Tema 8

Ceros de funciones

Versión: 23 de abril de 2009

8.1 Introducción

Dada $f : [a, b] \subset \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$, continua, se plantea el problema de encontrar ceros de f, es decir raíces de la ecuación

$$f(x) = 0. \tag{8.1}$$

La interpretación geométrica de este problema es determinar los puntos de corte de la gráfica de la función $y = f(x)$ en $[a, b]$ con el eje de abscisas (ver la Figura 8.1).

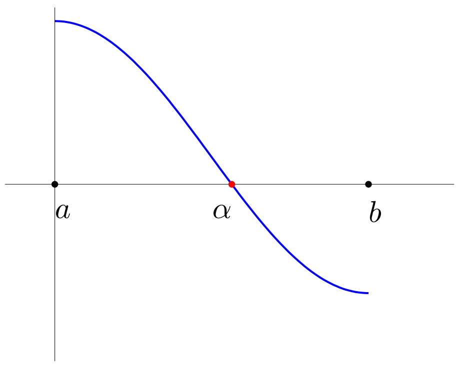

Figura 8.1: La gráfica de $y = f(x)$ corta al eje de abscisas en un punto $\alpha \in [a, b]$, lo que significa que α es un cero de la función f.

En Física surgen frecuentemente problemas que conducen a ecuaciones del tipo (8.1) cuyas soluciones no se pueden calcular explícitamente. Por ejemplo, la ecuación $e^x + e^{-x} = 2/\cos(x)$. [1]

Por otra parte, es bien conocido que para ecuaciones polinómicas

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 = 0$$

con $n \geq 5$, no existe una fórmula explícita de sus soluciones.

[1] Aparece, por ejemplo, cuando se quieren determinar las frecuencias de las oscilaciones transversales de una viga con extremos empotrados y sometida a un golpe.

Los métodos para aproximar raíces de ecuaciones son, en general **iterativos**, es decir consisten en construir una sucesión $\{x_n\}_{n\geq 0}$ mediante una relación de recurrencia:

$$\left\{ \begin{array}{l} x_0 \text{ dado }, \\ x_{n+1} = \varphi(x_n), \quad \forall\, n \geq 0, \end{array} \right. \tag{8.2}$$

donde φ es una función dada que depende del método iterativo.

Cuando la sucesión $\{x_n\}_{n\geq 0}$ converge hacia la raíz α de f, es decir

$$\lim_{n\to+\infty} x_n = \alpha,$$

se dice que el método iterativo (8.2) **es convergente**.

Para medir la velocidad de convergencia de una sucesión hacia su límite se introduce el concepto **orden de convergencia**. Se dice que una sucesión convergente, $x_n \to \alpha$,

- tiene **orden de convergencia lineal** (orden 1) si existen $0 < C < 1$ y $n_0 \geq 0$ tales que:

  $$|x_{n+1} - \alpha| \leq C|x_n - \alpha|, \quad \forall\, n \geq n_0\,.$$

  Esto significa, esencialmente, que se gana una cifra de precisión cada cierto número fijo de iteraciones.

- tiene **orden de convergencia cuadrático** (orden 2) si existen $C > 0$ y $n_0 \geq 0$ tales que:

  $$|x_{n+1} - \alpha| \leq C|x_n - \alpha|^2, \quad \forall\, n \geq n_0\,,$$

  lo que significa que se duplican las cifras de precisión cada cierto número fijo de iteraciones.

Los métodos de aproximación de raíces de ecuaciones necesitan conocer, o bien un intervalo que contenga sólo una raíz, o bien un punto inicial que esté suficientemente cerca de ella. Por tanto, como paso previo a la aplicación de un método de aproximación, es necesario **localizar** la raíz, es decir encontrar un intervalo que la contenga y **separar** la raíz, es decir encontrar un intervalo que **sólo** contenga dicha raíz. Esto se hace por métodos analíticos, gráficos y, en algunas aplicaciones, empíricos.

`EJEMPLO:`

Localizar y separar las raíces de la ecuación $f(x) = 0$, siendo $f(x) = x + e^x$.

