Tema 9

Ecuaciones diferenciales ordinarias

Versión: 13 de mayo de 2009

9.1 Introducción

El objetivo de este tema es exponer muy brevemente algunos de los conceptos básicos relacionados con las ecuaciones diferenciales ordinarias, con el objetivo de mostrar las técnicas elementales de su resolución numérica, así como, en las clases prácticas, las funciones MATLAB que las implementan. Queda fuera del objetivo de estas notas, el estudio analítico de los problemas considerados.

Una **ecuación diferencial** es una ecuación en que la **incógnita** es una función: no el valor de la función en uno o varios puntos, sino la función en sí misma. Además, la ecuación involucra no sólo la función (incógnita), sino también sus **derivadas** hasta un cierto orden.

Cuando la incógnita es una función de una sola variable se dice que la ecuación es **ordinaria**, debido a que la o las derivadas que aparecen son derivadas ordinarias (por contraposición a las derivadas parciales de las funciones de varias variables).

Por ejemplo,

$$y'(t) = -y(t) \tag{9.1}$$

es una ecuación diferencial ordinaria (*edo*) de primer orden, ya que la máxima derivada que aparece en ella es la de primer orden. Si no resulta confuso se suele escribir también esta ecuación en la forma $y' = -y$, omitiendo la mención expresa a la dependencia de y respecto de t.

Resolver esta ecuación consiste en encontrar una o varias funciones $y = y(t)$ que verifiquen la igualdad $y'(t) = y(t)$, para todo t perteneciente a un cierto intervalo I. Una tal función se dice que es una **solución** de la *edo* en el intervalo I.

Con carácter general, una **ecuación diferencial ordinaria de primer orden** se escribe:

$$y' = f(t, y) \tag{9.2}$$

y se dice que $y = y(t)$ es **solución en I** de esta ecuación si se verifica

$$y'(t) \left(= \frac{dy}{dt}(t) \right) = f(t, y(t)), \quad \forall t \in I. \tag{9.3}$$

Por ejemplo, la función $y = e^{-t}$ es solución de la ecuación (9.1) en cualquier intervalo $I \subset \mathbb{R}$, ya que

$$y'(t) = -e^{-t} = -y(t), \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

Pero también es solución cualquier función de la forma $y = Ce^{-t}$ siendo C una constante arbitraria, puesto que

$$y'(t) = -Ce^{-t} = -y(t), \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

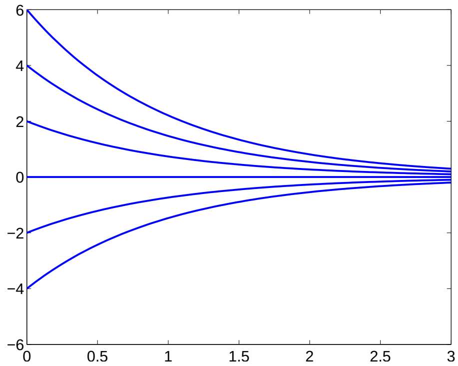


Figura 9.1: Curvas de la familia $y(t) = Ce^{-t}$, soluciones de la ecuación (9.1), para diversos valores de C.

Así pues, la ecuación (9.1) tiene infinitas soluciones, lo que no es una particularidad de esta ecuación concreta. La ecuación diferencial ordinaria (9.2) posee, en general, una familia de infinitas soluciones dependientes de una constante arbitraria, a la que se suele llamar **solución general** de (9.2). Para cada valor de dicha constante arbitraria se obtiene una **solución particular**.

Con frecuencia, en las aplicaciones, lo que interesa es encontrar una solución particular que verifica alguna condición. Por ejemplo, que toma un valor dado para un valor, también dado, de la variable independiente. En este caso, el problema que se plantea se escribe:

$$\left\{ \begin{array}{l} y' = f(t,y) \\ y(t_0) = y_0 \, , \end{array} \right. \tag{9.4}$$

y recibe el nombre de **problema de valor valor inicial**. El nombre proviene del hecho de que, con frecuencia, la variable independiente, t, representa el tiempo, y el valor t_0 es el instante en que comienza un experimento, observación o simulación.

En general, si se verifican ciertas condiciones razonables de regularidad de la función f, el problema de valor inicial (9.4) tiene solución única.

