Tema 3

COMPLEMENTOS SOBRE PROBLEMAS DE CONTORNO PARA EDO LINEALES

1 Problemas de contorno lineales. Teorema de alternativa

En todo el tema suponemos fijado un intervalo cerrado $I = [\alpha, \beta] \subset \mathbb{R}$. Un problema de contorno lineal en el intervalo I es un problema de la forma

$$(PCo) \left\{ \begin{array}{r} y' = A(x)y + b(x) \quad \text{en } I, \\ By(\alpha) + Cy(\beta) = h, \end{array} \right.$$

con $A \in C(I; \mathcal{L}(\mathbb{R}^N))$, $b \in C(I; \mathbb{R}^N)$, $B, C \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^N)$ y $h \in \mathbb{R}^N$ dados.

Definición 1.1 *Una solución de (PCo) es cualquier función $\varphi \in C^1(I; \mathbb{R}^N)$, tal que*

- $\varphi'(x) = A(x)\varphi(x) + b(x)$ *para todo* $x \in I$,
- $B\varphi(\alpha) + C\varphi(\beta) = h$.

Se denomina problema de contorno homogéneo asociado a (PCo) al problema

$$(PCo)_0 \left\{ \begin{array}{r} y' = A(x)y \quad \text{en } I, \\ By(\alpha) + Cy(\beta) = 0. \end{array} \right.$$

Evidentemente, $(PCo)_0$ tiene siempre por solución la función $\varphi \equiv 0$, que denominaremos la solución trivial de $(PCo)_0$, pero puede tener de hecho infinitas soluciones.

Proposición 1.2 *El conjunto V_0 de todas las soluciones de $(PCo)_0$ es un subespacio vectorial de $C^1(I; \mathbb{R}^N)$, de dimensión menor o igual que N, y más exactamente, si F es una matriz fundamental en I del sdo $y' = A(x)y$, entonces*

$$\dim V_0 = N - \text{rango}\,(BF(\alpha) + CF(\beta)). \tag{1}$$

Demostración. Denotemos por V al espacio vectorial de todas las soluciones en I del sdo $y' = A(x)y$. Sabemos que V es un subespacio vectorial de $C^1(I;\mathbb{R}^N)$, de dimensión igual a N, y resulta inmediato comprobar que V_0 es un subespacio vectorial de V.

Además, si F es una matriz fundamental en I del sdo $y' = A(x)y$, sabemos que $V = \{\varphi = Fa : \ a \in \mathbb{R}^N\}$, con lo que es sencillo ver que

$$V_0 = \{\varphi = Fa : \ a \in \mathbb{R}^N, \ BF(\alpha)a + CF(\beta)a = 0\},$$

es decir

$$V_0 = \{\varphi = Fa : \ a \in \ker(BF(\alpha) + CF(\beta))\}.$$

En consecuencia, teniendo en cuenta que las columnas de F constituyen una base de V, y por tanto son linealmente independientes, obtenemos

$$\dim V_0 = \dim \ker(BF(\alpha) + CF(\beta)) = N - \text{rango}\,(BF(\alpha) + CF(\beta)),$$

como queríamos. □

Observación 1.3 *Observemos que como consecuencia de la proposición precedente,*

- *el rango de $BF(\alpha) + CF(\beta)$ es independiente de la matriz fundamental en I del sdo $y' = A(x)y$ que se elija;*
- *$(PCo)_0$ tiene por única solución la trivial, es decir, $V_0 = \{0\}$ si y sólo si* $\text{rango}\,(BF(\alpha) + CF(\beta)) = N$.

A diferencia del problema homogéneo, (PCo) puede no tener solución. En concreto, se tiene el resultado siguiente.

