$\boxed{1}$ Para ver que las ecuaciones dadas poseen una única raíz real, intentaremos aplicar el teorema de Bolzano a funciones adecuadas y haremos razonamientos de monotonía según el signo de la derivada de dichas funciones.

a) La función auxiliar $f(x) = x - 2^{-x}$ es continua y cumple que $\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$, y que $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$. Así, es posible dar un intervalo $[a, b]$ conveniente en el que aplicar el teorema de Bolzano. En conclusión: $f(x)$ posee al menos una raíz.

Por otro lado, $f'(x) = 1 + 2^{-x} \ln 2$, que es una función de signo constante (positiva siempre), por lo que f es estrictamente creciente. Eso implica que f sólo corta al eje una única vez.

Aunque no se pide, como complemento al ejercicio y parte del tema 3, calculamos la raíz usando el método de Newton en el intervalo $[0, 1]$. Compruébese que se satisfacen las condiciones para la Regla de Fourier. Si tomamos $x_1 = 0$, obtenemos $x_2 = 0'59061611$, $x_3 = 0'64090962$, $x_4 = 0'64118574$ y ya el siguiente elemento coincide con el anterior hasta los decimales mostrados, por lo que resulta válido como aproximación a la raíz.

b) Análogo al anterior tomando $f(x) = e^x + x - 2$.

Si aplicamos la Regla de Fourier en el intervalo $[0, 1]$, con $x_1 = 1$ obtenemos $x_2 = 0'53788284$, $x_3 = 0'44561675$, $x_4 = 0'44285672$, $x_5 = 0'4428544$ y x_6 coincide en los decimales mostrados con el anterior valor x_5.

c) Tómese $f(x) = \text{arctg}x - \ln\sqrt{x}$. El desarrollo es de nuevo análogo a los apartados anteriores, pero en el intervalo $(0, +\infty)$. [Recuérdese que $\lim_{x \to -\infty} \text{arctg}x = -\pi/2$ y que $\lim_{x \to \infty} \text{arctg}x = \pi/2$.]

Para encontrar un intervalo donde comenzar a aplicar el Método de Newton, tanteamos algunos valores de f hasta estar en las condiciones del teorema de Bolzano.

NOTA IMPORTANTE: poner la calculadora en modo `Rad` siempre que se usen funciones relacionadas con trigonometría. Por ejemplo, el intervalo $[20, 25]$ es válido. Si $x_1 = 20$, tenemos $x_2 = 21'02068582$, $x_3 = 21'04421239$, $x_4 = 21'04422418$ y x_5 coincide en las cifras decimales mostradas con el valor anterior.

$\boxed{2}$ Se puede comprobar que todas las funciones que aparecen en este ejercicio son continuas. Al estar definidas sobre intervalos cerrados y acotados, poseen extremos absolutos (teorema de Weierstrass).

Para calcularlos, tomamos los "candidatos" a extremos, esto es: los extremos del intervalo, los puntos donde la función es derivable y la derivada se anula, y los puntos donde la función no es derivable. Evaluamos[1] la función en dichos puntos para concluir quién(es) dan el máximo y mínimo absoluto de la función.

a) Candidatos: $-\pi$, $-\pi/2$, 0, $\pi/2$, π. El mínimo es 0 y se alcanza en $x = 0$, $x = -\pi$ y en $x = \pi$. El máximo de f en $[-\pi, \pi]$ es 1 y se alcanza en $x = -\pi/2$ y en $x = \pi/2$.

b) Candidatos: -1, 1, 3. Extremos de f : máximo absoluto $1/2$ y se alcanza en $x = 1$. Mínimo absoluto $-1/2$ y se alcanza en $x = -1$.

c) Candidatos: $-2, -1, 0, \pi/2, \pi$. Máximo de f : 1, alcanzado en $x = \pi/2$. Mínimo de f : -1, y se alcanza en $x = -1$.

d) Candidatos: $0, 1, 3$. Máximo de f : $\ln 2$, y se alcanza en $x = 1$. Mínimo de f : $\ln 2 - 2$ y se alcanza en $x = 3$.

[1] En algunas ocasiones (pero no siempre), si los cálculos de evaluación son farragosos, podemos evitarlos haciendo un análisis del crecimiento de la función a través del signo de la derivada, para concluir cuáles son los extremos absolutos.

$\boxed{3}$ Para resolver problemas de optimización con enunciado, debemos previamente "traducir" a un contexto matemático los datos e incógnitas. Es decir, debemos obtener la expresión de la función a optimizar (en nuestro caso funciones reales de variable real) a partir de cierta variable (en general varias, pero relacionadas entre sí de modo que al final todo queda como expresión de una única variable) y del dominio de definición de la función, esto son los valores para los que tiene sentido la construcción del problema real.

a) Tomando como variables a y b, lados de la parcela, como máximo el perímetro 80, siendo el río uno de los lados (paralelo a b), implica $2a + b = 80$. Despejamos (por ejemplo) b, y el área ($A = ab$) queda como la función $A(a) = a(80 - 2a)$. El problema tiene sentido cuando $a \in (0, 40)$, por lo que estudiaremos optimizar la función anterior en $\mathrm{Dom}(A) = [0, 40]$. (Incluir los valores extremos es sólo cuestión técnica para tener asegurado máximo y mínimo de la función, y se observa que no produce ningún efecto perjudicial sobre el problema ya que A se anula en los extremos.)

   Los candidatos a extremos: $0, 20, 40$. El máximo es 800 y se alcanza cuando $a = 20$ (y por tanto $b = 40$).

b) Para este apartado, ahora el dato es $ab = 18$, mientras que el perímetro $P = 2a + b$ es la expresión a optimizar. Si despejamos la variable b queda $P = 2a + \dfrac{18}{a}$. Hay que analizar para qué valores tiene sentido dicha expresión: ¿cuál es el dominio práctico del problema? En este caso comprobamos que $\mathrm{Dom}(P) = (0, +\infty)$ [al menos "teóricamente" tiene sentido, supuesto el río infinito y que disponemos de tanta malla como requiramos].

   ¿Cómo resolver este problema? Cuando el dominio de la función no es un cerrado y acotado, un análisis más preciso es requerido. Hay dos opciones:

   1.- Analizar el problema en dominios cerrados y acotados, en este caso de la forma $[m, M]$ con ambos valores positivos y hacerlos cada vez más cercanos al verdadero dominio del problema, $m \to 0^+$ y $M \to +\infty$.

   2.- Usar el signo de la derivada para analizar crecimiento y decrecimiento de la función, y argumentar razonadamente dónde se hallan los máximos y mínimos absolutos, si es que se alcanzan, o supremo e ínfimo de la función.

   En el primer caso, llegamos a que los puntos a estudiar serían $a = 3$, donde se anula la derivada $P'(a) = 2 - \dfrac{18}{a^2}$, y los extremos m y M. Pero como en realidad los hacemos tender a los extremos del verdadero dominio, los valores imágenes a comparar son $P(3) = 12$ y los límites $\lim\limits_{m \to 0^+} P(m) = +\infty$ y $\lim\limits_{M \to +\infty} P(M) = +\infty$. Así, el mínimo valor es 12 y se alcanza cuando $a = 3$.

   El segundo modo permite obtener el mismo resultado viendo simplemente que la función P es decreciente en $(0, 3)$ por tener derivada con signo negativo, y creciente en $(3, +\infty)$ por la razón contraria.

$\boxed{4}$ La función $S(x) = x(C - x)$ debe ser maximizada en el dominio natural donde tiene sentido, esto es, en el intervalo $[0, C]$, ya que las dosis, así como "la sensibilidad al fármaco" se sobrentiende deben ser valores positivos.

