SOLUCIONES DE LOS EJERCICIOS DE LA HOJA 3

$\boxed{1}$

a) La función $f(x) = x^3 - 5x + 1$ tiene por derivada $f'(x) = 3x^2 - 5$, lo que indica que f es creciente en $(-\infty, -\sqrt{5/3}]$, decreciente en $[-\sqrt{5/3}, \sqrt{5/3}]$, y creciente de nuevo en $[\sqrt{5/3}, +\infty)$.

Como $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$, $f(-\sqrt{5/3}) \simeq 5'3$, $f(\sqrt{5/3}) \simeq -3'3$, y $\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$, combinando el teorema de Bolzano y el resultado anterior de monotonía, tenemos que existe un único cero de f en $(-\infty, -\sqrt{5/3})$, otro cero (y sólo uno) en $(-\sqrt{5/3}, \sqrt{5/3})$ y otra raíz (y sólo una) en $(\sqrt{5/3}, +\infty)$.

Para hallar una de las raíces, comprobamos que se satisfacen las hipótesis de la Regla de Fourier: por ejemplo, dado que $f''(x) = 6x$ es positiva en el semieje positivo, que $[0,1] \subset [-\sqrt{5/3}, \sqrt{5/3}]$ y que $f(0)f(1) < 0$, siendo $f'(x) \neq 0$ para todo $x \in [0,1]$, podemos asegurar convergencia del Método de Newton $x_{n+1} = x_n - \dfrac{f(x_n)}{f'(x_n)}$ con $x_0 = 0$.

Las iteraciones son $x_0 = 0$, $x_1 = 0'2$, $x_2 = 0'201639344$, $x_3 = 0'20163968$ y ya x_4 coincide con el anterior (¡en todas las cifras expuestas! y no sólo en tres).

Por completitud, damos también las otras soluciones: Compruébese que en $[-3,-2]$ se cumplen todas las condiciones para aplicar la Regla de Fourier. Así, comenzamos por $x_0 = -3$, $x_1 = -2'5$, $x_2 = -2'345454545$, $x_3 = -2'330203408$, $x_4 = -2'330058753$, $x_5 = -2'33005874$ y ya x_6 coincide (en todas las cifras mostradas!) con el anterior (aunque con la precisión exigida en el enunciado, podíamos habernos quedado en el cálculo de x_4).

Para calcular la raíz sita en el intervalo $[\sqrt{5/3}, +\infty)$, dado que f'' tiene signo positivo, podemos, por ejemplo, considerar el intervalo $[2,3]$ (comprobar que es válido). Así, tomamos como punto inicial aquél con imagen positiva, en este caso, $x_0 = 3$, lo que genera los siguientes valores: $x_1 = 2'409090909$, $x_2 = 2'172510859$, $x_3 = 2'129793053$, $x_4 = 2'128420465$, $x_5 = 2'128419064$ y x_6 coincide con x_5 en todas las cifras mostradas.

b) Se considera $f(x) = xe^x - 2$, que tiene por derivada $f'(x) = e^x(x+1)$. El análisis de signos muestra que f decrece en $(-\infty, -1]$ y crece en $[-1, +\infty)$.

Por otro lado, $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -2$, y $f(-1) < 0$. Esto implica que en $(-\infty, -1]$ no hay ninguna raíz, mientras que en $[-1, +\infty)$, dado que $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$, sí hay una (única) raíz.

Para hallarla, dado que $f''(x) = e^x(x+2)$ es positiva en $(-2, \infty)$, tomamos por ejemplo como intervalo el $[0,1]$. Comprobar que es válido al satisfacer las condiciones de la Regla de Fourier. Debemos comenzar por el punto $x_0 = 1$ y las iteraciones siguientes que se obtienen por el Método de Newton son $x_1 = 0'867879441$, $x_2 = 0'852783373$, $x_3 = 0'852605526$, $x_4 = 0'852605502$. El siguiente valor coincide con x_4 en todas las cifras mostradas.

c) La función $f(x) = x - \ln x - 2$ tiene sentido en $(0, +\infty)$. Al tener derivada $f'(x) = 1 - \dfrac{1}{x}$, sabemos que f es decreciente en $(0,1)$ y creciente en $(1, +\infty)$. Además, conocemos los siguientes datos:

$$\lim_{x\to0^+} f(x) = +\infty, \qquad f(1) = -1, \qquad \lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty.$$

Por tanto, f posee exactamente dos raíces: una en $(0,1)$ y otra en $(1, +\infty)$.

