Tema 7

Introducción a la integración numérica

Versión: 13 de abril de 2009

7.1 Motivación

La integral definida de una función continua $f : [a, b] \subset \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ en el intervalo $[a, b]$,

$$I(f) = \int_a^b f(x)\,dx \tag{7.1}$$

es el área de la región del plano delimitada por la gráfica de la función, el eje de abscisas y las rectas verticales $x = a$ y $x = b$ (ver Figura 7.1).

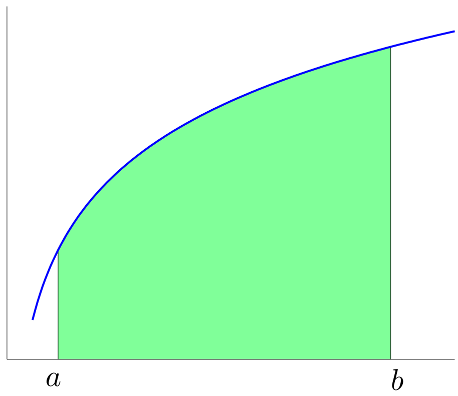

Figura 7.1: Área encerrada entre la gráfica de la función f, el eje de abscisas y las rectas $x = a$ y $x = b$.

Este concepto matemático tiene, además del cálculo de áreas, numerosas aplicaciones, de las que se citan sólo algunas:

- La longitud del arco de la curva $y = f(x)$ comprendido entre los puntos $(a, f(a))$ y $(b, f(b))$ viene dada por

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2}\,dx$$

- La distancia recorrida por un objeto que se mueve con velocidad variable $v = v(t)$ desde el instante t_0 hasta el instante T viene dada por:

$$S = \int_{t_0}^{T} v(t)\, dt$$

- El centro de gravedad, C, del arco de la curva $y = f(x)$, comprendido entre los puntos $(a, f(a))$ y $(b, f(b))$ tiene las coordenadas (L es la longitud de la curva):

$$x_C = \frac{1}{L} \int_a^b x\sqrt{1+y'^2}\, dx \qquad y_C = \frac{1}{L} \int_a^b x\sqrt{1+y'^2}\, dx\,.$$

Si se conoce una primitiva, F, de la función F, es bien sabido que el valor de la integral definida se puede calcular mediante la *Regla de Barrow*:

$$\int_a^b f(x)\, dx = F(b) - F(a).$$

En la mayoría de los casos, sin embargo, no se puede utilizar esta fórmula, ya que no se conoce dicha primitiva. Es posible, por ejemplo, que no se conozca la expresión matemática de la función f, sino sólo sus valores en determinados puntos. Pero también hay funciones (de apariencia sencilla) para las que se puede demostrar que no tienen ninguna primitiva que pueda escribirse en términos de funciones elementales (por ejemplo $\displaystyle\int_a^b e^{-x^2}\, dx$)

La **integración numérica** es una herramienta de las matemáticas que proporciona **fórmulas** y **técnicas** para calcular aproximaciones de integrales definidas. Gracias a ella se pueden calcular, aunque sea de forma aproximada, valores de integrales definidas que no pueden calcularse analíticamente y, sobre todo, se puede realizar ese cálculo en un ordenador.

7.2 Fórmulas de cuadratura. Orden

Las fórmulas que proporcionan una aproximación del valor de una integral definida se conocen con el nombre de **fórmulas de cuadratura**.

En sus versiones más sencillas, estas fórmulas aproximan el área bajo la curva por el área, " parecida", de un paralelogramo. Esto sólo proporciona una buena aproximación si la base del paralelogramo es pequeña. Por ello, las fórmulas verdaderamente útiles aproximan la integral definida mediante una suma finita de áreas de paralelogramos de "base pequeña". Véanse las Figuras 7.2 y 7.3.

En general, las fórmulas de cuadratura se pueden escribir en la forma:

$$I^*(f) = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k f(x_k), \tag{7.2}$$

variando unas de otras en la forma de elegir los puntos $\{x_1 < \cdots < x_n\}$ en el intervalo $[a, b]$ y los coeficientes (también llamados *pesos*) α_k , $k = 1, \ldots, n$.

