Tema 4

INTRODUCCIÓN A LA TEORÍA DE LA ESTABILIDAD

1 Preliminares sobre el Problema de Cauchy

El objetivo de este apartado es exponer los resultados sobre el (PC) que serán necesarios para el correcto entendimiento del contenido del curso. Utilizaremos la misma notación que en la asignatura de EDO, con la salvedad de que usaremos t, en vez de x, para designar a la variable independiente.

1.1 Definición de solución de un (PC)

Consideremos el siguiente problema de Cauchy o de valores iniciales

$$(PC)\left\{\begin{array}{c} y' = f(t,y) \\ y(t_0) = y_0 \end{array}\right. ,$$

con $f : \Omega \subset \mathbb{R}^{N+1} \to \mathbb{R}^N$, una función dada, siendo $N \geq 1$ entero, y donde $(t_0, y_0) \in \Omega$ está fijado.

Dado $I \subset \mathbb{R}$ intervalo de interior no vacío tal que $t_0 \in I$, una solución del problema (PC) en el intervalo I, es cualquier función $\varphi : I \to \mathbb{R}^N$, tal que :

(i) Existe el vector derivada (componente a componente) $\varphi'(t)$ en todo punto $t \in I$, donde si t es un extremo de I, $\varphi'(t)$ denota a la correspondiente derivada lateral,

(ii) $(t, \varphi(t)) \in \Omega$, para todo $t \in I$,

(iii) $\varphi'(t) = f(t, \varphi(t))$, para todo $t \in I$,

(iv) $\varphi(t_0) = y_0$.

Se suele decir también que (I, φ) es una solución local del (PC).

1.2 Existencia y unicidad local de soluciones

Se verifica el siguiente resultado.

Teorema 1.1 ***(Teorema de Picard)*** *Sean $\Omega \subset \mathbb{R}^{N+1}$ un conjunto abierto no vacío, y $f : \Omega \to \mathbb{R}^N$ tal que*

$$f \in C(\Omega; \mathbb{R}^N) \cap Lip_{loc}(y, \Omega).$$

Con estas condiciones, para cada $(t_0, y_0) \in \Omega$, existe un $\delta > 0$, tal que si denotamos

$$I_\delta = [t_0 - \delta, t_0 + \delta],$$

existe una y sólo una solución del problema (PC) en I_δ.

Observación 1.2 *Si $f \in C(\Omega; \mathbb{R}^N)$, con $\Omega \subset \mathbb{R}^{N+1}$ un conjunto abierto, pero $f \notin Lip_{loc}(y, \Omega)$, es posible todavía demostrar, para cada $(t_0, y_0) \in \Omega$ dado, la existencia de un $\delta > 0$ tal que existe solución en I_δ del correspondiente Problema de Cauchy (esta afirmación quedará justificada cuando se demuestre el Teorema de existencia de Peano).*

1.3 Solución maximal del Problema de Cauchy

En primer lugar recordemos un resultado sobre unicidad global de solución del (PC).

Teorema 1.3 ***(de unicidad global)*** *Sean $\Omega \subset \mathbb{R}^{N+1}$ un abierto no vacío, $f : \Omega \to \mathbb{R}^N$ tal que*

$$f \in C(\Omega; \mathbb{R}^N) \cap Lip_{loc}(y, \Omega),$$

y $(t_0, y_0) \in \Omega$.
En estas condiciones, si (I_1, φ_1) e (I_2, φ_2) son dos soluciones del problema de Cauchy

$$(PC) \quad \left\{ \begin{array}{l} y' = f(t, y) \\ y(t_0) = y_0 \end{array} \right. ,$$

entonces

$$\varphi_1(t) = \varphi_2(t), \quad \forall\, t \in I_1 \cap I_2.$$

Podemos enunciar ya un resultado que asegura existencia y unicidad de solución maximal del (PC).

Supongamos dados $\Omega \subset \mathbb{R}^{N+1}$ abierto no vacío, $f : \Omega \to \mathbb{R}^N$ tal que

$$f \in C(\Omega; \mathbb{R}^N) \cap Lip_{loc}(y, \Omega),$$

y consideremos el Problema de Cauchy

$$(PC) \quad \left\{ \begin{array}{l} y' = f(t, y) \\ y(t_0) = y_0 \end{array} \right. .$$

Para cada punto $(t_0, y_0) \in \Omega$, denotaremos

$$S(t_0, y_0) = \{(I, \varphi);\ \varphi \text{ es solución de } (PC) \text{ en el intervalo } I\}$$

Teniendo en cuenta el Teorema de Picard, sabemos que, bajo las condiciones precedentes,

$$S(t_0, y_0) \neq \emptyset.$$

Definición 1.4 *Sean $(t_0, y_0) \in \Omega$, e $(I, \varphi) \in S(t_0, y_0)$, fijados.*

a) Diremos que (I, φ) es prolongable por la derecha, si existe una solución $(J, \psi) \in S(t_0, y_0)$, tal que $\sup I$ pertenece al interior del intervalo J, e $I \subset J$.

b) Diremos que (I, φ) es prolongable por la izquierda, si existe una solución $(J, \psi) \in S(t_0, y_0)$, tal que $\inf I$ pertenece al interior del intervalo J, e $I \subset J$.

c) Diremos que (I, φ) es prolongable, si es prolongable por la derecha o por la izquierda (o ambas cosas a la vez).

d) Diremos que (I, φ) es una solución maximal, o una solución global, del problema (PC), si no es prolongable.

Observación 1.5 *Si $(I, \varphi) \in S(t_0, y_0)$ es prolongable por la derecha, y $(J, \psi) \in S(t_0, y_0)$ es tal que $\sup I$ pertenece al interior del intervalo J, e $I \subset J$, es claro que, como consecuencia del teorema de unicidad global, φ y ψ son iguales en I, siendo por tanto ψ una prolongación de φ por el extremo derecho del intervalo I. Cabe hacer una observación similar si (I, φ) es prolongable por la izquierda.*

Teorema 1.6 ***(de existencia y unicidad de solución global)*** *Sean Ω un abierto no vacío de $\mathbb{R}^{N+1}$, y $f : \Omega \to \mathbb{R}^N$ tal que*

$$f \in C(\Omega; \mathbb{R}^N) \cap Lip_{loc}(y, \Omega).$$

En estas condiciones, para cada $(t_0, y_0) \in \Omega$ dado, existe una y sólo una solución maximal o global del Problema de Cauchy

$$(PC) \quad \begin{cases} y' = f(t, y) \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$$

que denotaremos $(I(t_0, y_0), \varphi(\cdot; t_0, y_0))$.

Además, el intervalo $I(t_0, y_0)$ de definición de la solución global es abierto.