La función $y = f(x)$ está representada en la Figura 8.2. Se observa que

$$\left\{ \begin{array}{l} f(0) = 1 > 0, \\ f(-1) = -1 + 1/e < 0. \end{array} \right.$$

Por el Teorema de Bolzano se deduce que existe un punto $\alpha \in (-1, 0)$ raíz de f. Además, esta raíz es única puesto que f es estrictamente creciente ($f'(x) = 1 + e^x > 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$).

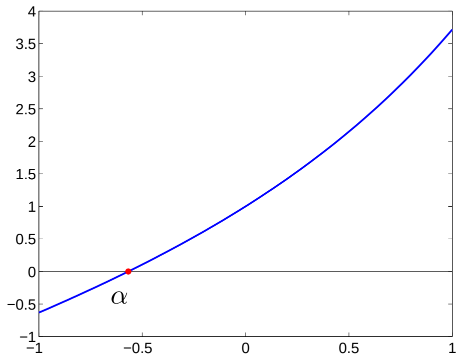

Figura 8.2: La gráfica de $y = x + e^x$. Hay un único punto $\alpha \in [-1, 0]$, raíz de $x + e^x = 0$.

8.2 Métodos de bisección

Basado en el Teorema de Bolzano, es uno de los métodos más sencillos para calcular una raíz de la ecuación (8.1) en un intervalo $[a, b]$ donde la función f es continua y tiene un cambio de signo: $f(a)f(b) < 0$.

El método de bisección consiste en subdividir en dos partes el intervalo en que se sabe que está la raíz, para obtener un subintervalo de longitud igual a la mitad del anterior, y proseguir hasta que los subintervalos resultantes tengan una longitud tan pequeña como se quiera (ver la Figura 8.3).

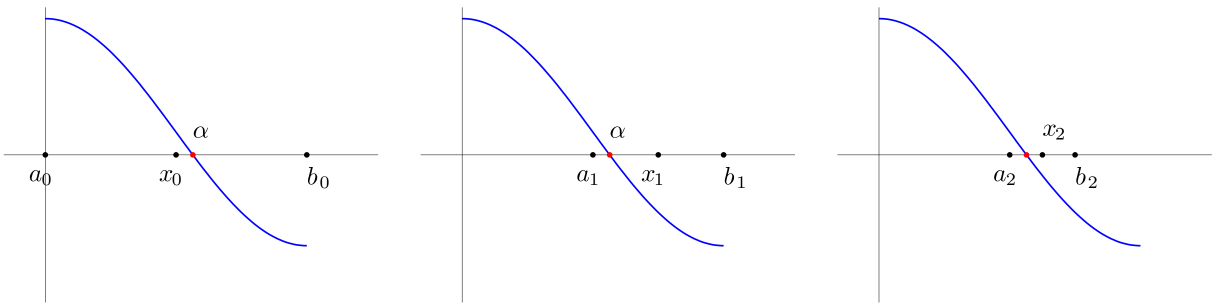

Figura 8.3: Tres etapas del método de bisección. En cada iteración se descarta la mitad del intervalo que no contiene a la raíz (en la que f no cambia de signo). El intervalo donde se encuentra la raíz es cada vez más pequeño y, su punto medio se acerca cada vez más a la solución buscada.

Si el intervalo inicial es $[a, b]$, tras la n-ésima subdivisión se tendrá el cero localizado en un intervalo $[a_n, b_n]$. Por tanto si elegimos su punto medio $x_n = (a_n + b_n)/2$ como aproximación del cero de f en $[a, b]$, cometemos un error no superior a $e_n = (b_n - a_n)/2$. En consecuencia, si queremos aproximar la raíz con un error no superior a ε, bastará con terminar este proceso cuando $e_n \leq \varepsilon$.

Algoritmo 8.1 (de bisección)

a) Elegir $\varepsilon > 0$. Tomar $n = 0$, $a_0 = a$, $b_0 = b$ y $e_0 = (b_0 - a_0)/2$.

b) Dados $n \geq 0$, $[a_n, b_n]$ tal que $f(a_n)f(b_n) < 0$ y $e_n = (b_n - a_n)/2$, tomar $x_n = \dfrac{a_n + b_n}{2}$.