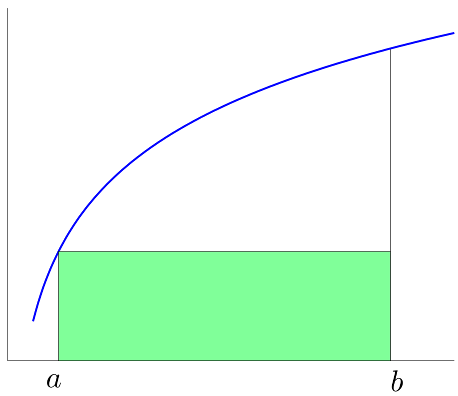

Figura 7.2: El área bajo la curva se aproxima por el área del rectángulo de base el segmento $[a, b]$ y altura $f(a)$.

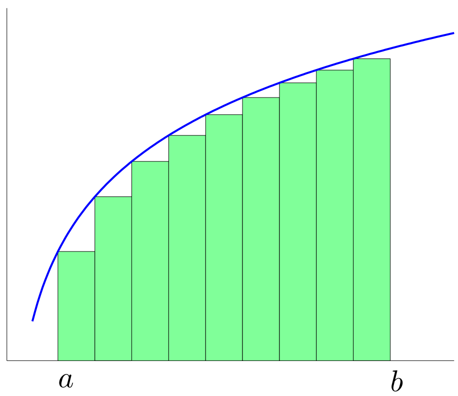

Figura 7.3: El área se aproxima mediante una suma finita de áreas de rectángulos similares al de la Figura 7.2, pero de base "pequeña".

Para determinar el grado de exactitud de una fórmula de cuadratura, es decir el **error** que se comete al sustituir la integral definida por la suma finita,

$$E(f) = I(f) - I^*(f) = \int_a^b f(x)\,dx - \sum_{k=1}^{n} \alpha_k f(x_k),$$

se suele utilizar el concepto de **orden**.

Se dice que una fórmula de cuadratura es de **orden m** (o bien que es **exacta para polinomios de grado m**) si el error de dicha fórmula verifica:

$$\begin{cases} E(x^k) = 0, & \text{para } k = 0, \dots, m \\ E(x^{m+1}) \neq 0. \end{cases} \tag{7.3}$$

lo cual significa que la fórmula en cuestión proporciona el valor exacto de la integral definida cuando se utiliza con una función f que es un polinomio de grado menor o igual que m y no proporciona, en general, el valor exacto para polinomios de grado mayor que m.

7.3 Fórmulas de cuadratura elementales

1. Las fórmulas de cuadratura más sencillas son las **fórmulas de los rectángulos**:

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx I_1(f) = (b-a)f(a), \qquad \int_a^b f(x)\,dx \approx I_2(f) = (b-a)f(b). \tag{7.4}$$

   En el primer caso se aproxima la integral por el área del rectángulo de base $[a, b]$ y altura $f(a)$ y en el segundo por el de altura $f(b)$ (ver Figuras 7.4 y 7.5).

   Es obvio que ambas son de orden cero, es decir, exactas para polinomios constantes.

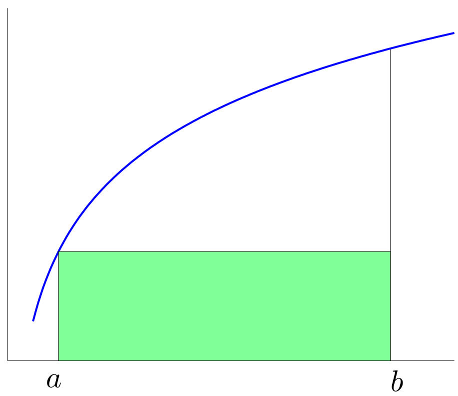

Figura 7.4: Fórmula del rectángulo de altura $f(a)$.

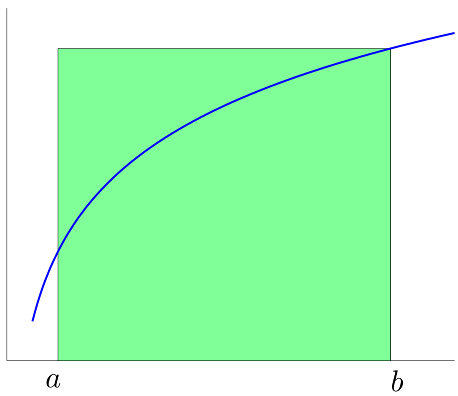

Figura 7.5: Fórmula del rectángulo de altura $f(b)$.