Teorema 1.4 *Para el problema (PCo) se satisfacen las tres afirmaciones siguientes:*

a) *(PCo) posee solución si y sólo si*

$$\begin{aligned} & \text{rango}\,(BF(\alpha) + CF(\beta)) \\ = \ & \text{rango}\,(BF(\alpha) + CF(\beta); \ h - CF(\beta)\int_\alpha^\beta F^{-1}(s)b(s)\,ds), \end{aligned} \tag{2}$$

donde F es una matriz fundamental en I del sdo $y' = A(x)y$;

b) *si $(PCo)_0$ tiene por única solución la trivial, entonces para cada $b \in C(I;\mathbb{R}^N)$ y $h \in \mathbb{R}^N$ dados existe una y sólo una solución de (PCo);*

c) *si $(PCo)_0$ tiene soluciones distintas de la trivial, entonces para un par $b \in C(I;\mathbb{R}^N)$ y $h \in \mathbb{R}^N$ dados el problema (PCo) puede tener o no tener solución, pero si tiene una, entonces tiene infinitas.*

Demostración. Sea F una matriz fundamental en I del sdo $y' = A(x)y$.

a) Sabemos que la solución general del sdo $y' = A(x)y + b(x)$ viene dada por

$$\varphi(x) = F(x)a + F(x)\int_\alpha^x F^{-1}(s)b(s)\,ds, \quad a \in \mathbb{R}^N,$$

y por tanto (PCo) posee solución si y sólo si existe un vector $a \in \mathbb{R}^N$, tal que

$$(BF(\alpha) + CF(\beta))a = h - CF(\beta) \int_\alpha^\beta F^{-1}(s)b(s)\, ds. \tag{3}$$

Basta aplicar el teorema de Rouché-Frobenius al sistema de ecuaciones lineales (3), para concluir que (PCo) posee solución si y sólo si se satisface (2).

b) Si $(PCo)_0$ tiene por única solución la trivial, entonces la dimensión de V_0 es $= 0$, y por (1) tenemos que el rango de $BF(\alpha) + CF(\beta)$ es igual a N, con lo que basta aplicar nuevamente el teorema de Rouché-Frobenius al sistema de ecuaciones lineales (3), para obtener que para cada $b \in C(I; \mathbb{R}^N)$ y $h \in \mathbb{R}^N$ dados existe una y sólo una solución de (PCo).

c) Si $(PCo)_0$ tiene soluciones distintas de la trivial, entonces razonado como en b) obtenemos que el rango de $BF(\alpha) + CF(\beta)$ es estrictamente menor que N, y nuevamente por el teorema de Rouché-Frobenius aplicado al sistema de ecuaciones lineales (3), podemos afirmar que para un par $b \in C(I; \mathbb{R}^N)$ y $h \in \mathbb{R}^N$ dados, si el problema (PCo) tiene solución, entonces tiene infinitas. $\square$

Ejercicio.- Como ejemplo, consideremos el problema de contorno

$$(PCo)_* \begin{cases} y' = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2x & 1 \end{pmatrix} y + \begin{pmatrix} 0 \\ e^x \end{pmatrix} & \text{en } [0,1], \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & e \end{pmatrix} y(0) + \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} y(1) = h. \end{cases}$$

Se pide encontrar los vectores $h \in \mathbb{R}^2$ para los que $(PCo)_*$ posee solución, y calcular las soluciones cuando h tiene la primera componente $h_1 = 0$.

2 El operador de Green. Núcleo de Green

Con las notaciones e hipótesis de la sección precedente, supongamos que se satisface además la condición

(H) $V_0 = \{0\}$, es decir, la única solución de $(PCo)_0$ es la trivial.

En tal caso, para cada $b \in C(I; \mathbb{R}^N)$ dada existe una y sólo una solución del problema

$$(PCo)_1 \begin{cases} y' = A(x)y + b(x) \quad \text{en } I, \\ By(\alpha) + Cy(\beta) = 0. \end{cases}$$

Denotemos

$$X := \{\varphi \in C^1(I; \mathbb{R}^N) : \ B\varphi(\alpha) + C\varphi(\beta) = 0\}.$$

Resulta inmediato comprobar que X es un subespacio vectorial de $C^1(I; \mathbb{R}^N)$. Sobre X consideramos la norma

$$\|\varphi\|_1 := \max_{x \in I} |\varphi(x)| + \max_{x \in I} |\varphi'(x)|.$$

Es sencillo comprobar (hágase como ejercicio) que $\|\cdot\|_1$ efectivamente define una norma sobre X, y que de hecho X dotado de esta norma es un espacio de Banach.

Definición 2.1 *Supongamos que se satisface* (**H**). *Se denomina operador de Green asociado al problema* $(PCo)_1$ *a la aplicación*

$$\mathcal{G} : b \in C(I;\mathbb{R}^N) \to \varphi_b \in X,$$

donde por φ_b *denotamos a la correspondiente solución de* $(PCo)_1$.

