SOLUCIONES DE LOS EJERCICIOS DE LA HOJA 4

1) Calculamos las siguientes integrales:

a)

$$\int (x^{-3} + 4\,x^{1/2} + 2\,x^{3/4})\,dx = -\frac{1}{2}\,x^{-2} + \frac{8}{3}\,x^{3/2} + \frac{8}{7}\,x^{7/4} + C.$$

$$\begin{aligned}\int x^{1/3}\,(6+2\sqrt{x})^2\,dx &= \int x^{1/3}\,(36 + 24\sqrt{x} + 4x)\,dx \\ &= \int (36\,x^{1/3} + 24\,x^{5/6} + 4\,x^{4/3})\,dx \\ &= 27\,x^{4/3} + \frac{144}{11}\,x^{11/6} + \frac{12}{7}\,x^{7/3} + C.\end{aligned}$$

$$\int \sqrt{2x+3}\,dx = \int (2x+3)^{1/2}\,dx = \frac{1}{2}\int 2\,(2x+3)^{1/2}\,dx = \frac{1}{3}\,(2x+3)^{3/2} + C.$$

b)

$$\int \frac{x}{1+x^2}\,dx = \frac{1}{2}\int \frac{2x}{1+x^2}\,dx = \frac{1}{2}\ln(1+x^2) + C.$$

$$\int \frac{1}{\text{cotan}\left(\frac{x}{5}\right)}\,dx = \int \frac{\text{sen}\left(\frac{x}{5}\right)}{\cos\left(\frac{x}{5}\right)}\,dx = -5\int \frac{-\left(\frac{1}{5}\right)\text{sen}\left(\frac{x}{5}\right)}{\cos\left(\frac{x}{5}\right)}\,dx = -5\ln\left|\cos\left(\frac{x}{5}\right)\right| + C.$$

$$\int \text{cotg}(x)\,dx = \int \frac{\cos x}{\text{sen} x}\,dx = \ln|\text{sen} x| + C.$$

$$\int \frac{dx}{\text{sen} x\cos x} = \int \frac{\cos x}{\text{sen} x}\,\frac{1}{\cos^2 x}\,dx = \int (\text{tg} x)^{-1}\,\frac{1}{\cos^2 x}\,dx = \ln|\text{tg} x| + C.$$

$$\int \frac{dx}{x^2+a^4}\,dx = \int \frac{dx}{a^4\left(1+\frac{x^2}{a^4}\right)}\,dx = \int \frac{dx}{a^4\left(1+\left(\frac{x}{a^2}\right)^2\right)}\,dx$$

$$= \frac{1}{a^2}\int \frac{\frac{1}{a^2}\,dx}{\left(1+\left(\frac{x}{a^2}\right)^2\right)}\,dx = \frac{1}{a^2}\operatorname{arctg}\left(\frac{x}{a^2}\right)+C, \quad a\neq 0.$$

c)

$$\int 3x\sqrt{1-2x^2}\,dx = -\frac{3}{4}\int(-4x)\,(1-2x^2)^{1/2}\,dx = -\frac{1}{2}\,(1-2x^2)^{3/2}+C.$$

$$\int \frac{x+3}{\sqrt[3]{x^2+6x}}\,dx = \int (x+3)\,(x^2+6x)^{-1/3}\,dx = \frac{3}{4}\,(x^2+6x)^{2/3}+C.$$

$$\int \frac{e^{1/x}}{x^2}\,dx = \int \frac{1}{x^2}\,e^{1/x}\,dx = -\int -\frac{1}{x^2}\,e^{1/x}\,dx = -\,e^{1/x}+C.$$

$$\int \frac{\ln^3 x}{x}\,dx = \frac{\ln^4 x}{4}+C.$$

$$\int \frac{\operatorname{sen} x}{\sqrt{9-\cos^2 x}}\,dx = \int \frac{\operatorname{sen} x}{3\sqrt{1-\left(\frac{\cos x}{3}\right)^2}}\,dx =$$

$$= -\int \frac{-\frac{\operatorname{sen} x}{3}}{\sqrt{1-\left(\frac{\cos x}{3}\right)^2}}\,dx = -\operatorname{arcsen}\left(\frac{\cos x}{3}\right)+C.$$

