Tema 2

OTROS RESULTADOS SOBRE EL PROBLEMA DE CAUCHY

1 Ecuaciones diferenciales ordinarias implícitas. Soluciones singulares

En esta sección consideramos algunas cuestiones que están fuera del marco de la teoría general que se ha estudiado hasta ahora. Estas cuestiones están ligadas a la no unicidad de soluciones y a las edo dadas en forma implícita.

a) Para empezar, consideremos el Problema de Cauchy

$$(PC)_1 \quad \begin{cases} y' = y^{2/3}, \\ y(x_0) = y_0, \end{cases}$$

que ya ha sido considerado en el tema 1 en el caso $x_0 = y_0 = 0$.

En este caso $f(x, y) = y^{2/3}$ es continua en todo $\mathbb{R}^2$, y el Problema de Cauchy puede plantearse en cualquier punto $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$, y en particular $y'(x_0, y_0)$, es decir, $f(x_0, y_0)$, está siempre bien determinado de manera unívoca.

Ahora bien, si $y_0 \neq 0$, el problema $(PC)_1$ se encuentra en las hipótesis del Teorema de Picard, y por tanto el problema presenta existencia y unicidad de solución local; mientras que si $y_0 = 0$ sólo hay existencia de soluciones locales, pero no unicidad.

Si se resuelve la edo $y' = y^{2/3}$ por métodos elementales, se obtiene como "solución general" la expresión $y = (x - c)^3/27$, y como solución del $(PC)_1$ la función $y = (x - x_0 + 3y_0^{1/3})^3/27$.

Obsérvese que en la "solución general" no está contemplada la solución $y = 0$ que contiene a todos los puntos de no unicidad para $(PC)_1$. Además, existen muchas otras soluciones de la edo $y' = y^{2/3}$ que no están incluidas en la "solución general", por ejemplo todas las funciones $\varphi_{\alpha\beta}$ de la observación 2.7 del tema 1.

Observemos finalmente que la solución $y = 0$ es la envolvente de la familia de curvas planas definidas por la "solución general". Recordemos a este respecto que dada una familia de curvas planas $\Phi(x, y, c) = 0$, se denomina envolvente de dicha familia a una curva (si existe) tal que que por cada uno de sus puntos pasa una curva de la familia y es tangente a ella en dicho punto. Así por ejemplo, las rectas de ecuación $y = \pm 1$ son envolventes de la familia de circunferencias dada por $(x - c)^2 + y^2 = 1$; y toda circunferencia es envolvente de la familia formada por sus rectas tangentes. Bajo condiciones suficientes de regularidad, la envolvente de una familia de curvas planas dadas por $\Phi(x, y, c) = 0$ se encuentra entre las soluciones de

$$\begin{cases} \Phi(x, y, c) = 0, \\ \dfrac{\partial \Phi}{\partial c}(x, y, c) = 0. \end{cases}$$

Volviendo sobre $(PC)_1$, señalemos finalmente que todos los puntos de $\mathbb{R}^2$ tienen una propiedad de regularidad, y ésta es que en un entorno de cada punto la determinación de y' a partir de (x, y) existe y es unívoca, viniendo dada por la fórmula expícita que proporciona la edo $y' = y^{2/3}$.

b) Consideremos ahora el Problema de Cauchy

$$(PC)_2 \quad \begin{cases} y' = \dfrac{y + \sqrt{x^2 - y^2}}{x}, \\ y(x_0) = y_0. \end{cases}$$

La edo que aparece en $(PC)_2$ es homogénea, y tiene por "solución general" $y = x\,\mathrm{sen}(\log|Cx|)$. La función $f(x, y) = \dfrac{y + \sqrt{x^2 - y^2}}{x}$ está bien definida como función real, y es continua, en el conjunto $\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \ x \neq 0 \ x^2 - y^2 \geq 0\}$, pero este conjunto no es abierto. Si tomamos el punto (x_0, y_0) en el interior de Ω, es decir, si tomamos $x_0 \neq 0$ y $x_0^2 - y_0^2 > 0$, entonces f es C^1 en un entorno de dicho punto, en el citado entorno el problema $(PC)_2$ se encuentra en las condiciones del teorema de Picard, y tenemos garantizada existencia y unicidad de solución local a $(PC)_2$ en este caso.

Por los puntos de la forma $(x_0, \pm x_0) \neq (0, 0)$, que no están en el interior de Ω, pasan las soluciones $y = \pm x$, con $x \neq 0$. En dichos puntos deja de ser cierta la condición de regularidad que poseían los puntos del interior de Ω. Más exactamente, en cualquier entorno de $(x_0, \pm x_0)$ hay puntos donde no es posible determinar y' de manera única (en este caso, ni siquiera determinar y').

Las soluciones $y = \pm x$, con $x \neq 0$, que están formadas por puntos que no poseen la propiedad de regularidad citada, se denominan soluciones singulares. Puede observarse que estas soluciones singulares están constituidas por los terminales de las soluciones maximales de $(PC)_2$ definidas en el interior de Ω. Asimismo, se puede comprobar que dichas soluciones singulares son envolventes de la familia $y = x\,\mathrm{sen}(\log|Cx|)$..

c) Consideremos seguidamente el caso del Problema de Cauchy para una edo en forma implícita,

$$(PC)_{imp} \quad \begin{cases} F(x, y, y') = 0, \\ y(x_0) = y_0, \end{cases}$$

donde por simplicidad suponemos que $F \in C^1(\mathcal{O})$, siendo $\mathcal{O} \subset \mathbb{R}^3$ un conjunto abierto.

