Tema 1

EL TEOREMA DE PEANO

En este tema vamos a probar que bajo la hipótesis de ser f continua en un entorno del punto (x_0, y_0), se puede garantizar la existencia, aunque no necesariamente la unicidad, de solución local del Problema de Cauchy

$$(PC) \quad \begin{cases} y' = f(x,y) \\ y(x_0) = y_0. \end{cases}$$

La justificación de la existencia de solución local del (PC) la vamos a realizar mediante la construcción de una familia de funciones continuas (las denominadas poligonales de Euler) de las que se podrá extraer una sucesión que converja uniformemente, en un entorno de x_0, a una función que resultará ser solución del Problema de Cauchy en dicho entorno.

Para poder llevar a cabo nuestro estudio, necesitamos un análisis previo de los conjuntos compactos en el espacio $C(I;\mathbb{R}^N)$ de las funciones continuas en un intervalo cerrado y acotado $I = [a,b]$, con valores en $\mathbb{R}^N$.

1 Compacidad en $C(I;\mathbb{R}^N)$: el Teorema de Ascoli-Arzelá

Recordemos que $C(I;\mathbb{R}^N)$ es un espacio de Banach (es decir, un espacio normado completo), si sobre el mismo consideramos la norma del supremo definida por $\|\varphi\|_{C(I;\mathbb{R}^N)} := \max\limits_{x\in I} |\varphi(x)|$, donde por $|\cdot|$ denotamos a una norma fijada en $\mathbb{R}^N$ (por ejemplo la euclidiana; recuérdese a este respecto que todas las normas en $\mathbb{R}^N$ son equivalentes).

Señalemos también que, como se puede comprobar de inmediato, una sucesión de funciones $\{\varphi_n\}_{n\geq 1}$ en $C(I;\mathbb{R}^N)$ es convergente a φ en dicho espacio si y sólo si la sucesión $\{\varphi_n\}_{n\geq 1}$ es uniformemente convergente a φ en el intervalo cerrado y acotado I, es decir, para todo $\varepsilon > 0$ existe un n_ε, dependiente sólamente de ε, tal que $|\varphi_n(x) - \varphi(x)| \leq \varepsilon$ para todo $x \in I$, para todo $n \geq n_\varepsilon$.

De manera general, sea E un espacio normado. Suponemos bien conocidas las siguientes afirmaciones:

a) Un conjunto $K \subset E$ es un subconjunto compacto de E si y sólo si K es secuencialmente compacto, es decir, de toda sucesión de elementos de K se puede extraer una subsucesión convergente en E a un elemento de K.

b) Un conjunto $F \subset E$ se dice que es un subconjunto relativamente compacto de E si su clausura $\overline{F}$ en E es un compacto de E. Se satisface que $F \subset E$

es un subconjunto relativamente compacto de E si y sólo si F es secuencialmente relativamente compacto, es decir, de toda sucesión de elementos de F se puede extraer una subsucesión convergente en E (a un elemento no necesariamente de F).

c) Si $K \subset E$ es un subconjunto compacto de E, entonces K es cerrado y acotado en E. Sin embargo, el recíproco de esta afirmación no es cierta, salvo que E sea de dimensión finita (lema de Riesz).

Así pues, si $\mathcal{F} \subset C(I;\mathbb{R}^N)$ es un compacto de de $C(I;\mathbb{R}^N)$, entonces $\mathcal{F}$ es en particular un subconjunto acotado de $C(I;\mathbb{R}^N)$, es decir, existe $M > 0$ finito tal que

$$|\varphi(x)| \leq M \quad \text{para todo } x \in I, \text{ para toda } \varphi \in \mathcal{F}. \tag{1}$$

Por razones evidentes, cuando se satisface (1), se dice también que $\mathcal{F}$ es uniformemente acotada en I.

Teniendo en cuenta la afirmación c), y dado que $C(I;\mathbb{R}^N)$ es un espacio que no es de dimensión finita, no todo cerrado y acotado de dicho espacio será un compacto del mismo. Para caracterizar los compactos de dicho espacio, necesitamos introducir el concepto de equicontinuidad.