2. La **fórmula del punto medio** es similar a las anteriores pero tomando como altura del rectángulo el valor de f en el punto medio del intervalo (ver la Figura 7.6):

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx I_3(f) = (b-a)f(\frac{a+b}{2}). \tag{7.5}$$

   Esta fórmula es de orden 1:

$$E(1) = \int_a^b dx - I_3(1) = (b-a) - (b-a) = 0$$
$$E(x) = \int_a^b x\,dx - I_3(x) = \left[\frac{1}{2}(b^2-a^2)\right] - \left[(b-a)\frac{(a+b)}{2}\right] = 0$$
$$E(x^2) = \int_a^b x^2\,dx - I_3(x^2) = \left[\frac{1}{3}(b^3-a^3)\right] - \left[\frac{1}{4}(b^2-a^2)(a+b)\right] \neq 0$$

3. En la **fórmula del trapecio** se aproxima la integral por el área del trapecio mostrado en la Figura 7.7. Esta fórmula también es de orden 1:

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx I_4(f) = \frac{b-a}{2}\,(\,f(a)+f(b)\,). \tag{7.6}$$

$$E(1) = \int_a^b dx - I_4(1) = (b-a) - \left[\frac{b-a}{2}2\right] = 0$$
$$E(x) = \int_a^b x\,dx - I_3(x) = \left[\frac{1}{2}(b^2-a^2)\right] - \left[\frac{b-a}{2}(a+b)\right] = 0$$
$$E(x^2) = \int_a^b x^2\,dx - I_3(x^2) = \left[\frac{1}{3}(b^3-a^3)\right] - \left[\frac{b-a}{2}(b^2-a^2)\right] \neq 0$$

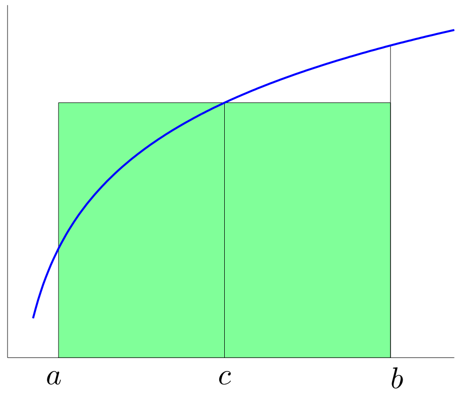

Figura 7.6: Fórmula del punto medio ($c = (a+b)/2$).

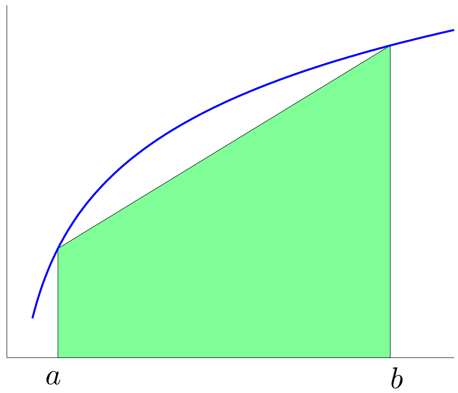

Figura 7.7: Fórmula del trapecio.

4. La última de las fórmulas elementales que se muestran aquí es la **fórmula de Simpson**. En ésta, se aproxima la integral de f por el área encerrada bajo un arco de parábola que coincide con f en tres puntos: los extremos del intervalo $[a, b]$ y su punto medio (ver la Figura 7.7).

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx I_5(f) = \frac{b-a}{6}\left(f(a) + 4f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b)\right). \tag{7.7}$$

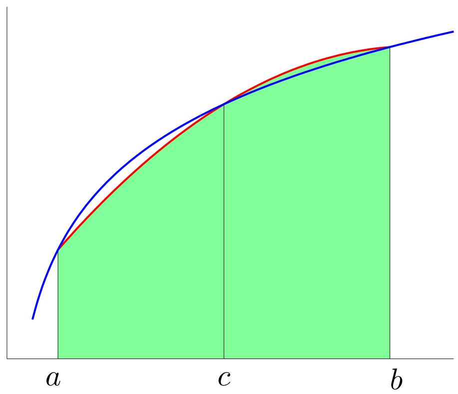

Figura 7.8: Fórmula de Simpson: área bajo la parábola que coincide con f en a, b y $c = \dfrac{a+b}{2}$.