Al tratarse de una función continua, definida sobre un intervalo cerrado y acotado (T. de Weierstrass) la función S tiene máximo y mínimo. Los candidatos a extremos absolutos son: los extremos del intervalo, esto es, 0 y C, y los puntos donde se anula la derivada, $S'(x) = C - 2x$, es decir, $x = C/2$. Obsérvese que la función S es siempre derivable, por lo que no hay más candidatos posibles.

Viendo que $S(0) = S(C) = 0$ y que $S(C/2) = (C/2)^2$, es éste último el máximo valor de la sensibilidad al fármaco, y la dosis con que se consigue, es $x = C/2$, valor que se pedía.

$\boxed{5}$ Siendo $f(t) = \dfrac{t^2 - t + 1}{t^2 + 1}$, la derivada es $f'(t) = \dfrac{t^2 - 1}{t^2 + 1}$. Así, el máximo de f es 1 y se alcanza con $t = 0$, y el mínimo de f es $1/2$ y corresponde a $t = 1$.

$\boxed{6}$ En todos los apartados adaptamos la expresión sobre la que hay que calcular el límite para poder utilizar la Regla de L'Hôpital (compruébese que en cada caso se satisfacen las hipótesis para ello):

a) $\lim\limits_{x\to 0} x^3 \ln x = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln x}{x^{-3}} \underset{L'H}{=} \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1/x}{-3x^{-4}} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^3}{-3} = 0.$

b) $\lim\limits_{x\to +\infty} x \ln x = +\infty$ no es problemático.

Por completitud, comentamos el caso cuando $x \to 0^+$ que sí es propiamente una indeterminación.

$$\lim_{x\to 0^+} x\ln x = \lim_{x\to 0^+} \frac{\ln x}{x^{-1}} \underset{L'H}{=} \lim_{x\to 0^+} \frac{1/x}{-x^{-2}} = \lim_{x\to 0^+} -x = 0.$$

De los dos límites anteriores podemos obtener la idea *grosso modo* de que cualquier polinomio vence a un logaritmo. Lo volvemos a comprobar en el siguiente caso:

c) $\lim\limits_{x\to +\infty} x^2 - 7\ln x = \lim\limits_{x\to +\infty} x\left(x - 7\dfrac{\ln x}{x}\right) \underset{\text{álgebra lim}}{=} \infty \cdot \infty = \infty$

donde hemos usado que $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\ln x}{x} \underset{L'H}{=} \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1/x}{1} = 0.$

d) Dos observaciones sobre este apartado:

1.- como cabía esperar, igual que todo polinomio "vence" a un logaritmo, ocurre que la exponencial "vence" a todo polinomio:

$$\lim_{x\to+\infty} x^4 e^{-x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^4}{e^x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{4x^3}{e^x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{12x^2}{e^x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{24x}{e^x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{24}{e^x} = 0.$$

Como segunda observación: para ver que existe el límite que nos planteamos, aplicamos la Regla de L'Hôpital, y si bien no podemos conseguir una resolución explícita inmediata, sí reiteramos la Regla sobre esa expresión, sucesivamente, hasta conseguir ver que existe límite.

e) $\lim\limits_{x\to+\infty} e^x - \ln x = \lim\limits_{x\to+\infty} e^x\left(1 - \dfrac{\ln x}{e^x}\right) \underset{\text{álgebra lim}}{=} +\infty(1-0) = +\infty$

donde la Regla de L'Hôpital la usamos para hallar $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln x}{e^x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1/x}{e^x} = 0.$

f) $\lim\limits_{x\to+\infty} x^{-2}\ln x = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln x}{x^2} \underset{L'H}{=} \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1/x}{2x} = 0.$

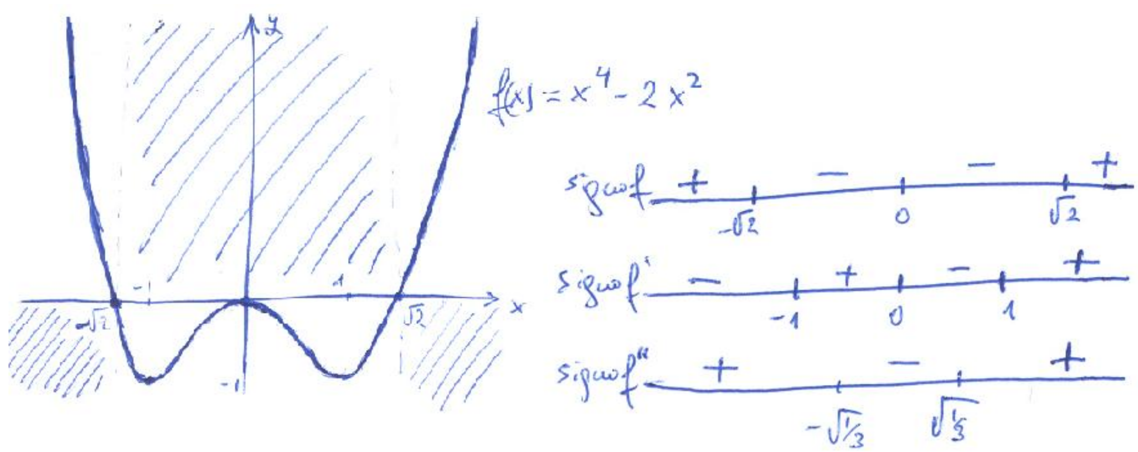
$\boxed{7}$ a) La función $f(x) = x^4 - 2x^2$ tiene por dominio todo $\mathbb{R}$, es continua y derivable en todo su dominio. Se trata de una función con simetría par ya que $f(x) = f(-x)$. No tiene ningún tipo de periodicidad, ni asíntotas (no hay verticales porque no tiene denominador que pueda anularse; ni horizontales porque $\lim_{x\to\pm\infty} f(x)$ no es un número; ni oblicuas, porque tampoco ocurre que $\lim_{x\to\pm\infty} f(x)/x$ sea un número).

Vemos los signos que tiene f en distintas regiones: para ello factorizamos la función sacando factor común, $f(x) = x^2(x^2-2)$, lo que nos dice que los cortes con el eje OX son 0 y $\pm\sqrt{2}$, y que las regiones a considerar son $(-\infty, -\sqrt{2})$, $(-\sqrt{2}, 0)$, $(0, \sqrt{2})$ y $(\sqrt{2}, +\infty)$. Como 0 es raíz doble, pero $\sqrt{2}$ y $-\sqrt{2}$ son simples, sabemos que hay alternancia de signo al pasar por los dos últimos, pero no la habrá al pasar por 0. Esto es: f es positiva en $(-\infty, -\sqrt{2})$, negativa en $(-\sqrt{2}, 0)$ y en $(0, \sqrt{2})$, y positiva en $(\sqrt{2}, +\infty)$. (Recuérdese que la función es simétrica par).

Para el crecimiento, decrecimiento, máximos y mínimos, estudiamos el signo de la derivada: $f'(x) = 4x^3 - 4x$, que de nuevo hay que factorizar si queremos ver su signo: $f'(x) = 4x(x^2-1)$. Por tanto las regiones con signos constantes vienen dadas por las separaciones hechas en la recta real por los valores $0, \pm 1$. Las tres raíces de la derivada son simples, por lo que siempre hay cambio de signo al pasar por cada una de ellas: f' es negativa en $(-\infty, -1)$, positiva en $(-1, 0)$, negativa en $(0, 1)$, y positiva en $(1, +\infty)$. Esto significa que f es decreciente en $(-\infty, -1)$, creciente en $(-1, 0)$, decreciente en $(0, 1)$, y creciente en $(1, +\infty)$, y además deducimos que f tiene mínimos relativos en ± 1 y máximo relativo en $x = 0$.