Definición 1.1 *Se dice que $\mathcal{F} \subset C(I;\mathbb{R}^N)$ es equicontinua en I si para todo $\varepsilon > 0$ existe un $\delta > 0$, que sólo depende de ε, tal que si x_1 y x_2 pertenecen a I y satisfacen $|x_1 - x_2| \leq \delta$, entonces necesariamente $|\varphi(x_1) - \varphi(x_2)| \leq \varepsilon$ para toda $\varphi \in \mathcal{F}$.*

Observación 1.2 *Es inmediato ver que si $\mathcal{F} \subset C(I;\mathbb{R}^N)$ está constituida por un número finito de funciones, entonces es equicontinua en I.*

Por otra parte, se deja como ejercicio comprobar que si $\mathcal{F} \subset C^1(I;\mathbb{R}^N)$ es tal que la familia de derivadas $\{\varphi' : \ \varphi \in \mathcal{F}\}$ es un subconjunto acotado de $C(I;\mathbb{R}^N)$, entonces $\mathcal{F}$ es equicontinua en I.

Estamos ahora en condiciones de caracterizar los compactos de de $C(I;\mathbb{R}^N)$.

Teorema 1.3 ***(Teorema de Ascoli-Arzelá)*** *Una familia $\mathcal{F} \subset C(I;\mathbb{R}^N)$ es un subconjunto relativamente compacto de $C(I;\mathbb{R}^N)$ si y sólo si $\mathcal{F}$ es uniformemente acotada y equicontinua en I.*

Demostración.

$\boxed{\Longrightarrow}$ Supongamos que $\mathcal{F} \subset C(I;\mathbb{R}^N)$ es un subconjunto relativamente compacto de $C(I;\mathbb{R}^N)$.

En tal caso, $\overline{\mathcal{F}}$, la clausura de $\mathcal{F}$ en $C(I;\mathbb{R}^N)$, es un subconjunto compacto y por tanto acotado en $C(I;\mathbb{R}^N)$, con lo que en particular, como $\mathcal{F} \subset \overline{\mathcal{F}}$, obtenemos que $\mathcal{F}$ es también un subconjunto acotado de $C(I;\mathbb{R}^N)$.

Demostremos que $\overline{\mathcal{F}}$ es equicontinua en I, con lo que en particular también lo será $\mathcal{F}$. Consideremos fijado $\varepsilon > 0$, y para cada $\varphi \in \overline{\mathcal{F}}$ denotemos por $B(\varphi;\varepsilon/3)$ a la bola abierta en $C(I;\mathbb{R}^N)$ de centro φ y radio $\varepsilon/3$. Evidentemente la familia $\{B(\varphi;\varepsilon/3) : \ \varphi \in \overline{\mathcal{F}}\}$ constituye un recubrimiento de $\overline{\mathcal{F}}$ por conjuntos abiertos de $C(I;\mathbb{R}^N)$, con lo que, por ser $\overline{\mathcal{F}}$ compacto, de este recubrimiento se puede extraer un subrecubrimiento finito, es decir, existe una colección finita $\{\varphi_1, ..., \varphi_n\} \subset \overline{\mathcal{F}}$ tal que

$$\overline{\mathcal{F}} \subset \bigcup_{i=1}^{n} B(\varphi_i; \varepsilon/3). \tag{2}$$

Como $\{\varphi_1, ..., \varphi_n\}$ es una familia finita, es equicontinua en I, y por tanto existe un $\delta > 0$ tal que si x_1 y x_2 pertenecen a I y satisfacen $|x_1 - x_2| \leq \delta$, entonces forzosamente $|\varphi_i(x_1) - \varphi_i(x_2)| \leq \varepsilon/3$ para todo $i = 1, ..., n$.

Sea φ una función cualquiera de $\overline{\mathcal{F}}$. Por (2), existe un $j \in \{1, .., n\}$ tal que $|\varphi(x) - \varphi_j(x)| < \varepsilon/3$ para todo $x \in I$. En consecuencia, si x_1 y x_2 pertenecen a I y satisfacen $|x_1 - x_2| \leq \delta$, se tiene

$$\begin{aligned} |\varphi(x_1) - \varphi(x_2)| &\leq |\varphi(x_1) - \varphi_j(x_1)| + |\varphi_j(x_1) - \varphi_j(x_2)| + |\varphi_j(x_2) - \varphi(x_2)| \\ &< \varepsilon, \end{aligned}$$

y por tanto $\overline{\mathcal{F}}$ es equicontinua en I.