Razonando como antes, es posible comprobar, que la fórmula de cuadratura de Simpson es de orden 3, es decir es exacta para polinomios de grado 3.

EJEMPLO:
Se considera la función $f(x) = \cos(2x)$, para la que se tiene

$$I(f) = \int_0^1 \cos(2x)\, dx = \frac{1}{2}\operatorname{sen}(2) = 0.4546$$

1. Fórmulas de los rectángulos:

$$I_1(f) = \cos(0) = 1, \qquad I_2(f) = \cos(2) = -0.4161,$$

2. Fórmula del punto medio:

$$I_3(f) = \cos(1) = 0.5403,$$

3. Fórmula del trapecio:

$$I_4(f) = \frac{1}{2}(\cos(0) + \cos(2)) = 0.2919$$

4. Fórmula de Simpson:

$$I_5(f) = \frac{1}{6}(\cos(0) + 4\cos(1) + \cos(2)) = 0.4575$$

Es posible proponer otras fórmulas de cuadratura del estilo de las anteriores, por ejemplo utilizando el valor de la función en más puntos, o también, eligiendo los puntos de manera óptima para conseguir que la fórmula de cuadratura asociada sea del mayor orden posible.

Pero ese estudio queda fuera del ámbito de estas notas. Para más detalles se pueden consultar, por ejemplo las referencias [1] y [2].

7.4 Fórmulas de cuadratura compuestas

Cuando el número de puntos aumenta (n grande), las fórmulas de cuadratura simples consideradas en la sección anterior, en general no proporcionan aproximaciones muy "fiables" de la integral. En la práctica, se usan las **fórmulas de cuadratura compuestas**, cuya idea de base es descomponer la integral definida en una suma de integrales sobre sub-intervalos "pequeños" y aplicar las fórmulas anteriores sobre cada uno de ellos:

- Sean $\{a = x_1 < x_2 \cdots < x_n = b\}$ un conjunto de n puntos en el intervalo $[a, b]$.
- Por las propiedades de la integral se tiene:

$$\int_a^b f(x)\, dx = \int_{x_1}^{x_2} f(x)dx + \int_{x_2}^{x_3} f(x)\, dx + \cdots + \int_{x_{n-1}}^{x_n} f(x)\, dx = \sum_{i=1}^{n-1} \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)\, dx \tag{7.8}$$

- Se utiliza alguna de las fórmulas elementales (sea I_k) en cada sub-intervalo:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \sum_{i=1}^{n-1} \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)\,dx \approx \sum_{i=1}^{n-1} I_k(f;[x_i,x_{i+1}]). \tag{7.9}$$

Las fórmulas mostradas en la Sección 6.3 dan lugar, así, a las siguientes fórmulas compuestas.

1. **Fórmulas de los rectángulos compuestas**: (ver las Figuras 7.9 y 7.10):

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx I_1^c(f) = \sum_{i=1}^{n-1} I_1(f;[x_i,x_{i+1}]) = \sum_{i=1}^{n-1} (x_{i+1}-x_i)f(x_i),$$
$$\int_a^b f(x)\,dx \approx I_2^c(f) = \sum_{i=1}^{n-1} I_2(f;[x_i,x_{i+1}]) = \sum_{i=1}^{n-1} (x_{i+1}-x_i)f(x_{i+1}).$$

En el caso particular en que todos los sub-intervalos tienen la misma longitud, h, como en la Figura 7.12, las fórmulas anteriores se simplifican, tomando la forma:

$$I_1^c(f) = \sum_{i=1}^{n-1} (x_{i+1}-x_i)f(x_i) = \sum_{i=1}^{n-1} h\,f(x_i) = h\sum_{i=1}^{n-1} f(x_i.$$
$$I_2^c(f) = \sum_{i=1}^{n-1} (x_{i+1}-x_i)f(x_{i+1}) = \sum_{i=1}^{n-1} h\,f(x_{i+1}) = h\sum_{i=1}^{n-1} f(x_{i+1}),$$