Definición 1.7 *En las condiciones del Teorema de existencia y unicidad de solución global, para cada $(t_0, y_0) \in \Omega$, denotemos por $(I(t_0, y_0), \varphi(\cdot; t_0, y_0))$ a la solución maximal del problema (PC). Se definen el conjunto*

$$\Theta = \{(t, t_0, y_0) \in \mathbb{R}^{N+2};\ (t_0, y_0) \in \Omega,\ t \in I(t_0, y_0)\},$$

y la función

$$\varphi : (t, t_0, y_0) \in \Theta \mapsto \varphi(t; t_0, y_0) \in \mathbb{R}^N.$$

A la función $\varphi : \Theta \to \mathbb{R}^N$ así definida se la denomina la solución (maximal) del problema (PC) expresada en función de los datos iniciales.

Se verifica el siguiente resultado sobre dependencia continua de la solución maximal respecto de los datos iniciales.

Teorema 1.8 ***(Dependencia continua respecto de los datos iniciales)*** *Bajo las condiciones del Teorema de existencia y unicidad de solución global, el conjunto Θ definido precendentemente es un subconjunto abierto de $\mathbb{R}^{N+2}$, y la función $\varphi : \Theta \to \mathbb{R}^N$, solución (maximal) del problema (PC) expresada en función de los datos iniciales, es continua, es decir,*

$$\varphi \in C(\Theta; \mathbb{R}^N).$$

Observación 1.9 *Existen también resultados sobre derivabilidad de la solución maximal respecto de los datos iniciales que sern comentados en el tema 4.*

2 Motivación del estudio de la estabilidad

Supongamos que estamos analizando un fenómeno físico, biológico, etc... que evoluciona con el paso del tiempo, y cuyo comportamiento se rige por un sistema diferencial ordinario, o por concretar un poco más, por una e.d.o. de primer orden, junto con unas determinadas condiciones iniciales (pensemos por ejemplo en el movimiento de una masa puntual que se mueve en una línea recta). De este modo, la posición que ocupa en el instante t la partícula que partió del punto y_0 en el instante t_0 vendrá dada por el valor de la solución $\varphi(t; t_0, y_0)$ del siguiente problema de Cauchy:

$$(PC) \quad \left\{ \begin{array}{l} y' = f(t, y) \\ y(t_0) = y_0 \end{array} \right. .$$

Ahora bien, dado que las condiciones iniciales son irrepetibles, además de que se suelen cometer errores al estimar la posición inicial (errores humanos, de los aparatos de medida, etc), lo que en realidad conocemos no es la posición exacta de partida y_0 sino un valor aproximado $\overline{y}_0$. De este modo, lo que verdaderamente estamos tomando como posición real de la partícula es $\varphi(t; t_0, \overline{y}_0)$ en lugar del verdadero valor $\varphi(t; t_0, y_0)$.

Resulta fundamental conocer si cuando se comete un error pequeño al aproximar y_0 por $\overline{y}_0$ las correspondientes soluciones $\varphi(t; t_0, y_0)$ y $\varphi(t; t_0, \overline{y}_0)$ se mantienen próximas. Cuando el tiempo t recorre un intervalo acotado, el resultado queda garantizado por el Teorema de dependencia continua respecto de los datos iniciales.

En efecto, si suponemos que $f \in C(\Omega; \mathbb{R}^N) \cap Lip_{loc}(y; \Omega)$, entonces $\varphi(\cdot; \cdot, \cdot) \in C(\Theta; \mathbb{R}^N)$. Sea $K = [t_0, T] \times \{t_0\} \times \overline{B}(y_0; \varepsilon) \subset \Theta$ para cualquier $T > t_0$. De la continuidad uniforme de f en el compacto K, se deduce que dado $\varepsilon > 0, \exists\, a > 0$ tal que

$$|\varphi(\bar{t}; t_0, \overline{y}_0) - \varphi(t; t_0, y_0)| \leq \varepsilon, \quad \forall\, (\bar{t}; t_0, \overline{y}_0), (t; t_0, y_0) \in K \text{ t.q. } |t - \bar{t}| \leq a, |y_0 - \overline{y}_0| \leq a.$$

En particular, para $|y_0 - \overline{y}_0| \leq a$ se tendrá que

$$|\varphi(t; t_0, \overline{y}_0) - \varphi(t; t_0, y_0)| \leq \varepsilon, \quad \forall\, t \in [t_0, T].$$

No obstante, que esto se siga cumpliendo o no cuando el tiempo se hace suficientemente grande (i.e. cuando $t \to +\infty$) será el objeto del presente capítulo y nos conducirá al estudio de la estabilidad del sistema.

En sus orígenes, la estabilidad apareció en los problemas de la mecánica al estudiar la naturaleza de los estados de reposo o equilibrio. Así, por ejemplo, el péndulo simple posee dos estados de equilibrio (posición A, cuando el péndulo está en reposo y el centro de gravedad de la masa puntual está lo más cerca posible del suelo, y posición B, cuando la masa se encuentra en la posición más alejada del suelo). En este modelo, la posición de equilibrio A es *estable*, pues si se produce una desviación de la posición de equilibrio, el movimiento de la masa será oscilatorio alrededor de dicha posición, mientras que la posición B resulta ser *inestable* pues una pequeña desviación de dicha posición hace que la partícula se acerque a la posición de equilibrio A.

Al objeto de ilustrar lo que decimos con un ejemplo analítico pero modelado por una edo de primer orden (recordemos que el movimiento del péndulo se rige por una de segundo orden), consideremos el movimiento de una partícula en la recta real y cuya posición venga dada por la solución de

$$y' = y - y^3.$$

Es obvio que existen tres soluciones constantes (tres puntos de equilibrio o de reposo): $y_0 = 0, y_1 = 1, y_{-1} = -1$ (se tiene por tanto que $\varphi(t; t_0; 0) = 0, \varphi(t; t_0; 1) = 1, \varphi(t; t_0; -1) = -1, \forall\, t \in \mathbb{R}$). Para analizar cómo es el comportamiento de cualquier otra solución, basta calcular la solución que pasa por (t_0, y_0), y por fijar ideas, nos ocuparemos sólo de la que pasa por $(0, y_0)$ (más adelante justificaremos que, por tratarse de un sistema autónomo, esto no supone ninguna restricción). Así, como la edo es de variables separadas (o también de Bernouilli) se puede comprobar fácilmente que

$$\varphi(t; 0, y_0) = \pm\sqrt{\frac{1}{1 + ce^{-2t}}}, \quad \text{donde} \quad c = 1 - \frac{1}{y_0^2}\ .$$

En consecuencia, se observa que

- $\varphi(t; 0, y_0) \to -1$ cuando $t \to +\infty$, si el dato inicial verifica $y_0 < 0$.
- $\varphi(t; 0, y_0) \to 1$ cuando $t \to +\infty$, si el dato inicial verifica $y_0 > 0$.