$\boxed{\Longleftarrow}$ Supongamos ahora que $\mathcal{F} \subset C(I; \mathbb{R}^N)$ es uniformemente acotada y equicontinua en I. Hemos de probar que $\mathcal{F}$ es un subconjunto relativamente compacto de $C(I; \mathbb{R}^N)$, y para ello basta demostrar que dada una sucesión $\{\varphi_n\}_{n\geq 1} \subset \mathcal{F}$, podemos extraer de ella una sucesión convergente en $C(I; \mathbb{R}^N)$.

Vamos a comenzar construyendo una subsucesión que converja en $\mathbb{Q} \cap I$, el conjunto de todos los puntos racionales de I, usando para ello el principio de selección diagonal de Cantor. Como $\mathbb{Q} \cap I$ es numerable, podemos suponer elegida una enumeración del mismo,

$$\mathbb{Q} \cap I = \{r_k\}_{k\geq 1}.$$

Por ser $\mathcal{F}$ uniformemente acotada en I, en particular la sucesión $\{\varphi_n(r_1)\}_{n\geq 1}$ está acotada en $\mathbb{R}^N$, con lo que por el teorema de Bolzano-Weierstrass podemos asegurar que existe una subsucesión

$$\{\varphi_{n_1}\}_{n_1\geq 1} \subset \{\varphi_n\}_{n\geq 1} \quad \text{tal que } \{\varphi_{n_1}(r_1)\}_{n_1\geq 1} \text{ es convergente en } \mathbb{R}^N.$$

Observemos que los términos de la subsucesión conservan el orden relativo que tenían en la sucesión de partida, es decir, $1_1 < 2_1 < 3_1 < ...$

Por la misma razón que precedentemente, la sucesión $\{\varphi_{n_1}(r_2)\}_{n_1\geq 1}$ está acotada en $\mathbb{R}^N$, con lo que existe una subsucesión

$$\{\varphi_{n_2}\}_{n_2\geq 1} \subset \{\varphi_{n_1}\}_{n_1\geq 1} \quad \text{tal que } \{\varphi_{n_2}(r_2)\}_{n_2\geq 1} \text{ es convergente en } \mathbb{R}^N.$$

Obsérvese que evidentemente $\{\varphi_{n_2}(r_1)\}_{n_2\geq 1}$ es también convergente en $\mathbb{R}^N$, por ser una subsucesión de una sucesión convergente.

De manera recurrente, se obtiene que para todo entero $k \geq 1$ existe una subsucesión

$$\{\varphi_{n_{k+1}}\}_{n_{k+1}\geq 1} \subset \{\varphi_{n_k}\}_{n_k\geq 1} \quad \text{tal que } \{\varphi_{n_{k+1}}(r_j)\}_{n_{k+1}\geq 1} \text{ es convergente en } \mathbb{R}^N,$$

para todo $j = 1, ..., k, k+1$.

Consideremos entonces la denominada sucesión diagonal, $\{\varphi_{n_n}\}_{n_n\geq 1}$. Es claro que por mantenerse el orden en cada subsucesión, $n_n \geq n$, y por tanto

$\{\varphi_{n_n}\}_{n_n\geq 1}$ es una verdadera subsucesión de $\{\varphi_n\}_{n\geq 1}$, y además, como por construcción, para cada $k \geq 1$ se satisface que $\{\varphi_{n_n}\}_{n_n\geq k} \subset \{\varphi_{n_k}\}_{n_k\geq 1}$, obtenemos que $\{\varphi_{n_n}(r_k)\}_{n_n\geq 1}$ es convergente en $\mathbb{R}^N$, para todo entero $k \geq 1$, es decir,

$$\text{existe } \lim_{n_n\to\infty} \varphi_{n_n}(r) \in \mathbb{R}^N, \text{ para todo } r \in \mathbb{Q}\cap I. \tag{3}$$

Vamos a probar ahora que la sucesión $\{\varphi_{n_n}\}_{n_n\geq 1}$ es de Cauchy en $C(I;\mathbb{R}^N)$, con lo que, teniendo en cuenta que este espacio es de Banach, habremos finalizado la prueba del teorema.