Por ejemplo, el siguiente problema de valor inicial, asociado a la ecuación (9.1),

$$\left\{ \begin{array}{l} y' = -y \\ y(0) = 1 \, , \end{array} \right. \tag{9.5}$$

tiene una única solución, $y = e^{-t}$, que se puede encontrar imponiendo la condición inicial, $y(0) = 1$, a las funciones de la familia de soluciones, $y = Ce^{-t}$, para deducir para qué valor de la constante arbitraria C se cumple la condición. Es decir:

$$y(0) = Ce^0 = C = 1 \quad \Leftrightarrow \quad C = 1.$$

9.2 Aplicaciones de las ecuaciones diferenciales ordinarias

Las ecuaciones diferenciales, debido a que relacionan los valores de una función con los de su(s) derivada(s), son una herramienta fundamental en el tratamiento matemático de cualquier fenómeno dinámico, es decir, que involucre magnitudes que cambian con el tiempo (o con cualquier otra magnitud). Por ello, sus campos de aplicación son numerosos en física, química, biología, economía, ... He aquí sólo algunos ejemplos:

9.2.1 Ley de desintegración radiactiva

Los núcleos de determinados elementos químicos (radiactivos) se desintegran, transformándose en otros y emitiendo radiaciones. Se sabe que la velocidad de desintegración de una sustancia radiactiva (es decir, el número de átomos que se desintegran por unidad de tiempo) en un instante dado es proporcional al número de átomos de dicha sustancia existentes en ese instante. En consecuencia, si se denota por $A(t)$ el número de átomos de la sustancia original presentes en el instante t, se puede escribir:

$$A'(t) = -\lambda A(t),$$

donde el signo menos se debe a que la velocidad es negativa (el número de átomos disminuye) y la constante de proporcionalidad, $\lambda > 0$, se llama constante de descomposición o de decaimiento, y es propia de cada sustancia radiactiva.

Si se conoce el número de átomos presentes en un instante dado, por ejemplo se sabe que en $t = 0$ es $A(0) = A_0$, y se conoce también la constante de decaimiento, λ, entonces se puede predecir el número de átomos presentes en cualquier instante posterior, ya que $A(t)$ es la solución del problema de valor inicial:

$$\begin{cases} A'(t) = -\lambda A(t) \quad t \geq 0, \\ A(0) = A_0 \,. \end{cases} \tag{9.6}$$

La solución del problema (9.6) es la exponencial decreciente:

$$A(t) = A_0 e^{-\lambda t} \,,$$

cuya gráfica, para algunos valores de λ, se representa en la Figura 9.2. Obsérvese que cuanto mas grande sea λ, mas rápidamente se desintegra la sustancia.

Obsérvese también que, para conocer el valor del coeficiente λ de una sustancia determinada, basta conocer el valor de $A(t)$ en dos instantes distintos.

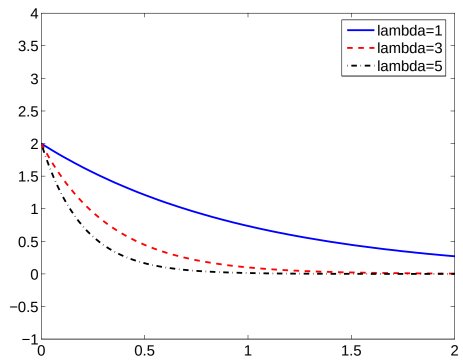


Figura 9.2: Representación gráfica de la función $y = 2e^{-\lambda t}$, solución de (9.6) con $A_0 = 2$, para varios valores de λ.

Por ejemplo, sabiendo que $A(0) = A_0$ y $A(t_1) = A_1$, se tiene, por un lado $A(t) = A_0 e^{-\lambda t}$, $\forall t \geq 0$, y por el otro:

$$A(t_1) = A_0 e^{-\lambda t_1} = A_1 \quad \Leftrightarrow \quad e^{-\lambda t_1} = \frac{A_1}{A_0} \quad \Leftrightarrow \quad -\lambda t_1 = \ln \frac{A_1}{A_0} \quad \Leftrightarrow \quad \lambda = \frac{1}{t_1} \ln \frac{A_0}{A_1}.$$

9.2.2 Ley de enfriamiento de Newton

En determinadas condiciones, la velocidad a la que cambia la temperatura de un objeto es proporcional a la diferencia entre su temperatura y la del medio en que se encuentra. Si se denota por $T(t)$ la temperatura del objeto en el instante t, la ley anterior se expresa matemáticamente mediante la siguiente ecuación diferencial ordinaria:

$$T'(t) = -k(T(t) - M), \tag{9.7}$$

donde M es la temperatura del medio (que se supone constante) y k es la constante de proporcionalidad, propia del objeto.