- b.1) Si $|e_n| \leq \varepsilon$, parar y devolver x_n como aproximación de la solución.
- b.2) Si $f(a_n)f(x_n) < 0$, hacer $a_{n+1} = a_n$, $b_{n+1} = x_n$, $e_{n+1} = e_n/2$ y $n = n+1$ y repetir el paso b).
- b.3) Si $f(x_n)f(b_n) < 0$, hacer $a_{n+1} = x_n$, $b_{n+1} = b_n$, $e_{n+1} = e_n/2$ y $n = n+1$ y repetir el paso b).

En las hipótesis del Teorema de Bolzano, el método de bisección es siempre convergente, pero es lento (orden de convergencia lineal).

8.3 Método de aproximaciones sucesivas

Dada $g : [a, b] \subset \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ continua, el método de aproximaciones sucesivas sirve para aproximar soluciones de una ecuación de **ecuación de punto fijo**

$$x = g(x), \quad x \in [a, b]. \tag{8.3}$$

A las soluciones de (8.3) se les llama *puntos fijos* de la función g.

Geométricamente hallar un punto fijo de g es determinar la abscisa del punto de corte de las gráficas de $y = g(x)$ e $y = x$ en $[a, b]$ (ver la Figura 8.4).

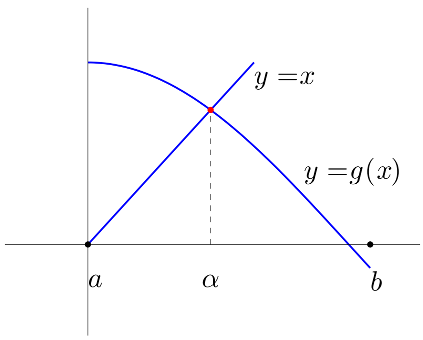

Figura 8.4: La gráfica de $y = g(x)$ corta a la recta $y = x$ en un punto $\alpha \in [a, b]$, lo que significa que α es un punto fijo de g en $[a, b]$.

El **método de aproximaciones sucesivas** es un método iterativo que consiste en tomar una aproximación inicial $x_0 \in [a, b]$ y calcular los demás términos de la sucesión $\{x_n\}_{n\geq 0}$ mediante la relación

$$x_{n+1} = g(x_n).$$

La sucesión $\{x_n\}_{n\geq 0}$ así calculada se llama *de aproximaciones sucesivas*.

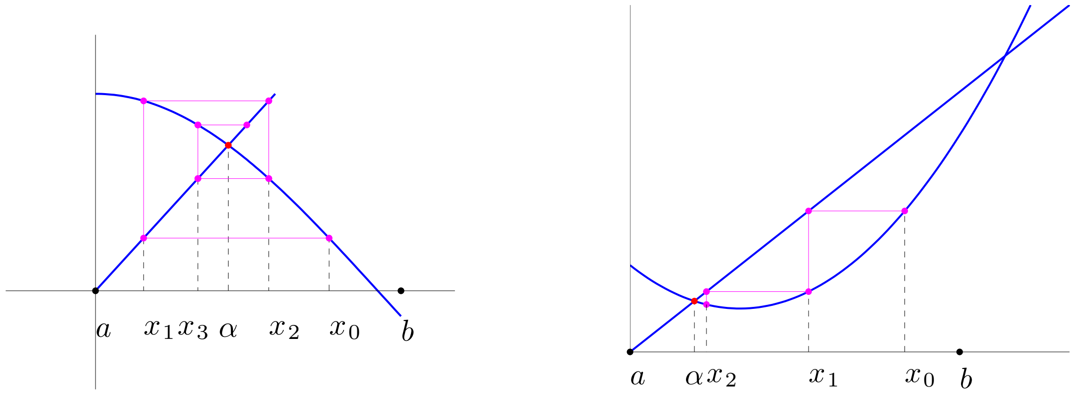

Figura 8.5: Interpretación geométrica del método de aproximaciones sucesivas.

Aunque este método no es estrictamente un método para aproximar raíces de la ecuación $f(x) = 0$, se incluye aquí, porque es obvio que cualquier ecuación de ese tipo puede escribirse en la forma $x = g(x)$ (por ejemplo $x = x + f(x)$).

Bajo ciertas condiciones sobre la función g (de existencia y unicidad de solución de la ecuación de punto fijo $x = g(x)$), el método de aproximaciones sucesivas es convergente con orden de convergencia lineal (orden 1), ver la Figura 8.5.