De este modo, todas las posibles soluciones (i.e. todos las posibles trayectorias del punto) o bien son uno de los tres estados de reposo, o bien se acercan a los equilibrio $y_{-1} = -1$, $y_1 = 1$. Esto se interpreta como que dichos estados de reposo son estables, mientras que el $y_0 = 0$ es inestable.

3 Definiciones de estabilidad

Como quedará justificado más adelante, al ser el estudio de la estabilidad un problema local, nos podemos restringir a considerar que el abierto Ω tiene la forma

$$\Omega = I \times B_\rho,$$

donde $0 < \rho \leq +\infty$, $-\infty \leq \tau < +\infty$, $I = (\tau, +\infty)$ y $B_\rho = B(0; \rho) \subset \mathbb{R}^N$. Ahora consideramos el sistema diferencial

$$y' = f(t, y) \tag{1}$$

con $f \in C(\Omega; \mathbb{R}^N) \cap Lip_{loc}(y; \Omega)$ y satisfaciendo $f(t, 0) = 0$, para todo $t \in I$.

Observemos que esto implica que la función nula φ_0 definida por $\varphi_0(t) \equiv 0$, para todo $t \in I$, es solución de (1), más precisamente

$$\varphi_0(t) = \varphi(t; t_0, 0), \ \ \forall\, t, t_0 \in I, \quad \text{y además} \ \ I(t_0, 0) = I, \ \ \forall\, t_0 \in I.$$

Se dice en ese caso que φ_0 es un punto *crítico* del sdo (1), o un *equilibrio*.

Observación 3.1 *Aunque las definiciones las vamos a establecer para la solución nula φ_0, esto no supone ninguna pérdida de generalidad, pues si $\widetilde{\varphi}$ es una solución no nula de un sistema diferencial $y' = g(t, y)$, donde $g \in C(\Omega; \mathbb{R}^N) \cap Lip_{loc}(y, \Omega)$, entonces realizando el cambio de variables $z = y - \widetilde{\varphi}$ el sistema se transforma en el siguiente*

$$\begin{aligned} z' &= y' - \widetilde{\varphi}' \\ &= g(t, y) - g(t, \widetilde{\varphi}) \\ &= g(t, z + \widetilde{\varphi}) - g(t, \widetilde{\varphi}) \\ &= G(t, z), \end{aligned}$$

y ahora G satisface las mismas condiciones que f en (1), y además $z_0 \equiv 0$ es un punto crítico para este sistema que se corresponde con $\widetilde{\varphi}$ mediante el cambio de variables.

Definición 3.2 ***(Estabilidad en sentido de Liapunov)*** *Se dice que φ_0 es estable en el sentido de Liapunov (o simplemente que φ_0 es un equilibrio estable) para el sdo (1) si*

$$\begin{aligned} &\forall\, t_0 \in I, \quad \forall\, \varepsilon > 0, \quad \exists\, \delta = \delta(t_0, \varepsilon) \in (0, \rho) \quad \textit{tal que} \\ &|y_0| \leq \delta \Longrightarrow \begin{cases} \textit{i)}\;\; I(t_0, y_0) \supset [t_0, +\infty) \\ \textit{ii)}\; |\varphi(t; t_0, y_0)| \leq \varepsilon, \quad \forall\, t \geq t_0. \end{cases} \end{aligned} \tag{2}$$

Observación 3.3 ***(Definición equivalente de estabilidad)*** *Es inmediato comprobar que φ_0 es estable para el sistema diferencial (1) si y sólo si*

$$\begin{aligned} &\forall\, t_0 \in I, \quad \forall\, \varepsilon \in (0, \rho), \quad \exists\, \delta = \delta(t_0, \varepsilon) \in (0, \rho) \quad \textit{tal que} \\ &|y_0| \leq \delta \Longrightarrow |\varphi(t; t_0, y_0)| \leq \varepsilon, \quad \forall\, t \in I(t_0, y_0) \cap [t_0, +\infty). \end{aligned} \tag{3}$$

Que (2)$\Longrightarrow$(3) es obvio. Para demostrar la implicación (3)$\Longrightarrow$(2), basta observar que al ser $\varepsilon < \rho$ la solución $\varphi(\cdot; t_0, y_0)$ no puede ni explotar ni llegar a la frontera de Ω, y por tanto está definida para todo $t \geq t_0$.

Definición 3.4 ***(Inestabilidad)*** *Se dice que φ_0 es inestable cuando no sea estable según la Definición 3.2 (o equivalentemente, según la definición dada en la Observación precedente), en otras palabras, si*

$$\begin{aligned} &\exists\, t_0 \in I \;\; \textit{y} \;\; \exists\, \varepsilon > 0, \quad \textit{tal que} \;\; \forall\, \delta \in (0, \rho) \quad \exists\, y_0 \in \mathbb{R}^N \quad \textit{con}\; |y_0| \leq \delta \;\; \textit{tal que} \\ &\quad \begin{cases} I(t_0, y_0) \not\supseteq [t_0, +\infty) \\ \textit{o} \\ |\varphi(t; t_0, y_0)| > \varepsilon, \quad \textit{para algún} \;\; t \geq t_0. \end{cases} \end{aligned}$$

(o equivalentemente, $|\varphi(t; t_0, y_0)| > \varepsilon, \quad$ para algún $\; t \in I(t_0, y_0) \cap [t_0, +\infty)$).

Definición 3.5 ***(Estabilidad uniforme)*** *Se dice que φ_0 es uniformemente estable cuando el δ de la Definición 3.2 no depende de t_0, es decir, si*

$$\begin{aligned} &\forall\, \varepsilon > 0, \quad \exists\, \delta = \delta(\varepsilon) \in (0, \rho) \quad \textit{tal que} \\ &\textit{si}\; t_0 \in I \;\; \textit{e}\; |y_0| \leq \delta \Longrightarrow \begin{cases} \textit{i)}\;\; I(t_0, y_0) \supset [t_0, +\infty) \\ \textit{ii)}\; |\varphi(t; t_0, y_0)| \leq \varepsilon, \quad \forall\, t \geq t_0. \end{cases} \end{aligned} \tag{4}$$

Definición 3.6 ***(Equilibrio atractivo)*** *Se dice que φ_0 es (un equilibrio) atractivo si*

$$\forall\ t_0 \in I, \quad \exists\ \gamma = \gamma(t_0) \in (0, \rho) \quad \textit{tal que si} \quad |y_0| \leq \gamma \quad \textit{entonces}$$
$$\begin{cases} \textit{i)} & I(t_0, y_0) \supset [t_0, +\infty), \\ \textit{ii)} & \lim\limits_{t \to +\infty} |\varphi(t; t_0, y_0)| = 0. \end{cases}$$