Si en el instante inicial, $t = 0$, la temperatura toma el valor T_0, entonces, la temperatura del objeto en cualquier instante posterior, $T(t)$, viene dada por la solución del problema de valor inicial:

$$\begin{cases} T'(t) = -k(T(t) - M), \\ T(0) = T_0 \,. \end{cases} \tag{9.8}$$

La solución general de la ecuación (9.7) es

$$T(t) = M + Ce^{-kt}, \quad C \in \mathbb{R} \text{ arbitraria},$$

y la solución particular que verifica $T(0) = T_0$ es

$$T(t) = M + (T_0 - M)e^{-kt}.$$

En la Figura 9.3 están representadas las soluciones del problema (9.8) para diversos valores del dato inicial T_0. Obsérvese que, como es obvio intuitivamente, la temperatura del objeto varía más rápidamente cuanto mayor es la diferencia entre la temperatura inicial del objeto y la temperatura del medio.

Por otro lado, sea cual sea su temperatura inicial, la temperatura del objeto tiende, cuando pasa el tiempo, a igualarse con la temperatura del medio (asíntota horizontal en $T = M$).

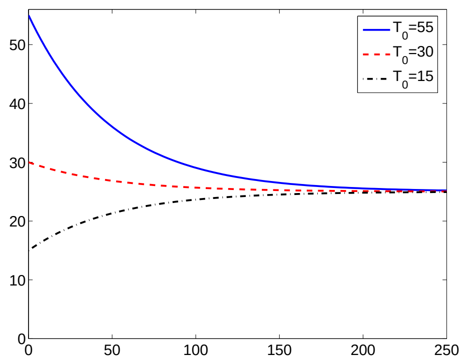


Figura 9.3: Representación gráfica de la función $T = M + (T_0 - M)e^{-kt}$, solución del problema de valor inicial (9.8), para $M = 25$, $k = 0.02$ y varios valores del dato inicial T_0.

9.2.3 Dinámica de poblaciones

El comportamiento de una población de seres vivos cuyo número de individuos varía en el tiempo puede también ser matemáticamente modelada mediante ecuaciones diferenciales. Se presenta aquí un caso sencillo.

En determinadas condiciones, el crecimiento de algunas poblaciones se rige por la siguiente ley, denominada **logística**:

$$p'(t) = r\,p(t) - m\,p^2(t). \tag{9.9}$$

En esta ecuación $p(t)$ representa el número de individuos de la población existentes en el instante t. El primer término de la derecha de esta ecuación $(r\,p(t))$ expresa matemáticamente el crecimiento natural de la población, debido a la reproducción: la población crece de forma proporcional al número de individuos de la misma. El segundo término $(-m\,p^2(t))$ intenta expresar el hecho de que, si los recursos (alimentos) son limitados, entonces los individuos de la población "compiten" por ellos, impidiendo un crecimiento ilimitado. Este término hace disminuir la velocidad a la que crece la población, razón por la que lleva signo menos.

Si en el instante inicial $t = 0$, el número de individuos es $p(0) = p_0$, entonces $p(t)$ es solución del siguiente problema de valor inicial:

$$\begin{cases} p'(t) = r\,p(t) - m\,p^2(t), \\ p(0) = p_0. \end{cases} \tag{9.10}$$

La solución general de (9.9) es:

$$p(t) = \frac{r}{m + C\,e^{-rt}}, \qquad C \in \mathbb{R} \text{ arbitraria},$$

y la solución particular que verifica la condición inicial $p(0) = p_0$ se obtiene para el valor de la constante arbitraria $C = \dfrac{r - mp_0}{p_0}$ y es:

$$p(t) = \frac{r\,p_0}{mp_0 + (r - mp_0)\,e^{-rt}}\,.$$

Su comportamiento cualitativo puede observarse en la Figura 9.4 para varios valores de la condición inicial p_0.

Obsérvese que, sea cual sea el número de individuos de la población inicial, esta tiende, con el tiempo, a estabilizarse en el valor constante $P = \dfrac{r}{m}$ (asíntota horizontal de $p(t)$).

