simultáneamente. Por ejemplo, pulso y temperatura de los enfermos de un hospital, producción y venta de una fábrica, etc.

El objetivo de este tema será mostrar algunos resultados sobre el estudio de la relación entre dos características dadas en el mismo problema y cómo diagnosticar posibles valores esperados (cabe decir que al contrario que la interpolación dada en el primer bloque de la asignatura, ahora se usarán técnicas de aproximación).

Consideremos una muestra de N individuos, que clasificamos atendiendo a dos caracteres X e Y, que presentan, respectivamente, las modalidades $x_1, x_2, \ldots, x_p$ e $y_1, y_2, \ldots, y_q$. Por n_{ij} representamos al número de individuos que presenta la modalidad x_i de X y la modalidad y_j de Y. Es decir, n_{ij} es la frecuencia absoluta del par (x_i, y_j). Y $f_{ij} = \frac{n_{ij}}{N}$ es la frecuencia relativa. Entonces

$$\sum_{i=1}^{p}\sum_{j=1}^{q} n_{ij} = N, \qquad \sum_{i=1}^{p}\sum_{j=1}^{q} f_{ij} = 1.$$

Representando los pares (x_i, y_j) se obtiene un conjunto de puntos en el plano llamado **diagrama de dispersión** o **nube de puntos**. Nuestro objetivo en este tema es analizar, dada una nube de puntos, si existe una relación lineal entre las dos características estudiadas.

8.1. Tablas de doble entrada

Mediante ellas vamos a representar las variables bidimensionales. En la primera columna se colocan las modalidades de X y en la primera fila las de Y. La intersección de la fila donde está x_i con la columna donde está y_j corresponde a n_{ij}.

$X\backslash Y$	y_1	$\cdots$	y_j	$\cdots$	y_q	Total
x_1	n_{11}	$\cdots$	n_{1j}	$\cdots$	n_{1q}	$n_{1\cdot}$
$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$			$\vdots$
x_i	n_{i1}	$\cdots$	n_{ij}	$\cdots$	n_{iq}	$n_{i\cdot}$
$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$		$\vdots$	
x_p	n_{p1}	$\cdots$	n_{pj}	$\cdots$	n_{pq}	$n_{p\cdot}$
Total	$n_{\cdot 1}$	$\cdots$	$n_{\cdot j}$	$\cdots$	$n_{\cdot q}$	

$n_{i\cdot} = \sum_{j=1}^{q} n_{ij}$ es la **frecuencia absoluta marginal** de X, y $n_{\cdot j} = \sum_{i=1}^{p} n_{ij}$ es la **frecuencia absoluta marginal** de Y.

Se verifica que

$$\sum_{i=1}^{p} n_{i\cdot} = N, \qquad \sum_{j=1}^{q} n_{\cdot j} = N.$$

Se pueden definir las medias, varianzas y desviaciones típicas marginales de X e Y, pero en la práctica vamos a simplificar los cálculos pues toda tabla de doble entrada va a poderse escribir como una tabla simple.

Veámoslo con el ejemplo siguiente: estudiamos el número de toneladas de sandías y de melones producidos en 50 granjas. X es el número de toneladas de sandias e Y el número de toneladas de melones. La tabla de doble entrada

$X\backslash Y$	0	1	2	3	4	5	6	Total
0	2	0	4	3	1	0	0	10
1	3	0	9	0	0	3	0	15
2	0	6	0	6	0	0	1	13
3	1	4	0	0	2	1	0	8
4	0	0	2	0	1	0	0	3
5	0	0	0	1	0	0	0	1
Total	6	10	15	10	4	4	1	50

la convertimos en una tabla simple (donde cambiamos los subíndices)

x_i	y_i	n_i
0	0	2
0	2	4
0	3	3
0	4	1
1	0	3
1	2	9
1	5	3
2	1	6
2	3	6
2	6	1
3	0	1
3	1	4
3	4	2
3	5	1
4	2	2
4	4	1
5	3	1

En la tabla de doble entrada se puede calcular, por ejemplo,

$$\begin{aligned}
\bar{x} &= \frac{0 \cdot 10 + 1 \cdot 15 + 2 \cdot 13 + 3 \cdot 8 + 4 \cdot 3 + 5 \cdot 1}{50} = 1'64, \\
s_X^2 &= \frac{\sum\limits_{i=1}^{k} {x_i}^2 n_{i.}}{N} - \bar{x}^2 = 1'55.
\end{aligned}$$

8.2. Relaciones entre las variables X e Y

1- El primer indicador del grado de relación entre las variables va a ser la covarianza o varianza conjunta de las variables X e Y.

La **covarianza** de la variable bidimensional (X, Y), es decir, la que toma los valores (x_1, y_1), $(x_2, y_2), \ldots,$ (x_k, y_k) con frecuencias absolutas $n_1, n_2, \ldots, n_k$ es

$$s_{XY} = \frac{\sum\limits_{i=1}^{k} (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y}) n_i}{N} = \frac{\sum\limits_{i=1}^{k} x_i y_i n_i}{N} - \bar{x}\bar{y}.$$

(Esta última igualdad se comprueba simplemente desarrollando el producto previo.)

2- **Curva de regresión**. Buscamos una curva $y = f(x)$ cuya gráfica se adapte lo más posible a la nube de puntos, de manera que conocido el valor de una de las variables podamos obtener un valor aproximado de la otra mediante esta curva. Así podemos encontrar regresión lineal, parabólica, exponencial, etc.