Dado un punto $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, diremos que dicho punto soporta la pendiente $p \in \mathbb{R}$ (respecto de la edo $F(x, y, y') = 0$) si $(x, y, p) \in \mathcal{O}$ y $F(x, y, p) = 0$, y en tal caso diremos que (x,y,p) es un elemento integral de la edo. Denotaremos por Ω al conjunto de todos los puntos de $\mathbb{R}^2$ que soportan alguna pendiente, es decir,

$$\Omega := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \text{ existe } p \in \mathbb{R} \text{ tal que } (x,y,p) \in \mathcal{O} \text{ y } F(x,y,p) = 0\}.$$

Al conjunto Ω lo denominaremos el conjunto soporte para la edo $F(x,y,y') = 0$.

En principio, el problema $(PC)_{imp}$ tiene sentido para cualquier dato inicial $(x_0, y_0) \in \Omega$ (obsérvese que Ω no es en general abierto). De todas formas, el problema $(PC)_{imp}$ presenta una ambigüedad. En concreto, dado $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$, denotemos

$$P(x_0, y_0) := \{p_0 \in \mathbb{R} : \ (x_0, y_0) \text{ soporta a } p_0.\}$$

Para cada $p_0 \in P(x_0, y_0)$, si existe solución de $(PC)_{imp}$ satisfaciendo además $y'(x_0) = p_0$, obtenemos una curva solución con pendiente p_0 en x_0. En consecuencia, si se pretende obtener unicidad en $(PC)_{imp}$, es necesario fijar el valor de $y'(x_0)$, es decir, una pendiente $p_0 \in P(x_0, y_0)$.

Cuando se fija $p_0 \in P(x_0, y_0)$, se pueden dar dos situaciones bien diferentes.

Dado $(x_0, y_0, p_0) \in \mathcal{O}$, se dice que (x_0, y_0, p_0) es un elemento integral regular (e.i.r.) si $F(x_0, y_0, p_0) = 0$ y existe un $\alpha > 0$ tal que existe una única función $p \in C(B((x_0, y_0); \alpha))$ satisfaciendo $F(x, y, p(x, y)) = 0$ para todo $(x, y) \in B((x_0, y_0); \alpha)$. En tal caso, (x_0, y_0) pertenece al interior de Ω, y localmente $(PC)_{imp}$ es equivalente al Problema de Cauchy

$$\begin{cases} y' = p(x, y), \\ y(x_0) = y_0, \end{cases}$$

para el que, por el Teorema de Peano, tenemos garantizada la existencia de solución local.

Evidentemente, si (x_0, y_0, p_0) es un elemento integral tal que $\dfrac{\partial F}{\partial p}(x_0, y_0, p_0) \neq 0$, entonces el teorema de la función implícita nos garantiza que (x_0, y_0, p_0) es un elemento integral regular. No obstante, puede ocurrir que (x_0, y_0, p_0) sea un elemento integral regular y sin embargo $\dfrac{\partial F}{\partial p}(x_0, y_0, p_0) = 0$. Así sucede, por ejemplo, para la edo $F(x, y, y') = (y')^3 - y^2 = 0$ y la terna $(0, 0, 0)$.

Diremos que $(x_0, y_0, p_0) \in \mathcal{O}$ es un elemento integral singular si $F(x_0, y_0, p_0) = 0$ y no es un elemento integral regular.

Diremos que $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ es un punto singular si soporta alguna pendiente p_0 tal que (x_0, y_0, p_0) sea un elemento integral singular. Por ejemplo, para la edo $(y')^2 - x^2 = 0$, el punto $(0, 0)$ es singular. Diremos que $(x_0, y_0) \in \Omega$ es un punto regular si no es un punto singular.

Por definición, una solución singular de la edo $F(x, y, y') = 0$ es una solución (I, φ) tal que $(x, \varphi(x), \varphi'(x))$ es un elemento integral singular para todo $x \in I$.

Al conjunto de puntos $(x, y, p) \in \mathcal{O}$ tales que $F(x, y, p) = 0$ y $\dfrac{\partial F}{\partial p}(x, y, p) = 0$ se le denomina variedad discriminante de la edo. Según queda claro de la discusión precedente, los elementos integrales singulares de la edo son necesariamente puntos de la variedad discriminante, pero que (x_0, y_0, p_0) pertenezca a dicha variedad no implica necesariamente que sea un elemento integral singular.

Obsérvese finalmente que si $(x_0, y_0) \in \partial\Omega$ entonces para todo $p_0 \in P(x_0, y_0)$, el punto (x_0, y_0, p_0) es un elemento integral singular.