Para el operador de Green se tiene el resultado siguiente.

Proposición 2.2 *Supongamos que se satisface* (**H**). *El operador de Green* $\mathcal{G}$ *es una aplicación lineal y biyectiva de* $C(I;\mathbb{R}^N)$ *sobre* X*, tal que la aplicación inversa* $\mathcal{G}^{-1}$ *es lineal y continua de* X *sobre* $C(I;\mathbb{R}^N)$.

Demostración. Es inmediato ver que $\mathcal{G}$ es lineal. Por otra parte, el carácter inyectivo de este operador es consecuencia fácil de (**H**).

Dada $\varphi \in X$, la función $b_\varphi := \varphi' - A(x)\varphi$ pertenece a $C(I;\mathbb{R}^N)$, y es claro que $\mathcal{G}b_\varphi = \varphi$, con lo que el operador $\mathcal{G}$ es suprayectivo.

Finalmente, $\mathcal{G}^{-1}$ es lineal por serlo $\mathcal{G}$, y teniendo en cuenta que

$$\mathcal{G}^{-1}\varphi = b_\varphi = \varphi' - A(x)\varphi \quad \forall\, \varphi \in X,$$

obtenemos

$$\|\mathcal{G}^{-1}\varphi\|_{C(I;\mathbb{R}^N)} \leq \max\left(1, \max_{x\in I} \|A(x)\|_{\mathcal{L}(\mathbb{R}^N)}\right) \|\varphi\|_1 \quad \forall\, \varphi \in X,$$

y por tanto, al ser lineal, $\mathcal{G}^{-1}$ es continua. $\square$

A continuación vamos a obtener un resultado que, en particular, nos va a indicar que también $\mathcal{G}$ es un operador continuo de $C(I;\mathbb{R}^N)$ sobre X (este hecho en realidad es una consecuencia inmediata de la proposición 2.2 y del Teorema del inverso de Banach, que será estudiado en la asignatura troncal *Análisis Funcional* de cuarto curso).

Definición 2.3 *Sea* F *una matriz fundamental en* I *del sdo* $y' = A(x)y$*, y denotemos*

$$J(s) := -(BF(\alpha) + CF(\beta))^{-1}CF(\beta)F^{-1}(s) \quad \forall\, s \in [\alpha, \beta].$$

Se define la función de Green (también denominado núcleo de Green) asociada al problema $(PCo)_1$*, como la aplicación* $G : I \times I \to \mathcal{L}(\mathbb{R}^N)$ *dada por*

$$G(x,s) = \begin{cases} F(x)J(s) & si\ \alpha \leq x \leq s \leq \beta, \\ F(x)(J(s) + F^{-1}(s)) & si\ \alpha \leq s < x \leq \beta. \end{cases}$$

Se observa que G está bien definida, y es continua salvo en los puntos en que $x = s$. Además, teniendo en cuenta que si $\widetilde{F}$ es otra matriz fundamental en I del sdo $y' = A(x)y$, entonces existe una matriz $D \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^N)$ con determinante no nulo, tal que $\widetilde{F} = FD$, es sencillo comprobar (hágase como ejercicio) que la función de Green G es independiente de la matriz fundamental en I del sdo $y' = A(x)y$ que se tome.

Se tiene el siguiente resultado que justifica que también se denomine a G núcleo de Green.

Teorema 2.4 *Supongamos que se satisface* (**H**)*, y sea G la función de Green asociada al problema $(PCo)_1$. Entonces para toda función $b \in C(I;\mathbb{R}^N)$ se satisface,*

$$(\mathcal{G}b)(x) = \int_\alpha^\beta G(x,s)b(s)\,ds \quad \forall\, x \in I. \tag{4}$$

