SOLUCIONES DE LOS EJERCICIOS DE LA HOJA 1

1. Estudiemos cada caso:

   a) El único número que verifica la condición es $x = -\dfrac{5}{2}$, ya que:

$$|x| = x+5 \quad \Leftrightarrow \quad \left\{ \begin{array}{ll} x = x+5 & \text{si } x \geq 0, \\ -x = x+5 & \text{si } x < 0. \end{array} \right\} \quad \Leftrightarrow \quad \left\{ \begin{array}{ll} \emptyset & \text{si } x \geq 0, \\ x = -\dfrac{5}{2} & \text{si } x < 0. \end{array} \right.$$

   b) Los únicos números que verifican la condición son $\{3, -3\}$, ya que:

$$x^2 - 2|x| - 3 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \left\{ \begin{array}{ll} x^2 - 2x - 3 = 0 & \text{si } x \geq 0, \\ x^2 + 2x - 3 = 0 & \text{si } x < 0. \end{array} \right\} \quad \Leftrightarrow \quad \left\{ \begin{array}{ll} 3, -1 & \text{si } x \geq 0, \\ 1, -3 & \text{si } x < 0. \end{array} \right.$$

   c) El conjunto de números reales que verifica la condición es $(-\infty, -\frac{7}{6}) \cup (\frac{1}{2}, +\infty)$, ya que:

$$|6x+2| > 5 \quad \Leftrightarrow \quad \left\{ \begin{array}{ll} 6x+2 > 5 & \text{si } 6x+2 \geq 0, \\ -6x-2 > 5 & \text{si } 6x+2 < 0. \end{array} \right\} \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad \left\{ \begin{array}{ll} x > \dfrac{1}{2} & \text{si } x \geq -\dfrac{1}{3}, \\ x < -\dfrac{7}{6} & \text{si } x < -\dfrac{1}{3}. \end{array} \right\} \quad \Leftrightarrow \quad \left\{ \begin{array}{l} \left(\dfrac{1}{2}, +\infty\right) \cap \left[-\dfrac{1}{3}, +\infty\right) = \left(\dfrac{1}{2}, +\infty\right) \\ \left(-\infty, -\dfrac{7}{6}\right) \cap \left(-\infty, -\dfrac{1}{3}\right) = \left(-\infty, -\dfrac{7}{6}\right). \end{array} \right.$$

   d) La solución es $x \in [-1/4, 3/4]$, ya que

$$|4x-1| \leq 2 \;\Leftrightarrow\; -2 \leq 4x-1 \leq 2 \;\Leftrightarrow\; -1 \leq 4x \leq 3 \;\Leftrightarrow\; -1/4 \leq x \leq 3/4.$$

2. (a) D(f)=$\{x \in \mathbb{R} : x \leq 1\} \cap \{x \in \mathbb{R} : x \geq 2\} = (-\infty, 1] \cap [2, +\infty) = \emptyset$.

   (b) D(f)=$\{x \in \mathbb{R} : \frac{1-x}{1+x} \geq 0\}$ y dicho conjunto se obtiene analizando los intervalos de la recta real delimitados por los valores 1 y -1. Cada uno de estos valores tiene multiplicidad uno (impar), luego produce un cambio de signo al pasar de un intervalo al siguiente. Dando valores vemos que D(f)=$(-1, 1]$, donde -1 no es considerado ya que anula el denominador de la expresión, lo que no tiene sentido.

   (c) D(f)=$\{x \in \mathbb{R} : \exists f(x) \in \mathbb{R}\}$. Los únicos elementos problemáticos en la expresión de f son $\sqrt{x}$, que nos obliga a que el dominio sólo esté dentro de $[0, +\infty)$, y por otro lado los factores del denominador, $(1+3x)$ y $(x-1)$, que no deben anularse, salvo eso su signo no nos afecta al cálculo del dominio. Por tanto, D(f)=$[0, +\infty) \setminus \{1\} = [0, 1) \cup (1, +\infty)$.