Únicamente vamos a analizar la regresión lineal, es decir, el caso de la recta que más cerca pase de los puntos dados (esto se hace midiendo y minimizando la distancia, en cierto sentido, de la recta a la nube de puntos; según qué se minimice se pueden obtener distintas rectas).

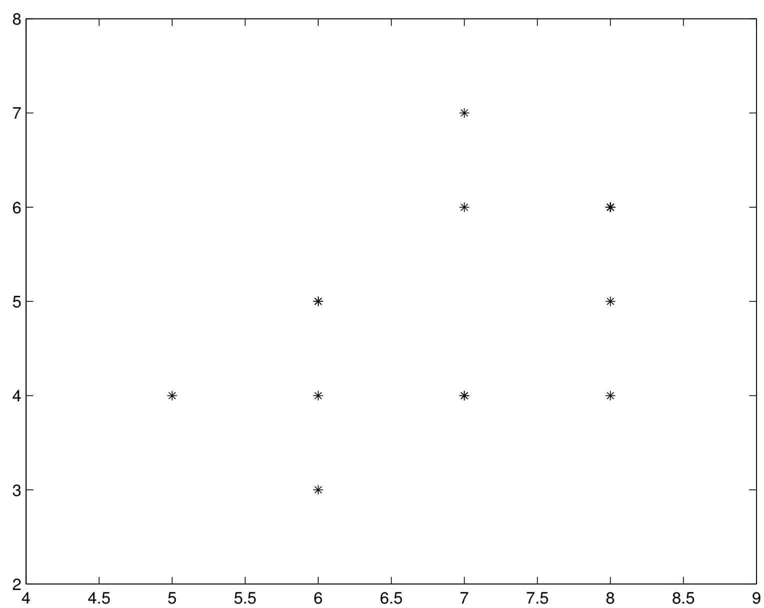
La **recta de regresión** de Y sobre X y la de X sobre Y son, respectivamente,

$$y - \bar{y} = \frac{s_{XY}}{s_X^2}(x - \bar{x}), \quad x - \bar{x} = \frac{s_{XY}}{s_Y^2}(y - \bar{y}).$$

Ejemplo. Las calificaciones en Matemáticas (X) y Química (Y) de 15 alumnos de Farmacia son

X	8	8	6	6	7	8	5	6	7	7	8	7	8	6	8
Y	4	6	3	5	4	6	4	4	6	4	5	7	6	5	6

Gráficamente vemos su distribución:



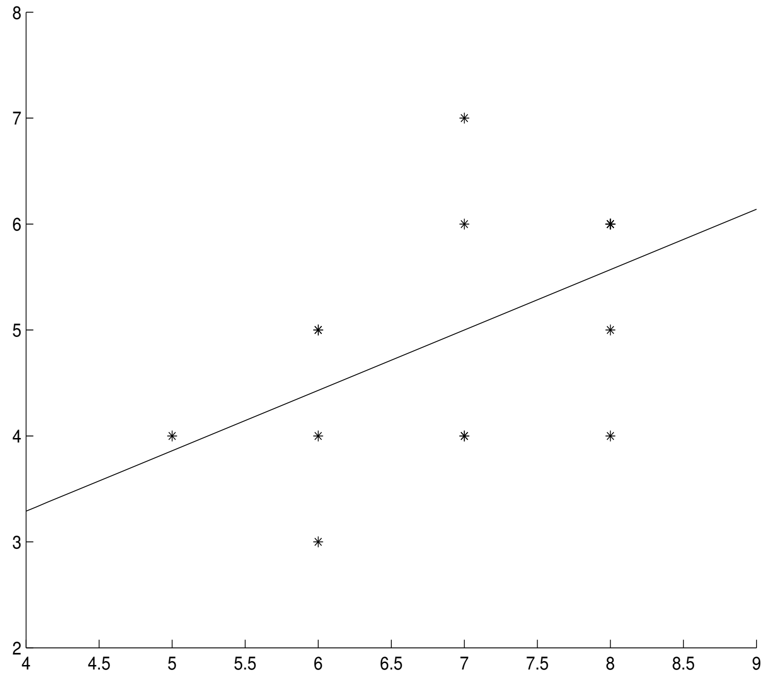
Nos planteamos el siguiente problema: mediante la recta de regresión de Y sobre X, determinar la nota que tendrá un alumno en Química que tiene un 8 en Matemáticas.

Calculamos para ello las medias, varianzas y covarianza de las variables:

$$\bar{x} = 7; \; s_X^2 = 0'93; \quad \bar{y} = 5; \quad s_Y^2 = 1'2; \; s_{XY} = 0'53.$$

La recta de regresión de Y sobre X es

$$y - 5 = \frac{0'53}{0'93}(x - 7) \Rightarrow y = 0'57x + 1'01.$$



Esta recta, que minimiza la distancia (en el sentido de mínimos cuadrados) de la nube de puntos a ella más que cualquier otra recta, sirve para "aventurar" aproximaciones de valores buscados estén o no en los datos iniciales.

Por ejemplo, la nota "más esperada" por esta vía en Química para un alumno con un 8 en Matemáticas será $y = 0'57 \cdot 8 + 1'01 = 5'57$.

3- La **correlación** es la teoría que analiza el grado de intensidad de la relación entre las dos variables. Diremos

- Correlación positiva si la curva de regresión es creciente.
- Correlación negativa si la curva de regresión es decreciente.
- Correlación nula si no existe ninguna relación entre las variables (*variables incorreladas*).
- Correlación de tipo funcional cuando todos los puntos de la nube de puntos pertenecen a la curva de regresión.