Sea $\varepsilon > 0$ fijado. Por ser $\mathcal{F}$ equicontinua en I, y en particular serlo la sucesión $\{\varphi_{n_n}\}_{n_n\geq 1}$, existe un $\delta > 0$ tal que si x_1 y x_2 pertenecen a I y satisfacen $|x_1-x_2| \leq \delta$, entonces forzosamente $|\varphi_{n_n}(x_1)-\varphi_{n_n}(x_2)| \leq \varepsilon/3$ para todo $n_n \geq 1$.

Fijado ese $\delta > 0$, como $\mathbb{Q}\cap I$ es denso en I, resulta evidente que

$$I \subset \bigcup_{r\in\mathbb{Q}\cap I} (r-\delta, r+\delta),$$

y como I es compacto, podemos afirmar que existe un entero $k_0 \geq 1$ tal que

$$I \subset \bigcup_{k=1}^{k_0} (r_k-\delta, r_k+\delta). \tag{4}$$

Dado que por (3) sabemos que existe $\lim\limits_{n_n\to\infty} \varphi_{n_n}(r_k)$ para todo $k = 1, ..., k_0$, concluimos que existe un entero $n_0 \geq 1$ tal que si $n_n, m_m \geq n_0$, entonces

$$|\varphi_{n_n}(r_k) - \varphi_{m_m}(r_k)| \leq \varepsilon/3 \quad \text{para todo } k = 1, ..., k_0..$$

Sea ahora $x \in I$ fijado. Por (4) podemos afirmar que existe un $\overline{k} \in \{1, ..., k_0\}$ tal que $|x - r_{\overline{k}}| \leq \delta$, y por tanto, si $n_n, m_m \geq n_0$,

$$\begin{aligned} |\varphi_{n_n}(x) - \varphi_{m_m}(x)| &\leq |\varphi_{n_n}(x) - \varphi_{n_n}(r_{\overline{k}})| + |\varphi_{n_n}(r_{\overline{k}}) - \varphi_{m_m}(r_{\overline{k}})| \\ &\quad +|\varphi_{m_m}(r_{\overline{k}}) - \varphi_{m_m}(x)| \\ &< \varepsilon, \end{aligned}$$

y en consecuencia, como $x \in I$ es arbitrario, hemos probado que la sucesión $\{\varphi_{n_n}\}_{n_n\geq 1}$ es de Cauchy en $C(I;\mathbb{R}^N)$. $\square$

Observación 1.4 *Se dice que $\mathcal{F}$ es puntualmente acotada en I si $\sup\limits_{\varphi\in\mathcal{F}} |\varphi(x)| < \infty$ para cada $x \in I$. En el teorema precedente se puede sustituir la hipótesis de ser $\mathcal{F}$ uniformemente acotada en I por la de ser puntualmente acotada en I. En concreto, pruébese como ejercicio que si $\mathcal{F}$ es equicontinua y puntualmente acotada en I, entonces es uniformemente acotada en I.*

2 Soluciones aproximadas del Problema de Cauchy. Teorema de Peano

Sean dados un abierto no vacío $\Omega \subset \mathbb{R}^{N+1}$, una función $f \in C(\Omega;\mathbb{R}^N)$, y un punto $(x_0, y_0) \in \Omega$, y consideremos el Problema de Cauchy (PC) para estos datos formulado al comienzo del tema.

Definición 2.1 *Sean $I = [a,b]$ un intervalo cerrado y acotado tal que $x_0 \in I$, y $\varepsilon > 0$ un número positivo. Una solución ε-aproximada de (PC) en I es cualquier función φ_ε tal que*

i) $\varphi_\varepsilon \in C(I; \mathbb{R}^N)$,

ii) $(x, \varphi_\varepsilon(x)) \in \Omega$ *para todo* $x \in I$,

iii) *existe una partición finita* $a = a_0 < a_1 < ... < a_m = b$ *de* I, *tal que* $\varphi_\varepsilon \in C^1([a_i, a_{i+1}]; \mathbb{R}^N)$, *para todo* $i = 0, 1, ..., m-1$,

iv) *si* $J \subset I$ *es un intervalo tal que* $\varphi_\varepsilon \in C^1(J; \mathbb{R}^N)$, *entonces*

$$|\varphi_\varepsilon'(x) - f(x, \varphi_\varepsilon(x))| \leq \varepsilon, \quad \forall\, x \in J, \tag{5}$$

v) $\varphi_\varepsilon(x_0) = y_0$.