   (d) D(f)=$\{x \in \mathbb{R} : x^2 + x - 2 \geq 0\}$. Al tratarse de una expresión polinómica de segundo grado, el análisis de los ceros de dicha expresión y posteriormente del signo en los intervalos así definidos es simple.

$$x^2 + x - 2 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{-1 \pm \sqrt{1+8}}{2} = \frac{-1 \pm 3}{2} = \{1, -2\}.$$

   Por tanto, las zonas a considerar son $(-\infty, -2]$, $[-2, 1]$ y $[1, +\infty)$. Sustituyendo valores, por ejemplo, concluimos que D(f)=$(-\infty, -2] \cup [1, +\infty)$.

(e) D(f)=$\{x \in \mathbb{R} : 1-x^2 \geq 0,\ x^2-1 \geq 0\}$. Como el signo de x^2-1 es opuesto al signo de $1-x^2$, cuando uno sea estrictamente positivo, el otro será estrictamente negativo, siendo imposible que estén el dominio salvo que ocurra que $x^2-1=0$. Por tanto, D(f)=$\{-1,1\}$.

(f) D(f)=$\{x \in \mathbb{R} : \exists f(x) \in \mathbb{R}\}$. Dado que D($\ln x$)=$(0,+\infty)$, lo más que podemos aspirar es a que D(f) coincida con dicho conjunto. Pero como $\ln x$ está en el denominador de f y sabemos que Im($\ln x$)=$\mathbb{R}$ y que $\ln^{-1}(0)=\{1\}$, concluimos que D(f)=$(0,+\infty)\setminus\{1\}=(0,1)\cup(1,+\infty)$.

(g) Dado que $D(\ln z)=(0,+\infty)$, y que siempre ocurre $|x|\geq 0$ y la igualdad a cero sólo pasa con $x=0$, D(f)=$\mathbb{R}\setminus\{0\}=(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$.

(h) Como se ha dicho en el apartado anterior, nos interesa resolver el problema de hallar $z(x)=x(2-x)(x+3)>0$. Dicha inecuación es fácil de analizar, porque el polinomio de tercer grado en x ya está factorizado, y las raíces son obviamente 0, 2 y -3. Como cada una de ellas es simple (multiplicidad impar), hay cambio de signo, y sabemos, por ejemplo dando valores en cada uno de los cuatro intervalos naturales, que $z>0$ si $x\in(-\infty,-3)\cup(0,2)$, que es por tanto el dominio de f.

3. Estudiamos la existencia de los siguientes límites:

a) $\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{x+1}{|x-1|}=\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{x+1}{x-1}=+\infty$, $\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{x+1}{|x-1|}=\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{x+1}{1-x}=+\infty$. Por tanto, no existe (en sentido estricto) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x+1}{|x-1|}$, ya que los límites laterales no están en $\mathbb{R}$.

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x+1}{|x-1|}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x+1}{x-1}=1,\quad \lim_{x\to-\infty}\frac{x+1}{|x-1|}=\lim_{x\to-\infty}\frac{x+1}{1-x}=-1.$$

b)

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2}{10x+x\sqrt{x}} &= +\infty,\\
\lim_{x\to 2}\frac{x^2-4}{x^2-3x+2} &= \text{“}\frac{0}{0}\text{”}=\lim_{x\to 2}\frac{(x-2)(x+2)}{(x-2)(x-1)}=\lim_{x\to 2}\frac{x+2}{x-1}=4,\\
\lim_{x\to 0}\frac{|x|}{x^2+x} &= \begin{cases}\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{x}{x^2+x}=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{1}{x+1}=1 & \text{si } x\geq 0,\\[2ex] \lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{-x}{x^2+x}=\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{-1}{x+1}=-1 & \text{si } x<0.\end{cases}
\end{aligned}$$

Por tanto, este último límite no existe (ya que los límites laterales no coinciden).

c)

