

1. Demostrar que las siguientes ecuaciones tienen una única raíz real:

a) $2^{-x} = x$ b) $e^x = -x + 2$ c) $\arctg x = \ln(\sqrt{x})$

2. Determinar los extremos absolutos de las siguientes funciones:

a) $f(x) = \sin|x|$, $x \in [-\pi, \pi]$ b) $f(x) = \frac{x}{1+x^2}$, $x \in [-1, 3]$
 c) $f(x) = \begin{cases} x^2 + 2x, & \text{si } -2 \leq x \leq 0; \\ \sin x, & \text{si } 0 < x \leq \pi. \end{cases}$ d) $f(x) = \begin{cases} \ln(x+1), & \text{si } 0 \leq x < 1; \\ -x + 1 + \ln(2), & \text{si } 1 \leq x \leq 3. \end{cases}$

3. Uno de los lados de un campo abierto está acotado por un río.

- a) ¿Cómo podrían cercarse los otros tres lados de una figura rectangular para encerrar la mayor área posible con una cerca de longitud 80 m?
 b) Si se desea vallar una superficie de 18 m², ¿qué dimensiones requerirán la mínima cantidad de valla?

4. La sensibilidad S de un organismo ante un fármaco depende de la dosis x suministrada según la relación:

$$S(x) = x(C - x)$$

siendo C la cantidad máxima de fármaco que puede suministrarse (que es constante para cada individuo). $S(x)$ mide dicha sensibilidad cuando se le administra la dosis x . Hallar x para la cual la sensibilidad es máxima.

5. La concentración de oxígeno en un estanque contaminado con un residuo orgánico viene dado por la ecuación

$$f(t) = \frac{t^2 - t + 1}{t^2 + 1}, \quad 0 \leq t < +\infty$$

donde t representa el tiempo en semanas. Hallar los instantes en los que se alcanzan las concentraciones máxima y mínima de oxígeno.

6. Calcular, si existen, los siguientes límites:

a) $\lim_{x \rightarrow 0} x^3 \ln x$ b) $\lim_{x \rightarrow +\infty} x \ln x$ c) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x^2 - 7 \ln x)$
 d) $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^4 e^{-x}$ e) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (e^x - \ln x)$ f) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x^{-2} \ln x)$

7. Representar gráficamente las siguientes funciones estudiando su dominio de definición, crecimiento, máximos y mínimos relativos, límites, asíntotas, ...:

a) $x^4 - 2x^2$ b) $\frac{x}{1+x^2}$ c) $\frac{x^3}{(1+x)^2}$ d) $x^2 e^{-x}$ e) $\frac{1}{1+e^x}$
 f) $\ln(x^2 + 2x)$ g) $\frac{\ln|x|}{x}$ h) $\frac{e^x}{x+1}$ i) $e^{\frac{1-x}{1+x}}$ j) $\frac{1}{2}(x-1)|x-1|$

8. (Examen Febrero-2003) Dada la función $f(x) = \frac{2x^2 + x}{x + 1}$, se pide:

- a) Calcular todas las asíntotas de $f(x)$.
 b) Estudiar razonadamente el crecimiento, decrecimiento, máximos y mínimos de $f(x)$.

9. (Examen Septiembre-2003) Dada la función $f(x) = \frac{1}{1 - e^{-x}}$, calcular el dominio y las asíntotas de la función y estudiar razonadamente su crecimiento.

10. (Examen Febrero-2004) Dada la función $f(x) = e^x(x+1)^2$, se pide:

- a) Comprobar que la función es creciente en el intervalo $(-1, +\infty)$.
 b) Estudiar el signo de f en el intervalo $[1, 4]$.