Como vamos a ver ahora, toda solución ε-aproximada de (PC) en I satisface una estimación que generaliza la igualdad obtenida el curso pasado en la formulación integral del problema (PC).

Lema 2.2 *Sean $I = [a,b]$ un intervalo cerrado y acotado tal que $x_0 \in I$, y $\varepsilon > 0$ un número positivo. Si φ_ε es una solución ε-aproximada de (PC) en I, entonces*

$$\left|\varphi_\varepsilon(x) - y_0 - \int_{x_0}^{x} f(s, \varphi_\varepsilon(s))\, ds\right| \leq \varepsilon |x - x_0|, \quad \forall\, x \in I. \tag{6}$$

Demostración. Vamos a demostrar (6) suponiendo $x > x_0$. El caso $x < x_0$ se demuestra de manera análoga.

Consideremos por tanto fijado $x \in I$ tal que $x > x_0$. Por iii), podemos afirmar que existe una partición finita $x_0 < ... < x_n = x$ del intervalo $[x_0, x]$, con $1 \leq n \leq m$, tal que $\varphi_\varepsilon \in C^1([x_i, x_{i+1}]; \mathbb{R}^N)$, para todo $i = 0, 1, ..., n-1$, con lo que en particular

$$\varphi_\varepsilon(x_{i+1}) - \varphi_\varepsilon(x_i) = \int_{x_i}^{x_{i+1}} \varphi_\varepsilon'(s)\, ds \quad \text{para todo } i = 0, 1, ..., n-1,$$

y en consecuencia, por la propiedad iv) de la definición de solución ε-aproximada,

$$\begin{aligned} \left|\varphi_\varepsilon(x_{i+1}) - \varphi_\varepsilon(x_i) - \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(s, \varphi_\varepsilon(s))\, ds\right| &= \left|\int_{x_i}^{x_{i+1}} (\varphi_\varepsilon'(s) - f(s, \varphi_\varepsilon(s)))\, ds\right| \\ &\leq \varepsilon |x_{i+1} - x_i|, \end{aligned} \tag{7}$$

para todo $i = 0, 1, ..., n-1$.

Pero

$$\varphi_\varepsilon(x) - y_0 - \int_{x_0}^{x} f(s, \varphi_\varepsilon(s))\, ds = \sum_{i=0}^{n-1} \left(\varphi_\varepsilon(x_{i+1}) - \varphi_\varepsilon(x_i) - \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(s, \varphi_\varepsilon(s))\, ds\right),$$

y en consecuencia, por (7),

$$\begin{aligned} \left|\varphi_\varepsilon(x) - y_0 - \int_{x_0}^{x} f(s, \varphi_\varepsilon(s))\, ds\right| &\leq \varepsilon \sum_{i=0}^{n-1} |x_{i+1} - x_i| \\ &= \varepsilon |x - x_0|, \end{aligned}$$

como queríamos demostrar. $\square$

A continuación vamos a demostrar la existencia de soluciones ε-aproximadas de (PC) en un intervalo de centro x_0 suficientemente pequeño. La demostración va a ser constructiva, y las soluciones ε-aproximadas que vamos a construir son las denominadas *poligonales de Euler*.

Lema 2.3 *Sean $f \in C(\Omega; \mathbb{R}^N)$, y $(x_0, y_0) \in \Omega$, dados. Existen números $\delta > 0$, $M > 0$, y un compacto $K \subset \Omega$, tales que para cada $\varepsilon > 0$ existe una solución ε-aproximada φ_ε de (PC) en el intervalo $I_\delta := [x_0 - \delta, x_0 + \delta]$, tal que además,*

$$(x, \varphi_\varepsilon(x)) \in K \quad \forall\, x \in I_\delta, \tag{8}$$

$$|\varphi_\varepsilon(x) - \varphi_\varepsilon(\widetilde{x})| \le M|x - \widetilde{x}| \quad \forall\, x, \widetilde{x} \in I_\delta. \tag{9}$$