Como ejemplo de lo que hemos expuesto consideremos el Problema de Cauchy

$$(PC)_3 \quad \begin{cases} x(y')^2 - 2yy' - 4y = 0, \\ y(x_0) = y_0. \end{cases}$$

En este caso, $F(x, y, p) = xp^2 - 2yp - 4y$, y el conjunto soporte Ω viene dado por

$$\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \ y^2 + 4xy \geq 0\}.$$

Como se puede observar, Ω es cerrado, siendo su frontera

$$\partial\Omega = \{(x, 0) : \ x \in \mathbb{R}\} \cup \{(x, -4x) : \ x \in \mathbb{R}\}.$$

Por otra parte, resulta fácil ver que la variedad discriminante en este caso viene dada por el subconjunto D de $\mathbb{R}^3$ dado por

$$D = \{(x, 0, 0) : \ x \in \mathbb{R}\} \cup \{(0, 0, p) : \ p \in \mathbb{R}\} \cup \{(x, -4x, -4) : \ x \in \mathbb{R}\}.$$

Así pues, los puntos del interior de Ω son regulares, y los puntos de la forma $(x, 0)$ y $(x, -4x)$ son singulares, ya que pertenecen a la frontera de Ω. Por otra parte, las funciones $\varphi_1(x) = 0$ y $\varphi_2(x) = -4x$ son soluciones de la edo, como se comprueba de inmediato, y en consecuencia, de acuerdo con lo que precede, son soluciones singulares de la edo $x(y')^2 - 2yy' - 4y = 0$.

Vamos a estudiar más explícitamente lo que sucede en este ejemplo. Si se despeja y' en la edo, se obtiene

$$y' = \frac{y \pm \sqrt{y^2 + 4xy}}{x}.$$

integrando esta ecuación homogénea, es sencillo ver que que la familia de funciones

$$y = \frac{(x - c)^2}{c} \qquad c \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, \tag{1}$$

es solución general de nuestra edo de partida.

Si (x_0, y_0) pertenece al interior de Ω, y es por tanto un punto regular, se pueden presentar dos casos. O bien $x_0 \neq 0$, y entonces pasan por dicho punto dos soluciones de la familia (1) correspondientes a los valores de c dados por

$$c = \frac{2x_0 + y_0 \pm \sqrt{y_0(y_0 + 4x_0)}}{2},$$

o bien $x_0 = 0$, en cuyo caso pasa por $(0, y_0)$ una única solución de la familia (1), correspondiente al valor de c dado por $c = y_0$.

Por los puntos singulares, es decir por los de la frontera de Ω, pasan, como ya se ha dicho, las soluciones singulares $\varphi(x) = 0$ y $\varphi(x) = -4x$, que como se comprueba fácilmente resultan ser envolventes de la familia de parábolas definidas por (1). En consecuencia, por los puntos singulares pasan de hecho infinitas soluciones. Así por ejemplo, por uno de la forma $(x_0, 0)$ con $x_0 > 0$ pasan todas las soluciones de la forma $y = \varphi_{\alpha\beta}(x)$, siendo

$$\varphi_{\alpha\beta}(x) = \begin{cases} \dfrac{(x - \alpha)^2}{\alpha} & \text{si } x \in (-\infty, \alpha), \\ 0 & \text{si } x \in [\alpha, \beta], \\ \dfrac{(x - \beta)^2}{\beta} & \text{si } x \in (\beta, +\infty), \end{cases}$$

con $0 < \alpha < x_0 < \beta < +\infty$.

d) Terminamos esta sección con algunas consideraciones sobre resolución elemental de las edo en forma implícita, y muy particularmente de las ecuaciones denominadas de Lagrange y de Clairaut.

Evidentemente, si en la edo $F(x, y, y') = 0$ es posible despejar de una o varias maneras y', se hace y se intenta resolver la o las edos en forma explícita que se obtengan. Si ello no es posible, existen algunos casos en que es posible efectuar algunas manipulaciones para resolver la edo implícita.

- Si F no depende de x, y se puede despejar y, obteniéndose una edo de la forma $y = \varphi(y')$.

  En este caso, se toma $y' = p$, con lo que $y = \varphi(p)$. Por otra parte, de $\dfrac{dy}{dx} = p$ podemos despejar, obteniendo

  $$dx = \frac{dy}{p}. \tag{2}$$

  Ahora bien, de $y = \varphi(p)$, se tiene $dy = \varphi'(p)dp$, y llevando esta expresión a (2) obtenemos

  $$dx = \frac{\varphi'(p)dp}{p},$$

  y en consecuencia se tiene, al menos desde un punto de vista teórico, la expresión en paramétricas de una familia de curvas solución de la edo:

  $$\begin{cases} x = c + \displaystyle\int \frac{\varphi'(p)dp}{p}\, dp, \\ y = \varphi(p). \end{cases}$$

  Como ejercicio, resuélvase la edo $y - (y')^2 e^{y'} = 0$.

- Si F no depende de y, y se puede despejar x, obteniéndose una edo de la forma $x = \varphi(y')$.

  Este caso es similar al anterior. Se toma $y' = p$, con lo que $x = \varphi(p)$. Por otra parte, de $\dfrac{dy}{dx} = p$ podemos despejar, obteniendo

  $$dy = pdx. \tag{3}$$

  Ahora bien, de $x = \varphi(p)$, se tiene $dx = \varphi'(p)dp$, y llevando esta expresión a (2) obtenemos

  $$dy = p\varphi'(p)dp,$$

  y en consecuencia se tiene, nuevamente desde un punto de vista teórico, la expresión en paramétricas de una familia de curvas solución de la edo:

  $$\begin{cases} x = \varphi(p), \\ y = c + \displaystyle\int p\varphi'(p)dp. \end{cases}$$

  Como ejercicio, resuélvase la edo $x = y' + \operatorname{sen} y'$.