2) Calculamos las siguientes usando el método de integración por partes:

a)

$$\int \ln x\,dx = \text{(integrando por partes)}$$

$$= x\ln x - \int \frac{1}{x}\,x\,dx = x\ln x - x + C = x(\ln x - 1)+C,$$

donde $u = \ln x$, $dv = dx$.

$$\begin{aligned}\int x \operatorname{arctg} x \, dx &= \frac{x^2}{2} \operatorname{arctg} x - \int \frac{x^2}{2} \frac{1}{1+x^2} \, dx = \frac{x^2}{2} \operatorname{arctg} x - \frac{1}{2} \int \frac{x^2}{1+x^2} \, dx = \\ &= \frac{x^2}{2} \operatorname{arctg} x - \frac{1}{2} \int \left(1 - \frac{1}{1+x^2}\right) \, dx = \frac{x^2}{2} \operatorname{arctg} x - \frac{x}{2} + \frac{1}{2} \operatorname{arctg} x + C,\end{aligned}$$

donde $u = \operatorname{arctg} x$, $dv = x\,dx$.

$$\int x \operatorname{sen} x \, dx = -x \cos x + \int \cos x \, dx = -x \cos x + \operatorname{sen} x + C,$$

donde $u = x$, $dv = \operatorname{sen} x \, dx$.

Las siguientes integrales de este apartado reciben el nombre de **integrales cíclicas**.

$$\begin{aligned}\int e^x \operatorname{sen} x \, dx &= e^x \operatorname{sen} x - \int e^x \cos x \, dx = e^x \operatorname{sen} x - \left[e^x \cos x + \int e^x \operatorname{sen} x \, dx\right] \\ &= e^x \left(\operatorname{sen} x - \cos x\right) - \int e^x \operatorname{sen} x \, dx\end{aligned}$$

donde $u = \operatorname{sen} x$, $dv = e^x \, dx$ en la primera integración, y $u = \cos x$, $dv = e^x \, dx$ en la segunda integración. Despejando $\int e^x \operatorname{sen} x \, dx$, obtenemos:

$$\int e^x \operatorname{sen} x \, dx = \frac{e^x}{2} \left(\operatorname{sen} x - \cos x\right) + C$$

$$\begin{aligned}\int e^x \cos x \, dx &= e^x \operatorname{sen} x - \int e^x \operatorname{sen} x \, dx = e^x \operatorname{sen} x - \left[e^x \left(-\cos x\right) - \int e^x \left(-\cos x\right) dx\right] \\ &= e^x \left(\operatorname{sen} x + \cos x\right) - \int e^x \cos x \, dx\end{aligned}$$

donde $u = e^x$, $dv = \cos x \, dx$ en la primera integración, y $u = e^x$, $dv = \operatorname{sen} x \, dx$ en la segunda integración. Despejando $\int e^x \cos x \, dx$, obtenemos:

$$\int e^x \cos x \, dx = \frac{1}{2} e^x \left(\operatorname{sen} x + \cos x\right) + C.$$

O bien, usando el ejercicio anterior,

$$\begin{aligned}\int e^x \cos x \, dx &= e^x \operatorname{sen} x - \int e^x \operatorname{sen} x \, dx = e^x \operatorname{sen} x - \frac{e^x}{2} \left(\operatorname{sen} x - \cos x\right) + C \\ &= \frac{e^x}{2} \left(\operatorname{sen} x + \cos x\right) + C.\end{aligned}$$

b)

$$\int \ln^2 x \, dx = x \ln^2 x - \int x \, 2 \ln x \frac{1}{x} \, dx = x \ln^2 x - \int 2 \ln x \, dx = x \left(\ln^2 x - 2 \ln x + 2\right) + C,$$

donde $u = \ln^2 x$, $dv = dx$ en la primera integración, y en la segunda hemos aplicado el apartado a) de este ejercicio.