Cuando se utiliza el método de aproximaciones sucesivas para calcular una aproximación del punto fijo, se suelen terminar las iteraciones cuando el valor absoluto de la diferencia entre dos puntos sucesivos sea menor que una tolerancia pre-establecid, ε. O, mejor aún, cuando

$$\frac{|x_n - x_{n-1}|}{|x_n|} \leq \varepsilon,$$

ya que este criterio refleja mejor la magnitud de los términos de la sucesión.

Algoritmo 8.2 (de aproximaciones sucesivas)

a) Elegir $x_0 \in [a, b]$ y $\varepsilon > 0$.

b) Dados $n \geq 0$ y x_n .

  b.1) Si $|x_n - x_{n-1}|/|x_n| \leq \varepsilon$, $n \geq 1$, parar y devolver x_n como aproximación de la solución.

  b.2) Hacer $x_{n+1} = g(x_n)$ y repetir el paso b).

8.4 Método de Newton

Es el método más utilizado para aproximar soluciones de la ecuación (8.1). Se comienza eligiendo un punto inicial $x_0 \in [a, b]$, del que normalmente se requiere que sea cercano a la solución α de $f(x) = 0$. La sucesión del método $\{x_n\}_{n\geq 0}$ se genera mediante la siguiente relación:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}.$$

Obviamente, el método de Newton necesita del conocimiento de la derivada $f'(x)$ y que esta no se anule en ningún término de la sucesión.

La interpretación geométrica del método de Newton es la siguiente: x_{n+1} es la abscisa del punto de intersección con el eje OX de la tangente a la curva $y = f(x)$ en el punto $(x_n, f(x_n))$ (ver la Figura 8.6).

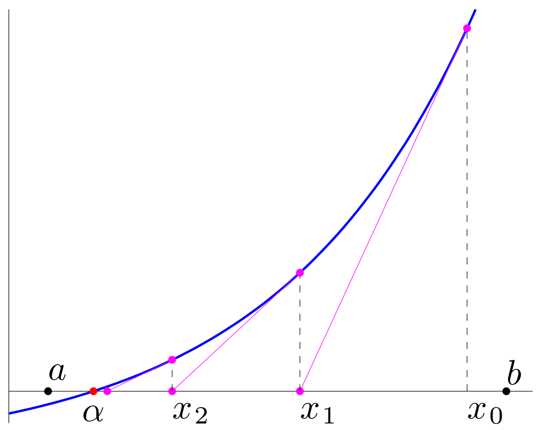

Figura 8.6: Interpretación geométrica del método de Newton.

Tomando el punto inicial x_0 cercano a la solución, bajo ciertas condiciones sobre la función f, el método de Newton es convergente con orden de convergencia cuadrático (de orden 2). Esto significa que el método de Newton es más rápido que los dos métodos anteriores, por tanto la sucesión generada por el método de Newton converge más rápido a la solución exacta: hacen falta menos iteraciones para alcanzar el número deseado de cifras decimales exactas entre la aproximación y el cero de la función que buscamos.

La forma de detener las iteraciones de este método para obtener una aproximación de la raíz es similar al método de aproximaciones sucesivas:

$$\frac{|x_{n-1} - x_n|}{|x_n|} < \varepsilon.$$

Algoritmo 8.3 (de Newton)

a) Elegir $x_0 \in [a, b]$ y $\varepsilon > 0$.

b) Dados $n \geq 0$ y x_n .

b.1) Si $|x_n - x_{n-1}|/|x_n| \leq \varepsilon$, $n \geq 1$, parar y devolver x_n como aproximación de la solución.

b.2) Hacer $x_{n+1} = x_n - \dfrac{f(x_n)}{f'(x_n)}$ y repetir el paso b).

Existen otros métodos de aproximación de ceros de funciones, que escapan del objetivo de estos breves apuntes. Por otra parte, los métodos explicados han sido presentados de manera tan sólo descriptiva. Para un análisis más detallado, se pueden consultar las referencias [1] y [2].

Bibliografía

Versión: 23 de abril de 2009

[1] J.A. Infante, J.M. Rey, *Métodos Numéricos*, Pirámide, Madrid, 1999.

[2] J.H. Mathews, K.D. Fink, *Métodos Numéricos con MATLAB*, Prentice-Hall, 2000.