- Las ecuaciones de Lagrange y de Clairaut

  Son dos edos de interés histórico, que aparecen en problemas de origen geométrico. La edo de Lagrange es de la forma

$$y = x\varphi(y') + \psi(y'),$$

  y la edo de Clairaut, que es un caso particular de la de Lagrange, es de la forma

$$y = xy' + \psi(y').$$

  De manera general, para resolver la edo de Lagrange se toma nuevamente $y' = p$, con lo

$$y = x\varphi(p) + \psi(p). \tag{4}$$

  Por otra parte, de $y' = p$ tenemos $dy = pdx$, con lo que de (4) se obtiene

$$pdx = \varphi(p)dx + x\varphi'(p)dp + \psi'(p)dp,$$

  y de aquí

$$\frac{dx}{dp} = \frac{\varphi'(p)}{p - \varphi(p)}x + \frac{\psi'(p)}{p - \varphi(p)}.$$

  Esta última es una edo lineal de primer orden en la incógnita x, que resuelta produce una solución general

$$x = \Phi(p, c). \tag{5}$$

  De las igualdades (4) y (5) es obtiene esta vez la expresión en paramétricas de una familia de curvas solución de la edo de Lagrange. Además de estas curvas, conviene prestar atención, y analizar por separado, a los valores $p_0 \in \mathbb{R}$ para los que $p_0 - \varphi(p_0) = 0$.

  Por ejemplo, para la edo

$$y = x(y')^2 - \frac{1}{y'},$$

  si se sigue el procedimiento descrito, se obtiene

$$y = xp^2 - \frac{1}{p},$$

$$pdx = dy = p^2dx + 2pxdp + \frac{dp}{p^2},$$

  es decir,

$$(p - p^2)dx = 2pxdp + \frac{dp}{p^2}. \tag{6}$$

  Si miramos a los valores que anulan $p - p^2$, obtenemos $p = 0$ y $p = 1$. Para $p = 0$ tenemos $y' = 0$, que no vale como solución. En cambio, para $p = 1$ tenemos $y' = 1$, que proporciona $y = x + c$, y si sustituimos esta expresión en nuestra edo, obtenemos $x + c = x - 1$, y por tanto la función $y = x - 1$ es una solución de la edo. El resto se obtienen integrando (6), es decir, resolviendo la edo lineal

$$\frac{dx}{dp} = \frac{2p}{p - p^2} x + \frac{1}{p^2(p - p^2)},$$

que tiene por solución general (hágase como ejercicio)

$$x = \frac{cp^2 + 2p - 1}{2p^2(1 - p^2)},$$

con lo que obtenemos finalmente la expresión en paramétricas de una familia de curvas solución de nuestra edo, dada por

$$\begin{cases} x = \dfrac{cp^2 + 2p - 1}{2p^2(1 - p^2)}, \\ y = \dfrac{cp^2 + 2p - 1}{2(1 - p^2)} - \dfrac{1}{p}. \end{cases}$$

En el caso particular de la edo de Clairaut, siguiendo el procedimiento antes descrito, obtenemos

$$y = xp + \psi(p), \tag{7}$$

y

$$pdx = pdx + xdp + \psi'(p)dp,$$

es decir,

$$(x + \psi'(p))dp = 0.$$

Si se toma $dp = 0$ en esta última ecuación, se obtiene $p = c$, es decir, $y = cx + b$, que sustituida en la edo de Clairaut nos da $cx + b = cx + \psi(c)$, con lo que

$$y = cx + \psi(c), \quad c \in \mathbb{R}$$

constituye una familia de rectas soluciones de la edo de Clairaut.

Por otra parte, otras posible soluciones se obtienen eliminando p en el sistema

$$\begin{cases} x + \psi'(p) = 0, \\ y = xp + \psi(p). \end{cases}$$

Como un ejemplo de aplicación, se propone como ejercicio que se estudie el problema de encontrar una curva del plano que no sea una recta, tal que la tangente a la curva en cada punto de la misma forme con los ejes de coordenadas cartesianas un triángulo de area constante igual a 2.

2 Soluciones analíticas. Método de la mayorante

Para nosotros, toda solución del Problema de Cauchy para un SDO es por definición una función de clase C^1 en su intervalo de definición. También sabemos (ver la asignatura *Ecuaciones Diferenciales Ordinarias*) que si f es una función más regular, entonces la solución del Problema de Cauchy aumenta en una unidad la regularidad de f. Más exactamente, sabemos que se satisface el resultado siguiente:

Teorema 2.1 *Sean $\Omega \subset \mathbb{R}^{N+1}$ abierto y $f \in C^m(\Omega; \mathbb{R}^N)$ con $m \geq 1$. En tal caso, para todo $(x_0, y_0) \in \Omega$ la solución maximal $\varphi(\cdot; x_0, y_0)$ del correspondiente Problema de Cauchy satisface*

$$\varphi(\cdot; x_0, y_0) \in C^{m+1}(I(x_0, y_0); \mathbb{R}^N).$$

En consecuencia, si f es C^∞ entonces las soluciones del correspondiente Problema de Cauchy serán C^∞ también. Cabe preguntarse qué sucede si f es analítica. Para responder a esta pregunta, necesitamos primero algunas consideraciones sobre funciones analíticas de varias variables (para las demostraciones ver [1]).