Sin necesidad de tener aún la representación gráfica, podemos razonar que el mínimo en $x = \pm 1$ (la función es par, y por tanto alcanza el mismo valor en ambos puntos) es, no sólo relativo, sino absoluto. En cambio, el máximo en $x = 0$ es relativo ya que $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = +\infty$.

Aunque ya se puede intuir la representación, para completarla vemos la concavidad, convexidad y puntos de inflexión de f. Esto se hace analizando el signo de la derivada segunda $f''(x) = 12x^2 - 4 = 4(3x^2 - 1)$, que se anula en $\pm\sqrt{1/3}$, con lo que los signos de f'' son: positivo en $(-\infty, -\sqrt{1/3})$, negativo en $(-\sqrt{1/3}, \sqrt{1/3})$, y positivo en $(\sqrt{1/3}, +\infty)$. Esto implica que f es convexa en $(-\infty, -\sqrt{1/3})$, cóncava en $(-\sqrt{1/3}, \sqrt{1/3})$, y convexa en $(\sqrt{1/3}, +\infty)$. Los valores $x = \pm\sqrt{1/3}$ son puntos de inflexión.



b)La función $f(x) = \frac{x}{1+x^2}$ tiene por dominio todo $\mathbb{R}$, ya que su denominador no se anula nunca y por tanto no es problemático. Se trata pues de una función racional continua y derivable en todo su dominio. f es simétrica impar pues $-f(x) = f(-x)$, y no tiene ningún tipo de periodicidad.

No tiene asíntotas verticales pues, como se ha dicho, el denominador no se anula. Sí tiene asíntotas horizontales tanto cuando $x \to +\infty$ como cuando $x \to -\infty$, y en ambos casos $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = 0$ (se puede ver por L'Hôpital o dividiendo por el mayor grado), esto es, la asíntota horizontal es la recta $y = 0$. No tiene sentido por tanto calcular asíntotas oblicuas al haberlas horizontales.

Para el regionamiento de f, observamos que el denominador siempre es positivo, por tanto el signo dependerá sólo del numerador, y en este caso es trivial: en el semieje positivo f es positiva, y en el negativo, f es negativa.

Para el crecimiento y decrecimiento, vemos la derivada y su signo:

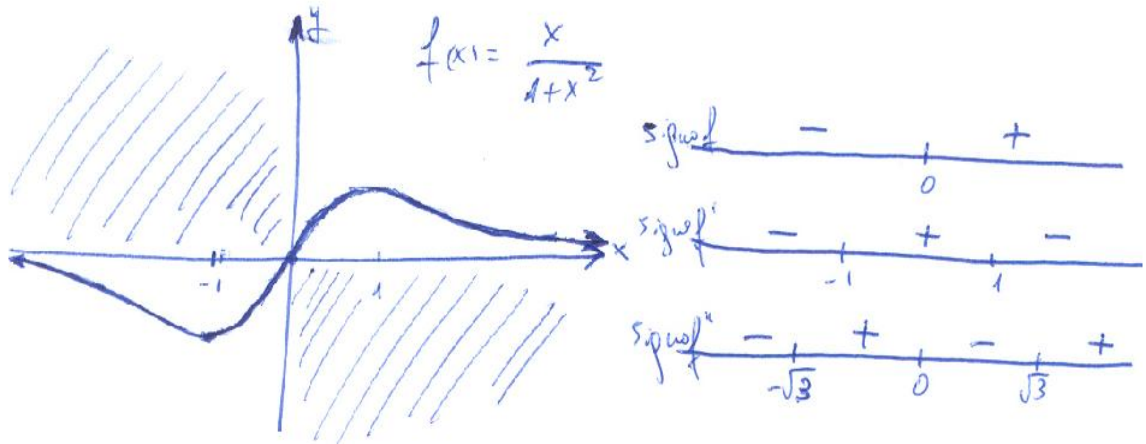
$$f'(x) = \frac{(1+x^2) - 2x \cdot x}{(1+x^2)^2} = \frac{1-x^2}{(1+x^2)^2}.$$

Tenemos que los puntos críticos son ± 1, cada uno de ellos es una raíz de f' con multiplicidad 1 (por tanto impar) y los signos de f' son: negativo en $(-\infty, -1)$, positivo en $(-1, 1)$ y negativo en $(1, +\infty)$. Esto significa que f es decreciente en $(-\infty, -1)$, creciente en $(-1, 1)$ y decreciente en $(1, +\infty)$, y que por tanto en $x = -1$ tiene un mínimo relativo, y que en $x = 1$ tiene un máximo relativo. Más aún, como $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = 0$, sabemos que los anteriores extremos relativos son también extremos absolutos.

Completamos el estudio para la representación con el análisis de zonas de concavidad y convexidad y puntos de inflexión viendo el signo de f''. Se debe tener mucho cuidado en simplificar al máximo antes de operar, para obtener cálculos breves.

$$\begin{aligned} f''(x) &= \frac{-2x(1+x^2)^2 - 2(1+x^2)2x(1-x^2)}{(1+x^2)^4} = \frac{-2x(1+x^2) - 4x(1-x^2)}{(1+x^2)^3} \\ &= \frac{-2x - 2x^3 - 4x + 4x^3}{(1+x^2)^3} = \frac{-6x + 2x^3}{(1+x^2)^3} = \frac{2x(x^2-3)}{(1+x^2)^3}. \end{aligned}$$

Por tanto las regiones a considerar son las separadas por los puntos 0 y $\pm\sqrt{3}$. f'' es negativa en $(-\infty, -\sqrt{3})$, positiva en $(-\sqrt{3}, 0)$, negativa en $(0, \sqrt{3})$ y positiva en $(\sqrt{3}, +\infty)$. Por tanto, f es cóncava en $(-\infty, -\sqrt{3})$, convexa en $(-\sqrt{3}, 0)$, cóncava en $(0, \sqrt{3})$ y convexa en $(\sqrt{3}, +\infty)$. Los puntos 0 y $\pm\sqrt{3}$ son puntos de inflexión.



c) La función $f(x) = \frac{x^3}{(1+x)^2}$ es racional, y por tanto elemental, de modo que es continua y derivable en su dominio: $\mathbb{R} - \{-1\}$, ya que el valor $x = -1$ anula el denominador. No es simétrica ni periódica. Claramente tiene asíntota vertical en $x = -1$ ya que $\lim_{x\to -1} f(x) = -\infty$. No tiene asíntota horizontal, ya que $\lim_{x\to\pm\infty} f(x)$ no son números, pero al ser de grado 3 el numerador y grado 2 el denominador, claramente vemos que sí va a tener asíntota oblicua: $\lim_{x\to\pm\infty} f(x)/x = 1$. Junto al valor de m, necesitamos el valor $n = \lim_{x\to\pm\infty}(f(x) - x) = -2$ con lo que la asíntota oblicua es la recta $y = x - 2$.

El estudio del signo de f es claro, y viene dado por los valores críticos -1 y 0 : f es negativa en $(-\infty, -1)$, negativa en $(-1, 0)$ y positiva en $(0, +\infty)$ (obsérvese que 0 es una raíz impar, de multiplicidad 3, mientras que -1 es una raíz par, de multiplicidad 2). Para el crecimiento y decrecimiento, estudiamos la derivada de f. Antes de proceder, recuérdese que es muy conveniente simplificar al máximo antes de operar, para poder abreviar los cálculos.