Demostración. Como Ω es abierto y $(x_0, y_0) \in \Omega$, existe un $a_0 > 0$ tal que

$$K := [x_0 - a_0, x_0 + a_0] \times \overline{B}(y_0; a_0) \subset \Omega.$$

Evidentemente el "rectángulo" K es un subconjunto compacto de Ω, y por ser f continua, está bien definido

$$M := \max_{(x,y)\in K} |f(x, y)|.$$

Tomemos

$$\delta := \min\{a_0, a_0/M\}.$$

Fijado $\varepsilon > 0$, vamos a construir la poligonal de Euler que va resultar ser solución ε-aproximada de (PC) en el intervalo $I_\delta = [x_0 - \delta, x_0 + \delta]$. Para ello, observemos que como f es uniformemente continua en el compacto K, fijado $\varepsilon > 0$, existe un $\rho > 0$ tal que

$$(x, y), (\widetilde{x}, \widetilde{y}) \in K,\ |x - \widetilde{x}| \le \rho,\ |y - \widetilde{y}| \le \rho \implies |f(x, y) - f(\widetilde{x}, \widetilde{y})| \le \varepsilon. \tag{10}$$

Tomemos ese $\rho > 0$, y denotemos

$$\alpha := \min\{\rho, \rho/M\}.$$

Evidentemente, existe una partición finita de I_δ, de la forma

$$x_0 - \delta = x_{-n} < x_{-(n-1)} < ... < x_{-1} < x_0 < x_1 < ... < x_{n-1} < x_n = x_0 + \delta,$$

tal que

$$|x_{i+1} - x_i| \le \alpha \quad \forall\, i \in \{-n, -(n-1), ..., n-1\}. \tag{11}$$

Una vez fijados estos puntos, se define por recurrencia la poligonal de Euler φ_ε (a partir de ahora, en lo que resta de demostración, omitimos por comodidad el subíndice ε) como

$$\varphi(x) = \begin{cases} y_0 & \text{si } x = x_0, \\ \varphi(x_i) + (x - x_i) f(x_i, \varphi(x_i)) & \text{si } x \in (x_i, x_{i+1}],\ i = 0, 1, ..., n-1, \\ \varphi(x_{-i}) + (x - x_{-i}) f(x_{-i}, \varphi(x_{-i})) & \text{si } x \in [x_{-(i+1)}, x_{-i}),\ i = 0, 1, ..., n-1. \end{cases} \tag{12}$$

Como se puede apreciar, cuando $N = 1$, la función φ es una poligonal construida a partir del punto (x_0, y_0), y adoptando como pendiente en cada tramo el valor que f tenga en el punto a partir del que se construye dicho tramo.

Vamos a comprobar en primer lugar que los puntos $(x_i, \varphi(x_i))$, $i \in \{-(n-1), -(n-2), ..., n-1\}$, que se van construyendo de manera recursiva por (12), pertenecen todos a K, con lo que en particular pertenecen todos a Ω, y la definición (12) tiene sentido. Lo vamos a ver razonando a la derecha de x_0, siendo similar el razonamiento a la izquierda de x_0.

Desde luego, $(x_0, \varphi(x_0)) = (x_0, y_0) \in K$. Supongamos que $(x_0, \varphi(x_0))$, $(x_1, \varphi(x_1))$, ..., $(x_i, \varphi(x_i))$, con $0 \leq i \leq n-2$, pertenecen todos a K. Vamos a probar que entonces también $(x_{i+1}, \varphi(x_{i+1}))$ pertenece a K. Por un lado observemos que $x_{i+1} - x_0 \leq \delta \leq a_0$, y por otro que

$$\begin{aligned} |\varphi(x_{i+1}) - y_0| &\leq |\varphi(x_{i+1}) - \varphi(x_i)| + |\varphi(x_i) - \varphi(x_{i-1})| + ... + |\varphi(x_1) - y_0| \\ &= |f(x_i, \varphi(x_i))||x_{i+1} - x_i| + ... + |f(x_0, y_0)||x_1 - x_0| \\ &\leq M(|x_{i+1} - x_i| + |x_i - x_{i-1}| + ... + |x_1 - x_0|) \\ &= M(x_{i+1} - x_0) \leq M\delta \leq a_0. \end{aligned}$$

En consecuencia, $(x_{i+1}, \varphi(x_{i+1})) \in K$.