Observación 3.7 *Los conceptos de estabilidad y atractividad son distintos en general, es decir, existen ejemplos que ponen de manifiesto que*

$$\textit{estabilidad} \not\Rightarrow \textit{atractividad}$$
$$\textit{y}$$
$$\textit{atractividad} \not\Rightarrow \textit{estabilidad}$$

Definición 3.8 ***(Atractividad uniforme)*** *Se dice que φ_0 es (un equilibrio) uniformemente atractivo si*

$$\exists\, \gamma \in (0, \rho) \ \ \textit{t.q.} \ \ \forall\, t_0 \in I, \ \ \forall\, y_0 \in \mathbb{R}^N \ \ \textit{con} \ \ |y_0| \leq \gamma, \ \ I(t_0, y_0) \supset [t_0, +\infty),$$
y además
$$\forall\, \varepsilon > 0, \ \exists\, t_\varepsilon > 0 \ \ \textit{t.q.} \ \ |\varphi(t; t_0, y_0)| \leq \varepsilon, \ \forall\, t_0 \in I, \forall\, t \geq t_0 + t_\varepsilon, \forall\, y_0 \ \textit{con} \ |y_0| \leq \gamma.$$

Definición 3.9 ***(Estabilidad asintótica)*** *Se dice que φ_0 es asintóticamente estable si es estable y atractivo.*

Definición 3.10 ***(Estabilidad asintótica uniforme)*** *Se dice que φ_0 es uniformemente asintóticamente estable si es uniformemente estable y uniformemente atractivo.*

Todavía se puede establecer al menos otra definición de estabilidad, en concreto la de estabilidad exponencial, pero preferimos incluirla más adelante.

Observación 3.11 *Es importante observar los siguientes puntos.*
a) Para una ecuación diferencial ordinaria de orden n

$$y^{(n} = g(t, y, y', y'', ..., y^{(n-1)}) \tag{5}$$

verificando que $g(t, 0, 0, 0, ..., 0) = 0$ para todo $t \in I$, los definiciones de caracter estable, atractivo, etc... se refieren a los correspondientes conceptos para la solución nula del sistema diferencial ordinario equivalente asociado a la ecuación (5).
b) En el caso de sistemas diferenciales ordinarios autónomos, es decir, cuando $f(t, y) = f(y)$, todos los conceptos de estabilidad y atractividad son uniformes. En otras palabras, se verifica que φ_0 es estable (resp. atractivo, asintóticamente estable) si y sólo si φ_0 es uniformemente estable (resp. uniformemente atractivo, uniformemente asintóticamente estable). En efecto, esto es consecuencia de los hechos siguientes. Si $D \subset \mathbb{R}^N$ es un abierto no vacío y $f \in C(D; \mathbb{R}^N) \cap Lip_{loc}(D)$, entonces con la notación que venimos usando para el sistema diferencial (1), tendremos que $\Omega = \mathbb{R} \times D$ y para cada $(t_0, y_0) \in \Omega$, la solución maximal $\varphi(t; t_0, y_0)$ del problema de Cauchy

$$(PC) \quad \begin{cases} y' = f(y) \\ y(t_0) = y_0, \end{cases} \tag{6}$$

satisface:
i) $I(t_0, y_0) = t_0 + I(0, y_0)$
ii) $\varphi(t; t_0, y_0) = \varphi(t - t_0; 0, y_0), \ \forall\, t \in I(t_0, y_0)$.
Para demostrar esta afirmación, consideremos la función $\psi : J = t_0 + I(0, y_0) \to \mathbb{R}^N$ *definida como* $\psi(t) = \varphi(t - t_0; 0, y_0)$, *para* $t \in J$. *Obviamente, esta función* ψ *está bien definida y es derivable en todo su dominio de definición. Es inmediato comprobar que* (J, ψ) *es solución del problema (6). Por tanto, como* $(I(t_0, y_0), \varphi(\cdot; t_0, y_0))$ *es la solución maximal de dicho problema, entonces* $I(t_0, y_0) \supset t_0 + I(0, y_0)$, *y ambas funciones coinciden en el intervalo* $J = t_0 + I(0, y_0)$. *Reciprocamente, definamos ahora* $\mu : \widetilde{J} = I(t_0, y_0) - t_0 \to \mathbb{R}^N$ *como* $\mu(t) = \varphi(t + t_0; t_0, y_0)$, *para* $t \in \widetilde{J}$. *Razonando de modo similar, se comprueba fácilmente que* $(\widetilde{J}, \mu)$ *es solución del siguiente problema*

$$\begin{cases} y' = f(y) \\ y(0) = y_0, \end{cases}$$

con lo que se verificará que $I(0, y_0) \supset I(t_0, y_0) - t_0$, *y* μ *coincide con* $\varphi(\cdot; 0, y_0)$ *en el intervalo* $\widetilde{J} = I(t_0, y_0) - t_0$. *A la luz de estos resultados, es inmediato observar que se verifican i) y ii).*
c) A título informativo, vamos a enunciar cómo se traducirían las definiciones de estabilidad dadas en el caso en que nos estemos refiriendo a otra solución cualquiera del sistema diferencial y no precisamente a la solución nula. Por supuesto, siempre se puede hacer el cambio de variables y llevarla a la solución trivial, pero en algunas ocasiones puede resultar útil no hacerlo. Así, por ejemplo, si $\widetilde{\varphi}$ *es una solución del sdo (1), se verificará que* $\widetilde{\varphi}$ *es una solución estable (análogamente se procedería con las otras definiciones) cuando*

$$\forall\, t_0 \in I, \quad \forall\, \varepsilon > 0, \quad \exists\, \delta = \delta(t_0, \varepsilon) \in (0, \rho) \quad \textit{tal que}$$

$$|y_0 - \widetilde{\varphi}(t_0)| \le \delta \Longrightarrow \begin{cases} \textit{i)} \ \ I(t_0, y_0) \supset [t_0, +\infty) \\ \textit{ii)} \ |\varphi(t; t_0, y_0) - \widetilde{\varphi}(t)| \le \varepsilon, \quad \forall\, t \ge t_0. \end{cases}$$

4 Estabilidad de los sistemas lineales

El estudio de la estabilidad de los sistemas lineales resulta muy interesante, pues se van a poder caracterizar los distintos tipos de estabilidad simplemente con el conocimiento del comportamiento de una matriz fundamental asociada a dicho sistema. Como de nuevo nos ocuparemos de la estabilidad de la solución nula, necesariamente el sistema habrá de ser homogéneo.