Demostración. Sea $b \in C(I;\mathbb{R}^N)$ fijada, y denotemos

$$\varphi(x) = \int_\alpha^\beta G(x,s)b(s)\,ds \quad \forall\, x \in I.$$

Teniendo en cuenta que para $x \in I$ fijado la función $G(x,s)b(s)$ es continua en I salvo en el punto $s = x$, es inmediato que φ está bien definida, y de hecho para todo $x \in I$ se satisface

$$\begin{aligned}
\varphi(x) &= \int_\alpha^x G(x,s)b(s)\,ds + \int_x^\beta G(x,s)b(s)\,ds \\
&= F(x)\int_\alpha^x (J(s) + F^{-1}(s))b(s)\,ds + F(x)\int_\alpha^x J(s)b(s)\,ds,
\end{aligned}$$

con lo que es claro que $\varphi \in C^1(I;\mathbb{R}^N)$, con derivada

$$\begin{aligned}
\varphi'(x) &= F'(x)\int_\alpha^x (J(s) + F^{-1}(s))b(s)\,ds + F'(x)\int_\alpha^x J(s)b(s)\,ds \\
&\quad + F(x)(J(x) + F^{-1}(x))b(x) - F(x)J(x)b(x) \\
&= A(x)F(x)\int_\alpha^x (J(s) + F^{-1}(s))b(s)\,ds + A(x)F(x)\int_\alpha^x J(s)b(s)\,ds + b(x) \\
&= A(x)\varphi(x) + b(x) \quad \text{para todo } x \in I.
\end{aligned}$$

Además, teniendo en cuenta la definición de $J(s)$,

$$\begin{aligned}
B\varphi(\alpha) + C\varphi(\beta) &= BF(\alpha)\int_\alpha^\beta J(s)b(s)ds + CF(\beta)\int_\alpha^\beta (J(s) + F^{-1}(s))b(s)ds \\
&= (BF(\alpha) + CF(\beta))\int_\alpha^\beta J(s)b(s)ds + \int_\alpha^\beta CF(\beta)F^{-1}(s)b(s)ds \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Por tanto (4) queda demostrada. □

La demostración del siguiente resultado es una consecuencia sencilla del teorema precedente, y queda como ejercicio.

Corolario 2.5 *$\mathcal{G}$ es un operador continuo de $C(I;\mathbb{R}^N)$ sobre X.*

3 El problema de contorno para una edo lineal de segundo orden

Consideremos el problema de contorno

$$\begin{cases} (p(x)y')' + q(x)y = b(x) \quad \text{en } I, \\ c_1 y(\alpha) + d_1 y'(\alpha) = 0, \\ c_2 y(\beta) + d_2 y'(\beta) = 0, \end{cases} \tag{5}$$

donde $p \in C^1(I)$ tal que $p(x) > 0$ para todo $x \in I$, $q, b \in C(I)$ y $c_i, d_i \in \mathbb{R}$, $i = 1, 2$, están dados, y se supone además que

$$c_i^2 + d_i^2 \neq 0, \quad i = 1, 2. \tag{6}$$

Una solución de (5) es cualquier función $\varphi \in C^2(I)$ tal que

$$(p(x)\varphi'(x))' + q(x)\varphi(x) = b(x) \quad \forall\, x \in I,$$

y satisfaga las dos condiciones de contorno, es decir,

$$c_1\varphi(\alpha) + d_1\varphi'(\alpha) = 0 \quad \text{y} \quad c_2\varphi(\beta) + d_2\varphi'(\beta) = 0.$$

Observación 3.1 *Toda edo lineal de segundo orden de la forma $y'' = a_1(x)y' + a_2(x)y + a_3(x)$, con las $a_i \in C(I)$, $i = 1, 2, 3$, puede ser transformada en una de la forma $(p(x)\varphi'(x))' + q(x)\varphi(x) = b(x)$, forma que se denomina autoadjunta. Basta para ello multiplicar la edo de partida por $e^{-A_1(x)}$, siendo $A_1(x) := \int_\alpha^x a_1(s)\, ds$ para todo $x \in I$ (compruébese como ejercicio).*

Se denomina problema de contorno homogéneo asociado al problema (5) al que se obtiene tomando $b \equiv 0$ en este último. Evidentemente, la función idénticamente nula en I es solución del problema de contorno homogéneo asociado al problema (5). A partir de ahora suponemos que la única solución del problema de contorno homogéneo asociado al problema 5) es la función idénticamente nula en I.

El problema (5) puede ser analizado escribiéndolo como un problema de contorno para un sdo lineal en dimensión $N = 2$, y aplicándole los resultados de las secciones precedentes. No obstante, en vez de hacer eso, vamos a proceder a un análisis directo de (5), sacando provecho de la forma especial de la edo presente en el problema.