$$\int x^2 \ln x \, dx = \frac{x^3}{3} \ln x - \int \frac{x^3}{3} \frac{1}{x} \, dx = \frac{x^3}{3} \ln x - \int \frac{x^2}{3} \, dx = \frac{x^3}{9} (3 \ln x - 1) + C,$$

donde $u = \ln x$, $dv = x^2 \, dx$ en la primera integración.

$$\begin{aligned} \int \operatorname{sen}(\ln x) \, dx &= x \operatorname{sen}(\ln x) - \int x \cos(\ln x) \frac{1}{x} \, dx = x \operatorname{sen}(\ln x) - \int \cos(\ln x) \, dx \\ &= x \operatorname{sen}(\ln x) - \left[x \cos(\ln x) - \int x \left(-\operatorname{sen}(\ln x)\right) \frac{1}{x} \, dx \right] \\ &= x \left(\operatorname{sen}(\ln x) - \cos(\ln x)\right) - \int \operatorname{sen}(\ln x) \, dx \end{aligned}$$

donde $u = \operatorname{sen}(\ln x)$, $dv = dx$ en la primera integración, y $u = \cos(\ln x)$, $dv = dx$ en la segunda integración. Despejando $\int \operatorname{sen}(\ln x) \, dx$, obtenemos:

$$\int \operatorname{sen}(\ln x) \, dx = \frac{x}{2} \left(\operatorname{sen}(\ln x) - \cos(\ln x)\right) + C.$$

Observemos que esta integral también es cíclica.

3) Las primitivas de las siguientes funciones racionales son:

$$\begin{aligned} \int \frac{x^4 - x^3 - (x+1)}{x^3 - x^2} \, dx &= \int \left(x - \frac{x+1}{x^2(x-1)} \right) dx = \frac{x^2}{2} - \int \left(-\frac{2}{x} - \frac{1}{x^2} + \frac{2}{x-1} \right) dx \\ &= \frac{x^2}{2} + 2 \ln|x| - \frac{1}{x} - 2 \ln|x-1| + C. \end{aligned}$$

$$\int \frac{x}{(2+3x)^2} \, dx = \int \left(\frac{1}{3} \frac{1}{(2+3x)} - \frac{2}{3} \frac{1}{(2+3x)^2} \right) dx = \frac{1}{9} \ln|2+3x| + \frac{2}{9} (2+3x)^{-1} + C.$$

$$\begin{aligned}
\int \frac{dx}{5-x^2} &= \frac{1}{2\sqrt{5}} \int \left(\frac{1}{\sqrt{5}-x} + \frac{1}{\sqrt{5}+x} \right) dx \\
&= \frac{1}{2\sqrt{5}} \int \frac{1}{\sqrt{5}-x}\, dx + \frac{1}{2\sqrt{5}} \int \frac{1}{\sqrt{5}+x}\, dx \\
&= -\frac{1}{2\sqrt{5}} \ln|\sqrt{5}-x| + \frac{1}{2\sqrt{5}} \ln|\sqrt{5}+x| + C \\
&= \frac{1}{2\sqrt{5}} \ln\left| \frac{x+\sqrt{5}}{x-\sqrt{5}} \right| + C.
\end{aligned}$$

4) Calculamos las siguientes primitivas mediante un cambio de variable:

$$\begin{aligned}
\int \frac{1}{\sqrt{x}\,(1+x)}\, dx &= (\text{usando el cambio } x = t^2 \Rightarrow dx = 2\,t\,dt\ ) \\
&= \int \frac{2\,dt}{1+t^2} = 2\,\mathrm{arctg}(t) + C \\
&= 2\,\mathrm{arctg}(\sqrt{x}) + C.
\end{aligned}$$