Consideremos pues el sistema diferencial lineal homogéneo

$$y' = A(t)y, \tag{7}$$

donde $A \in C(I; \mathcal{L}(\mathbb{R}^N)$ y $I = (\tau, +\infty)$, $-\infty \le \tau < +\infty$. Se verifica el siguiente resultado.

Teorema 4.1 *Sea* $F(t)$ *una matriz fundamental para el sistema (7). Se verifican:*
i) φ_0 *es un equilibrio estable si y sólo si para cada* $t_0 \in I$, *se cumple que*

$$\sup_{t \in [t_0, +\infty)} |F(t)| < +\infty.$$

ii) φ_0 *es asintóticamente estable si y sólo si*

$$\lim_{t\to+\infty} |F(t)| = 0.$$

iii) φ_0 *es uniformemente estable si y sólo si*

$$\exists\ M > 0 \ \ \textit{tal que} \ \ |F(t)F(t_0)^{-1}| \leq M, \ \ \forall\ t_0 \in I, \ \forall\ t \geq t_0.$$

iv) φ_0 *es uniformemente asintóticamente estable si y sólo si*

$$\exists\ C > 0, \alpha > 0 \ \ \textit{tales que} \ \ |F(t)F(t_0)^{-1}| \leq Ce^{-\alpha(t-t_0)}, \ \ \forall\ t_0 \in I, \ \forall\ t \geq t_0.$$

Observación 4.2 *Observemos que en los sistemas lineales se verifica que el carácter atractivo implica el estable, lo que no ocurre en general para sistemas no lineales.*

Demostración.

Es bien conocido que la solución maximal del sistema (7) correspondiente al dato inicial (t_0, y_0) viene dada por $\varphi(t; t_0, y_0) = F(t)F(t_0)^{-1}y_0$, para $t \in I(t_0, y_0) \equiv I$. Demostremos ya los apartados del Teorema.

i) $\boxed{\Longleftarrow}$ Hay que demostrar que dados $t_0 \in I, \varepsilon > 0$, $\exists\ \delta = \delta(t_0, \varepsilon) > 0$ tal que si $|y_0| \leq \delta$ entonces $|\varphi(t; t_0, y_0)| \leq \varepsilon$, $\forall\ t \geq t_0$. Mencionemos en primer lugar que la norma de matriz que estamos utilizando es subordinada a la de $\mathbb{R}^N$, por tanto, para $t \geq t_0$,

$$\begin{aligned}
|\varphi(t; t_0, y_0)| &\leq |F(t)||F(t_0)^{-1}||y_0| \\
&\leq \sup_{t\geq t_0} |F(t)||F(t_0)^{-1}||y_0| \\
&\leq M\delta|F(t_0)^{-1}| \\
&\leq \varepsilon, \text{ si tomamos } \ |y_0| \leq \delta = \frac{\varepsilon}{M|F(t_0)^{-1}|}.
\end{aligned}$$

$\boxed{\Longrightarrow}$ Como φ_0 es estable, entonces fijados $t_0 \in I$ y $\varepsilon = 1$, existirá un $\delta > 0$ tal que si $|y_0| \leq \delta$ entonces $|\varphi(t; t_0, y_0)| \leq 1$, $\forall\ t \geq t_0$. Tomemos ahora un $y_0 \in \mathbb{R}^N \backslash \{0\}$ cualquiera, entonces $z_0 = \dfrac{\delta y_0}{|y_0|}$ satisface que $|z_0| \leq \delta$, por lo que podemos asegurar que

$$|\varphi(t; t_0, \frac{\delta y_0}{|y_0|})| \leq 1, \ \forall\ t \geq t_0 \Longleftrightarrow |F(t)F(t_0)^{-1}\left(\frac{\delta y_0}{|y_0|}\right)| \leq 1, \ \forall\ t \geq t_0$$

$$\Longleftrightarrow |F(t)F(t_0)^{-1}y_0| \leq \frac{|y_0|}{\delta}, \ \forall\ t \geq t_0, \ \forall\ y_0 \in \mathbb{R}^N.$$

Basta observar ahora que la matriz fundamental $F(t)$ tiene la forma

$$F(t) = [\varphi(t; t_0, y_0^1)| \cdots |\varphi(t; t_0, y_0^N)]$$

para ciertos $y_0^1, ..., y_0^N \in \mathbb{R}^N$, y que podemos usar la norma columna como norma equivalente. Así, es claro que

$$|F(t)| \leq \max\left\{\frac{|y_0^1|}{\delta}, ..., \frac{|y_0^N|}{\delta}\right\}, \ \ \forall t \geq t_0.$$

ii) $\boxed{\Longleftarrow}$ Si suponemos que $\lim\limits_{t\to+\infty}|F(t)|=0$, entonces para cada $t_0\in I$ se verifica que $\sup\limits_{t\in[t_0,+\infty)}|F(t)|<+\infty$, con lo que φ_0 es estable. Veamos ahora que es atractivo. Para ello tenemos que demostrar que dado $t_0\in I$, existe $\gamma(t_0)>0$ tal que si $|y_0|\leq\gamma(t_0)$ entonces $\lim\limits_{t\to+\infty}|\varphi(t;t_0,y_0)|=0$. En efecto,

$$0\leq|\varphi(t;t_0,y_0)|=|F(t)F(t_0)^{-1}y_0|\leq|F(t)||F(t_0)^{-1}y_0|\underset{t\to+\infty}{\longrightarrow}0$$

$\boxed{\Longrightarrow}$ Reciprocamente, si φ_0 es atractivo, entonces fijado $t_0\in I$ existe $\gamma(t_0)>0$ tal que si $|y_0|\leq\gamma(t_0)$ entonces $\lim\limits_{t\to+\infty}|\varphi(t;t_0,y_0)|=0$. Tomemos ahora cualquier $y_0\in\mathbb{R}^N\backslash\{0\}$. Como $\left|\dfrac{\gamma y_0}{|y_0|}\right|\leq\gamma$, entonces

$$\begin{aligned}&\lim_{t\to+\infty}|\varphi(t;t_0,\frac{\gamma y_0}{|y_0|})|=0\Longleftrightarrow\lim_{t\to+\infty}|F(t)F(t_0)^{-1}\frac{\gamma y_0}{|y_0|}|=0\\ \Longleftrightarrow&\lim_{t\to+\infty}|F(t)F(t_0)^{-1}y_0|=0\Longleftrightarrow\lim_{t\to+\infty}|\varphi(t;t_0,y_0)|=0,\quad\forall\ y_0\in\mathbb{R}^N.\end{aligned}$$

Teniendo en cuenta de nuevo que la matriz fundamental $F(t)$ tiene por columnas N vectores de la forma $\varphi(t;t_0,y_0^i)$, $i=1,...,N$, es obvio que $\lim\limits_{t\to+\infty}|F(t)|=0$.

iii) Aunque la demostración de este apartado es similar a la del apartado i), preferimos incluirla por afán de completitud.