Para hallar la primera, como $f''(x) = \dfrac{1}{x^2}$ es siempre positiva, hay que tomar un punto inicial con imagen positiva para aplicar el Método de Newton. Aplicando la Regla de Fourier en un intervalo conveniente, a partir de los razonamientos previos, se puede comprobar que $[e^{-2}, 1/2]$ es válido, razónese el porqué de dicha elección. $x_0 = e^{-2} = 0'135335283$, $x_1 = 0'156517643$, $x_2 = 0'158578149$, $x_3 = 0'158594339$ y x_4 tiene los mismos decimales mostrados que x_3.

Por supuesto, también es válido cualquier otro intervalo que cumpla las condiciones de la Regla de Fourier, sólo que las aproximaciones serán distintas, pero el límite será el mismo. Si por ejemplo, tomamos $[1/10, 1/2]$ obtenemos la siguiente secuencia: $x_0 = 0'1$, $x_1 = 0'14473168$, $x_2 = 0'15786436$, $x_3 = 0'15859234$, $x_4 = 0'15859434$ y el siguiente coincide con x_4 como cabía esperar.

Análogamente, para calcular el otro cero de f buscamos por tanteo valores a, b tales que se cumplan las condiciones de la Regla de Fourier. Por ejemplo, $f(2) = -\ln 2 < 0$, $f(3) = -0'0986$, por tanto no vale el intervalo $[2, 3]$ porque no hay cambio de signo. En cambio, $f(4) = 0'6137$, de modo que $[3, 4]$ sí es un intervalo válido. Así se obtiene la secuencia de valores $x_0 = 4$, $x_1 = 3'18172581$, $x_2 = 3'14628484$, $x_3 = 3'14619322$, valor con el que nos detenemos.

Otro intervalo válido sería $[3, e^2]$ (esto se puede ver sin necesidad de calcularlo explícitamente, razónese el porqué). Por completitud, para hacer más práctica con el manejo de la calculadora, se dejan los resultados que se obtendrían así: $x_0 = e^2 = 7'389056099$, $x_1 = 3'469552928$, $x_2 = 3'152702666$, $x_3 = 3'146196347$, $x_4 = 3'146193221$ y x_5 coincide con x_4 en las cifras mostradas.

$\boxed{2.}$ Se pide calcular el número de ceros de la función $f(x) = 4x^3 + 7x + 3x^2 - 2$, que tiene por derivada $f'(x) = 12x^2 + 6x + 7$. Es inmediato ver que $f'(x)$ tiene signo constante (positivo). Por tanto, f es estrictamente creciente y posee a lo más un cero. Pero, por otro lado, es obvio aplicando el teorema de Bolzano (f es un polinomio cúbico) que existe al menos una.

Por tanto f tiene una única raíz. Hace falta construir un único puente. Para saber dónde, aplicamos la Regla de Fourier. Obsérvese que $f''(x) = 24x + 6$ es positiva en el semieje positivo, y que $f(0) = -2$, con lo que tomando por ejemplo $x_0 = 1$ conseguimos las condiciones necesarias.

$x_0 = 1$, $x_1 = 0'52$, $x_2 = 0'294509757$, $x_3 = 0'251283879$, $x_4 = 0'250001069$, $x_5 = 0'25$ y resulta que x_6 ya coincide con dicho valor de forma exacta. En este caso hemos hallado la raíz exacta: $1/4$.

$\boxed{3.}$ Para $f(x) = 6\ln(x+2) - x^2$ tenemos que $f'(x) = \dfrac{6}{x+2} - 2x$ que tiene por raíces 1 y -3. Pero la función f sólo tiene sentido en $(-2, +\infty)$ por lo que el valor -3 no tiene importancia para nosotros. Esto significa que f crece en $(-2, 1)$ y decrece en $(1, +\infty)$. Como $\lim\limits_{x\to -2} f(x) = -\infty$, $f(1) > 0$ y $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = -\infty$, deducimos que f posee exactamente dos ceros.

El segundo apartado pide que aproximemos la raíz que se halla en el intervalo $(-2, 1)$. Dado que $f''(x) = \dfrac{-6}{(x+2)^2} - 2$ es negativa, debemos tomar un intervalo $[a, b]$ contenido en $(-2, 1)$ donde el signo de f cambie, por ejemplo $f(-1) = -1$ mientras que $f(0) = 6\ln 2 > 0$. Así, por la Regla de Fourier, el intervalo $[-1, 0]$ es válido. El Método de Newton converge si lo iniciamos con $x_0 = -1$. Obtenemos $x_1 = -0'875$, $x_2 = -0'866680924$, $x_3 = -0'866647847$ y x_4 coincide con el anterior en las cifras mostradas.