Supongamos que la regresión es lineal. Analizamos como índice de la correlación entre las variables X e Y el **coeficiente de correlación lineal de Pearson**:

$$r = \frac{s_{XY}}{s_X s_Y}.$$

Se puede probar que $-1 \leq r \leq 1$. Además:

- Si $r = 0$, entonces las rectas de regresión son $y = \bar{y}$, $x = \bar{x}$, es decir, paralelas a los ejes, no habiendo ningún tipo de dependencia entre ellas. Corresponde a variables incorreladas.

- Si $|r| = 1$, ambas rectas de regresión son iguales y hay regresión de tipo funcional entre las variables.

- Si $-1 < r < 0$, la correlación es negativa siendo mayor la intensidad cuanto más se aproxima r a -1.

- Si $0 < r < 1$, la correlación es positiva siendo mayor la intensidad cuanto más se aproxima r a 1.

Ejemplo. En el ejemplo anterior, $r = \frac{s_{XY}}{s_X s_Y} = \frac{0'53}{0'97{,}1'1} = 0'5$, por tanto, la correlación es positiva pero no muy fuerte, y de ahí que la predicción realizada no es muy fiable.

Tema 9

Probabilidad. Distribuciones binomial y normal

En este tema trataremos algunas cuestiones básicas sobre Probabilidad. Tanto la Probabilidad como la Estadística son dos campos de las Matemáticas que proporcionan útiles herramientas para el estudio de las ciencias de la vida. Muchos fenómenos de la naturaleza no son deterministas, es decir, conllevan una aleatoriedad. La teoría de la Probabilidad estudia las leyes que modelan esa aleatoriedad mientras que la teoría estadística analiza los datos concretos obtenidos de los experimentos; ambas son las caras de una misma moneda que deben conocerse para entender mejor la realidad que se estudia en su conjunto.

Los primeros investigadores de la probabilidad de sucesos, sobre todo aplicada a los juegos de azar, fueron los franceses Pierre Fermat (1601-1665) y Blaise Pascal (1623-1662).

El nombre de azar proviene de los juegos de dados, donde aparecía pintada la flor de azahar y estaba asociada a la buena suerte, significaba una buena partida. Incluso el nombre de suceso aleatorio, es decir, suceso del cual es imposible predecir el resultado, proviene del latín "aleas"que significa dado. Sin embargo, ya un siglo antes Galileo estudió problemas sencillos como por qué es mejor apostar a sacar un 10 que a sacar un 9 en una tirada de tres dados. Antes que Galileo también se dedicó al estudio de estos problemas Cardano, quien incluso escribió un libro sobre los juegos de dados en el que llega a explicar cómo hacer trampas para ganar.

La introducción de Pascal y Fermat en este tema vino de la amistad de Pascal con un jugador profesional, conocido como Caballero de Meré, quien propuso a Pascal una serie de problemas sobre distintas situaciones en las apuestas de dados. Pascal enviaba los problemas a Fermat, con quien le unía una buena amistad y así mantuvieron una continua correspondencia sobre ideas y métodos. En aquella época el juego de apuestas estaba prohibido y la pena era la cárcel, por lo que el Caballero de Meré a menudo tenía que interrumpir sus partidas para no ser descubierto. Los problemas eran entonces cómo repartirse con el rival el dinero de la apuesta en función de cómo había quedado la partida en el momento de interrumpirla. Está claro que debía repartirse proporcionalmente a la probabilidad que tuviera cada jugador de ganar la partida en el momento de abandonarla.

En este tema veremos un concepto importante, que recibe varios nombres: esperanza matemática, valor medio o valor esperado. Mide lo que es esperable ganar en cada partida, no quiere decir que si jugamos una partida ganemos esa cantidad sino que expresa lo que teóricamente debería ser la media de la ganancia por partida tras haber jugado muchas veces. Su valor, lo veremos, es $\sum p_i x_i$ (en el caso de variables discretas), donde x_i es el valor de cada suceso posible y p_i es su probabilidad. Como curiosidad, en la lotería nacional la esperanza de perder es 0'7 euros por cada euro jugado. El concepto de esperanza fue estudiado por el holandés Huygens. A partir de pequeños avances que fueron dando matemáticos anteriores (entre ellos los hermanos Nicolás y Daniel Bernoulli), Henri Laplace (1749-1827) construyó la formulación definitiva de la teoría general de la probabilidad. Laplace definió el cálculo de probabilidades como "el sentido común expresado con números".

Este tema consta de las siguientes secciones:

1. Probabilidad.

2. Distribuciones discretas. La distribución binomial.

3. Distribuciones continuas. La distribución normal.

9.1. Probabilidad

Llamamos experimento a cualquier proceso que genera un conjunto de datos. Un experimento se dice aleatorio cuando se puede repetir en las mismas condiciones, sus posibles resultados son conocidos previamente y el resultado de cada prueba depende del azar.

Son experimentos aleatorios: -El lanzamiento de un dado.
-El lanzamiento de una moneda.
-La extracción de un naipe de la baraja.
-El tiempo de espera de una persona en la parada del autobús.
-El número de hijos de una pareja, el sexo del mayor, su estatura o el número de años que vivirá.
-El número de veces que hay que lanzar una moneda hasta que salga cara.