$\boxed{\Longleftarrow}$ Hay que demostrar que dado$\varepsilon>0$, $\exists\ \delta=\delta(\varepsilon)>0$ tal que si $|y_0|\leq\delta$ entonces $|\varphi(t;t_0,y_0)|\leq\varepsilon$, $\forall\ t_0\in I$, $\forall\ t\geq t_0$. Observemos que, $\forall\ t_0\in I$, $\forall\ t\geq t_0$,

$$\begin{aligned}|\varphi(t;t_0,y_0)|&\leq|F(t)F(t_0)^{-1}||y_0|\\&\leq M|y_0|,\\&\leq M\delta\\&\leq\varepsilon,\text{ si tomamos }\ |y_0|\leq\delta=\frac{\varepsilon}{M}.\end{aligned}$$

$\boxed{\Longrightarrow}$ Como φ_0 es uniformemente estable, entonces fijado $\varepsilon=1$, existirá un $\delta>0$ tal que si $|y_0|\leq\delta$ entonces $|\varphi(t;t_0,y_0)|\leq1$, $\forall\ t_0\in I$, $\forall\ t\geq t_0$. Tomemos ahora un $y_0\in\mathbb{R}^N\backslash\{0\}$ cualquiera, entonces $z_0=\dfrac{\delta y_0}{|y_0|}$ satisface que $|z_0|\leq\delta$, por lo que podemos asegurar que

$$\begin{aligned}|\varphi(t;t_0,\frac{\delta y_0}{|y_0|})|\leq1,\ \forall\ t\geq t_0&\Longleftrightarrow|F(t)F(t_0)^{-1}\left(\frac{\delta y_0}{|y_0|}\right)|\leq1,\ \forall\ t\geq t_0\\&\Longleftrightarrow\frac{|F(t)F(t_0)^{-1}y_0|}{|y_0|}\leq\frac{1}{\delta},\ \forall\ t\geq t_0,\ \forall\ y_0\in\mathbb{R}^N\backslash\{0\}.\end{aligned}$$

Teniendo en cuenta ahora que

$$|F(t)F(t_0)^{-1}|=\sup_{y_0\in\mathbb{R}^N\backslash\{0\}}\frac{|F(t)F(t_0)^{-1}y_0|}{|y_0|}\leq\frac{1}{\delta},\ \forall\ t\geq t_0.$$

iv) $\boxed{\Longleftarrow}$ Supongamos que existe $C>0$, $\alpha>0$ tal que $|F(t)F(t_0)^{-1}|\leq Ce^{-\alpha(t-t_0)}$, $\forall\ t_0\in I$, $\forall\ t\geq t_0$. Tenemos que demostrar ahora que φ_0 es uniformemente estable y uniformemente atractivo. Que es uniformemente estable es obvio puesto que la condición en iv) implica la condición en iii). Para demostrar que es uniformemente atractivo tenemos que comprobar que $\exists\, \gamma > 0$ tal que $\forall\, t_0 \in I$, $\forall\, y_0 \in \mathbb{R}^N$ con $|y_0| \leq \gamma$, $I(t_0, y_0) \supset [t_0, +\infty)$ (lo que es evidente que ya se verifica), y además tenemos que demostrar que dado $\varepsilon > 0$, $\exists\, t_\varepsilon > 0$ t.q. $|\varphi(t; t_0, y_0)| \leq \varepsilon, \forall\, t_0 \in I, \forall\, t \geq t_0 + t_\varepsilon, \forall\, y_0$ con $|y_0| \leq \gamma$. Podemos suponer, sin pérdida de generalidad, que $\varepsilon < C$. Entonces

$$\begin{aligned}
|\varphi(t; t_0, y_0)| = |F(t)F(t_0)^{-1}y_0| &\leq Ce^{-\alpha(t-t_0)}|y_0| \quad [\text{tomando, por ejemplo, } \gamma = 1] \\
&\leq Ce^{-\alpha(t-t_0)} \\
&\leq \varepsilon,\ \forall\ t_0,\ \forall\ t \geq t_0 + t_\varepsilon, \quad \text{con } t_\varepsilon = \frac{1}{\alpha}\log\frac{C}{\varepsilon}.
\end{aligned}$$

$\boxed{\Longrightarrow}$ Supongamos que φ_0 es uniformemente asintóticamente estable. De un lado, por ser uniformemente estable, gracias al apartado iii), $\exists\ M > 0$ tal que

$$|F(t)F(t_0)^{-1}| \leq M, \quad \forall\ t_0 \in I,\ \forall\ t \geq t_0.$$

Por otra parte, por la atractividad uniforme, $\exists\ \gamma > 0$ tal que $\forall\ \varepsilon > 0$, $\exists\ t_\varepsilon > 0$ tal que $|\varphi(t; t_0, y_0)| \leq \varepsilon$, para todo $y_0 \in \mathbb{R}^N$ tal que $|y_0| \leq \gamma$, $\forall\ t_0 \in I$, $\forall\ t \geq t_0 + t_\varepsilon$.

Tomando en particular $\varepsilon = \dfrac{\gamma}{2}$, tendremos que

$$\exists\ \gamma > 0,\ \exists\ a(= t_{\gamma/2}) > 0 \ \text{ t.q. } \ |\varphi(t; t_0, y_0)| \leq \frac{\gamma}{2}, \quad \forall\ |y_0| \leq \gamma,\ \forall\ t_0 \in I, \forall\ t \geq t_0 + a.$$

Ahora bien, para todo $y_0 \neq 0$ se tiene

$$\begin{aligned}
|\varphi(t; t_0, \frac{\gamma y_0}{|y_0|})| &\leq \frac{\gamma}{2},\ \forall\ t_0 \in I, \forall\ t \geq t_0 + a, \\
|\varphi(t; t_0, \frac{y_0}{|y_0|})| &\leq \frac{1}{2},\ \forall\ t_0 \in I, \forall\ t \geq t_0 + a, \\
|F(t)F(t_0)^{-1}y_0)| &\leq \frac{1}{2},\ \forall\ |y_0| = 1,\ \forall\ t_0 \in I, \forall\ t \geq t_0 + a,
\end{aligned}$$

de donde se deduce fácilmente que

$$|F(t)F(t_0)^{-1}| \leq \frac{1}{2},\ \forall\ t_0 \in I, \forall\ t \geq t_0 + a.$$