Para terminar, probemos que la poligonal de Euler definida por (12) es solución ε-aproximada de (PC) en I_δ. Para ello, por simplicidad, vamos a seguir razonando a la derecha de x_0.

Las propiedades i) y v) de la definición de solución ε-aproximada de (PC) en I_δ se tienen por construcción. Lo mismo sucede con la propiedad iii), ya que en cada intervalo $[x_i, x_{i+1}]$, la derivada viene dada por $\varphi'(x) = f(x_i, \varphi(x_i))$, que es un vector constante.

Teniendo en cuenta que los puntos $(x_i, \varphi(x_i))$ pertenecen todos a K, y que este conjunto es convexo, de la fórmula (12) se deduce inmediatamente (8), y en particular que φ satisface la propiedad ii).

Para ver que φ también satisface la propiedad iv), observemos que si $x \in [x_i, x_{i+1}]$, entonces

$$\varphi'(x) - f(x, \varphi(x)) = f(x_i, \varphi(x_i)) - f(x, \varphi(x)).$$

Pero como $|x - x_i| \leq \alpha \leq \rho$, y

$$|\varphi(x) - \varphi(x_i)| = |(x - x_i) f(x_i, \varphi(x_i))| \leq M\alpha \leq \rho,$$

de (10) deducimos que

$$|\varphi'(x) - f(x, \varphi(x))| = |f(x_i, \varphi(x_i)) - f(x, \varphi(x))| \leq \varepsilon.$$

Finalmente, se deja como ejercicio comprobar que φ satisface (9). $\square$

Estamos ahora en condiciones de demostrar el Teorema de Peano sobre existencia de solución local del Problema de Cauchy para un sistema diferencial ordinario de primer orden en forma explícita.

Teorema 2.4 ***(Teorema de Peano)*** *Dados un abierto no vacío $\Omega \subset \mathbb{R}^{N+1}$, una función $f \in C(\Omega; \mathbb{R}^N)$, y un punto $(x_0, y_0) \in \Omega$, existe un $\delta > 0$ tal que en el intervalo $I_\delta = [x_0 - \delta, x_0 + \delta]$ existe al menos una solución del problema (PC).*

Demostración. Tomemos como $\delta > 0$ el del Lema 2.3, y consideremos una sucesión de números $\varepsilon_n > 0$, $n \geq 1$, tal que $\lim\limits_{n\to\infty} \varepsilon_n = 0$.

Para cada ε_n, denotemos $\varphi_n = \varphi_{\varepsilon_n}$, la solución ε_n-aproximada satisfaciendo (8) y (9), cuya existencia está garantizada por el Lema 2.3. Evidentemente, obtenemos así una sucesión $\{\varphi_n\}_{n\geq 1} \subset C(I_\delta; \mathbb{R}^N)$ tal que

- $\{\varphi_n\}_{n\geq 1}$ es uniformemente acotada en I_δ, ya que por (9) y ser $\varphi_n(x_0) = y_0$,

$$|\varphi_n(x)| \leq |y_0| + M|x - x_0| \leq |y_0| + M\delta, \quad \forall\, x \in I_\delta, \quad \forall\, n \geq 1,$$

- $\{\varphi_n\}_{n\geq 1}$ es equicontinua en I_δ, ya que por (8), dado $\varepsilon > 0$, si x y $\widetilde{x}$ pertenecen a I_δ y satisfacen $|x - \widetilde{x}| \leq \varepsilon/M$, entonces

$$|\varphi_n(x) - \varphi_n(\widetilde{x})| \leq M|x - \widetilde{x}| \leq \varepsilon, \quad \forall\, n \geq 1.$$

En consecuencia, por el Teorema de Ascoli-Arzelá, existen una subsucesión $\{\varphi_{n_k}\}_{n_k\geq 1} \subset \{\varphi_n\}_{n\geq 1}$ y una función $\varphi \in C(I_\delta; \mathbb{R}^N)$ tales que $\varphi_{n_k} \to \varphi$ en $C(I_\delta; \mathbb{R}^N)$ cuando $n_k \to \infty$.