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to+\infty}(\sqrt{x+a}-\sqrt{x}) &= \lim_{x\to+\infty}(\sqrt{x+a}-\sqrt{x})\frac{\sqrt{x+a}+\sqrt{x}}{\sqrt{x+a}+\sqrt{x}} \\
&= \lim_{x\to+\infty}\frac{x+a-x}{\sqrt{x+a}+\sqrt{x}} = 0, \\
\lim_{x\to 0}\frac{1-\sqrt{1-x^2}}{x^2} &= \lim_{x\to 0}\frac{1-\sqrt{1-x^2}}{x^2}\,\frac{(1+\sqrt{1-x^2})}{(1+\sqrt{1-x^2})} \\
&= \lim_{x\to 0}\frac{1-(1-x^2)}{x^2\,(1+\sqrt{1-x^2})} = \lim_{x\to 0}\frac{1}{(1+\sqrt{1-x^2})} = \frac{1}{2}, \\
\lim_{x\to 0} e^{\frac{|x|}{x}} &= \begin{cases} \lim\limits_{x\to 0^+} e^{\frac{x}{x}} = e & \text{si } x \geq 0, \\ \lim\limits_{x\to 0^-} e^{\frac{-x}{x}} = e^{-1} = \dfrac{1}{e} & \text{si } x < 0. \end{cases}
\end{aligned}$$

Luego, el último límite no existe ya que los límites laterales no coinciden.

4. La teoría nos dice que la composición de dos funciones continuas en un punto es una función continua en dicho punto. Por tanto, una función obtenida por composición es continua, al menos, en los puntos que las funciones que la componen son continuas.

   a)

$$(f\circ g)(x) = -x^2-5x+1, \quad (g\circ f)(x) = x^2-7x+6.$$

   Las funciones f y g son polinómicas, luego son continuas en todo $\mathbb{R}$. Por tanto, $f\circ g$ y $g\circ f$ son continuas en todo $\mathbb{R}$.

   b)

$$(f\circ g)(x) = (x+3)^2, \quad (g\circ f)(x) = \ln(e^{2x}+3).$$

   La función f es continua en su dominio de definición (que es todo $\mathbb{R}$), y la función g es continua en su dominio de definición (que es $Dom(g) = (-3,+\infty)$). Observemos que tanto $f\circ g$ como $g\circ f$ son continuas en su dominio de definición (que es todo $\mathbb{R}$).

5. Llamemos $y = ax+b$ a la recta que represente la transformación de x grados Celsius en y grados Fahrenheit.

   Entonces debe cumplirse que $y(0) = 32$ y que $y(100) = 212$. De la primera condición deducimos que $b = 32$, y seguidamente, de la segunda condición que

$$212 = 100a + 32 \Rightarrow 180 = 100a \Rightarrow a = 9/5.$$

   Por tanto, la regla de transformación es

$$y = \frac{9}{5}x + 32.$$

   Un incremento de un grado Celsius, provoca $a(x+1)-b-[ax-b] = a$ grados Fahrenheit de incremento, es decir, $9/5^o$F.

6. Los datos que nos dan se pueden representar como siguen:

Edad t (meses)	Longitud L (dm)	Peso W (Tm)
0	73	3
7	162	23

Nos dicen que hay relaciones lineales entre L y t, y entre W y t. De modo que denotaremos dichas relaciones con las fórmulas $L = at + b$, y $W = ct + d$.

Utilizando los datos que tenemos, deducimos como en el ejercicio anterior, que $b = 73$, después que $162 = 7a + 73$ y por tanto $a = 89/7$, y por otro lado, que $d = 3$, y que $23 = 7c + 3$, de donde $c = 20/7$.

En el incremento diario sólo afecta el coeficiente de la t en ambas rectas, y como nos dicen que pongamos 1mes=30días, y nuestro tiempo está medido en meses, realmente nos están pidiendo el aumento en la fracción $1/30$.

Así, el aumento de longitud diario son $a/30 = 89/210$dm. El aumento de peso diario son $c/30 = 20/210$Tm.