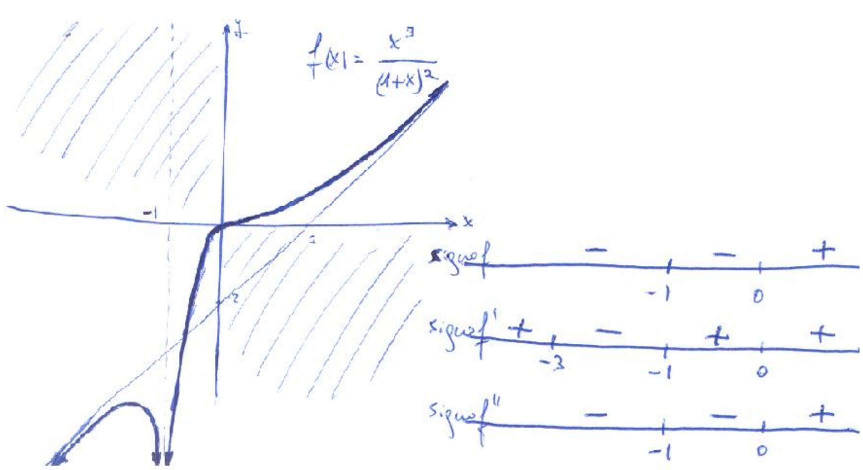
$$f'(x) = \frac{3x^2(1+x)^2 - 2(1+x)x^3}{(1+x)^4} = \frac{3x^2 + 3x^3 - 2x^3}{(1+x)^3} = \frac{x^3 + 3x^2}{(1+x)^3} = \frac{x^2(x+3)}{(1+x)^3}$$

con lo que los intervalos a diferenciar son los separados por los puntos -3, -1 y 0. El valor $x = 0$ es un cero de f' de multiplicidad par, y $\pm\sqrt{3}$ son de multiplicidad impar, así f' es positiva en $(-\infty, -3)$, negativa en $(-3, -1)$, positiva en $(-1, 0)$ y positiva en $(0, +\infty)$. Esto significa que f es creciente en $(-\infty, -3)$, decreciente en $(-3, -1)$, creciente en $(-1, 0)$ y creciente en $(0, +\infty)$. En realidad, como f es continua en todos los puntos salvo en $x = -1$, podemos decir que es creciente en todo $(-1, +\infty)$, de modo que el punto $x = 0$ no es ni máximo ni mínimo relativo (aunque tenga tangente horizontal). El valor $x = -3$ es un máximo relativo, pero por los estudios de asíntotas, ya sabemos que no es máximo absoluto (la función no tiene máximo absoluto, pues no está acotada, $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$).

Queda calcular f'' y estudiar su signo, para analizar la concavidad-convexidad (y puntos de inflexión) de f, así sabremos cómo se acerca a la asíntota oblicua hallada (otro procedimiento válido para orientarse consiste en calcular la intersección de f con $y = x - 2$, se puede comprobar que es sólo un punto, el $(-2/3, -8/3)$). De nuevo recordamos que conviene simplificar antes de operar.

$$\begin{aligned} f''(x) &= \frac{(3x^2 + 6x)(1+x)^3 - 3(1+x)^2(x^3 + 3x^2)}{(1+x)^6} = \frac{(3x^2 + 6x)(1+x) - 3x^3 - 9x^2}{(1+x)^4} \\ &= \frac{3x^2 + 3x^3 + 6x + 6x^2 - 3x^3 - 9x^2}{(1+x)^4} = \frac{6x}{(1+x)^4}, \end{aligned}$$

con lo que el análisis de signos es el siguiente: f'' es negativa en $(-\infty, -1)$, negativa en $(-1, 0)$, (ojo con no unir esos dos intervalos, de por medio hay una discontinuidad de salto infinito, la asíntota vertical ya calculada), y positiva en $(0, +\infty)$. Por tanto, f es cóncava en $(-\infty, -1)$, cóncava en $(-1, 0)$, y convexa en $(0, +\infty)$. Esto también indica que $x = 0$ es un punto de inflexión.



d) La función $f(x) = x^2 e^{-x}$ es continua y derivable en todo su dominio, que es todo $\mathbb{R}$, ya que es producto de funciones continuas y derivables sin ningún problema. No es simétrica ni periódica. No tiene ninguna asíntota vertical, aunque sí una asíntota horizontal, ya que $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$ (la indeterminación se resuelve por L'Hôpital). Como en el otro caso $\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$, no hay asíntota horizontal por la izquierda, (ni de hecho oblicua: sucede que $\lim_{x\to-\infty} f(x)/x = -\infty$).

El regionamiento de la función es trivial: siempre es positiva (al ser producto de funciones positivas), y el único corte con los ejes es el origen de coordenadas.

El crecimiento y decrecimiento exige el estudio de la derivada:

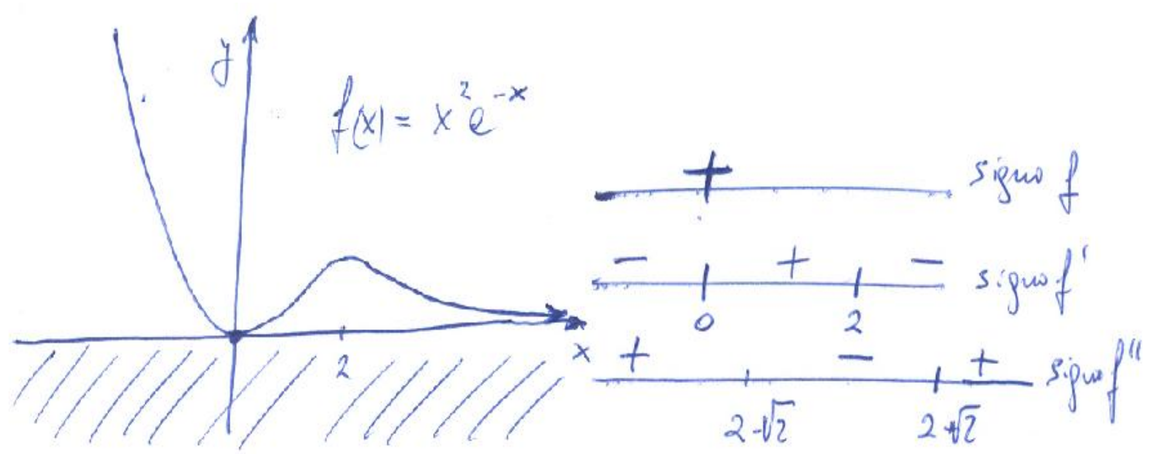
$$f'(x) = 2xe^{-x} - x^2e^{-x} = xe^{-x}(2-x),$$

que tiene tres zonas diferenciadas y separadas por los valores 0 y 2. Como ambas raíces son simples, es fácil comprobar que f' es negativa en $(-\infty, 0)$, positiva en $(0, 2)$ y negativa en $(2, +\infty)$. Esto significa que f es decreciente en $(-\infty, 0)$, creciente en $(0, 2)$ y decreciente en $(2, +\infty)$. Con estos datos deducimos que en $x = 0$ hay un mínimo, no sólo relativo sino absoluto, y que en $x = 2$ hay un máximo, que sólo es relativo, pero no absoluto ya que $\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$.