Tomemos ya un $t_0 \in I$ fijo y sea $t \geq t_0$, entonces existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $t \in [t_0 + na, t_0 + (n+1)a)$, por tanto,

$$\begin{aligned}
&|F(t)F(t_0)^{-1}| \\
&= |F(t)F(t_0 + na)^{-1}F(t_0 + na)F(t_0 + (n-1)a)^{-1}F(t_0 + (n-1)a)...F(t_0 + a)F(t_0)^{-1}| \\
&\leq |F(t)F(t_0 + na)^{-1}||F(t_0 + na)F(t_0 + (n-1)a)^{-1}|...|F(t_0 + a)F(t_0)^{-1}| \\
&\leq M\left(\frac{1}{2}\right)^n,
\end{aligned}$$

pero como $t_0 + na \leq t \leq t_0 + (n+1)a$ se deduce fácilmente que

$$n \geq \frac{1}{a}(t - t_0) - 1,$$

de donde se sigue

$$
\begin{aligned}
M\left(\frac{1}{2}\right)^n &\leq M\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{a}(t-t_0)-1} = 2M\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{a}(t-t_0)} \\
&= 2Me^{-(1/a)\log 2(t-t_0)},
\end{aligned}
$$

lo que nos lleva a

$$
|F(t)F(t_0)^{-1}| \leq 2Me^{-\alpha(t-t_0)}, \ \ \forall\, t_0 \in I, \ \forall\, t \geq t_0
$$

donde $\alpha = \frac{1}{a}\log 2$. $\square$

Observación 4.3 *En el caso de los sistemas lineales, se verifica que* φ_0 *es estable (resp. uniformente estable, atractivo, etc) si y sólo si cualquier otra solución del sistema* $\widetilde{\varphi}$ *es también estable (resp. uniformente estable, atractivo, etc).*
En efecto, haciendo el cambio de variables $z = y - \widetilde{\varphi}$ *se deduce que*

$$
z' = y' - \widetilde{\varphi}' = A(t)y - A(t)\widetilde{\varphi} = A(t)z,
$$

con lo que la solución $\widetilde{\varphi}$ *se corresponde con la solución nula del mismo sistema y, por tanto, gozará de las mismas propiedades de estabilidad. Por esta razón, se suele hablar de que el sistema lineal es estable, asintóticamente estable, etc. en lugar de hablar sólo de la solución nula.*

Concluiremos con la definición de estabilidad asintótica exponencial para un sistema diferencial general (no lineal en general) y comprobaremos que en los sistemas lineales la estabilidad asintótica uniforme es equivalente a la estabilidad asintótica exponencial.

Definición 4.4 *Se dice que* φ_0 *es exponencialmente asintóticamente estable como solución del sistema (1) si*

$$
\begin{aligned}
&\exists\, C > 0, \alpha > 0, \gamma \in (0,\rho) \ \ \textit{tales que} \\
&|y_0| \leq \gamma \Longrightarrow \begin{cases} I(t_0,y_0) \supset [t_0,+\infty) \\ |\varphi(t;t_0,y_0)| \leq C|y_0|e^{-\alpha(t-t_0)}, \ \ \forall\, t \in I, \ \forall\, t \geq t_0. \end{cases}
\end{aligned}
$$

Observación 4.5 *Es inmediato demostrar que si* φ_0 *es exponencialmente asintóticamente estable como solución de (1) entonces es uniformemente asintóticamente estable. Esto pone de manifiesto que el concepto de estabilidad exponencial es más fuerte en general que el de carácter asintóticamente estable. Sin embargo, en el caso particular de los sistemas lineales, ambos conceptos son equivalentes.*

4.1 El caso particular de los sistemas lineales con coeficientes constantes

Consideremos ahora el sistema lineal autónomo

$$
y' = Ay, \tag{8}
$$

donde $A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^N)$. Por tratarse de un sistema autónomo, todos los conceptos de estabilidad serán uniformes. En este caso se verifica el siguiente resultado:

Teorema 4.6 *Se verifican:*
i) φ_0 *es uniformemente asintóticamente estable si y sólo si todos los autovalores de* A *tienen parte real estrictamente negativa.*
ii) si algún autovalor tiene parte real positiva, entonces φ_0 *es inestable.*
ii) φ_0 *es uniformemente estable si y sólo si todos los autovalores de* A *tienen parte real menor o igual que cero, y para aquellos que tienen parte real nula se tiene que las cajas de Jordan asociadas son de dimensión uno (o lo que es equivalente, cada autovalor con parte real nula posee un número de autovectores asociados linealmente independientes igual a su multiplicidad).*

Demostración. Denotemos por $\widetilde{J}$ la forma canónica real de la matriz A. Entonces, es conocido que existe $P \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^N)$ con $\det(P) \neq 0$ tal que $A = P\widetilde{J}P^{-1}$, con lo que una matriz fundamental para (8) vendrá dada por

$$F(t) = e^{tA} = Pe^{t\widetilde{J}}P^{-1} = ((p_{ij}(t)e^{\lambda_{ij}t}))$$

donde $p_{ij}(t)$ son polinomios y λ_{ij} son los autovalores de A. El resultado se sigue sin más que razonar adecuadamente. $\square$

De forma análoga se puede razonar en el caso de una edo lineal autónoma de orden superior a uno. Se verifica el siguiente resultado:

Teorema 4.7 *Consideremos la edo*

$$y^{n)} + a_1 y^{n-1)} + \cdots + a_{n-1}y' + a_n y = 0.$$

a) La solución nula es exponencialmente asintóticamente estable si y sólo si todas las raíces características tienen parte real estrictamente negativa.
b) La solución nula es uniformemente estable si todas las raíces características poseen parte real negativa o nula y las que sean imaginarias puras son simples.
c) La solución nula es inestable si algún autovalor posee parte real positiva o es imaginario puro pero no simple.

4.2 Estabilidad en primera aproximación

Un hecho fundamental en todo estudio matemático es la reducción de un problema concreto a uno más simple y fácil de analizar, que pueda proporcionar la información deseada sobre el problema complejo. En esa línea es hacia la que vamos a dirigir nuestro análisis de la estabilidad de las soluciones del sdo (1). Para fijar ideas supongamos que estamos en el caso $N = 1$ (es decir, estamos trabajando con una ecuación diferencial ordinaria). Una forma natural de aproximar la función $f(t, y)$ es, sin duda alguna, utilizar su desarrollo de Taylor. Así, si f es suficientemente regular (por ejemplo, $f \in C^1(\Omega)$) entonces

$$f(t, y) = \underbrace{f(0, 0)}_{=0} + \frac{\partial f}{\partial t}(0, 0)t + \frac{\partial f}{\partial y}(0, 0)y + \underbrace{T(t, y)}_{\text{térm. compl.}} .$$

De esta forma, parece sensato analizar la estabilidad de la ecuación lineal

$$y' = \frac{\partial f}{\partial t}(0, 0)t + \frac{\partial f}{\partial y}(0, 0)y \qquad (9)$$

y obtener resultados que garanticen que cuando el término complementario es *pequeño* (en algún sentido que precisaremos más adelante), las propiedades de estabilidad de la ecuación lineal (9) se transfieren a la ecuación no lineal de partida. Desde otro punto de vista, se puede interpretar este tipo de problemas como uno de perturbación, es decir si tenemos un sistema diferencial que tenga la forma

$$y' = A(t)y + g(t, y),$$

¿se verificará que este sistema posee las mismas propiedades de estabilidad que el lineal $y' = A(t)y$ si la perturbación g es pequeña?