Para terminar, vamos a comprobar que φ es solución de (PC) en I_δ.

Ya sabemos que $\varphi \in C(I_\delta; \mathbb{R}^N)$, y como por (8) $(x, \varphi_{n_k}(x)) \in K$ para todo $x \in I_\delta$ y todo $n_k \geq 1$, obtenemos que

$$(x, \varphi(x)) = \lim_{n_k\to\infty} (x, \varphi_{n_k}(x)) \in K \subset \Omega, \quad \forall\, x \in I_\delta.$$

Por este hecho, por ser f uniformemente continua en K, y por la convergencia uniforme de φ_{n_k} a φ en I_δ, se tiene que

$$\lim_{n_k\to\infty} \int_{x_0}^{x} f(s, \varphi_{n_k}(s))\, ds = \int_{x_0}^{x} f(s, \varphi(s))\, ds, \quad \forall\, x \in I_\delta.$$

Por tanto, teniendo en cuenta el Lema 2.2, para todo $x \in I_\delta$ se satisface

$$\begin{aligned} \left|\varphi(x) - y_0 - \int_{x_0}^{x} f(s, \varphi(s))\, ds\right| &= \lim_{n_k\to\infty} \left|\varphi_{n_k}(x) - y_0 - \int_{x_0}^{x} f(s, \varphi_{n_k}(s))\, ds\right| \\ &\leq \lim_{n_k\to\infty} \varepsilon_{n_k} |x - x_0| = 0, \end{aligned}$$

y por tanto φ satisface la formulación integral de (PC) en I_δ, con lo que el teorema queda demostrado. $\square$

Observación 2.5 *Resulta sencillo obtener la versión del teorema 2.4 en el caso de una edo de orden n en forma explícita.*

Teorema 2.6 *Sean $\Omega \subset \mathbb{R}^{n+1}$ un abierto no vacío, $g \in C(\Omega)$, y $(x_0, y_0, y_0', ..., y_0^{(n-1}) \in \Omega$ dados. Entonces existe un $\delta > 0$ tal que en el intervalo $I_\delta = [x_0 - \delta, x_0 + \delta]$ existe al menos una solución del Problema de Cauchy*

$$\begin{cases} y^{(n} = g(x, y, y', ..., y^{(n-1)}) \\ y(x_0) = y_0, y'(x_0) = y_0', ..., y^{(n-1}(x_0) = y_0^{(n-1}. \end{cases}$$

Observación 2.7 *Bajo las condiciones del Teorema de Peano, no está garantizada la unicidad de solución. Así por ejemplo, si consideramos el caso en que* $\Omega = \mathbb{R}^2$*, la función* f *viene dada por* $f(x,y) = y^{2/3}$ *para todo* $(x,y) \in \mathbb{R}^2$*, y el dato inicial es* $(x_0, y_0) = (0,0)$*, estamos en las condiciones del Teorema de Peano, pero dado* $\delta > 0$ *todas las funciones de la forma*

$$\varphi_{\alpha\beta}(x) = \begin{cases} \left(\dfrac{x-\alpha}{3}\right)^3 & \text{si } x \in [-\delta, \alpha), \\ 0 & \text{si } x \in [\alpha, \beta], \\ \left(\dfrac{x-\beta}{3}\right)^3 & \text{si } x \in (\beta, \delta], \end{cases}$$

con $-\delta < \alpha < \beta < \delta$ *son soluciones en* $[-\delta, \delta]$ *del correspondiente* (PC)*.*

De hecho puede demostrarse que, bajo las condiciones del Teorema de Peano, si para un dato inicial existen más de una solución del correspondiente (PC)*, entonces existen infinitas. A este respecto, para más detalles, se puede consultar en [2] o en [3] el Teorema de Peano-Kneser.*

Referencias

[1] E.A. Coddington y N. Levinson, Theory of ordinary differential equations, McGraw & Hill, New York, 1955.

[2] C. Corduneanu, Principles of Differential and Integral Equations, Chelsea Publishing, New York, 1977.

[3] P. Hartman, Ordinary differential equations, John Wiley & Sons, Inc., New York, 1964.