Hacemos ahora el estudio de zonas de concavidad, convexidad y puntos de inflexión:

$$f''(x) = 2e^{-x} - 2xe^{-x} - 2xe^{-x} + x^2e^{-x} = e^{-x}(2 - 4x + x^2).$$

Vemos que las raíces de f'' son las del polinomio de segundo grado $2 - 4x + x^2$, que se anula en $2 \pm \sqrt{2}$. Por tanto los signos de f'' son: positivo en $(-\infty, 2-\sqrt{2})$, negativo en $(2-\sqrt{2}, 2+\sqrt{2})$ y positivo en $(2+\sqrt{2}, +\infty)$. Esto significa que f es convexa en $(-\infty, 2-\sqrt{2})$, cóncava en $(2-\sqrt{2}, 2+\sqrt{2})$, y convexa en $(2+\sqrt{2}, +\infty)$, y que los puntos $x = 2 \pm \sqrt{2}$ son puntos de inflexión.



e) La función $f(x) = \frac{1}{1+e^x}$ tiene por dominio todo $\mathbb{R}$, ya que el denominador nunca se anula. Es continua y derivable al ser cociente de funciones continuas y derivables que no dan problemas.

No se trata de una función simétrica ni periódica. No tiene asíntotas verticales al no anularse su denominador nunca. Sí tiene asíntotas horizontales:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = 1/\infty = 0, \qquad \lim_{x\to-\infty} f(x) = 1/(1+0) = 1.$$

Por tanto no tiene sentido que nos planteemos buscar asíntotas oblicuas.

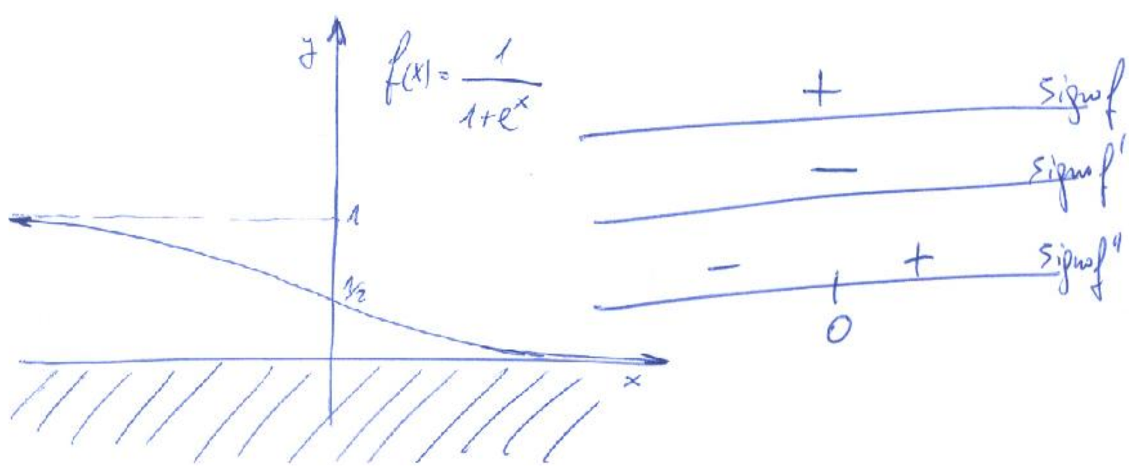
El regionamiento de esta función es trivial, pues es cociente de funciones siempre positivas.

Para el crecimiento y decrecimiento, teniendo en cuenta que $f'(x) = \frac{-e^x}{(1+e^x)^2}$, la derivada es siempre negativa, en todo $\mathbb{R}$, y al no tener discontinuidad alguna, significa que f es siempre decreciente, y que por tanto no tiene ni máximo ni mínimo, sólo tiene supremo e ínfimo, que son los valores 1 y 0, las asíntotas horizontales halladas (la función no llega a tomar esos valores).

Para la concavidad, convexidad y puntos de inflexión, observemos que

$$f''(x) = \frac{-e^x(1+e^x)^2 + 2(1+e^x)(e^x)^2}{(1+e^x)^4} = \frac{-e^x(1+e^x) + 2(e^x)^2}{(1+e^x)^3} = \frac{-e^x + (e^x)^2}{(1+e^x)^3} = \frac{e^x(e^x-1)}{(1+e^x)^3}.$$

Como el único cero se produce cuando $x = 0$, las zonas con signo constante de f'' son $(-\infty, 0)$, donde f'' es negativa, y $(0, +\infty)$, donde f'' es positiva. Es decir, $x = 0$ es un punto de inflexión, y f es cóncava en $(-\infty, 0)$, y convexa en $(0, +\infty)$.



f) La función $f(x) = \ln(x^2 + 2x)$ es especial para analizarla y representarla, en tanto en cuanto es composición de dos funciones, una de ellas el logaritmo neperiano. Es necesario conocer bien la función $\ln x$ antes de poder representar la que queremos.

f es continua en su dominio de definición, que es donde $x^2 + 2x > 0$. Un análisis de signo de la función $p(x) = x^2 + 2x = x(2 + x)$ indica que dom $f = (-\infty, -2) \cup (0, +\infty)$. Y como en los puntos $x = -2$ y $x = 0$ se tiene que $p(x) = 0$, ahí f tiene asíntotas verticales: $\lim_{x\to -2^-} f(x) = -\infty$ y $\lim_{x\to 0^+} f(x) = -\infty$.

El análisis del signo de la función f también es especial, y depende de si $0 < p(x) < 1$ o bien $p(x) > 1$. Si estudiamos cuando ocurre $p(x) = 1$ hallamos que es con $x = -1 \pm \sqrt{2}$. Eso indica que en $(-\infty, -1 - \sqrt{2})$ f es positiva, en $(-1 - \sqrt{2}, -2)$ f es negativa, en $(0, -1 + \sqrt{2})$ f es negativa, y en $(-1 + \sqrt{2}, +\infty)$ f es positiva.

La función f no es periódica, ni simétrica (al menos en el sentido de par, impar, o respecto los cuadrantes primero y tercero; sin embargo sí esconde una simetría, la propia que tiene esta parábola respecto el eje vertical que pasa por su vértice, como se verá en la gráfica).

No tiene asíntotas horizontales ya que $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = +\infty$. Es especialmente curioso el análisis de si tiene o no asíntotas oblicuas, ya que sí ocurre que $\lim_{x\to\pm\infty} f(x)/x$ existe, y vale 0 (tras aplicar L'Hôpital). Sin embargo, no ocurre que $\lim f(x) - 0 \cdot x$ sea un número, esto significa que la función crece por debajo de cualquier recta, pero no llega a comportarse como una recta propiamente.

Aunque ya se puede intuir la representación, estudiamos el crecimiento y decrecimiento de f, esto es, vemos el signo de su derivada (f es derivable en todo su dominio):

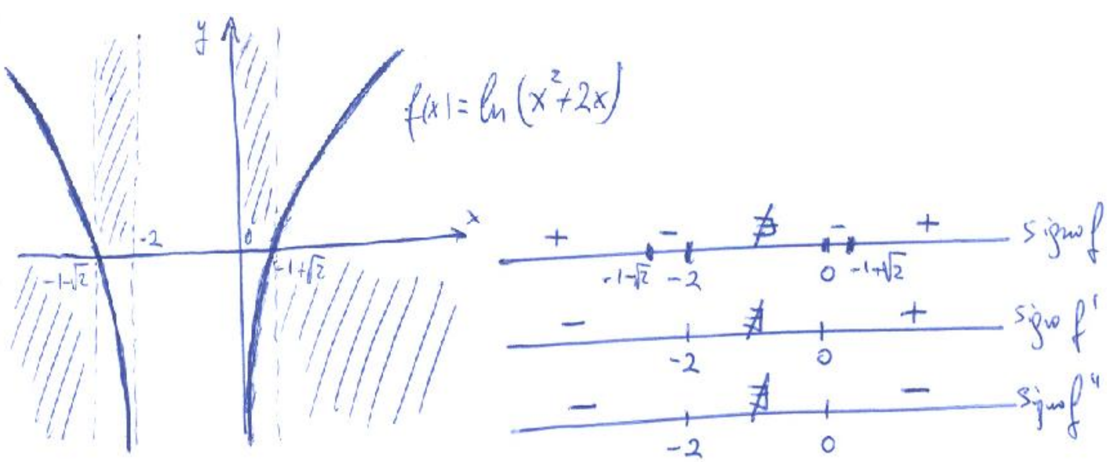
$$f'(x) = \frac{2x + 2}{x^2 + 2x} = 2\frac{x + 1}{x(x + 2)}.$$