7. Tenemos la siguiente fórmula que relaciona el volumen V (cm^3) de un gas y su temperatura T (^{o}C):

$$V = V_0 \left(1 + \frac{1}{273}T\right).$$

a) Como $V(0) = V_0$, el significado de V_0 es el volumen del gas cuando la temperatura es de 0^oC.

b) Si la temperatura es de 0^oC, y por tanto $V = V_0$, el momento en que $V(T) = 2V_0$, viene dado por

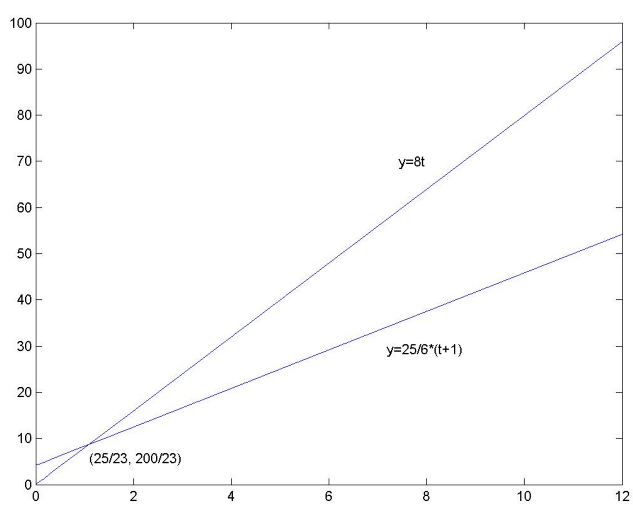
$$2V_0 = V_0 \left(1 + \frac{1}{273}T\right) \Rightarrow 2 = 1 + \frac{1}{273}T \Rightarrow 1 = \frac{1}{273}T \Rightarrow T = 273^o C.$$

Cuando la temperatura del gas es de 273^oC, el gas ocupa doble volumen.

8. Tras el valor del parámetro $a = 100$, las dos rectas a representar son

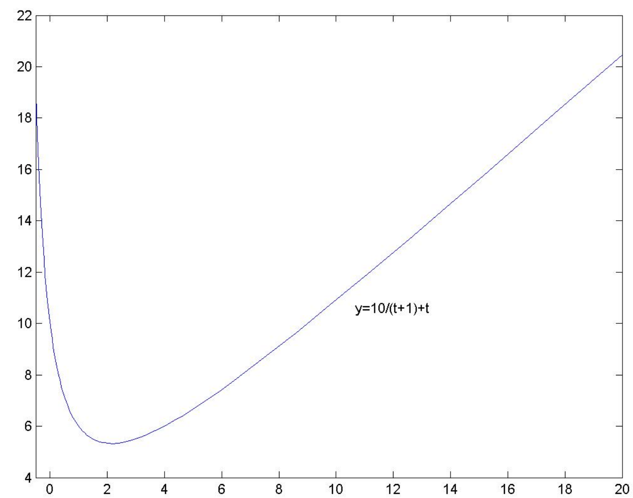
$$\text{(Cowling) } y = \frac{25}{6}(t+1), \qquad \text{(Friend) } y = 8t.$$

Su intersección corresponde a cuando $\frac{25}{6}(t+1) = 8t$, y esto ocurre con $t = 25/23$, en cuyo caso $y = 200/23$.



9. La velocidad a que crece el radio es 6 m/min, luego $r(t) = 6t$. Como el área del círculo es πr^2, tenemos que $A(t) = 36\pi t^2$.

10. La gráfica de la función $T(t)$ la podemos "deducir" de sumar de $10/(t+1)$ y t :



Por supuesto la parte negativa no nos interesa, aunque aparecerá al hacer operaciones y debemos desecharla.

a)
$$\frac{10}{t+1} + t = 15 \Rightarrow \frac{10}{t+1} = 15 - t \Rightarrow 10 = (15-t)(t+1) = 14t + 15 - t^2.$$

Por tanto, tenemos que resolver la ecuación de segundo grado

$$t^2 - 14t - 5 = 0.$$

Usando la fórmula conocida $\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$, tenemos que t debe ser $(14 \pm \sqrt{216})/2$, o sea, $t = 14'3484$ ya que la raíz negativa $t = -0'3484$ no es válida.

b) Análogamente, debemos resolver las ecuaciones

$$\frac{10}{t+1} + t = 8, \qquad \frac{10}{t+1} + t = 12.$$

Es decir, operando debemos resolver las ecuaciones

$$t^2 - 7t + 2 = 0, \qquad t^2 - 11t - 2 = 0.$$

Por la forma que tiene la función $T(t)$, sabemos que para la primera ecuación, las dos soluciones que obtendremos son válidas, y que la que nos interesa es la menor. Para la segunda ecuación, igual que en el apartado a) sólo la mayor solución es válida.