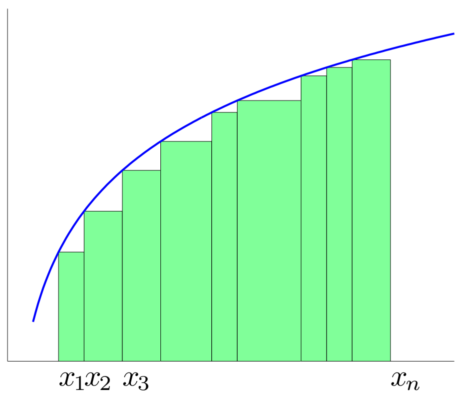

Figura 7.9: Fórmula de los rectángulos compuesta (I_1^c).

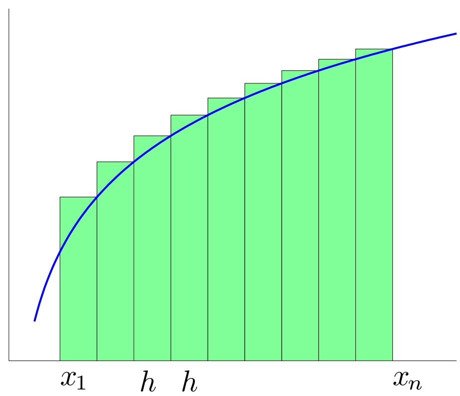

Figura 7.10: Fórmula de los rectángulos compuesta (I_2^c). Sub-intervalos de igual longitud.

2. **Fórmula del punto medio compuesta**: (ver la Figura 7.11):

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx I_3^c(f) = \sum_{i=1}^{n-1} I_3(f;[x_i,x_{i+1}]) = \sum_{i=1}^{n-1} (x_{i+1}-x_i)f(\frac{x_i+x_{i+1}}{2}),$$

que, en el caso en que todos los sub-intervalos son de igual longitud se escribe:

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx I_3^c(f) = \sum_{i=1}^{n-1} h\, f(\frac{x_i + x_{i+1}}{2}) = h \sum_{i=1}^{n-1} f(\frac{x_i + x_{i+1}}{2}).$$

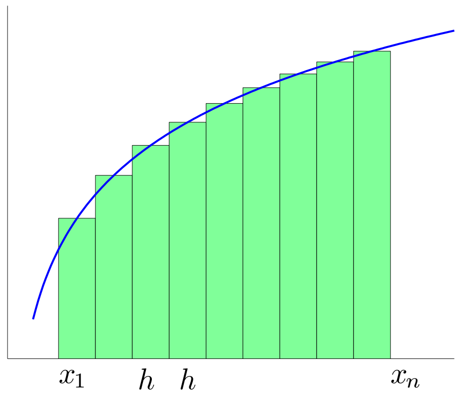

Figura 7.11: Fórmula del punto medio compuesta.

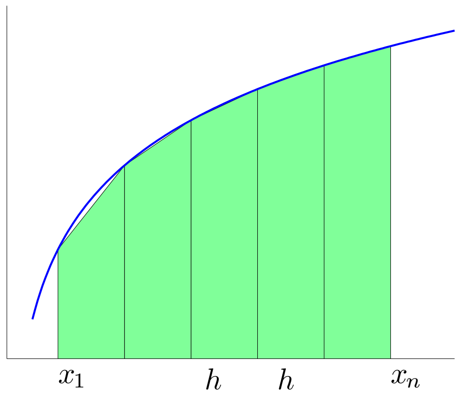

Figura 7.12: Fórmula de los trapecios compuesta.