El espacio muestral, que se denota por Ω, es el conjunto de todos los posibles resultados de un experimento aleatorio. Cualquier subconjunto del espacio muestral se denomina suceso.

La teoría de la probabilidad se ocupa de medir la posibilidad de que ocurra un suceso, hasta qué punto se puede esperar que ocurra un suceso.

Un espacio muestral puede ser discreto (formado por puntos sueltos) o continuo. Los espacios discretos pueden tener un número finito o infinito de valores. Algunos ejemplos,
-Lanzamiento de un dado, $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.
-Lanzamiento de una moneda, $\Omega = \{C, X\}$.
-Número de veces que hay que lanzar una moneda hasta que salga cara, $\Omega = \{1, 2, ..., n, ...\}$.
-Tiempo de espera de una persona en la parada del autobús, $\Omega = [0, 40]$ (si la frecuencia del autobús es de 40 minutos).

Ejemplo 9.1. *Para familiarizarnos con el espacio muestral y los sucesos consideremos el siguiente experimento. Se quiere estudiar el genotipo de una población. Este genotipo está fijado en un locus, una parte fija de un cromosoma. Se supone que los genes de este locus aparecen en tres formas diferentes, denominadas alelos, y que llamaremos aquí A_1, A_2 y A_3. Además, los individuos de la población son diploides, es decir, que sus cromosomas aparecen en parejas. Esto significa que un genotipo está descrito por una pareja de genes, como por ejemplo A_1A_1. Como el orden de los cromosomas no es importante, el genotipo A_1A_2 es el mismo que el A_2A_1. Si nuestro experimento aleatorio consiste en seleccionar un individuo de la población y anotar su genotipo, el espacio muestral es*

$$\Omega = \{A_1A_1, A_1A_2, A_1A_3, A_2A_2, A_2A_3, A_3A_3\}.$$

La probabilidad siempre asigna valores comprendidos entre 0 y 1 a los sucesos. Cuanto más cerca esté de 0 más improbable es que ocurra ese suceso y, por el contrario, cuanto más cerca esté de 1 más probable es que ocurra el suceso (suceso seguro es cuando la probabilidad vale 1 y suceso imposible cuando su probabilidad vale 0).
Vamos a denotar la probabilidad de un suceso A como $P(A)$. Si Ω es finito y A y B son dos sucesos de Ω, la función de probabilidad tiene las siguientes propiedades:

(a) Para cualquier suceso A, $0 \leq P(A) \leq 1$.

(b) $P(\emptyset) = 0$ ($\emptyset$ denota el conjunto vacío), $P(\Omega) = 1$.

(c) Para dos sucesos disjuntos A y B, $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$.

La siguiente propiedad permite calcular probabilidades de uniones de dos conjuntos (que no son necesariamente disjuntos). Dados dos conjuntos cualesquiera A y B,

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B).$$

Esto se deduce de que al calcular $P(A) + P(B)$ estamos contando $A \cap B$ dos veces.

Resultados equiprobables

Una clase importante de experimentos aleatorios de espacios muestrales finitos son aquellos en los que los resultados son equiprobables. Es decir, si $\Omega = \{1, 2, ..., n\}$ entonces $P(1) = P(2) = ... = P(n)$ (se ha usado $P(i)$ para expresar $P(\{i\})$). Entonces,

$$1 = P(\Omega) = \sum_{i=1}^{n} P(i) = nP(1),$$

lo que implica que $P(i) = \frac{1}{n}$.
Si A es un suceso de k elementos escribiremos $A \subset \Omega$ y $|A| = k$. Entonces

$$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{k}{n}.$$

Ejemplos simples de sucesos equiprobables son el lanzamiento de una moneda (cara o cruz, ambos con probabilidad 1/2) o de un dado (valores entre 1 y 6, con probabilidad 1/6, por supuesto si el dado no está trucado).

Ejemplo 9.2. *Veamos una aplicación en genética. Gregor Mendel, un monje austriaco, experimentó con guisantes para estudiar las leyes de la herencia. Comenzó sus experimentos en 1856. Su trabajo fue fundamental en la comprensión de las leyes de la herencia. Pasaron 35 años hasta que el trabajo original de Mendel fue publicado y sus conclusiones fueron confirmadas con experimentos adicionales.*

Uno de los experimentos de Mendel estudió la herencia del color de la flor en los guisantes. Mendel tenía semillas que producían plantas con flores rojas o blancas. El color de la flor en los guisantes de Mendel está determinado por un solo locus en el cromosoma. Los genes de este locus aparecen de dos formas, denominadas alelos, que denotaremos por C y c. Como las plantas del guisante son organismos diploides, cada planta posee dos genes que determinan el color de la flor, cada uno de ellos procedente de una de las plantas progenitoras. Por tanto, son posibles los siguientes genotipos: CC, Cc y cc. Los genotipos CC y Cc tienen flores rojas y el genotipo cc tiene flores blancas.

Ejemplo. *Supongamos que se cruzan dos plantas de guisantes, ambas del tipo Cc. Determinar las probabilidades de cada genotipo en la generación siguiente. ¿Cuál es la probabilidad de que una semilla escogida aleatoriamente del resultado de este cruce produzca flores rojas? Los diferentes genotipos son CC, Cc, cc porque Cc y cC producen el mismo genotipo. Por tanto, $P(CC) = P(cc) = 1/4$ y $P(Cc) = 1/2$. La probabilidad de que una semilla produzca flores rojas es 3/4 porque es la probabilidad de que sea CC, Cc o cC.*

9.2. Distribuciones discretas. La distribución binomial

Recordemos que una variable aleatoria es una función del espacio muestral Ω en el conjunto de los números reales; éstas se denotan por X, Y, Z, etc. Si el recorrido (conjunto imagen) de X es finito o infinito numerable se llama variable aleatoria discreta. Si el recorrido es un continuo de valores se llama variable aleatoria continua.