Las dos soluciones de cuando $T = 8$ son $t = 0'2984$ y $t = 6'7015$. Mientras que $T = 12$ ocurre si $t = 11'1789$ ya que la segunda solución ($t = -0'1789$) no es válida. De modo que el tiempo que la función está en el intervalo $[8, 12]$ es $11'1789 - 0'2984 = 10'8805$min, o lo que es lo mismo, 10min 52seg.

11. A continuación damos la expresión de las derivadas de las funciones y su dominio de definición:

a) El dominio de definición de f es $Dom(f) = [-\sqrt{3}, \sqrt{3}]$. La derivada es $f'(x) = -\dfrac{x}{\sqrt{3-x^2}}$, y es válida en $(-\sqrt{3}, \sqrt{3})$.

b) El dominio de definición de f es $Dom(f) = \mathbb{R}$. La derivada es $f'(x) = \dfrac{2x-1}{x^2-x+1}$, y es válida en $\mathbb{R}$.

c) El dominio de definición de f es $Dom(f) = \mathbb{R}$. La derivada es

$$f'(x) = -\frac{1}{2}\text{sen}\left(\frac{x}{2}\right)\ \text{sen}x + \cos\left(\frac{x}{2}\right)\ \cos x,$$

y es válida en $\mathbb{R}$.

d) El dominio de definición de f es $Dom(f) = (0, 1]$. La derivada es $f'(x) = -\dfrac{1}{2x\sqrt{(1-x)x}}$, y es válida en $(0, 1)$.

e) El dominio de definición de f es $Dom(f) = \mathbb{R}$. La derivada es $f'(x) = (-2x)\, e^{-x^2+3}$, y es válida en $\mathbb{R}$.

f) El dominio de definición de f es $Dom(f) = \mathbb{R}\backslash\{-1\}$. La derivada es

$$f'(x) = 2\,\text{sen}\left(\frac{x+2}{x+1}\right)\ \cos\left(\frac{x+2}{x+1}\right)\ \left(\frac{-1}{(x+1)^2}\right),$$

y es válida en $\mathbb{R}\backslash\{-1\}$.

g) El dominio de definición de f es $Dom(f) = \mathbb{R}$. La derivada es

$$f'(x) = \cos^2 x\ \left[-\cos(1-x)\cos x + 3\,\text{sen}(1-x)\,\text{sen}x\right],$$

y es válida en $\mathbb{R}$.

h) El dominio de definición de f es $Dom(f) = \mathbb{R}$. La derivada es $f'(x) = 2^{x^3-3x^2}\,(3x^2-6x)\ln 2$, y es válida en $\mathbb{R}$.

i) El dominio de definición de f es $Dom(f) = [-1, 3]$. La derivada es $f'(x) = -\dfrac{1}{\sqrt{-x^2+2x+3}}$, y es válida en $(-1, 3)$.

j) El dominio de definición de f es $Dom(f) = \mathbb{R}$. La derivada es $f'(x) = \dfrac{1}{2}\,(1-\cos x)^{-1/2}\,\text{sen}x$, y es válida en $\mathbb{R}\backslash\{2\,n\,\pi,\ n \in \mathbb{Z}\}$ (múltiplos pares de π).

k) El dominio de definición de f es $Dom(f) = \mathbb{R}$. La derivada es $f'(x) = \dfrac{e^x}{(1+e^x)^2}$, y es válida en $\mathbb{R}$.

l) El dominio de definición de f es $Dom(f) = (-1, 1)$. La derivada es $f'(x) = \dfrac{1}{x^2-1}$, y es válida en $(-1, 1)$.