3. La **Fórmula de los trapecios compuesta** se construye de igual forma (ver la Figura 7.12):

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx I_4^c(f) = \sum_{i=1}^{n-1} I_4(f;[x_i, x_{i+1}]) = \sum_{i=1}^{n-1} (x_{i+1} - x_i)\,\frac{f(x_i) + f(x_{i+1})}{2},$$

y, en el caso de sub-intervalos de igual longitud,

$$I_4^c(f) = \sum_{i=1}^{n-1} (x_{i+1} - x_i)\,\frac{f(x_i) + f(x_{i+1})}{2} = \sum_{i=1}^{n-1} h\,\frac{f(x_i) + f(x_{i+1})}{2} =$$

$$\frac{h}{2} \sum_{i=1}^{n-1} (f(x_i) + f(x_{i+1})) = \frac{h}{2}\left(f(x_1) + 2\sum_{i=2}^{n-1} f(x_i) + f(x_n)\right)$$

4. Por último, la **Fórmula de Simpson compuesta** se escribe:

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx I_5^c(f) = \sum_{i=1}^{n-1} I_5(f;[x_i, x_{i+1}]) =$$

$$\sum_{i=1}^{n-1} \frac{(x_{i+1} - x_i)}{6}\left(f(x_i) + 4\,f\left(\frac{x_i + x_{i+1}}{2}\right) + f(x_{i+1})\right),$$

que, en el caso de sub-intervalos de igual longitud, se transforma en:

$$I_5^c(f) = \sum_{i=1}^{n-1} \frac{h}{6}\left(f(x_i) + 4\,f\left(\frac{x_i + x_{i+1}}{2}\right) + f(x_{i+1})\right) =$$

$$\frac{h}{6}\sum_{i=1}^{n-1}\left(f(x_i)+4\,f\left(\frac{x_i+x_{i+1}}{2}\right)+f(x_{i+1})\right)=$$

$$\frac{h}{6}\left\{f(x_1)+2\sum_{i=2}^{n-1}f(x_i)+f(x_n)+4\sum_{i=1}^{n-1}f\left(\frac{x_i+x_{i+1}}{2}\right)\right\}.$$

EJEMPLO:
Se considera de nuevo la integral definida del ejemplo anterior,

$$I(f)=\int_0^1\cos(2x)\,dx=\frac{1}{2}\,\mathrm{sen}(2)=0.4546.$$

Utilizando la fórmula de los puntos medios con 5 sub-intervalos de igual longitud (es decir, $h=1/5=0.2$ y $\{x_i\}_{i=1}^6=\{0,\,0.2,\,0.4,\,0.6,\,0.8,\,1\}$), se obtiene:

$$I_3^c(f)=h\sum_{i=1}^{5}\cos\left(2\frac{x_i+x_{i+1}}{2}\right)=0.2\sum_{i=1}^{5}\cos(x_i+x_{i+1})$$

$$=0.2\;(\cos(0.2)+\cos(0.6)+\cos(1)+\cos(1.4)+\cos(1.8))=0.4577$$

Utilizando la fórmula de los trapecios, también con 5 sub-intervalos de igual longitud se obtendría:

$$I_4^c(f)=\frac{h}{2}\sum_{i=1}^{5}(cos(2x_i)+cos(2x_{i+1}))$$

$$=0.1\;(\cos(0)+2[\cos(0.4)+\cos(0.8)+\cos(1.2)+\cos(1.6)]+\cos(2))=0.4486$$

Y finalmente, con la fórmula de Simpson compuesta con los mismos sub-intervalos se obtiene

$$I_5^c(f)=\frac{h}{6}\sum_{i=1}^{5}\left(\cos(2x_i)+4\,\cos\left(2\frac{x_i+x_{i+1}}{2}\right)+\cos(2x_{i+1})\right)$$

$$=0,3333\;\{\cos(0)+2(\cos(0.4)+\cos(0.8)+\cos(1.2)+\cos(1.6))+\cos(2)$$
$$+\,4(\cos(0.2)+\cos(0.6)+\cos(1)+\cos(1.4)+\cos(1.8))\}=0.4546$$

Bibliografía

Versión: 13 de abril de 2009

[1] A. Doubova, F. Guillén González *Un Curso de Cálculo Numérico: Interpolación, Aproximación, Integración y Resolución de Ecuaciones Diferenciales*, Secretariado de Publicaciones, Univ. de Sevilla, 2007.

[2] J.H. Mathews, K.D. Fink, *Métodos Numéricos con MATLAB*, Prentice-Hall, 2000.