Definición 9.3. *Dada una variable aleatoria discreta X, la función $p(x) = P(X = x)$ se denomina función de masa de probabilidad. Tiene las siguientes propiedades:*

(a) $p(x) \geq 0$.

(b) $\sum_x p(x) = 1$.

Otra función importante, definida para cualquier variable aleatoria, ya sea discreta o continua, es la función de distribución (acumulativa) $F(x) = P(X \leq x)$. De ahora en adelante se llamará simplemente función de distribución.

En una variable aleatoria hay dos cantidades características, ya las vimos en el tema de Estadística. Una es la esperanza (en el tema de Estadística la llamamos valor medio o valor esperado) y la otra es la dispersión alrededor de la esperanza (la varianza). Para el caso de una variable discreta se definen así:

Definición 9.4. *Sea X una variable aleatoria discreta. Su esperanza o valor esperado o media es*

$$EX = \sum_x xP(X = x).$$

Esta definición es equivalente a la que dimos en el tema de Estadística, interpretando las probabilidades como frecuencias relativas.

Definición 9.5. *Para cualquier variable aleatoria X de esperanza μ, la varianza se define como*

$$var(X) = E(X - \mu)^2,$$

es decir, la esperanza de las desviaciones respecto de la media al cuadrado. Si X es discreta,

$$var(X) = \sum_x (x - \mu)^2 P(X = x).$$

La distribución binomial

Pensemos en el siguiente experimento aleatorio. Una bolsa negra opaca contiene bolas blancas y bolas negras, en distinta proporción. El experimento consiste en sacar una sola bola. Si es blanca, lo consideramos éxito, y si es negra, lo consideramos fracaso. La variable aleatoria que modela el experimento se llama variable de Bernoulli.

La probabilidad de éxito será $p = P(\text{blanca})$ =número de bolas blancas/número total de bolas, mientras que $P(\text{negras}) = 1 - p$.

Podríamos sacar una bola, ver su color y anotar el resultado, volver a introducir la bola en la bola, y repetir el experimento hasta n veces. Obviamente cada extracción supone un proceso independiente. La variable aleatoria que da el número de éxitos (bolas blancas) en las n veces que se ha repetido el experimento recibe el nombre de variable discreta binomial. Es decir, la binomial es la suma de n variables de Bernoulli.

Entonces, denotaremos por S_n la variable aleatoria que cuenta el número de éxitos en n extracciones independientes. Cada prueba tiene dos posibles resultados, éxito o fracaso, con probabilidad de éxito igual a p y de fracaso igual a $1 - p$. Esto nos ayuda a describir mejor a la binomial S_n, poniéndole "los apellidos" de parámetros n y p, y siendo su distribución de valores los siguientes (basados en simple combinatoria):

$$P(S_n = k) = \begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} p^k (1 - p)^{n-k}$$

donde

$$\begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} = \frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

Ejemplo 9.6. *El síndrome de Down o trisomía 21 es una anomalía genética en la que hay presentes tres copias del cromosoma 21 en lugar de dos. En EEUU la preponderancia es de 1 cada 700 embarazos. ¿Cúal es la probabilidad de que al menos 1 de cada 100 embarazos resulte afectado? S_{100} va a ser la variable que da el número de embarazos afectados, $n = 100$, $p = 1/700$ es la probabilidad de que un embarazo resulte afectado.*

$$P(S_{100} \geq 1) = 1 - P(S_{100} = 0) = 1 - \begin{pmatrix} 100 \\ 0 \end{pmatrix} p^0 (1 - p)^{100} = 0'1332$$

Obviamente esto no es lo mismo que $1/700 \cdot 100$, que sería un resultado erróneo.

Para calcular la media y la varianza de una variable binomial S_n, de parámetros n y p, es útil escribirla como suma de sus variables (Bernouilli) más simples:

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} X_k,$$

donde X_k es la variable aleatoria que vale 1 si la k-ésima prueba tuvo éxito y 0 si la k-ésima prueba no tuvo éxito. Entonces,

$$EX_k = 1 \cdot P(X_k = 1) + 0 \cdot P(X_k = 0) = p,$$

$$ES_n = E(\sum_{k=1}^{n} X_k) = \sum_{k=1}^{n} EX_k = np.$$

$$var(X_k) = (1-p)^2 P(X_k = 1) + (0-p)^2 P(X_k = 0) = (1-p)^2 p + p^2(1-p) = p(1-p).$$

Como las X_k son independientes[1], tenemos que

$$var(S_n) = var(\sum_{k=1}^{n} X_k) = \sum_{k=1}^{n} var(X_k) = np(1-p).$$

Ejemplo 9.7. *Consideremos de nuevo las plantas de guisantes. Supongamos que se obtienen 20 resultados independientes de cruces $Cc \times Cc$. Calcular la probabilidad de que como mucho dos resultados presenten flores blancas y calcular el valor esperado y la varianza del número de resultados con flores blancas.*