m) El dominio de definición de f es $Dom(f) = \mathbb{R}\backslash\{-2\}$. La derivada es

$$f'(x) = -14\,\frac{3x-1}{(x+2)^3}\,\text{sen}\left(\frac{3x-1}{x+2}\right)^2,$$

y es válida en $\mathbb{R}\backslash\{-2\}$.

n) El dominio de definición de f es $Dom(f) = (-\infty, -2] \cup [2, +\infty)$. La derivada es $f'(x) = \dfrac{x^2-2}{\sqrt{x^2-4}}$, y es válida en $(-\infty, -2) \cup (2, +\infty)$.

o) El dominio de definición de f es $Dom(f) = \mathbb{R}$. La derivada es $f'(x) = \dfrac{2x}{x^4+1}$, y es válida en $\mathbb{R}$.

p) El dominio de definición de f es $Dom(f) = \mathbb{R}\backslash\{1, \frac{n\pi}{3}, n \in \mathbb{Z}\}$. La derivada es $f'(x) = \dfrac{\frac{2}{x-1}\,\mathrm{sen}(3x) - \ln(x^2-2x+1)\,3\cos(3x)}{\mathrm{sen}^2(3x)}$, y es válida en $\mathbb{R}\backslash\{1, \frac{n\pi}{3}, n \in \mathbb{Z}\}$.

q) El dominio de definición de f es $Dom(f) = \mathbb{R}\backslash\{(2n+1)\,\pi, n \in \mathbb{Z}$, (múltiplos impares de π)$\}$. La derivada es $f'(x) = \dfrac{1}{2}$, y es válida en $\mathbb{R}\backslash\{(2n+1)\,\pi, n \in \mathbb{Z}\}$.

r) El dominio de definición de f es $Dom(f) = \mathbb{R}$. La derivada es $f'(x) = \dfrac{2}{x^2+1}$, y es válida en $\mathbb{R}$.

t) El dominio de definición de f es $Dom(f) = \mathbb{R}\backslash\{-1\}$. La derivada es $f'(x) = \dfrac{-1}{x^2+1}$, y es válida en $\mathbb{R}\backslash\{-1\}$.

u) El dominio de definición de f es $Dom(f) = [-1,1]$. La derivada es $f'(x) = \dfrac{-sgn(x)}{\sqrt{1-x^2}}$, y es válida en $(-1,1)$.

v) El dominio de definición de f es $Dom(f) = [-1,1]$. La derivada es $f'(x) = \dfrac{-x}{\sqrt{1-x^2}}$, y es válida en $(-1,1)$.

12. a) La función es continua en $\left[-\dfrac{\pi}{2}, 0\right) \cup \left(0, \dfrac{\pi}{2}\right]$. Estudiamos separadamente lo que ocurre en $x=0$:

$$\begin{aligned}
f^-(0) &= f(0^-) = \lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} (a\,\mathrm{sen}x + b) = b \\
f^+(0) &= f(0^+) = \lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} \frac{1-\cos x}{\mathrm{sen}x} = \frac{\text{“}0\text{”}}{0} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\mathrm{sen}x}{\cos x} = 0 \\
f(0) &= b
\end{aligned}$$

Entonces, f es continua en $x=0$ si y sólo si $b=0$.
Estudiamos ahora la derivabilidad:

- la función es derivable en $\left[-\dfrac{\pi}{2}, 0\right) \cup \left(0, \dfrac{\pi}{2}\right]$, la derivada en esos puntos es:

$$f'(x) = \begin{cases} a\cos x & \text{si } -\frac{\pi}{2} \leq x < 0; \\ \dfrac{1-\cos x}{\mathrm{sen}^2 x} = \dfrac{1}{1+\cos x} & \text{si } 0 < x \leq \frac{\pi}{2}. \end{cases}$$