Denotemos por $\mathbb{Z}_+$ al conjunto de los números enteros mayores o igual a cero.

Partimos de las dos consideraciones siguientes:

a) Si $\{c_n\}_{n\geq 0}$ es una sucesión de números reales tal que la serie que define sea absolutamente convergente, es decir tal que $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} |c_n| < \infty$, entonces la suma de la serie no varía si se efectúa una permutación cualquiera de los subíndices, es decir,

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n = \sum_{n=0}^{\infty} |c_{j(n)}|,$$

para toda biyección $j : \mathbb{Z}_+ \leftrightarrow \mathbb{Z}_+$.

b) El producto cartesiano $\mathbb{Z}_+^k$ de $\mathbb{Z}_+$ consigo mismo un número finito $k \geq 1$ de veces es un conjunto numerable, y por tanto existe una biyección

$$J_k : \mathbb{Z}_+^k \leftrightarrow \mathbb{Z}_+$$

Teniendo en cuenta a) y b), tiene sentido la noción que sigue.

Definición 2.2 *Sea $\{c_{p_0 p_1 \dots p_N}\}_{(p_0 p_1 \dots p_N) \in \mathbb{Z}_+^{N+1}}$ una colección de números reales. Diremos que la serie $\displaystyle\sum_{p_0, p_1, \dots, p_N = 0}^{\infty} c_{p_0 p_1 \dots p_N}$ es absolutamente convergente si lo es la serie $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} c_{J_{N+1}^{-1}(n)}$, y en tal caso, se define*

$$\sum_{p_0, p_1, \dots, p_N = 0}^{\infty} c_{p_0 p_1 \dots p_N} := \sum_{n=0}^{\infty} c_{J_{N+1}^{-1}(n)}. \tag{8}$$

Podemos ahora definir el concepto de función analítica de varias variables.

Definición 2.3 *Sean* $\Omega \subset \mathbb{R}^{N+1}$ *un conjunto abierto y* $f : \Omega \to \mathbb{R}$ *dada. Diremos que* f *es analítica en un punto* $(x_0, y_0) \in \Omega$ *si existe un* $\rho > 0$ *y una colección de números reales* $\{a_{p_0 p_1 \dots p_N}\}_{(p_0 p_1 \dots p_N) \in \mathbb{Z}_+^{N+1}}$ *tales que*

(i) *la serie* $\displaystyle\sum_{p_0, p_1, \dots, p_N = 0}^{\infty} a_{p_0 p_1 \dots p_N} (x - x_0)^{p_0} (y_1 - y_{0_1})^{p_1} \dots (y_N - y_{0_N})^{p_N}$ *es absolutamente convergente para todo* $(x, y) \in \mathbb{R}^{N+1}$ *tal que* $|x - x_0| < \rho$ *y* $|y - y_0| < \rho$*;*

(ii) *Si* $(x, y) \in \mathbb{R}^{N+1}$ *es tal que* $|x - x_0| < \rho$ *y* $|y - y_0| < \rho$*, entonces forzosamente* $(x, y) \in \Omega$*, satisfaciéndose*

$$f(x, y) = \sum_{p_0, p_1, \dots, p_N = 0}^{\infty} a_{p_0 p_1 \dots p_N} (x - x_0)^{p_0} (y_1 - y_{0_1})^{p_1} \dots (y_N - y_{0_N})^{p_N}. \quad (9)$$

En el caso de una función con valores en $\mathbb{R}^M$*, diremos que es analítica en* (x_0, y_0) *si lo es cada una de de las componentes de dicha función.*

De manera general, diremos que $f : \Omega \to \mathbb{R}^M$ *es analítica en* Ω*, si lo es en cada punto de dicho conjunto.*

De manera similar al caso de una variable, se satisface que si f es analítica en un punto $(x_0, y_0) \in \Omega$, entonces f es de clase C^∞ en el conjunto de los puntos tales que $|x - x_0| < \rho$ y $|y - y_0| < \rho$, y cualquier derivada parcial de f se obtiene derivando término a término los elementos de la serie. En particular, los coeficientes $a_{p_0 p_1 \dots p_N}$ en (9) están unívocamente determinados por f, viniendo dados por

$$\frac{\partial^{p_0 + p_1 + \dots + p_N} f}{\partial x^{p_0} \partial y_1^{p_1} \dots \partial y_N^{p_N}}(x_0, y_0) = p_0! p_1! \dots p_N! a_{p_0 p_1 \dots p_N}. \quad (10)$$

Reseñemos también dos propiedades de las funciones analíticas de las que haremos uso.