Llamemos S_{20} al número de resultados que presentan flores blancas en 20 pruebas. Entonces, $n = 20$ y p es la probabilidad de que en una prueba salgan flores blancas. Si el cruce es $Cc \times Cc$, se tiene el espacio muestral $\Omega = \{CC, Cc, cC, cc\}$, y por tanto, $p = 1/4$. Nos piden $P(S_{20} \leq 2)$.

$$P(S_{20} \leq 2) = P(S_{20} = 0) + P(S_{20} = 1) + P(S_{20} = 2) =$$

$$= \begin{pmatrix} 20 \\ 0 \end{pmatrix} \left(\frac{1}{4}\right)^0 \left(\frac{3}{4}\right)^{20} + \begin{pmatrix} 20 \\ 1 \end{pmatrix} \frac{1}{4} \left(\frac{3}{4}\right)^{19} +$$

$$+ \begin{pmatrix} 20 \\ 2 \end{pmatrix} \left(\frac{1}{4}\right)^2 \left(\frac{3}{4}\right)^{18} = 0'0913$$

$$ES_{20} = np = 20 \cdot \frac{1}{4} = 5,$$

$$var(S_{20}) = np(1-p) = 5 \cdot \frac{3}{4} = 3'75.$$

[1] La varianza de la suma de un número finito de variables independientes es la suma de sus varianzas. Esto se deduce (esencialmente) de que la esperanza del producto de dos variables aleatorias independientes es el producto de las esperanzas de cada una de ellas.

Ejemplo 9.8. *Supongamos que una mujer portadora de hemofilia tiene 4 hijos con un hombre que no es hemofílico. Calcular la probabilidad de que al menos una hija sea portadora del gen de la hemofilia.*

Llamemos S_4 al número de hijas portadoras del gen. Entonces, $n = 4$ y p es la probabilidad de que una hija sea portadora, por tanto, $p = 1/2$.

$$P(S_4 \geq 1) = 1 - P(S_4 = 0) = 1 - \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \end{pmatrix} \left(\frac{1}{2}\right)^0 \left(\frac{1}{2}\right)^4 = 0'9375.$$

9.3. Distribuciones continuas. La distribución normal

Para describir la distribución de probabilidad de una variable aleatoria continua se utilizará su función de distribución $F(x)$, que como ya definimos es $F(x) = P(X \leq x)$ (igual que en el caso de una variable aleatoria discreta, sólo que a diferencia del caso discreto aquí hay infinitos puntos e incluso intervalos). La función de distribución tiene las siguientes propiedades:

(a) $0 \leq F(x) \leq 1$.

(b) $\lim_{x \to -\infty} F(x) = 0, \quad \lim_{x \to +\infty} F(x) = 1$.

(c) F es creciente y continua.

A diferencia de lo que ocurría con una variable discreta, en el caso de una variable continua, su función de distribución $F(x)$ es continua. (En una discreta, $F(x)$ es una función constante a trozos y presenta saltos.)

Definición 9.9. *Una función que cumpla las tres propiedades anteriores se llama función de distribución de una variable aleatoria continua.*

Otro concepto importante de las variables continuas es el de función de densidad.

Definición 9.10. *Si existe una función no negativa $f(x)$ tal que la función de distribución de una variable aleatoria $F(x)$ admita la representación*[2]

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(s)\, ds,$$

se dice que X es una variable aleatoria continua con función de densidad (o de probabilidad) $f(x)$.

Se tiene que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(s)\, ds = 1.$$

[2] Esta función se puede interpretar como el paso al límite de lo que se obtiene en un histograma de una variable estadística cuando la amplitud de los intervalos tiende a cero.

Cualquier función no negativa que cumpla esta última propiedad se dice que es una función de densidad.

La esperanza EX de una variable aleatoria continua con función de densidad $f(x)$ es[3]

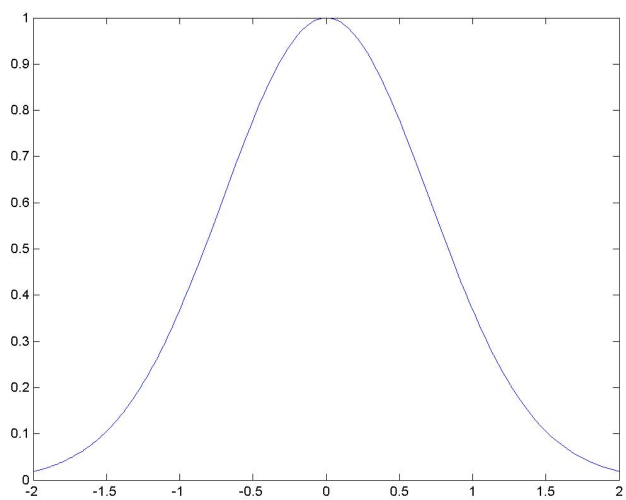
$$EX = \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)\,dx,$$

y la varianza, si la media es μ,

$$var(X) = E(X-\mu)^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} (x-\mu)^2 f(x)\,dx.$$

Distribución normal

Es la distribución continua más importante, porque es la que aparece más frecuentemente. Su función de densidad tiene esta forma



Definición 9.11. *La función de densidad de una variable aleatoria X con distribución normal de parámetros μ y σ, que denotaremos $N(\mu,\sigma)$ es*

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{\frac{-(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}, \quad -\infty < x < +\infty.$$

El parámetro μ es la media y el parámetro σ es la desviación típica (la raíz cuadrada de la varianza).