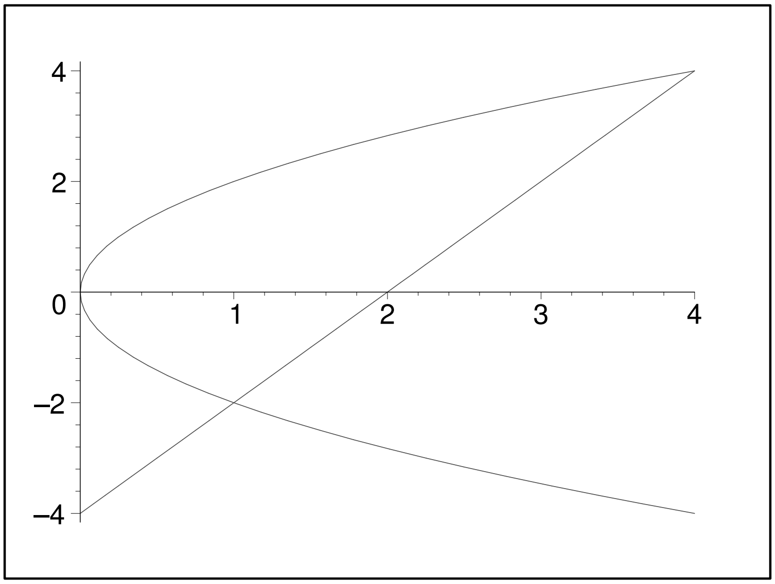
$$\begin{aligned}
\int \frac{\sqrt[4]{x}}{1+\sqrt{x}}\, dx &= (\text{usando el cambio } x = t^4 \Rightarrow dx = 4\,t^3\,dt) \\
&= \int \frac{4t^4}{1+t^2}\, dt \\
&= (\text{función racional}) \int \left(4t^2 - 4 + \frac{4}{1+t^2} \right) dt \\
&= \frac{4}{3}\, t^3 - 4t + 4\,\mathrm{arctg}(t) + C \\
&= \frac{4}{3}\, x^{3/4} - 4\,x^{1/4} + 4\,\mathrm{arctg}(x^{1/4}) + C.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\int \frac{1}{\sqrt{x}\,(4-9x)}\, dx &= (\text{usando el cambio } x = t^2 \Rightarrow dx = 2\,t\,dt\ ) \\
&= \int \frac{2}{4-9t^2}\, dt \\
&= \frac{1}{2} \int \frac{dx}{2-3t} + \frac{1}{2} \int \frac{dx}{2+3t} = -\frac{1}{6} \int \frac{(-3)\,dx}{2-3t} + \frac{1}{6} \int \frac{3\,dx}{2+3t} \\
&= -\frac{1}{6}\,(\ln|2-3t| - \ln|2+3t|) + C \\
&= -\frac{1}{6} \ln\left| \frac{2-3t}{2+3t} \right| + C = -\frac{1}{6} \ln\left| \frac{2-3x^{1/2}}{2+3x^{1/2}} \right| + C
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\int \frac{x^3}{\sqrt{x-1}}\,dx &= \text{(usando el cambio } x-1=t^2 \Rightarrow dx = 2\,t\,dt\text{)}\\
&= \int 2\,(1+t^2)^3\,dt = 2\int \left(1+3\,t^2+3\,t^4+t^6\right)\,dx\\
&= 2\left(t+t^3+\frac{3}{5}\,t^5+\frac{1}{7}\,t^7\right)+C\\
&= 2\left((x-1)^{1/2}+(x-1)^{3/2}+\frac{3}{5}\,(x-1)^{5/2}+\frac{1}{7}\,(x-1)^{7/2}\right)+C
\end{aligned}$$

5) Calculamos el área de las siguientes figuras planas:

a) La gráfica de la función para $x \in [0,4]$, es la siguiente:



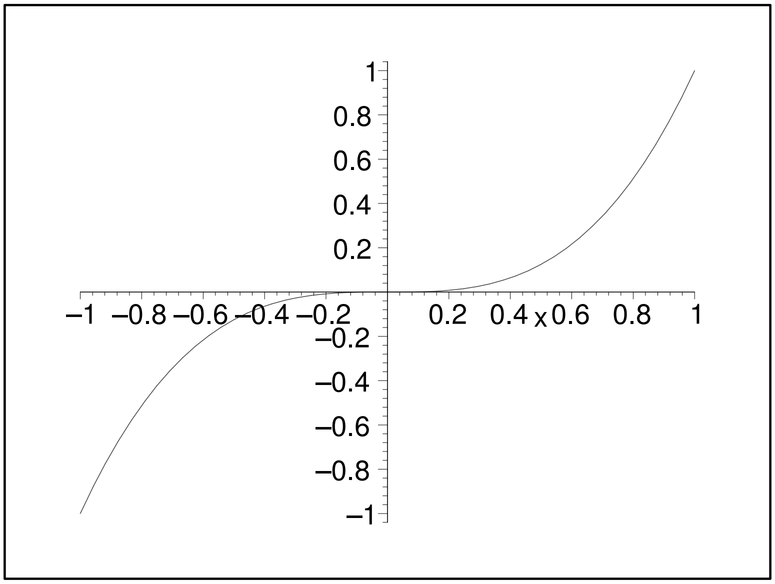
Observemos que:

- Si $x \in [0,1]$, el área corresponde a a región comprendida entre $y = 2\,x^{1/2}$ e $y = -2\,x^{1/2}$.
- Si $x \in [1,4]$, el área corresponde a a región comprendida entre $y = 2\,x^{1/2}$ e $y = 2x - 4$.

Por tanto, el área de la figura es:

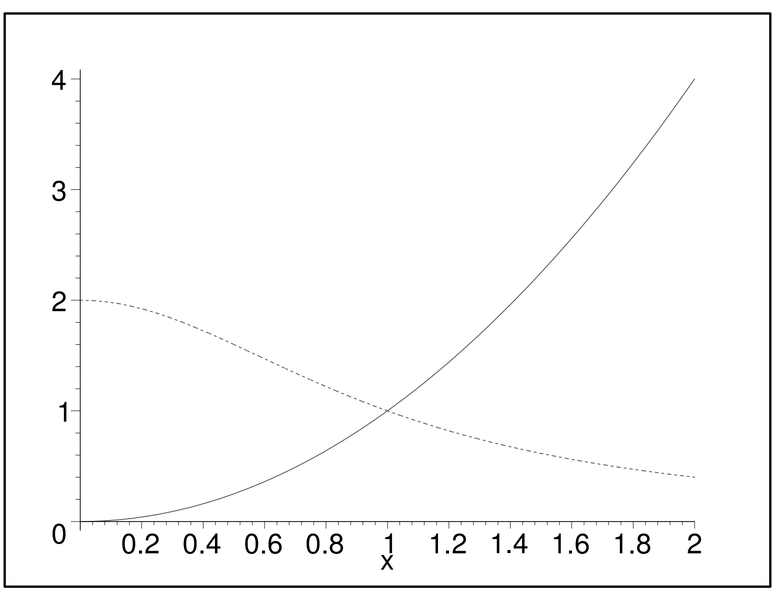
$$\begin{aligned} A &= 4\int_0^1 x^{1/2}\,dx + \int_1^4 (2x^{1/2} - 2x + 4)\,dx \\ &= \frac{8}{3}\,x^{3/2}\Big|_0^1 + \left(\frac{4}{3}\,x^{3/2} - x^2 + 4x\right)\Big|_1^4 \\ &= \frac{8}{3} + \frac{32}{3} - 16 + 16 - \frac{4}{3} + 1 - 4 = 9. \end{aligned}$$

b) La gráfica de la función en $[-1,1]$ es como sigue:



$$A = \int_{-a}^{0}(-x^3)\,dx + \int_0^a x^3\,dx = -\left.\frac{x^4}{4}\right|_{-a}^{0} + \left.\frac{x^4}{4}\right|_0^a = \frac{a^4}{2}.$$

c) La gráfica de la función en $[0,2]$ es como sigue:



donde la gráfica de la línea punteada es $y = \dfrac{2}{1+x^2}$ y la gráfica de la línea continua corresponde a $y = x^2$.