- Veamos qué ocurre en $x=0$. Observemos que debemos considerar el caso $b=0$, en el que la función es continua (pues si una función no es continua en un punto, no puede ser derivable en dicho punto). Calculamos las derivadas laterales:

$$\begin{aligned}
\lim_{h\to 0^-} \frac{f(0+h)-f(0)}{h} &= \lim_{h\to 0^-} \frac{a\,\mathrm{sen}h - 0}{h} = \frac{\text{“}0\text{”}}{0} = \lim_{h\to 0^-} \frac{a\cos h}{1} = a \\
\lim_{h\to 0^+} \frac{f(0+h)-f(0)}{h} &= \lim_{h\to 0^+} \frac{\frac{1-\cos h}{\mathrm{sen}h} - 0}{h} = \lim_{h\to 0^+} \frac{1-\cos h}{h\,\mathrm{sen}h} = \frac{\text{“}0\text{”}}{0} \\
&= \lim_{h\to 0^+} \frac{\mathrm{sen}h}{\mathrm{sen}h + h\cos h} = \frac{\text{“}0\text{”}}{0} \\
&= \lim_{h\to 0^+} \frac{\cos h}{2\cos h - h\,\mathrm{sen}h} = \frac{1}{2}.
\end{aligned}$$

Entonces, f es derivable en $x=0$ si y sólo si $a=\dfrac{1}{2}$ y $b=0$.

b) La función es continua en $(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$. Estudiamos separadamente lo que ocurre en $x=0$:

$$\begin{aligned} f^-(0) &= f(0^-)=\lim_{x\to 0^-} f(x)=\lim_{x\to 0^-}(1+x^2)=1\\ f^+(0) &= f(0^+)=\lim_{x\to 0^+} f(x)=\lim_{x\to 0^+}\cos x=1\\ f(0) &= 1\end{aligned}$$

Entonces, f es continua en $x=0$.
Estudiamos ahora la derivabilidad:

- la función es derivable en $(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$, la derivada en esos puntos es:

$$f'(x)=\begin{cases} -\mathrm{sen}x & \text{si } x>0;\\ 2\,x & \text{si } x<0.\end{cases}$$

- Veamos qué ocurre en $x=0$. Calculamos las derivadas laterales:

$$\begin{aligned} \lim_{h\to 0^-}\frac{f(0+h)-f(0)}{h} &= \lim_{h\to 0^-}\frac{\cos(h)-1}{h}=\text{“}\frac{0}{0}\text{”}=\lim_{h\to 0^-}\frac{-\mathrm{sen}h}{1}=0\\ \lim_{h\to 0^+}\frac{f(0+h)-f(0)}{h} &= \lim_{h\to 0^+}\frac{1+h^2-1}{h}=\lim_{h\to 0^+}h=0.\end{aligned}$$

Entonces, f es derivable en $x=0$.

c) La función es continua en $(-\infty,1)\cup(1,+\infty)$. Estudiamos separadamente lo que ocurre en $x=0$:

$$\begin{aligned} f^-(1) &= f(1^-)=\lim_{x\to 1^-} f(x)=\lim_{x\to 1^-}(a\,x+b)=a+b\\ f^+(1) &= f(1^+)=\lim_{x\to 1^+} f(x)=\lim_{x\to 1^+}x^2=1\\ f(1) &= 1\end{aligned}$$

Entonces, f es continua en $x=1$ si y sólo si $a+b=1$.
Estudiamos ahora la derivabilidad:

- la función es derivable en $(-\infty,1)\cup(1,+\infty)$, la derivada en esos puntos es:

$$f'(x)=\begin{cases} 2\,x & \text{si } x>1;\\ a & \text{si } x<1.\end{cases}$$

- Veamos qué ocurre en $x=1$. Observemos que debemos considerar el caso $a+b=1$, en el que la función es continua (pues si una función no es continua en un punto, no puede ser derivable en dicho punto). Calculamos las derivadas laterales:

$$\begin{aligned} \lim_{h\to 0^-}\frac{f(1+h)-f(1)}{h} &= \lim_{h\to 0^-}\frac{a\,(1+h)+b-1}{h}=a\\ \lim_{h\to 0^+}\frac{f(1+h)-f(1)}{h} &= \lim_{h\to 0^+}\frac{(1+h)^2-1}{h}\\ &= \lim_{h\to 0^+}\frac{1+2\,h+h^2-1}{h}=\lim_{h\to 0^+}(2+h)=2.\end{aligned}$$