- Si f y g son dos funciones reales definidas sobre Ω, y ambas son analíticas en un punto $(x_0, y_0) \in \Omega$, entonces la función producto fg es también analítica en el punto $(x_0, y_0) \in \Omega$, y su desarrollo en serie se obtiene multiplicando término a término los elementos de los desarrollos en serie de f y g.
- (teorema de sustitución) Si $f : \Omega \to \mathbb{R}$ es analítica en $(x_0, y_0) \in \Omega$ y $\psi : (x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon) \to \mathbb{R}^N$ es una función analítica en x_0 tal que $\psi(x_0) = y_0$, entonces la función compuesta $f(x, \psi(x))$ es analítica en (x_0, y_0).

Podemos ahora demostrar el resultado siguiente.

Teorema 2.4 *Sean* $\Omega \subset \mathbb{R}^{N+1}$ *un conjunto abierto, y* $f \in C(\Omega; \mathbb{R}^N) \cap Lip_{loc}(y, \Omega)$ *una función analítica en un punto* $(x_0, y_0) \in \Omega$*. En estas condiciones la solución maximal* $\varphi(\cdot; x_0, y_0)$ *del correspondiente Problema de Cauchy es analítica en* x_0*.*

Demostración. Vamos a suponer, sin pérdida de generalidad que $(x_0, y_0) = (0,0)$. Asimismo, por simplicidad de notación, vamos a efectuar la demostración suponiendo que $N = 1$.

Con estas hipótesis simplificadoras, estamos por tanto suponiendo que $(0,0) \in \Omega \subset \mathbb{R}^2$ y existe un $\rho > 0$ tal que si $|x| < \rho$ y $|y| < \rho$, entonces $(x,y) \in \Omega$ y se satisfacen

$$\sum_{p_0,p_1=0}^{\infty} |a_{p_0p_1}||x|^{p_0}|y|^{p_1} < \infty, \tag{11}$$

$$f(x,y) = \sum_{p_0,p_1=0}^{\infty} a_{p_0p_1} x^{p_0} y^{p_1}, \tag{12}$$

siendo

$$a_{p_0p_1} = \frac{1}{p_0!p_1!} \frac{\partial^{p_0+p_1} f}{\partial x^{p_0} \partial y^{p_1}}(0,0). \tag{13}$$

Para demostrar el teorema, hemos de probar que si denotamos $\varphi(x) = \varphi(x;0,0)$, existe un $r > 0$ tal que $(-r,r) \subset I(0,0)$, y se satisfacen

$$\sum_{n=0}^{\infty} |c_n||x|^n < \infty \quad \forall\, x \in (-r,r), \tag{14}$$

$$\varphi(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n \quad \forall\, x \in (-r,r), \tag{15}$$

siendo

$$c_n = \frac{1}{n!} \frac{d^n \varphi}{dx^n}(0). \tag{16}$$

Ahora bien, como $\varphi'(x) = f(x, \varphi(x))$ para todo $x \in I(0,0)$, de (16) resulta evidente que

$$c_0 = \varphi(0) = 0 \quad \text{y} \quad c_n = \frac{1}{n!} \left. \frac{d^{n-1} f(x,\varphi(x))}{dx^{n-1}} \right|_{x=0} \quad \forall\, n \geq 1. \tag{17}$$

Escribiendo de manera más explícita (17), se tiene:

$$c_0 = 0, \qquad c_1 = f(0,\varphi(0)) = f(0,0) = a_{00},$$

$$\begin{aligned} c_2 &= \frac{1}{2!} \left. \frac{df(x,\varphi(x))}{dx} \right|_{x=0} \\ &= \frac{1}{2!} \left[\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) + \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)\varphi'(0) \right] \\ &= \frac{1}{2!}(a_{10} + a_{01}a_{00}), \end{aligned}$$

donde en la última igualdad se ha usado que $\varphi'(0) = c_1$.

Análogamente,

$$\begin{aligned} c_3 &= \frac{1}{3!}\left.\frac{d^2 f(x,\varphi(x))}{dx^2}\right|_{x=0} \\ &= \frac{1}{3!}\left[\frac{d}{dx}\left\{\frac{\partial f}{\partial x}(x,\varphi(x)) + \frac{\partial f}{\partial y}(x,\varphi(x))\varphi'(x)\right\}\right]_{x=0} \\ &= \frac{1}{3!}\left[\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0,0) + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0)\varphi'(0) + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(0,0)(\varphi'(0))^2 + \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)\varphi''(0)\right] \\ &= \frac{1}{3!}\left[2!a_{20} + 2a_{11}a_{00} + 2!a_{02}a_{00}^2 + a_{01}(a_{10} + a_{01}a_{00})\right], \end{aligned}$$

donde en la última igualdad se ha usado que $\varphi''(0) = 2!c_2$.

Procediendo de manera reiterada, resulta fácil ver que los coeficientes c_n están determinados de manera unívoca mediante expresiones polinómicas de las variables $a_{p_0 p_1}$,

$$c_0 = 0, \quad \text{y} \quad c_n = Q_n(a_{p_0 p_1}; p_0 + p_1 < n), \quad \forall n \geq 1. \tag{18}$$

siendo los coeficientes de los polinomios Q_n no negativos e independientes de la función f.