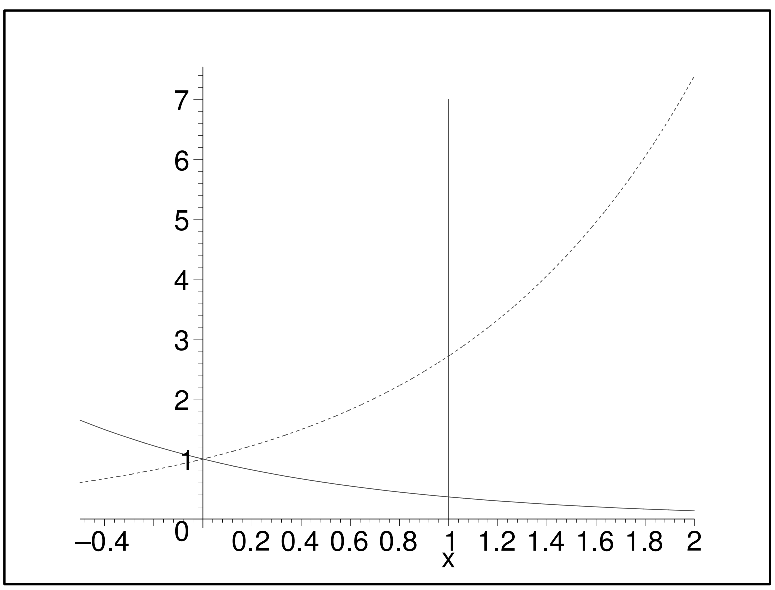
Observemos que el área que queremos calcular viene descrito por:

- Si $x \in [0,1]$, el área queda comprendido entre $y = \dfrac{2}{1+x^2}$ e $y = x^2$.
- Si $x \in [1,2]$, el área queda comprendido entre $y = x^2$ e $y = \dfrac{2}{1+x^2}$.

Por tanto,

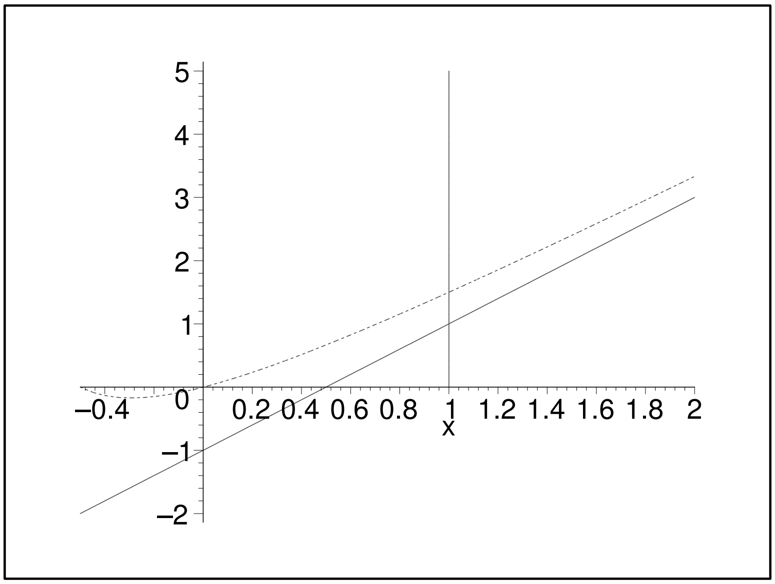
$$
\begin{aligned}
A &= \int_0^1 \left(\frac{2}{1+x^2} - x^2\right) dx + \int_1^2 \left(x^2 - \frac{2}{1+x^2}\right) dx \\
&= 2\,\mathrm{arctg} x\big|_0^1 - \frac{x^3}{3}\bigg|_0^1 + \frac{x^3}{3}\bigg|_1^2 - 2\,\mathrm{arctg} x\big|_1^2 \\
&= 2\,\frac{\pi}{4} - 0 - \left(\frac{1}{3} - 0\right) + \left(\frac{8}{3} - \frac{1}{3}\right) - 2\left(\mathrm{arctg}(2) - \frac{\pi}{4}\right) \\
&= \pi + 2 - 2\,\mathrm{arctg}(2).
\end{aligned}
$$

d) La gráfica de la función es la siguiente donde la línea punteada corresponde a $y = e^x$, y la línea continua a $y = e^{-x}$:



$$
A = \int_0^1 \left(e^x - e^{-x}\right) dx = \left(e^x + e^{-x}\right)\big|_0^1 = e + \frac{1}{e} - 2.
$$