$\boxed{4.}$ La función $f(x) = e^x - x - 2$ es decreciente en $(-\infty, 0]$ y creciente en $[0, +\infty)$ (analizando el signo de la derivada: $f'(x) = e^x - 1$). Como $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x) = +\infty$, $f(0) = -2$ y $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = +\infty$, f tiene exactamente dos raíces, una en el semieje negativo y otra en el positivo.

Para hallar esta última, dado que $f''(x) = e^x$ es siempre positiva, tomamos un intervalo $[a, b] \subset (0, +\infty)$ (así no se anula f') donde haya cambio de signo, por ejemplo $[1, 2]$. El Método de Newton iniciado en $x_0 = 2$, genera los valores $x_1 = 1'469552928$, $x_2 = 1'207329481$, $x_3 = 1'148805629$, $x_4 = 1'146198212$, $x_5 = 1'146193221$ y x_6 coincide con x_5 en las cifras mostradas.

$\boxed{5.}$ Usamos el método de diferencias divididas de Newton para generar el único polinomio de interpolación de grado menor o igual que 4 que interpola la tabla de valores dada.

$$\begin{array}{ccccc}
-1 & 2 & & & \\
 & & -3 & & \\
0 & -1 & & 2 & \\
 & & 1 & & -4/3 \\
1 & 0 & & -2 & \\
 & & -3 & & \\
2 & -3 & & &
\end{array}$$

implica que el polinomio buscado es $p(x) = 2-3(x+1)+2(x+1)x-\frac{4}{3}(x+1)x(x-1) = -\frac{4}{3}x^3+2x^2+\frac{1}{3}x-1$.

Para determinar el número de raíces podemos proceder de dos formas[1]. Del modo usual: $p'(x) = -4x^2 + 4x + 1/3$, vemos cuando se anula: $r_1 = -0'0774$ y en $r_2 = 1'0774$. Como $p(r_1) = -1'0132$ y $p(r_2) = 0'0132$, sabemos, razonando de forma análoga a los ejercicios precedentes (combinando la monotonía de p en distintos intervalos, y el Teorema de Bolzano), que existen tres raíces para p, contenidas respectivamente en $(-\infty, r_1)$, (r_1, r_2) y en $(r_2, +\infty)$. Observemos que $p(1) = 0$, luego la raíz en (r_1, r_2) es 1.

Calculamos las dos raíces no enteras: en el intervalo $[4/3, 2]$ hay una raíz (esto se tiene por Bolzano) y como $p''(x) = -8x + 4$ es negativa ahí, inicializamos (Regla de Fourier) con $x_0 = 2$ que tiene imagen negativa: $x_1 = 1'608695652$, $x_2 = 1'374614873$, $x_3 = 1'243771655$, $x_4 = 1'179064595$, $x_5 = 1'155402825$, $x_6 = 1'151497398$, $x_7 = 1'151387905$, $x_8 = 1'151387819$ ya hace que se repitan los decimales mostrados en sucesivas iteraciones.

En $(-\infty, 1/2)$ el signo de p'' es positivo. Tomamos un intervalo $[a, b]$ con $b < r_1$ para que no se anule la derivada p'. En $[-1, -1/2]$ se cumplen (véase) las hipótesis de la Regla de Fourier, ya que p' no se anula, p'' tiene signo constante y se verifica el cambio de signo exigido en el Teorema de Bolzano, $p(-1/2) = -1/2$ y $p(-1) = 2$. Así $x_0 = -1$, $x_1 = -0'739130435$, $x_2 = -0'65913636$, $x_3 = -0'651456553$, $x_4 = -0'651387824$, $x_5 = -0'651387819$. (Ya x_6 coincide en las cifras mostradas con x_5.)

$\boxed{6.}$ Usamos de nuevo el método de diferencias divididas de Newton:

$$\begin{array}{cccc}
2 & 3 & & \\
 & & -1 & \\
4 & 1 & & 3/8 \\
 & & 1/2 & \\
6 & 2 & &
\end{array}$$

implica que el polinomio buscado se escribe como $p(x) = 3-(x-2)+3/8(x-2)(x-4) = \frac{3}{8}x^2 - \frac{13}{4}x+8$. Por tanto las respuestas buscadas son $p(3) = 1'625$ y $p(10) = 13$. Evidentemente la evaluación $p(3)$ es más fiable que $p(10)$ ya que usa un valor del tiempo que está contenido en el intervalo de los datos dados, al contrario que 10.