Supongamos que existe un $r_1 > 0$ tal que

$$\sum_{n=0}^{\infty} |c_n||x|^n < \infty \quad \forall x \in (-r_1, r_1). \tag{19}$$

En tal caso, podemos definir una función $\psi : (-r_1, r_1) \to \mathbb{R}$ por

$$\psi(x) := \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n \quad \forall x \in (-r_1, r_1).$$

La función $\psi \in C^\infty(-r_1, r_1)$, siendo

$$\psi(0) = c_0 = 0 = \varphi(0) \quad \text{y} \quad \frac{d^n\psi}{dx^n}(0) = n!c_n = \frac{1}{n!}\left.\frac{d^{n-1} f(x,\varphi(x))}{dx^{n-1}}\right|_{x=0} = \frac{d^n\varphi}{dx^n}(0)$$

para todo $n \geq 1$, con lo que

$$\frac{d^n\psi}{dx^n}(0) = \frac{1}{n!}\left.\frac{d^{n-1} f(x,\psi(x))}{dx^{n-1}}\right|_{x=0} \quad \forall n \geq 1. \tag{20}$$

Teniendo en cuenta que por construcción ψ, y por tanto su derivada ψ' y la función $f(x,\psi(x))$, son analíticas en $x_0 = 0$, de (20) obtenemos que existe un $r \in (0, r_1]$ tal que $(-r, r) \subset I(0,0)$ y $\psi'(x) = f(x,\psi(x))$ para todo $x \in (-r, r)$. Como $\psi(0) = 0$, por la unicidad de solución al Problema de Cauchy podemos afirmar que $\psi(x) = \varphi(x)$ para todo $x \in (-r, r)$, y en consecuencia φ es analítica en $x_0 = 0$.

Así pues, para acabar de demostrar el teorema, nos queda probar que existe un $r_1 > 0$ para el que se satisface (19). Esto lo vamos a comprobar usando el denominado método de la mayorante de Cauchy.

Se denomina mayorante de f en el punto $(0,0)$ a cualquier función $F : \Omega_0 \to \mathbb{R}$, donde Ω_0 es un entorno abierto del punto $(0,0)$, que sea analítica en $(0,0)$ y satisfaga

$$\left| \frac{\partial^{p_0+p_1} f}{\partial x^{p_0} \partial y^{p_1}}(0,0) \right| \leq \frac{\partial^{p_0+p_1} F}{\partial x^{p_0} \partial y^{p_1}}(0,0) \quad \forall\, (p_0,p_1) \in \mathbb{Z}^2_+. \tag{21}$$

Sea F una mayorante de f en el punto $(0,0)$, y consideremos el Problema de Cauchy (que se denomina mayorante del (PC) de partida)

$$(PC)_* \begin{cases} y' = F(x,y) \\ y(0) = 0. \end{cases}$$

Supongamos que $(PC)_*$ posee una solución Φ que es analítica en $x_0 = 0$. En tal caso, podemos afirmar que existe un $r_1 > 0$ tal que $(-r_1, r_1)$ está contenido en el intervalo de definición de Φ, y se satisfacen

$$\sum_{n=0}^{\infty} |C_n||x|^n < \infty \quad \forall\, x \in (-r_1, r_1), \tag{22}$$

$$\Phi(x) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n x^n \quad \forall\, x \in (-r_1, r_1), \tag{23}$$

siendo

$$C_n = \frac{1}{n!} \frac{d^n \Phi}{dx^n}(0). \tag{24}$$

Pero en tal caso, tengamos en cuenta que por (18) y la independencia de los polinomios Q_n de f, también $C_0 = 0$ y

$$C_n = Q_n(A_{p_0 p_1}; p_0 + p_1 < n), \quad \forall\, n \geq 1,$$

siendo los coeficientes de Q_n no negativos, donde hemos denotado $A_{p_0 p_1} = \dfrac{\partial^{p_0+p_1} F}{\partial x^{p_0} \partial y^{p_1}}(0,0)$. En consecuencia, por (18) y (21) resulta evidente que $C_n \geq 0$ y

$$|c_n| \leq C_n \quad \forall\, n \geq 0,$$

y en tal caso, de (22) se obtiene (19).

Para terminar, lo que hemos de hacer es hallar una mayorante de f en $(0,0)$ tal que la solución del correspondiente $(PC)_*$ sea analítica en $x_0 = 0$. Para ello, observemos que por (11), si tomamos $\lambda = \rho/2$, podemos afirmar que existe una constante $M > 1$ tal que

$$|a_{p_0 p_1}| \lambda^{p_0+p_1} \leq M \quad \forall\, (p_0,p_1) \in \mathbb{Z}^2_+,$$

y en consecuencia

$$\left| \frac{\partial^{p_0+p_1} f}{\partial x^{p_0} \partial y^{p_1}}(0,0) \right| = p_0! p_1! |a_{p_0 p_1}| \leq M p_0! p_1! \lambda^{-(p_0+p_1)} \quad \forall\, (p_0,p_1) \in \mathbb{Z}^2_+. \tag{25}$$

Consideremos la función

$$F_\lambda(x,y) = \frac{M}{\left(1 - \dfrac{x}{\lambda}\right)\left(1 - \dfrac{y}{\lambda}\right)} \quad \forall\, |x| < \lambda, \forall\, |y| < \lambda.$$

Es bien conocido que F_λ es analítica en $(0,0)$, con desarrollo

$$F_\lambda(x,y) = \sum_{p_0,p_1=0}^{\infty} M\lambda^{-(p_0+p_1)} x^{p_0} y^{p_1} \quad \forall\,|x| < \lambda, \forall\,|y| < \lambda,$$

y en consecuencia, por (25), F_λ es mayorante de f en $(0,0)$.