Proposición 3.2 *Supongamos* (6) *y que la única solución del problema de contorno homogéneo asociado al problema* (5) *es la función idénticamente nula en I. En estas condiciones, existen dos soluciones φ_1 y φ_2 de la edo $(p(x)y')' + q(x)y = 0$ en I, tales que*

i) $c_1\varphi_1(\alpha) + d_1\varphi_1'(\alpha) = 0$,

ii) $c_2\varphi_2(\beta) + d_2\varphi_2'(\beta) = 0$,

iii) $p(x)(\varphi_1(x)\varphi_2'(x) - \varphi_1'(x)\varphi_2(x)) = 1 \quad \forall\, x \in I$.

Demostración. Si $d_1 \neq 0$, sea ψ_1 la solución del Problema de Cauchy

$$\begin{cases} (p(x)\psi_1')' + q(x)\psi_1 = 0 & en \text{ I}, \\ \psi_1(\alpha) = 1,\ \psi_1'(\alpha) = -c_1/d_1. \end{cases}$$

Si $d_1 = 0$, sea ψ_1 la solución del Problema de Cauchy

$$\begin{cases} (p(x)\psi_1')' + q(x)\psi_1 = 0 & en \text{ I}, \\ \psi_1(\alpha) = 0,\ \psi_1'(\alpha) = 1. \end{cases}$$

De esta manera, en ambos casos obtenemos una solución ψ_1 de la edo $(p(x)y')' + q(x)y = 0$ en I, que satisface i)

Razonando de manera similar, cambiando c_1 por c_2, d_1 por d_2 y α por β, se obtiene una solución ψ_2 de la edo $(p(x)y')' + q(x)y = 0$ en I, que satisface ii).

Observemos que para todo $x \in I$,

$$\begin{aligned}
& \frac{d}{dx}\left[p(x)(\psi_1(x)\psi_2'(x) - \psi_1'(x)\psi_2(x))\right] \\
= \quad & (p(x)\psi_2'(x))'\psi_1(x) + p(x)\psi_2'(x)\psi_1'(x) - (p(x)\psi_1'(x))'\psi_2(x) - p(x)\psi_1'(x)\psi_2'(x) \\
= \quad & -q(x)\psi_2(x)\psi_1(x) + q(x)\psi_1(x)\psi_2(x) \\
= \quad & 0,
\end{aligned}$$

y por tanto existe $r \in \mathbb{R}$ tal que

$$p(x)(\psi_1(x)\psi_2'(x) - \psi_1'(x)\psi_2(x)) = r \quad \forall\, x \in I. \tag{7}$$

Téngase en cuenta que $p(x) > 0$ en todo $x \in I$, y si para algún $x \in I$ se anulase la expresión $\psi_1(x)\psi_2'(x) - \psi_1'(x)\psi_2(x)$ entonces, por ser ambas soluciones de la edo lineal de segundo orden $(p(x)y')' + q(x)y = 0$ en I, la función ψ_2 sería un múltiplo de ψ_1, y por tanto ψ_2 sería una solución no nula del problema de contorno homogéneo asociado al problema (5), en contra de la hiptésis de partida.

En consecuencia, $r \neq 0$, y teniendo en cuenta la construcción de las ψ_i y (7), basta tomar $\varphi_1 = \psi_1$ y $\varphi_2 = \psi_2/r$ para obtener i), ii) y iii). □

Observación 3.3 *Obsérvese que el par $\{\varphi_1, \varphi_2\}$ de la proposición precedente constituye un sistema fundamental de soluciones de la edo $(p(x)y')' + q(x)y = 0$ en I.*

Podemos ahora construir el núcleo de Green para el problema (5).

Teorema 3.4 *Supongamos las hipótesis de la Proposición 3.2, y sean φ_1 y φ_2 funciones satisfaciendo las condiciones de dicha Proposición. Consideremos la función $g : I \times I \to \mathbb{R}$, que denominaremos núcleo de Green para el problema* (5)*, definida por*

$$g(x,s) = \begin{cases} \varphi_1(x)\varphi_2(s) & si\ \alpha \le x \le s \le \beta, \\ \varphi_1(s)\varphi_2(x) & si\ \alpha \le s < x \le \beta. \end{cases}$$

Entonces, para cada $b \in C(I)$, existe una y sólo una solución φ_b de (5)*, que viene dada por*

$$\varphi_b(x) = \int_\alpha^\beta g(x,s)b(s)\,ds \quad \forall\, x \in I. \tag{8}$$

Demostración. Sea $b \in C(I)$ fijada. La unicidad de solución de (5) es consecuencia evidente de que estamos suponiendo que el problema homogéneo asociado tan sólo posee la solución idénticamente nula.