[1]Aunque no se pide aquí que se haga así, hay una segunda forma de resolver el problema en este caso particular. Se trata de aprovechar una peculiaridad de este ejercicio: conocemos una de las raíces, 1, con lo que podemos factorizar p por Ruffini como $(x-1)$ por un polinomio de segundo grado, y calcular de forma exacta las otras dos raíces (de la parábola): $p(x) = -\frac{4}{3}(x-1)\left(x - \frac{2-\sqrt{52}}{8}\right)\left(x - \frac{2+\sqrt{52}}{8}\right)$. Compruébese que coinciden con el resultado aquí expuesto.

$\boxed{7.}$ Damos la tabla generada por el método de las diferencias divididas de Newton:

$$\begin{array}{cccccc}
2 & 5 & & & & \\
 & & -2 & & & \\
4 & 1 & & 5/8 & & \\
 & & 1/2 & & -1/12 & \\
6 & 2 & & 1/8 & & 0 \\
 & & 1 & & -1/12 & \\
8 & 4 & & -3/8 & & \\
 & & -1/2 & & & \\
10 & 3 & & & &
\end{array}$$

con lo que el polinomio buscado es: $p(x) = 5 - 2(x-2) + \frac{5}{8}(x-2)(x-4) - \frac{1}{12}(x-2)(x-4)(x-6) = -\frac{1}{12}x^3 + \frac{13}{8}x^2 - \frac{113}{12}x + 18$. (Obsérvese que no ha salido un polinomio de grado 4.)

$\boxed{8.}$ Con la tabla original de datos, obtenemos

$$\begin{array}{ccccc}
0 & 0 & & & \\
 & & 1/2 & & \\
2 & 1 & & 1/4 & \\
 & & 3/2 & & -7/48 \\
4 & 4 & & -5/8 & \\
 & & -1 & & \\
6 & 2 & & &
\end{array}$$

Con lo que el polinomio que los interpola es $p(x) = \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}x(x-2) - \frac{7}{48}x(x-2)(x-4) = -\frac{7}{48}x^3 + \frac{9}{8}x^2 - \frac{7}{6}x$.

Si incorporamos un par de valores más, la tabla queda como sigue (obsérvese que todo el trabajo anterior sigue siendo útil):

$$\begin{array}{cccccc}
0 & 0 & & & & \\
 & & 1/2 & & & \\
2 & 1 & & 1/4 & & \\
 & & 3/2 & & -7/48 & \\
4 & 4 & & -5/8 & & 13/384 \\
 & & -1 & & 1/8 & \\
6 & 2 & & 1/8 & & \\
 & & -1/2 & & & \\
8 & 1 & & & &
\end{array}$$

con lo que el nuevo polinomio es $q(x) = \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}x(x-2) - \frac{7}{48}x(x-2)(x-4) + \frac{13}{384}x(x-2)(x-4)(x-6) = \frac{13}{384}x^4 - \frac{53}{96}x^3 + \frac{251}{96}x^2 - \frac{67}{24}x$.

Los respectivos valores para $x = 7$ son $p(7) = -3'06254$ y $q(7) = 0'4921875$. El segundo polinomio obtenido toma más valores y contiene a $x = 7$ como valor intermedio respecto de los datos de interpolación, por lo que es más fiable usar q que p para generar una aproximación.

$\boxed{9.}$ El polinomio de interpolación para los datos dados, usando las diferencias divididas es:

$$\begin{array}{cccccc}
0'4 & -0'916291 & & & \\
 & & 2'23144 & & \\
0'5 & -0'693147 & & -1'830266667 & \\
 & & 1'68236 & & 1'683583333 \\
0'7 & -0'356675 & & -1'156833333 & \\
 & & 1'33531 & & \\
0'8 & -0'223144 & & &
\end{array}$$

Esto es: $p(x) = -0'916291 + 2'23144(x - 0'4) - 1'830266667(x - 0'4)(x - 0'5) + 1'683583333(x - 0'4)(x - 0'5)(x - 0'7) = 1'6835833x^3 - 4'524x^2 + 5'276054167x - 2'410622$.

El valor aproximado pedido consiste por tanto en $p(0'6) = -0'5099755$. Compruébese con la calculadora que el valor obtenido aproxima realmente al exacto: $\ln(0'6) = -0'510825624$.