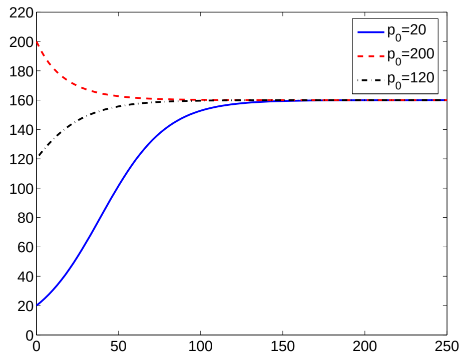


Figura 9.4: Gráfica de la solución del problema (9.10) con $r = 0.05$ y $m = 0.0003125$, para varios valores de p_0.

9.2.4 Dinámica de poblaciones: modelo presa-depredador

El caso, mucho más complicado desde el punto de vista matemático, en que hay dos especies diferentes que interaccionan, también se puede representar mediante ecuaciones diferenciales ordinarias.

Por ejemplo, se considera el caso de un sistema presa-predador, es decir, de un eco-sistema con dos poblaciones de dos especies distintas, en donde una de ellas es el alimento de la otra. Se denota por $p_1(t)$ el número de individuos de la población de presas y por $p_2(t)$ el número de individuos de la población de predadores.

En determinadas condiciones, un tal sistema se comporta según la ley siguiente, llamada **modelo de Lotka-Volterra**:

$$\begin{cases} p_1'(t) = r_1 p_1(t) - d_1 p_1(t) p_2(t), \\ p_2'(t) = -r_2 p_2(t) + d_2 p_1(t) p_2(t). \end{cases}$$

Este modelo es distinto de los anteriores, ya que aquí se tiene un **sistema diferencial**, es decir un sistema, con dos incógnitas $p_1(t)$ y $p_2(t)$, de dos ecuaciones diferenciales que relacionan las incógnitas con sus derivadas y con las otras incógnitas.

El término $r_1 p_1(t)$ de la primera ecuación representa el crecimiento natural (positivo) de la población de presas, en ausencia de predadores. El correspondiente término $-r_2 p_2(t)$ de la segunda ecuación representa el crecimiento de la población de predadores en ausencia de presas, que es negativo por falta de alimento.

Los términos $-d_1 p_1(t) p_2(t)$ y $d_2 p_1(t) p_2(t)$, por su parte, tienen en cuenta la iteracción entre ambas especies, que resulta en un decrecimiento de la población de presas y un crecimiento de la población de predadores (todos los coeficientes se suponen positivos).

Si se conocen el número de presas y el de predadores en un instante dado, $t = 0$, entonces se puede predecir el número de individuos de cada especie en cualquier instante posterior, mediante la solución del correspondiente problema de valor inicial:

$$\begin{cases} p_1'(t) = r_1 p_1(t) - d_1 p_1(t) p_2(t), \\ p_2'(t) = -r_2 p_2(t) + d_2 p_1(t) p_2(t)). \\ p_1(0) = A \\ p_2(0) = B. \end{cases}$$

Obsérvese que se impone una condición inicial para cada incógnita, p_1 y p_2.

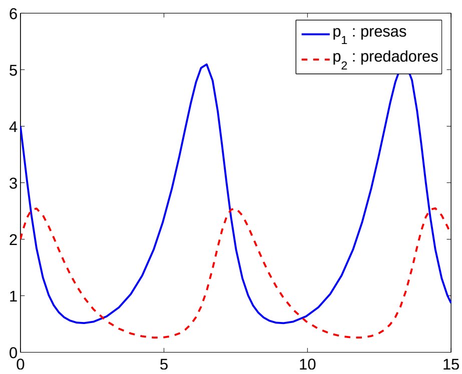


Figura 9.5: Representación de la solución del sistema de presa-predador, p_1 y p_2, sobre el intervalo temporal $[0, 10]$, para los valores de los coeficientes $r_1 = r_2 = d_1 = 1$, $d_2 = 0.5$ y de los datos iniciales $A = 4$ y $B = 2$.

9.3 Aproximación numérica de soluciones de ecuaciones diferenciales

Sólo para algunos (pocos) tipos muy especiales de ecuaciones diferenciales se dispone de fórmulas explícitas para calcular la expresión matemática de sus soluciones. Por ello, en la inmensa mayoría de los casos prácticos sólo es posible **aproximarlas**.