[3]Este valor puede verse como el paso al límite en el cálculo de la media de una variable discreta que use las marcas de clase, donde la amplitud de los intervalos tiende a cero, es decir, la integral de Riemann.

Propiedades de esta función de densidad:

(a) $f(x)$ es simétrica.

(b) El máximo de $f(x)$ está en $x = \mu$.

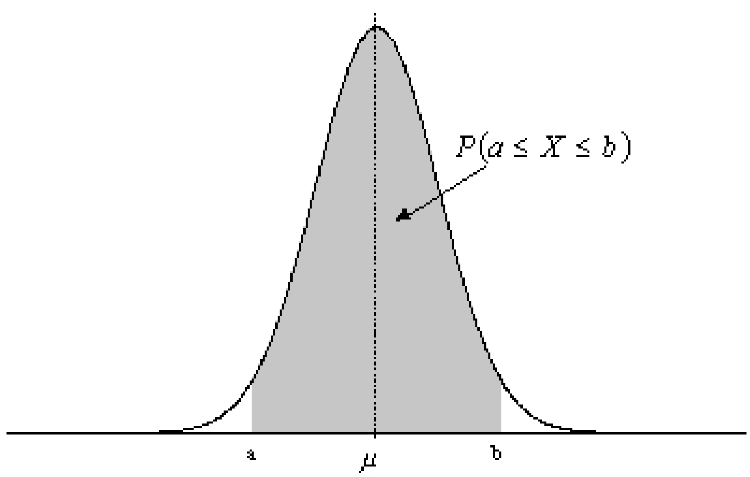
(c) La función tiene dos puntos de inflexión: $x = \mu - \sigma$ y $x = \mu + \sigma$.

Obsérvese que efectivamente se trata de una función de densidad porque

$$f(x) \geq 0 \qquad \text{y} \qquad \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = 1.$$

Entonces,

$$P(a \leq X \leq b) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_a^b e^{\frac{-(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}\,dx,$$



el área limitada por $f(x)$, el eje OX y las rectas verticales $x = a$ y $x = b$.

No es posible calcular esta integral de manera explícita. Sólo se puede aproximar numéricamente. Para ello hay una tabla que contiene los valores de la distribución normal de parámetros $\mu = 0$ y $\sigma = 1$, esto es $N(0, 1)$. Dicha tabla da los valores $F(x) = P(X \leq x)$ cuando $X = N(0, 1)$.

Uno de los principales resultados de la teoría de Probabilidad y que incide en la importancia de la distribución normal es el Teorema Central del Límite, que expondremos a continuación. Consideremos una secuencia de variables aleatorias independientes $X_1, X_2, \ldots, X_k$, todas con la misma distribución (idénticamente distribuidas). Denotemos por $EX_i = \mu$ y $var(X_i) = \sigma^2$. El Teorema Central del Límite dice lo siguiente:

Teorema 9.12. *Sean $X_1, X_2, \ldots, X_n$ variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas de media $EX_i = \mu$ y varianza $var(X_i) = \sigma^2 < +\infty$. Sea $S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$. Entonces, cuando $n \to +\infty$,*

$$P\left(\frac{S_n - n\mu}{\sqrt{n\sigma^2}} \leq x\right) \to F(x)$$

siendo $F(x)$ la función de distribución con distribución normal estándar.

El teorema nos dice que si se suman un gran número de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas, con media y varianza finitas, entonces, tras un cambio de variable adecuado, la distribución de la variable resultante es aproximadamente la normal.

Su aplicación radica en que si una cuestión asociada a un solo individuo puede tratarse con datos estadísticos como una variable Bernouilli, que fume o no, que beba o no, que compre una entrada que ha reservado o no, etc, la misma cuestión pero referida a un conjunto de individuos puede tratarse como una variable normal, cuya distribución se conoce.

Este hecho aparece por ejemplo en la forma de estudiar la venta óptima de billetes de avión o de permitir reservas hoteleras (y en las pocas ocasiones en que fallan las previsiones, se produce el famoso overbooking).

Cálculo de probabilidades usando la tabla

¿Cómo utilizar la tabla para una distribución normal? Antes de tratar el caso general, de media μ y desviación típica σ, consideraremos el caso de la normal de media 0 y desviación típica 1, N(0,1), que se denomina distribución normal estándar.

Su función de densidad es

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}.$$

La tabla de la Figura 9.1 contiene los valores de

$$F(z) = \int_{-\infty}^{z} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx,$$

es decir, $P(X \leq z)$, pero sólo para valores $z \geq 0$. Para valores $z < 0$ se aprovecha la simetría de la función de densidad. Recordemos que $F(z)$ es el área encerrada por la función de densidad, el eje OX y la recta $x = z$ ("falta un lado" correspondiente al extremo $x \to -\infty$, ya que en realidad se está haciendo una integral impropia). Por ejemplo, $F(1'15)$ hay que buscarlo en la tabla en la intersección de la fila 1'1 y la columna 0'05, es decir: $F(1'15) = 0'8749$.

Obsérvese que a partir de un momento dado los valores que aparecen en la tabla son 1, esto no es exacto por supuesto, pero el error es tan pequeño que se redondea a dicho valor.