Resolvamos el Problema de Cauchy

$$(PC)_\lambda \left\{ \begin{array}{c} y' = F_\lambda(x,y) \\ y(0) = 0. \end{array} \right.$$

Para ello, suponiendo $|x| < \lambda$, vemos que la edo $y' = F_\lambda(x,y)$ se escribe

$$\left(1 - \frac{y}{\lambda}\right) y' = \frac{M}{1 - \dfrac{x}{\lambda}},$$

e integrando obtenemos como solución general

$$\frac{\lambda}{2}\left(1 - \frac{y}{\lambda}\right)^2 = M\lambda \log\left(1 - \frac{x}{\lambda}\right) + C,$$

con C constante arbitraria.

Si exigimos que $y(0) = 0$, obtenemos $C = \dfrac{\lambda}{2}$, con lo que la expresión que define implícitamente la solución Φ_λ de $(PC)_\lambda$ es

$$\left(1 - \frac{y}{\lambda}\right)^2 = 2M \log\left(1 - \frac{x}{\lambda}\right) + 1,$$

y por tanto, despejando y teniendo nuevamente en cuenta que ha de ser $y(0) = 0$, obtenemos

$$\Phi_\lambda(x) = \lambda\left(1 - \sqrt{2M \log\left(1 - \frac{x}{\lambda}\right) + 1}\right).$$

Para comprobar que la función Φ_λ así definida es analítica en $x_0 = 0$, al ser composición de funciones analíticas, basta con ver que existe un entorno abierto del 0 formado por puntos x tales que

$$|x| < \lambda \quad \text{y} \quad \left|2M \log\left(1 - \frac{x}{\lambda}\right)\right| < 1,$$

par de relaciones que es equivalente, como se ve fácilmente, a

$$|x| < \lambda \quad \text{y} \quad \lambda\left(1 - e^{\frac{1}{2M}}\right) < x < \lambda\left(1 - e^{-\frac{1}{2M}}\right). \tag{26}$$

Teniendo en cuenta que $M > 1$, es sencillo comprobar que (26) equivale a

$$\lambda\left(1 - e^{\frac{1}{2M}}\right) < x < \lambda\left(1 - e^{-\frac{1}{2M}}\right), \tag{27}$$

relación que evidentemente define un entorno abierto del 0. $\square$

Observación 2.5 *El teorema 2.4 se puede extender sin dificultad al caso de una edo de orden $n > 1$.*

Como un ejemplo simple, consideremos el Problema de Cauchy

$$\begin{cases} y'' = xy' + 2y, \\ y(0) = 0, \quad y'(0) = 1. \end{cases}$$

De este problema sabemos que posee una única solución $\varphi(x)$, y que ésta es analítica en $x_0 = 0$. Vamos a encontrarla procediendo por desarrollo en serie. Para ello, pongamos

$$\varphi(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n.$$

Para identificar los c_n observemos que las condiciones iniciales implican

$$c_0 = \varphi(0) = 0, \qquad c_1 = \varphi'(0) = 1.$$

Por otra parte, teniendo en cuenta que

$$\varphi'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n c_n x^{n-1},$$

y

$$\varphi''(x) = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) c_n x^{n-2} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+2)(n+1) c_{n+2} x^n,$$

sustituyendo en la edo $y'' = xy' + 2y$, y teniendo en cuenta que $c_0 = 0$, obtenemos

$$\sum_{n=0}^{\infty} (n+2)(n+1) c_{n+2} x^n = \sum_{n=0}^{\infty} (n+2) c_n x^n,$$

e identificando coeficientes, la relación recursiva que define los c_n;

$$c_{n+2} = \frac{1}{n+1} c_n \quad \forall\, n \geq 0. \tag{28}$$

Como $c_0 = 0$, de (28) obtenemos que $c_{2k} = 0$ para todo $k \geq 0$. Mientras que la relación

$$c_{2k+1} = \frac{1}{2k} c_{2k-1} \quad \forall\, k \geq 1$$

lleva a

$$c_{2k+1} = \frac{1}{(2k)(2(k-1))...2} c_1 \quad \forall\, k \geq 1,$$

que junto a $c_1 = 1$ nos da

$$c_{2k+1} = \frac{1}{2^k k!} \quad \forall\, k \geq 0.$$

En consecuencia, la solución es

$$\varphi(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^k k!} x^{2k+1} = x e^{\frac{x^2}{2}}.$$

Referencias

[1] F. John, Partial Differential Equations, Springer Verlag, New York, 1980.

[2] A. Kiseliov, M. Krasnov y G. Makarenko, Problemas de ecuaciones diferenciales ordinarias, Ed. Mir, Mosc, 1973.

[3] I.G. Petrovskii, Ordinary Differential Equations, Prentice Hall Inc., New Jersey, 1966.