Ojo: esta función sólo tiene sentido en el dominio de f. En principio, el signo de f' parece que viene marcado por las regiones $(-\infty, -2)$, $(-2, -1)$, $(-1, 0)$, y $(0, +\infty)$. Sin embargo, recuérdese que f sólo tiene sentido en $(-\infty, -2) \cup (0, +\infty)$. Comprobamos que f' es negativa en $(-\infty, -2)$ y positiva en $(0, +\infty)$. Por tanto, f es decreciente en $(-\infty, -2)$ y creciente en $(0, +\infty)$. Por los valores que tiene por límites en los extremos de ambos intervalos, la función no tiene cota superior ni inferior, alcanza todos los valores reales, y no tiene ni máximo ni mínimo (ni absoluto, ni relativo).

La concavidad y convexidad vienen dadas por el signo de f''.

$$\begin{aligned} f''(x) &= \frac{2(x^2 + 2x) - (2x + 2)^2}{(x^2 + 2x)^2} = \frac{2x^2 + 4x - 4x^2 - 4 - 8x}{(x^2 + 2x)^2} \\ &= \frac{-2x^2 - 4x - 4}{(x^2 + 2x)^2} = -2\frac{x^2 + 2x + 2}{(x^2 + 2x)^2}. \end{aligned}$$

Se comprueba que el numerador no se anula nunca, y el denominador también tiene signo constante, por tanto f'' es siempre negativa, esto significa que donde tiene sentido, en $(-\infty, -2)$ y en $(0, +\infty)$ la función f es cóncava.



g) La función $f(x) = \frac{\ln|x|}{x}$ es una función que, al menos, está definida en $\mathbb{R} - \{0\}$. Para asegurarnos de cuál es su dominio, por si tuviera alguna discontinuidad evitable, debemos ver lo que ocurre cuando x se acerca a cero.

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \frac{-\infty}{0^+} = -\infty, \qquad \lim_{x\to 0^-} f(x) = \frac{-\infty}{0^-} = +\infty.$$

Definitivamente, el punto $x = 0$ no puede pertenecer al dominio de f, ahí existe una discontinuidad no evitable de salto infinito.

La función es continua y derivable en su dominio de definición. Además, claramente es simétrica impar, pero no periódica. La simetría nos simplificará el estudio.

El signo de f viene marcado por el del numerador, y el del denominador, así, f es negativa en $(-\infty, -1)$, positiva en $(-1, 0)$, negativa en $(0, 1)$ y positiva en $(1, +\infty)$. La asíntota vertical está obviamente en $x = 0$, y además se ve fácilmente (usando L'Hôpital) que tiene asíntotas horizontales: $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = 0$. Por tanto, no tiene sentido buscar asíntotas oblicuas.

Crecimiento y decrecimiento. Vemos por simplicidad la parte positiva (el razonamiento será simétrico impar en la parte negativa), donde quitamos directamente el valor absoluto: en $(0, +\infty)$ $f(x) = \frac{\ln(x)}{x}$, y

$$f'(x) = \frac{x \cdot 1/x - \ln x}{x^2} = \frac{1 - \ln x}{x^2}.$$

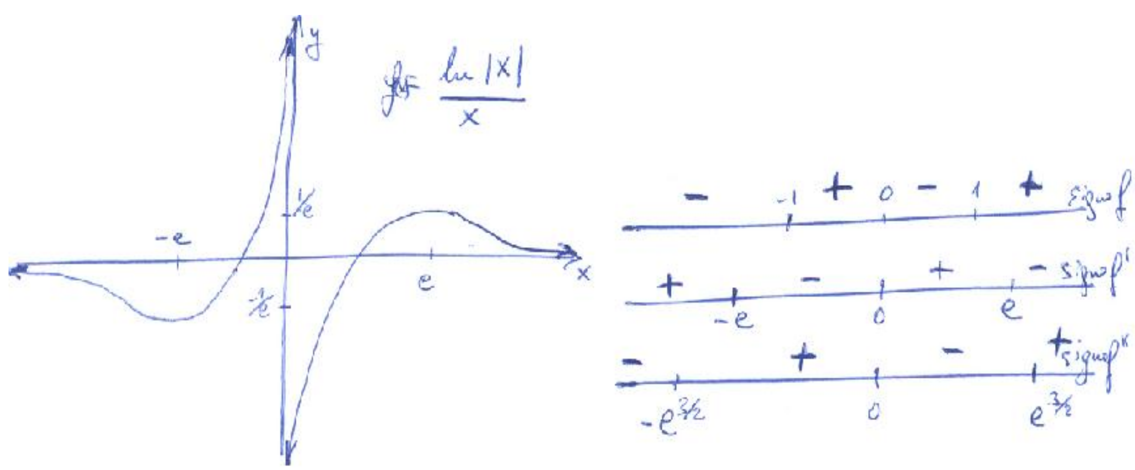
Por tanto, el signo de f' en $(0, +\infty)$ es: positivo en $(0, e)$, y negativo en $(e, +\infty)$. Por simetría, sabemos que f' es negativo en $(-e, 0)$, y positivo en $(-\infty, -e)$.

Por tanto f es creciente en $(-\infty, -e)$, decreciente en $(-e, 0)$, creciente en $(0, e)$, y decreciente en $(e, +\infty)$. En $x = -e$ tiene un máximo relativo, y en $x = e$ un mínimo relativo. Ninguno de los dos extremos son absolutos, por lo ya calculado en torno a $x = 0$.

La concavidad y convexidad exige el análisis de signo de f'' (que de nuevo miramos solamente en el semieje positivo por comodidad y gracias a la simetría que conocemos de f):

$$f''(x) = \frac{-1/x \cdot x^2 - 2x(1 - \ln x)}{x^4} = \frac{-x - 2x(1 - \ln x)}{x^4} = \frac{-3 + 2\ln x}{x^3}$$

que por tanto tiene un signo distinto antes y después de $x = e^{3/2}$. f'' es negativa en $(0, e^{3/2})$, positiva en $(e^{3/2}, +\infty)$, y por simetría impar, negativa en $(-\infty, -e^{3/2})$, positiva en $(-e^{3/2}, 0)$. Así, f es cóncava en $(-\infty, -e^{3/2})$, convexa en $(-e^{3/2}, 0)$, cóncava en $(0, e^{3/2})$ y convexa en $(e^{3/2}, +\infty)$. Los puntos $x = \pm e^{3/2}$ son puntos de inflexión, pero no lo es $x = 0$, que simplemente es una discontinuidad de f.



h) La función $f(x) = \frac{e^x}{x+1}$ es continua y derivable en todo su dominio de definición, que es $\mathbb{R} - \{-1\}$, ya que $x = -1$ anula el denominador (es una asíntota vertical: $\lim_{x\to -1^+} f(x) = +\infty$, $\lim_{x\to -1^-} f(x) = -\infty$).

La función no tiene simetrías ni es periódica. Sí tiene una asíntota horizontal en $y = 0$ ya que $\lim_{x\to-\infty} f(x) = 0$. Sin embargo, $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ (esto se ve con L'Hôpital para resolver la indeterminación; análogamente se ve que no tiene tampoco asíntota oblicua cuando $x \to +\infty$).