Sea φ_b la función definida por (8). Evidentemente,

$$\varphi_b(x) = \varphi_2(x)\int_\alpha^x \varphi_1(s)b(s)\,ds + \varphi_1(x)\int_x^\beta \varphi_2(s)b(s)\,ds \quad \forall\, x \in I, \tag{9}$$

con lo que

$$
\begin{aligned}
\varphi_b'(x) &= \varphi_2'(x)\int_\alpha^x \varphi_1(s)b(s)\,ds + \varphi_1'(x)\int_x^\beta \varphi_2(s)b(s)\,ds \\
&\quad +\varphi_2(x)\varphi_1(x)b(x) - \varphi_1(x)\varphi_2(x)b(x) \\
&= \varphi_2'(x)\int_\alpha^x \varphi_1(s)b(s)\,ds + \varphi_1'(x)\int_x^\beta \varphi_2(s)b(s)\,ds \quad \forall\, x \in I, \quad (10)
\end{aligned}
$$

y análogamente

$$
\begin{aligned}
\varphi_b''(x) &= \varphi_2''(x)\int_\alpha^x \varphi_1(s)b(s)\,ds + \varphi_1''(x)\int_x^\beta \varphi_2(s)b(s)\,ds \\
&\quad +[\varphi_2'(x)\varphi_1(x) - \varphi_1'(x)\varphi_2(x)]b(x) \quad \forall\, x \in I, \qquad (11)
\end{aligned}
$$

con lo que en particular $\varphi_b \in C^2(I)$.

Además, multiplicando (9) por $q(x)$, (10) por $p'(x)$, (11) por $p(x)$, sumando las expresiones así obtenidas, y teniendo en cuenta que φ_1 y φ_2 satisfacen la edo $(p(x)y')' + q(x)y = 0$ en I, así como la propiedad iii) de la proposición 3.2, se obtiene fácilmente que

$$(p(x)\varphi_b'(x))' + q(x)\varphi_b(x) = b(x) \quad \forall\, x \in I.$$

Por otra parte, de (9) y (10), y teniendo en cuenta las propiedades i) y ii) de la proposición 3.2, se tiene,

$$c_1\varphi_b(\alpha) + d_1\varphi_b'(\alpha) = [c_1\varphi_1(\alpha) + d_1\varphi_1'(\alpha)]\int_\alpha^\beta \varphi_2(s)b(s)\,ds = 0 \quad \forall\, x \in I,$$

$$c_2\varphi_b(\beta) + d_2\varphi_b'(\beta) = [c_2\varphi_2(\beta) + d_2\varphi_2'(\beta)]\int_\alpha^\beta \varphi_1(s)b(s)\,ds = 0 \quad \forall\, x \in I,$$

$\square$

Como ejercicio se propone que se encuentre el núcleo de Green para el problema de contorno

$$\begin{cases} y'' = b(x) \quad \text{en } [0,1], \\ y(0) = y(1) = 0, \end{cases}$$

y que se escriba la expresión de la solución φ_b de dicho problema

4 El problema de Sturm-Liouville

Se denomina problema de Sturm-Liouville al consistente en hallar los valores $\lambda \in \mathbb{R}$, para los que exista solución no nula del problema de contorno

$$
\begin{cases}
(p(x)y')' + (q(x)+\lambda)y = 0 \quad \text{en } I, \\
c_1 y(\alpha) + d_1 y'(\alpha) = 0, \\
c_2 y(\beta) + d_2 y'(\beta) = 0,
\end{cases} \qquad (12)
$$

donde $p \in C^1(I)$ tal que $p(x) > 0$ para todo $x \in I$, $q, b \in C(I)$ y $c_i, d_i \in \mathbb{R}$, $i = 1, 2$, satisfaciendo (6), están dados.

Un autovalor del problema de Sturm-Liouville es cualquier $\lambda \in \mathbb{R}$, para los que exista solución no nula φ_λ del problema (12), y en tal caso a φ_λ se la denomina una autofunción asociada al autovalor λ.