Otros valores de $F(z)$ deben calcularse usando las propiedades de simetría de dicha distribución y las de cualquier función de probabilidad. Por ejemplo, $F(-2)$ es el área a la izquierda de -2 y es igual que el área a la derecha de 2, o sea, el área total, 1, menos el área a la izquierda de 2. Por tanto,

$$F(-2) = 1 - F(2) = 1 - 0'9773 = 0'0227.$$

normal	0	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0	0,5	0,504	0,508	0,512	0,516	0,5199	0,5239	0,5279	0,5319	0,5359
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636	0,5675	0,5714	0,5754
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,591	0,5948	0,5987	0,6026	0,6064	0,6103	0,6141
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406	0,6443	0,648	0,6517
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,67	0,6736	0,6772	0,6808	0,6844	0,6879
0,5	0,6915	0,695	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,7123	0,7157	0,719	0,7224
0,6	0,7258	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	0,7454	0,7486	0,7518	0,7549
0,7	0,758	0,7612	0,7642	0,7673	0,7704	0,7734	0,7764	0,7794	0,7823	0,7852
0,8	0,7881	0,791	0,7939	0,7967	0,7996	0,8023	0,8051	0,8079	0,8106	0,8133
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289	0,8315	0,834	0,8365	0,8389
1	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531	0,8554	0,8577	0,8599	0,8621
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	0,8749	0,877	0,879	0,881	0,883
1,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925	0,8944	0,8962	0,898	0,8997	0,9015
1,3	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082	0,9099	0,9115	0,9131	0,9147	0,9162	0,9177
1,4	0,9192	0,9207	0,9222	0,9236	0,9251	0,9265	0,9279	0,9292	0,9306	0,9319
1,5	0,9332	0,9345	0,9357	0,937	0,9382	0,9394	0,9406	0,9418	0,943	0,9441
1,6	0,9452	0,9463	0,9474	0,9485	0,9495	0,9505	0,9515	0,9525	0,9535	0,9545
1,7	0,9554	0,9564	0,9573	0,9582	0,9591	0,9599	0,9608	0,9616	0,9625	0,9633
1,8	0,9641	0,9649	0,9656	0,9664	0,9671	0,9678	0,9686	0,9693	0,97	0,9706
1,9	0,9713	0,9719	0,9726	0,9732	0,9738	0,9744	0,975	0,9756	0,9762	0,9767
2	0,9773	0,9778	0,9783	0,9788	0,9793	0,9798	0,9803	0,9808	0,9812	0,9817
2,1	0,9821	0,9826	0,983	0,9834	0,9838	0,9842	0,9846	0,985	0,9854	0,9857
2,2	0,9861	0,9865	0,9868	0,9871	0,9875	0,9878	0,9881	0,9884	0,9887	0,989
2,3	0,9893	0,9896	0,9898	0,9901	0,9904	0,9906	0,9909	0,9911	0,9913	0,9916
2,4	0,9918	0,992	0,9922	0,9925	0,9927	0,9929	0,9931	0,9932	0,9934	0,9936
2,5	0,9938	0,994	0,9941	0,9943	0,9945	0,9946	0,9948	0,9949	0,9951	0,9952
2,6	0,9953	0,9955	0,9956	0,9957	0,9959	0,996	0,9961	0,9962	0,9963	0,9964
2,7	0,9965	0,9966	0,9967	0,9968	0,9969	0,997	0,9971	0,9972	0,9973	0,9974
2,8	0,9974	0,9975	0,9976	0,9977	0,9977	0,9978	0,9979	0,998	0,998	0,9981
2,9	0,9981	0,9982	0,9983	0,9983	0,9984	0,9984	0,9985	0,9985	0,9986	0,9986
3	0,9987	0,9987	0,9987	0,9988	0,9988	0,9989	0,9989	0,9989	0,999	0,999
3,1	0,999	0,9991	0,9991	0,9991	0,9992	0,9992	0,9992	0,9992	0,9993	0,9993
3,2	0,9993	0,9993	0,9994	0,9994	0,9994	0,9994	0,9994	0,9995	0,9995	0,9995
3,3	0,9995	0,9995	0,9996	0,9996	0,9996	0,9996	0,9996	0,9996	0,9996	0,9997
3,4	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9998	0,9998
3,5	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998
3,6	0,9998	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999
3,7	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999
3,8	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	1	1	1
3,9	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
4	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1

Figura 9.1: Tabla de la distribución normal estándar $N(0, 1)$

Si deseamos conocer el valor general $P(N(0,1) \in (a,b])$, debemos usar la igualdad siguiente (gracias a las propiedades de probabilidad):

$$P(N(0,1) \in [a,b]) = P(N(0,1) \in (-\infty,b]) - P(N(0,1) \in (-\infty,a]) = F(b) - F(a),$$

de modo que hay que razonar dos veces como antes para obtener $F(a)$ y $F(b)$.

El caso general en que X es una variable normal de media μ y desviación σ se trata como sigue. La función de distribución se obtiene haciendo un cambio de variable para transformar a X en una variable normal estándar. El cambio ya fue visto con anterioridad, es el de tipificación de una variable:

$$Z = \frac{X-\mu}{\sigma}.$$

Entonces, Z se comporta como N(0,1).

$$F(x) = P(X \leq x) = P(\sigma Z + \mu \leq x) = P\left(Z \leq \frac{x-\mu}{\sigma}\right).$$

La importancia de la distribución normal es grande ya que una gran parte de los estadísticos se basan en que las cantidades observadas tienen distribución normal.

Bibliografía:

"Matemáticas para Ciencias". Claudia Neuhauser. Ed. Pearson Pretice Hall.
"Una historia de las matemáticas", tomo II. Miguel A. Pérez. Ed. Vision Net.