El signo de f es claro, como la exponencial siempre es positiva, sólo influye el denominador: en $(-\infty, -1)$ f es negativa, y en $(-1, +\infty)$ f es positiva.

El crecimiento, decrecimiento, máximos y mínimos:

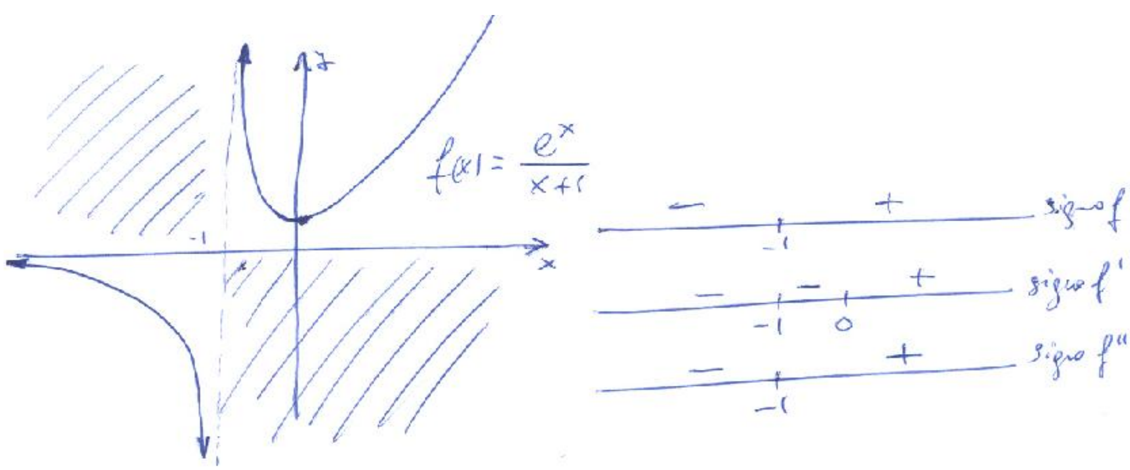
$$f'(x) = \frac{e^x(x+1) - e^x}{(x+1)^2} = \frac{xe^x}{(x+1)^2},$$

con lo que el signo depende de si se está a la izquierda o derecha del cero. Pero obsérvese que el punto -1 sigue influyendo, ya que ahí la función es discontinua (de salto infinito). Deducimos pues que f' es negativa en $(-\infty, -1)$, negativa en $(-1, 0)$, positiva en $(0, +\infty)$. Esto significa que f es decreciente en $(-\infty, -1)$, decreciente en $(-1, 0)$, y creciente en $(0, +\infty)$. En $x = 0$ tiene un mínimo relativo, pero sabemos, por $\lim_{x\to-1^-} f(x) = -\infty$, que el mínimo en $x = 0$ no es absoluto. La función no está acotada superiormente.

Para la concavidad y convexidad, obsérvese que

$$f''(x) = \frac{(e^x + e^x x)(x+1)^2 - 2(x+1)xe^x}{(x+1)^4} = \frac{e^x(x+1)^3 - 2x(x+1)e^x}{(x+1)^4} = e^x\frac{(x+1)^2 - 2x}{(x+1)^3} = e^x\frac{x^2+1}{(x+1)^3}.$$

El signo vuelve a ser fácil de analizar, pues el numerador es siempre positivo, y sólo depende del denominador: f'' es negativa en $(-\infty, -1)$ y positiva en $(-1, +\infty)$. Así, tenemos que f es cóncava en $(-\infty, -1)$ y convexa en $(-1, +\infty)$. En medio, no es continua, por tanto $x = -1$ no es un punto de inflexión.



i) La función $f(x) = e^{\frac{1-x}{1+x}}$ es composición de dos funciones, la exponencial $g(z) = e^z$ y la función racional $h(x) = \frac{1-x}{1+x}$. Para poder representarla, puesto que conocemos la función exponencial, debemos conocer lo que le ocurre a $h(x)$. Qué signos tiene, cuando crece o no, si tiene asíntotas (claramente sí, en $x = -1$, etc).

Un breve análisis previo de la función $h(x)$ muestra que sus signos son: negativo en $(-\infty, -1)$, positivo en $(-1, 1)$, y negativo en $(1, +\infty)$. En $x = -1$ la función h tiene una asíntota vertical. Dom $h = \mathbb{R} - \{-1\}$, de modo que dom $f = \mathbb{R} - \{-1\}$. La función es continua y derivable en su dominio de definición. Pero antes de seguir analizando de forma estándar lo que le ocurre a f, razonemos sobre la función h. Como

$$\lim_{x \to -1^-} h(x) = -\infty, \qquad \lim_{x \to -1^+} h(x) = +\infty,$$

tendremos el siguiente comportamiento de la función $f(x)$:

$$\lim_{x \to -1^-} f(x) = 0, \qquad \lim_{x \to -1^+} f(x) = +\infty.$$

Otra observación interesante es que h tiene asíntota horizontal cuando $x \to \pm\infty$, y vale -1. De modo que f tiene asíntota horizontal cuando $x \to \pm\infty$, y vale e^{-1}.

Con estos datos ya podemos imaginar cómo es la representación de f. Completémoslo con su crecimiento, decrecimiento, concavidad, convexidad, etc.

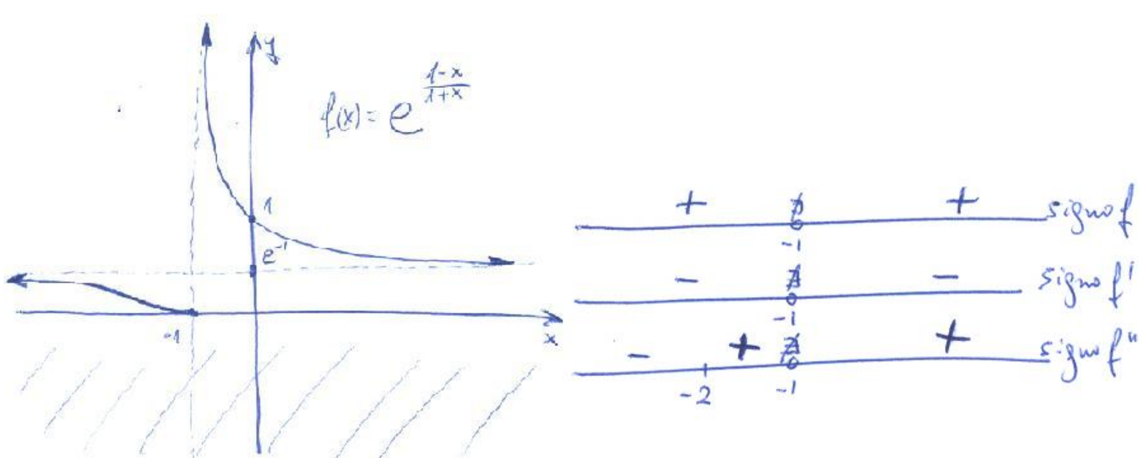
$$f'(x) = e^{\frac{1-x}{1+x}} \frac{-2}{(1+x)^2}.$$

Se trata siempre de una función negativa, con lo que f es decreciente en su dominio de definición, esto es, en $(-\infty, -1) \cup (-1, +\infty)$. Es una función que no tiene máximos ni mínimos, ni absolutos ni relativos. No está acotada superiormente, pero sí inferiormente, y su ínfimo es 0.