Por ejemplo, es sencillo comprobar (hágase como ejercicio) que en el problema

$$\begin{cases} y'' + \lambda y = 0 \quad \text{en } [0, \pi], \\ y(0) = y(\pi) = 0, \end{cases}$$

los autovalores son los números $\lambda_k = k^2$, $k = 1, 2, ...$, y que como autofunción asociada al autovalor k^2 valen todas las de la forma $\varphi_k(x) = a_k \operatorname{sen}(kx)$, con $a_k \in \mathbb{R}$, $a_k \neq 0$.

Proposición 4.1 *Si se satisface* (6) *y λ es un autovalor de (12), el conjunto de todas las soluciones de (12) para ese valor de λ es un subespacio vectorial de $C^2(I)$ de dimensión uno.*

*Demostración.*Sea λ un autovalor de (12). Es inmediato comprobar que el conjunto de todas las soluciones de (12) para ese valor de λ es un subespacio vectorial no trivial del espacio vectorial de todas las soluciones en I de la edo $(p(x)y')' + (q(x) + \lambda)y = 0$, y por tanto es un subsespacio vectorial de dimension 1 o 2 de $C^2(I)$.

Si la dimensión fuese 2, entonces todas las soluciones en I de la edo $(p(x)y')' + (q(x) + \lambda)y = 0$ serían soluciones de (12) para ese valor de λ, y en particular lo serían las soluciones de los Problemas de Cauchy

$$\begin{cases} (p(x)y')' + (q(x) + \lambda)y = 0, \quad \text{en } I, \\ y(\alpha) = 1 \quad y'(\alpha) = 0, \end{cases}$$

y

$$\begin{cases} (p(x)y')' + (q(x) + \lambda)y = 0, \quad \text{en } I, \\ y(\alpha) = 0 \quad y'(\alpha) = 1, \end{cases}$$

lo que implicaría $c_1 = d_1 = 0$, en contradicción con la hipótesis (6). $\square$

La propiedad puesta de manifiesto en la proposición precedente, se expresa también diciendo que los autovalores del problema de Sturm-Liouville (12) son simples, es decir, que si λ es un autovalor de (12) y φ_1 y φ_2 son dos autofunciones asociadas al autovalor λ, entonces φ_1 y φ_2 son linealmente dependientes.

Otra propiedad interesante de las autofunciones la proporciona el resultado siguiente.

Proposición 4.2 *Si se satisface* (6) *y $\lambda_1 \neq \lambda_2$ son dos autovalores de (12), las autofunciones asociadas a λ_1 y las asociadas a λ_2 son ortogonales entre si respecto del producto escalar en $L^2(I)$, es decir, si φ_1 es una autofunción asociada a λ_1 y φ_2 es una autofunción asociada a λ_2, entonces*

$$\int_\alpha^\beta \varphi_1(x)\varphi_2(x)\, dx = 0. \tag{13}$$

Demostración. En efecto, multiplicando por φ_2 la edo que satisface φ_1, y restándole al resultado el producto de la edo que satisface φ_2 multiplicada por φ_1, se obtiene

$$(p(x)\varphi_1'(x))'\varphi_2(x) - (p(x)\varphi_2'(x))'\varphi_1(x) = (\lambda_2 - \lambda_1)\varphi_1(x)\varphi_2(x) \quad \forall\, x \in I,$$

o lo que es lo mismo,

$$\frac{d}{dx}[p(x)(\varphi_1'(x)\varphi_2(x) - \varphi_2'(x)\varphi_1(x))] = (\lambda_2 - \lambda_1)\varphi_1(x)\varphi_2(x) \quad \forall\, x \in I.$$

Integrando esta última igualdad entre α y β, se tiene

$$\begin{aligned} & (\lambda_2 - \lambda_1)\int_\alpha^\beta \varphi_1(x)\varphi_2(x)\,dx \qquad (14) \\ = \;& p(\beta)(\varphi_1'(\beta)\varphi_2(\beta) - \varphi_2'(\beta)\varphi_1(\beta)) - p(\alpha)(\varphi_1'(\alpha)\varphi_2(\alpha) - \varphi_2'(\alpha)\varphi_1(\alpha)). \end{aligned}$$