6) La gráfica que representa la región es de la forma:



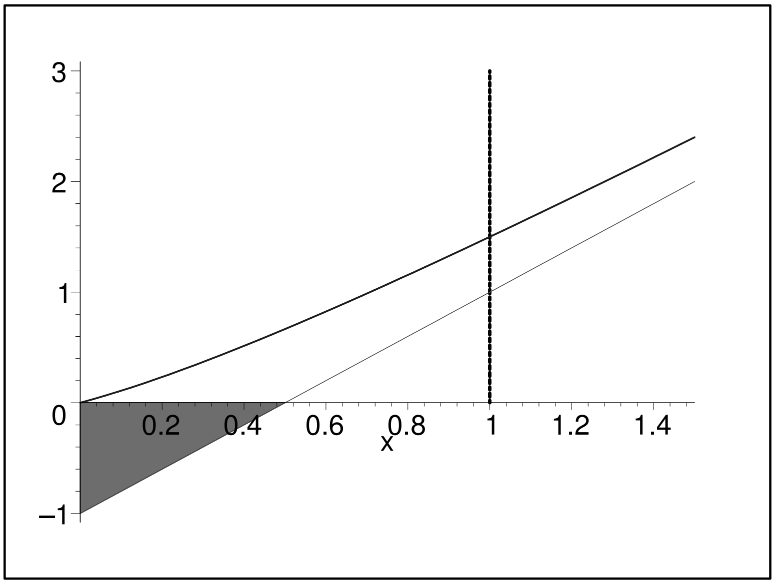
donde la línea punteada corresponde a la función $y = \dfrac{2x^2+x}{x+1}$ y la línea continua a $y = 2x-1$. Observemos que el ejercicio nos pide sólo el área contenida en el primer cuadrante, es decir, para $x \geq 0$, $y \geq 0$. El área de la región viene dada por:

$$
\begin{aligned}
A &= \int_0^{1/2} \frac{2x^2+x}{x+1}\,dx + \int_{1/2}^1 \left(\frac{2x^2+x}{x+1} - (2x-1)\right) dx \\
&= \int_0^{1/2} \left[2x-1+\frac{1}{x+1}\right] dx + \int_{1/2}^1 \frac{1}{x+1}\,dx \\
&= \left(x^2 - x + \ln|x+1|\right)\Big|_0^{1/2} + \left(\ln|x+1|\right)\Big|_{1/2}^1 \\
&= \frac{1}{4} - \frac{1}{2} + \ln\left(\frac{3}{2}\right) - 0 + \ln(2) - \ln\left(\frac{3}{2}\right) = \ln(2) - \frac{1}{4}.
\end{aligned}
$$

Observemos que también se puede calcular de la siguiente forma:

$$
A = \int_0^1 \left(\frac{2x^2+x}{x+1} - (2x-1)\right) dx - A_{triangulo}
$$

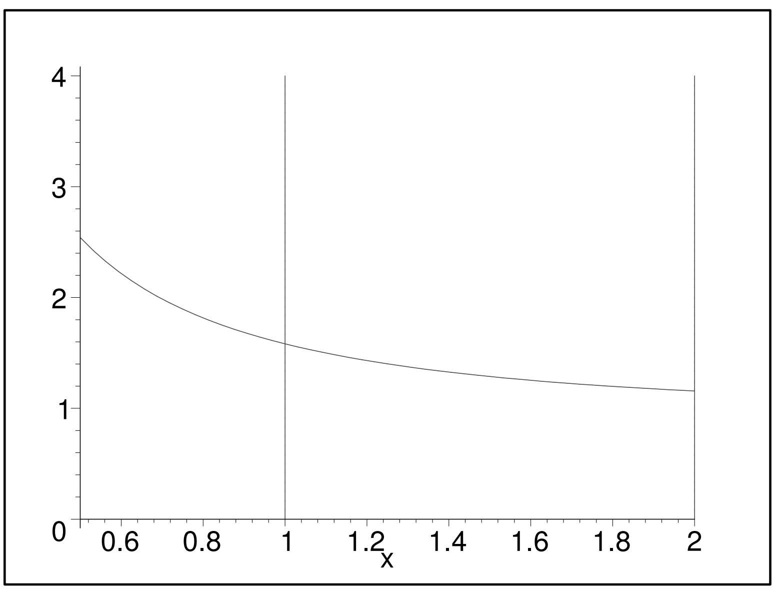
donde al área encerrada por la curva y su asíntota se le ha restado la única zona que no está en el primer cuadrante y que corresponde a la zona sombreada del siguiente dibujo:



El área de dicho triángulo es $A_{triangulo} = \frac{1}{4}$, luego:

$$A = \int_0^1 \frac{1}{x+1}\,dx - \frac{1}{4} = \ln|x+1|\,|_0^1 - \frac{1}{4} = \ln(2) - \frac{1}{4}.$$

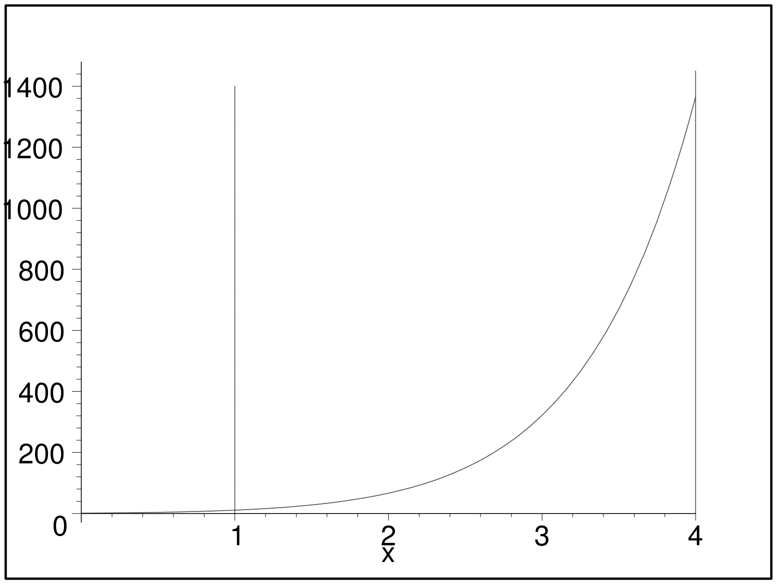
7) La gráfica que representa la región es de la forma:



donde la línea continua corresponde a la función $y = \frac{1}{1-e^{-x}}$. El área de la región viene dada por:

$$\begin{aligned} A &= \int_1^2 \frac{1}{1-e^{-x}}\,dx = \int_1^2 \frac{e^x}{e^x-1}\,dx = (\ln|e^x-1|)|_1^2 = \ln|e^2-1| - \ln|e-1| \\ &= \ln|e+1| = \ln(e+1). \end{aligned}$$

8) La gráfica que representa la región es de la forma:



donde la línea continua corresponde a la función $y = e^x\,(x+1)^2$. El área de la región viene dada por:

$$\begin{aligned}
A &= \int_1^4 e^x\,(x+1)^2\,dx = \text{(por partes)} \\
&= e^x\,(x+1)^2\big|_1^4 - \int_1^4 e^x\,(x+1)\,2\,dx = \text{(por partes)} \\
&= \left[e^x\,(x+1)^2 - 2\,e^x\,(x+1)\right]\big|_1^4 + \int_1^4 2\,e^x\,dx \\
&= \left[e^x\,(x+1)^2 - 2\,e^x\,(x+1) + 2\,e^x\right]\big|_1^4 \\
&= e^x\,\left[x^2 + 2\,x + 1 - 2\,x - 2 + 2\right]\big|_1^4 \\
&= e^x\,(x^2+1)\big|_1^4 = 17\,e^4 - 2\,e.
\end{aligned}$$