La concavidad-convexidad viene dada por el signo de f'' :

$$f''(x) = e^{\frac{1-x}{1+x}} \left(\frac{-2}{(1+x)^2} \right)^2 + e^{\frac{1-x}{1+x}} \frac{4}{(1+x)^3} = 4e^{\frac{1-x}{1+x}} \frac{x+2}{(1+x)^4}.$$

Como vemos, si $x \in (-\infty, -2)$, $f''(x)$ es negativo, por tanto f es cóncava, mientras que en $(-2, -1)$ $f''(x)$ es positivo, así f es convexa, y en $(-1, +\infty)$ también f'' es positiva y f es convexa.



j) La función $f(x) = \frac{1}{2}(x-1)|x-1|$ es bastante simple de representar, pues, aunque se trate de una función a trozos (según la definición del valor absoluto a un lado u otro del 1), en ambos casos se convierte en una parábola:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}(x-1)^2 & \text{si} \quad x > 1, \\ -\frac{1}{2}(x-1)^2 & \text{si} \quad x \leq 1 \end{cases}$$

La función f es continua, por ser composición y producto de funciones continuas. También comprobamos que es derivable ya que coinciden los límites de las derivadas laterales:

$$\lim_{h\to 0^+} \frac{f(1+h)-f(1)}{h} = \lim_{h\to 0^+} \frac{h^2/2}{h} = 0,$$

$$\lim_{h\to 0^-} \frac{f(1+h)-f(1)}{h} = \lim_{h\to 0^-} \frac{-h^2/2}{h} = 0.$$

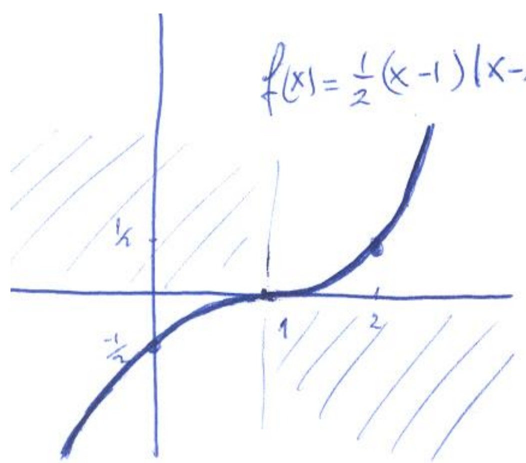
La función no es periódica, ni propiamente simétrica en el sentido de par, o impar (que son respecto al origen de coordenadas), pero sí es simétrica impar respecto al punto $x=1$, como veremos en la gráfica.

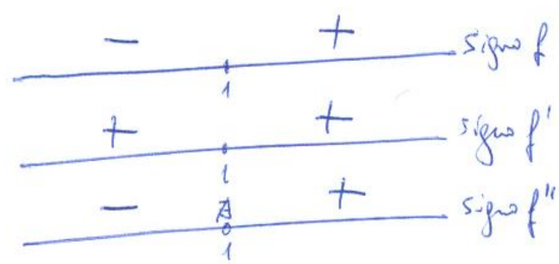
Aunque ya es obvio cómo completar la representación, por completitud estudiamos el crecimiento y decrecimiento de f :

$$f'(x) = \begin{cases} x-1 & \text{si} \quad x > 1, \\ 1-x & \text{si} \quad x \leq 1 \end{cases}$$

obsérvese que hemos puesto el igual abajo, no por simple copia de la definición de f, sino porque previamente se ha comprobado que f es también derivable en $x=1$. f' es siempre positiva, luego f es siempre creciente, no tiene ni máximos ni mínimos ni cotas superior o inferior.

La derivada segunda es simple: la función idénticamente 1 si $x > 1$ y la función idénticamente -1 si $x < 1$. Ahora no ponemos $\leq$ en la segunda parte, pues la derivada (segunda) no existe en dicho punto. Tenemos pues un caso en que la función pasa de cóncava, en $(-\infty, 1)$, a convexa $(1, +\infty)$, teniendo por tanto un punto de inflexión en $x=1$, pero sin cumplirse que $f''(1)$ se anule, de hecho, no existe $f''(1)$.





$\boxed{8}$ Estudiamos la función $f(x) = \dfrac{2x^2+x}{x+1}$.
Asíntota vertical en $x = -1$.
Asíntota oblicua (por tanto no tiene horizontal): la recta $y = 2x - 1$.
La derivada de la función es: $f'(x) = \dfrac{2x^2+4x+1}{(x+1)^2}$. Por tanto, los cambios de signo vienen dados por las zonas en que queda dividida la recta real usando los ceros del numerador: $\dfrac{-2 \pm \sqrt{2}}{2}$.

No obstante, hay que tener en cuenta que no basta signo de la derivada para hablar de decrecimiento en todo el intervalo, ya que por medio la función no es continua: en $x = -1$ tiene una asíntota vertical. Hecha esta apreciación podemos afirmar que:

La función crece en el intervalo $\left(-\infty, \dfrac{-2-\sqrt{2}}{2}\right]$ y decrece en $\left[\dfrac{-2-\sqrt{2}}{2}, -1\right)$. Así, en $\dfrac{-2-\sqrt{2}}{2}$ tiene un máximo relativo, $f\left(\dfrac{-2-\sqrt{2}}{2}\right)$. En el intervalo $\left(-1, \dfrac{-2+\sqrt{2}}{2}\right]$ decrece y en $\left[\dfrac{-2+\sqrt{2}}{2}, +\infty\right)$ crece (por tanto tiene un mínimo relativo en $\dfrac{-2+\sqrt{2}}{2}$: $f\left(\dfrac{-2+\sqrt{2}}{2}\right)$.

Ninguno de dichos extremos relativos es absoluto, debido a la asíntota vertical en $x = -1$:

$$\lim_{x \to -1^-} f(x) = -\infty \quad \text{y} \quad \lim_{x \to -1^+} f(x) = +\infty.$$

$\boxed{9}$ Para la función $f(x) = \dfrac{1}{1-e^{-x}}$, el dominio es $\mathrm{Dom}(f) = \mathbb{R}\backslash\{0\}$, pues 0 es el único punto que anula el denominador.

En $x = 0$ f tiene una asíntota vertical.

Para el estudio de la existencia de asíntotas horizontales, calculamos $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ y $\lim_{x\to-\infty} f(x)$. Usando álgebra de límites y las propiedades de la función exponencial, es obvio que $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 1/(1-0) = 1$, mientras que $\lim_{x\to-\infty} f(x) =$"$1/(1-\infty)$"$= 0$. Obsérvese que las rectas $y = 0$ e $y = 1$ son asíntotas horizontales, es decir, no tienen porqué ser única, de hecho, no tiene porqué haber por ambos lados, y si las hay, no tienen porqué coincidir, como prueba este ejemplo.

En todo el dominio de la función f, la función es continua y derivable, con derivada $f'(x) = \dfrac{-e^{-x}}{(1-e^{-x})^2}$. La derivada es siempre negativa en el dominio de definición de f, que es $(-\infty, 0) \cup (0, \infty)$. Esto significa que la función es decreciente en $(-\infty, 0)$ y también lo es en $(0, \infty)$. Pero NO significa que lo sea en todo $\mathbb{R}$, ni que si $x_1 < 0 < x_2$, entonces se implique que $f(x_1) < f(x_2)$ (de hecho, esto NO ocurre).

$\boxed{10}$ Si $f(x) = e^x(x+1)^2$, entonces $f'(x) = e^x(x+1)^2 + e^x 2(x+1)$ que es, en efecto, positivo si $x > -1$. [Esto prueba el apartado a).]

El apartado b) es trivial pues, de hecho, la función f es siempre positiva.