Los **algoritmos numéricos** de aproximación de soluciones de ecuaciones diferenciales proporcionan métodos para calcular **aproximaciones numéricas de los valores de dichas soluciones en algunos puntos**.

A modo simplemente orientativo, se expone aquí el más sencillo de dichos algoritmos: el **método de Euler**.

Se considera el problema de valor inicial (9.4), y se denota por $y = \varphi(t)$ su solución exacta, definida en un intervalo $I = [t_0, t_f]$.

Por ser solución de la ecuación, la función $\varphi(t)$ verifica:

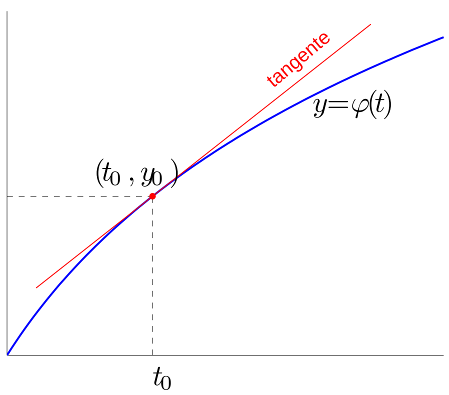
$$\varphi'(t) = f(t, \varphi(t)) \quad \forall\, t \in I = [t_0, t_f],$$

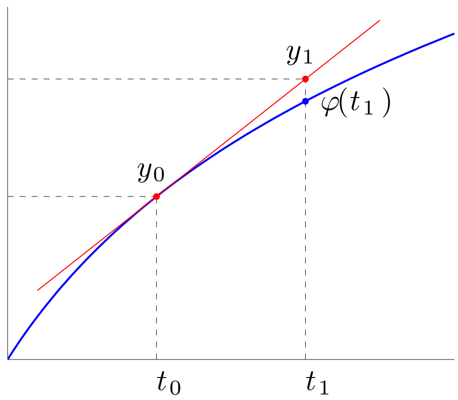
y, por la condición inicial, también verifica $\varphi(t_0) = y_0$ de donde se tiene:

$$\varphi'(t_0) = f(t_0, \varphi(t_0)) = f(t_0, y_0),$$

es decir, la pendiente a la curva $y = \varphi(t)$ en el punto (t_0, y_0) es $f(t_0, y_0)$ y por tanto, la ecuación de la recta tangente a la curva en el punto (t_0, y_0) es

$$y = y_0 + \varphi'(t_0)\,(t - t_0) = y_0 + f(t_0, y_0)\,(t - t_0).$$





Entonces, si la distancia $t_1 - t_0$ es pequeña, se puede "asimilar" la curva $y = \varphi(t)$ con su tangente en el punto (t_0, y_0) y por lo tanto aproximar el valor $y(t_1)$ por el valor que tome, en t_1, dicha tangente, que es:

$$y_1 = y_0 + f(t_0, y_0)\,(t_1 - t_0).$$

Una vez calculada una aproximación, y_1, del valor exacto $\varphi(t_1)$, para calcular una aproximación del valor de la solución $\varphi(t)$ en un punto $t_2 > t_1$, con $t_2 - t_1$ "pequeño", se reitera este procedimiento, tomando:

$$y_2 = y_1 + f(t_1, y_1)\,(t_2 - t_1)$$

como aproximación del valor exacto $\varphi(t_2)$ y así sucesivamente.

Así, se pueden aproximar los valores de la solución de (9.4) en $n+1$ puntos regularmente espaciados del intervalo $[t_0, t_f]$:

$$t_0 < t_1 < \cdots < t_n = t_f, \quad \text{con } t_{k+1} - t_k = h = \frac{t_f - t_0}{n}, \ \forall\, k = 0, 1, \ldots, n-1$$

calculando los valores $\{y_k, \ \ k = 0, \ldots, n\}$ mediante la siguiente fórmula de recurrencia:

$$\left\{ \begin{array}{l} y_0 = y(t_0) \\ y_{k+1} = y_k + hf(t_k, y_k), \quad k = 0, \ldots, n-1. \end{array} \right.$$

Bajo adecuadas hipótesis de regularidad, se puede demostrar que, si h es suficientemente pequeño, este método proporciona aproximaciones razonables de los valores de la solución exacta $\varphi(t)$ en los puntos t_k de la partición.