Ahora bien, como

$$\begin{aligned} c_1\varphi_1(\alpha) + d_1\varphi_1'(\alpha) = 0, \\ c_1\varphi_2(\alpha) + d_1\varphi_2'(\alpha) = 0, \end{aligned}$$

y $(c_1, d_1) \neq (0,0)$, forzosamente el determinante de la matriz $\begin{pmatrix} \varphi_1(\alpha) & \varphi_1'(\alpha) \\ \varphi_2(\alpha) & \varphi_2'(\alpha) \end{pmatrix}$ es nulo, es decir,

$$\varphi_1'(\alpha)\varphi_2(\alpha) - \varphi_2'(\alpha)\varphi_1(\alpha) = 0.$$

Análogamente se obtiene

$$\varphi_1'(\beta)\varphi_2(\beta) - \varphi_2'(\beta)\varphi_1(\beta) = 0,$$

y por tanto, de (14) y el hecho de que $\lambda_1 \neq \lambda_2$, se obtiene (13). □

Si λ es un autovalor de (12), se denomina autofunción normalizada asociada a λ, y se la denota φ_λ, a la única autofunción asociada a λ que tiene norma 1 en $L^2(I)$, es decir, que satisface

$$\int_\alpha^\beta \varphi_\lambda^2(x)\,dx = 1.$$

Si denotamos por Λ al conjunto de los autovalores de (12), es evidente de los resultados anteriores que el conjunto de autofunciones normalizadas $\{\varphi_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$ es una familia ortonormal en el espacio de Hilbert $L^2(I)$. De hecho, se puede demostrar el siguiente resultado, consecuencia del denominado Teorema de Hilbert-Schmidt, que será probado en la asignatura troncal de cuarto curso Ecuaciones en Derivadas Parciales y Análisis Funcional.

Teorema 4.3 *Si se satisface* (6)*, el conjunto* Λ *de los autovalores de (12) es infinito numerable y de hecho puede ser escrito como una sucesión estrictamente creciente de números* $\Lambda = \{\lambda_n\}_{n\geq 1}$, $\lambda_1 < \lambda_2 < ... < \lambda_n < \lambda_{n+1} < ...$*, tal que* $\lim\limits_{n\to\infty} \lambda_n = +\infty$.

Además, el correspondiente conjunto de autofunciones normalizadas $\{\varphi_n = \varphi_{\lambda_n}\}_{n\geq 1}$ es una base de Hilbert de $L^2(I)$, es decir, es una familia ortonormal en el espacio de Hilbert $L^2(I)$, tal que

$$u = \sum_{n=1}^{\infty} (u, \varphi_n)_{L^2(I)} \varphi_n, \quad \forall\, u \in L^2(I),$$

siendo la serie convergente en $L^2(I)$, donde hemos denotado

$$(u, \varphi_n) := \int_\alpha^\beta u(x)\varphi(x)\, dx.$$

Observación 4.4 *Supongamos que $\lambda = 0$ no es un autovalor de (12). En tal caso, tomando el núcleo de Green $g(x,s)$ construido en la sección anterior, es sencillo comprobar (hágase como ejercicio) que el problema (12) es equivalente al problema consistente en hallar los valores $\lambda \in \mathbb{R}$ para los que existe $\psi \in L^2(I)$, $\psi \neq 0$, solución de la ecuación*

$$\psi(x) + \lambda \int_\alpha^\beta g(x,s)\psi(s)\, ds = 0 \quad \forall\, x \in I. \tag{15}$$

A la ecuación (15) se la denomina una ecuación integral de tipo Fredholm. El estudio de este tipo de ecuaciones se puede consultar por ejemplo en [3].

El problema de Sturm-Liouville juega un papel importante en el estudio mediante el denominado método de separación de variables, de ecuaciones en derivadas parciales clásicas de la Física, tales como las ecuaciones del calor y de ondas unidimensionales.

El método de separación de variables se estudia también en la asignatura de cuarto curso Ecuaciones en Derivadas Parciales y Análisis Funcional ya mencionada.

Referencias

[1] E.A. Coddington y N. Levinson, Theory of ordinary differential equations, McGraw & Hill, New York, 1955.

[2] C. Corduneanu, Principles of Differential and Integral Equations, Chelsea Publishing, New York, 1977.

[3] H. Hochstadt, Integral Equations, John wiley and Sons, 1973