Entonces, f es derivable en $x = 0$ si y sólo si $a = 2$. Por tanto como también se debe verificar la condición de continuidad en $x = 0$, para que f sea derivable en $x = 0$ se tiene que verificar:

$$\left\{\begin{array}{l} a+b=1 \\ a=2 \end{array}\right\} \quad \Rightarrow \quad \left\{\begin{array}{l} a=2 \\ b=-1 \end{array}\right.$$

d) La función es continua en $\mathbb{R}\backslash\{0\}$. Estudiamos separadamente lo que ocurre en $x = 0$:

$$\begin{aligned} f^-(0) &= f(0^-) = \lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} x \operatorname{arctg}\left(\frac{1}{x}\right) = 0 \\ f^+(0) &= f(0^+) = \lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} x \operatorname{arctg}\left(\frac{1}{x}\right) = 0 \\ f(0) &= a \end{aligned}$$

Entonces, f es continua en $x = 0$ si y sólo si $a = 0$.
Estudiamos ahora la derivabilidad:

- la función es derivable en $\mathbb{R}\backslash\{0\}$, la derivada en esos puntos es:

$$f'(x) = \operatorname{arctg}\left(\frac{1}{x}\right) - \frac{x}{x^2+1} \qquad \text{si } x \neq 0.$$

- Veamos qué ocurre en $x = 0$. Observemos que debemos considerar el caso $a = 0$, en el que la función es continua (pues si una función no es continua en un punto, no puede ser derivable en dicho punto). Calculamos las derivadas laterales:

$$\begin{aligned} \lim_{h\to 0^-} \frac{f(0+h)-f(0)}{h} &= \lim_{h\to 0^-} \frac{h \operatorname{arctg}\left(\frac{1}{h}\right)}{h} = \lim_{h\to 0^-} \operatorname{arctg}\left(\frac{1}{h}\right) = -\frac{\pi}{2} \\ \lim_{h\to 0^+} \frac{f(0+h)-f(0)}{h} &= \lim_{h\to 0^+} \frac{h \operatorname{arctg}\left(\frac{1}{h}\right)}{h} = \lim_{h\to 0^+} \operatorname{arctg}\left(\frac{1}{h}\right) = \frac{\pi}{2}. \end{aligned}$$

Entonces, f no es derivable en $x = 0$.

13. a) En $x = 1$, $f(1) = 2$, y la recta tangente viene dada por la expresión:

$$y - f(1) = f'(1)\,(x-1), \quad \text{es decir,} \quad y - 2 = f'(1)\,(x-1).$$

Por tanto, tenemos que calcular $f'(1)$. Observemos que como a ambos lados de $x = 1$ la función $f(x)$ está definida de forma distinta, tenemos que calcular las derivadas laterales, comprobar que existen y que son iguales:

$$\begin{aligned} \lim_{h\to 0^-} \frac{f(1+h)-f(1)}{h} &= \lim_{h\to 0^-} \frac{(1+h)^2+1-2}{h} = \lim_{h\to 0^-} \frac{1+2\,h+h^2+1-2}{h} \\ &= \lim_{h\to 0^-} (2+h) = 2 \\ \lim_{h\to 0^+} \frac{f(1+h)-f(1)}{h} &= \lim_{h\to 0^+} \frac{2(1+h)-2}{h} = \lim_{h\to 1^-} 2 = 2. \end{aligned}$$

Luego $f'(1) = 2$ y la recta tangente es $y = 2x$.

b) Como $f'(x) = 4x - 5$ tiene valor en $x = 1$ $f'(1) = -1$, la recta tangente en $(1, f(1)) = (1, 5)$ es $y - 5 = -1(x - 1)$, es decir, $y = -x + 6$.

c) Usando la misma fórmula que en los dos apartados anteriores, y dado que $f'(x) = \cos(2\pi x) - 2\pi x \operatorname{sen}(2\pi x)$, y por tanto $f'(1) = 1 - 0 = 1$, se tiene que la recta tangente en $(1, f(1)) = (1, 4)$ es $y - 4 = x - 1$, es decir, $y = x + 3$.