Daremos respuesta afirmativa a este tipo de problemas en lo que resta de esta sección. La situación en la que vamos a realizar nuestro estudio es la siguiente. Sea el sdo

$$y' = A(t)y + g(t, y) \tag{10}$$

donde $A \in C(\Omega; \mathcal{L}(\mathbb{R}^N)$, y $g \in C(\Omega; \mathbb{R}^N) \cap Lip_{loc}(y; \Omega)$ satisface que $g(t, 0) = 0$. De esta forma, φ_0 es solución tanto del sistema lineal

$$y' = A(t)y \tag{11}$$

como del sistema perturbado (10).

Teorema 4.8 ***(Teorema de estabilidad en primera aproximación)***
a) Supongamos que φ_0 es uniformemente asintóticamente estable (o equivalentemente, exponencialmente asintóticamente estable) como solución del sistema lineal (11) y que

$$\lim_{|y| \to 0} \frac{|g(t, y)|}{|y|} = 0, \quad \textit{uniformemente en } t \in I$$

$$(\textit{i.e.}\ \forall\ \varepsilon > 0 \ \ \exists\ \delta > 0 \ \ \textit{t.q.} \ \ |y_0| \le \delta \Longrightarrow |g(t, y)| \le \varepsilon |y|, \quad \forall\ t \in I).$$

Entonces φ_0 es exponencialmente asintóticamente estable como solución del sistema perturbado (10).
b) Si φ_0 es uniformemente estable como solución del sistema lineal (11) y existe una función continua $\alpha \in C(I)$ tal que

$$\int_\tau^{+\infty} \alpha(t)\ dt < +\infty$$

$$|g(t, y)| \le \alpha(t)|y|, \quad \forall\ (t, y) \in \Omega,$$

entonces φ_0 es uniformemente estable como solución de (10).

Demostración. Sólo haremos la demostración del apartado a) y dejamos como ejercicio la del apartado b).

Sea $F(t)$ una matriz fundamental para el sistema lineal $y' = A(t)y$. Como φ_0 es uniformemente asintóticamente estable como solución de (11), entonces existen $C > 0$, $\alpha > 0$ tales que

$$|F(t)F(t_0)^{-1}| \le Ce^{-\alpha(t - t_0)}, \ \ \forall\ t_0 \in I,\ \forall\ t \ge t_0.$$

Lo que tenemos que demostrar es que

$$\exists\ \widetilde{C} > 0, \widetilde{\alpha} > 0, \widetilde{\gamma} \in (0, \rho) : |y_0| \le \widetilde{\gamma} \Longrightarrow \begin{cases} \text{i) } I(t_0, y_0) \supset [t_0, +\infty) \\ \text{ii) } |\varphi(t; t_0; y_0)| \le \widetilde{C}|y_0|e^{-\widetilde{\alpha}(t - t_0)}, \ \forall t_0 \in I, \forall t \ge t_0, \end{cases}$$

donde $\varphi(\cdot;t_0;y_0)$ denota la solución maximal del sistema diferencial (10) expresada en función de los datos iniciales.

Sabemos que dado $\varepsilon > 0$ (más adelante diremos cómo nos interesa tomarlo) existe $\mu \in (0,\rho)$ tal que si $|y_0| \le \mu$ se tiene que

$$|g(t,y)| \le \varepsilon |y|, \quad \forall\, t \in I.$$

Observemos que para $t_0 \in I$ e $|y_0| \le \widetilde{\gamma}$ dados (donde $\widetilde{\gamma}$ lo determinaremos más adelante) se verifica

$$\varphi(t;t_0,y_0) = F(t)F(t_0)^{-1}y_0 + \int_{t_0}^{t} F(t)F(s)^{-1}g(s,\varphi(s;t_0,y_0))ds \ \ \forall t \in I(t_0,y_0).$$

Denotemos $u(t) = |\varphi(t;t_0,y_0)|$ para $t \in I(t_0,y_0) \cap [t_0,+\infty)$.

Observemos que, en primer lugar, se verifica

$$u(t_0) = |y_0| \le \widetilde{\gamma} < \mu \quad \text{siempre que escojamos } \boxed{\widetilde{\gamma} < \mu}.$$

Veamos que en ese caso, se tiene que cumplir que

$$u(t) \le \mu \quad \text{para todo } \ t \in I(t_0,y_0) \cap [t_0,+\infty).$$

En efecto, si no fuese así (es decir, razonando por reducción al absurdo), existiría un valor $t \ge t_0$ con $t \in I(t_0,y_0)$ tal que $u(t) > \mu$ y por la continuidad de la función u es inmediato deducir que

$$\exists\, t^* \in I(t_0,y_0), \quad t^* > t_0 \ \text{ tal que } \ u(t) < \mu \ \ \forall\, t \in [t_0,t^*) \ \text{ y } \ u(t^*) = \mu.$$

Ahora, para $t \in [t_0,t^*)$ se tiene

$$\begin{aligned} u(t) &\le Ce^{-\alpha(t-t_0)}|y_0| + C\int_{t_0}^{t} e^{-\alpha(t-s)}|g(s,u(s))|ds \\ &[\text{como } u(s) < \mu \ \text{ para } s \in [t_0,t^*) \ \text{ entonces } |g(s,u(s))| \le \varepsilon |u(s)|] \\ &\le Ce^{-\alpha(t-t_0)}|y_0| + C\varepsilon \int_{t_0}^{t} e^{-\alpha(t-s)}u(s)ds, \end{aligned}$$

de donde se sigue

$$e^{\alpha t}u(t) \le Ce^{\alpha t_0}|y_0| + C\varepsilon \int_{t_0}^{t} e^{\alpha s}u(s)ds, \quad \forall\, t \in [t_0,t^*],$$

y gracias al Lema de Gronwall

$$e^{\alpha t}u(t) \le Ce^{\alpha t_0}|y_0|e^{C\varepsilon(t-t_0)} \ \ \forall\, t \in [t_0,t^*],$$

y, consiguientemente,

$$u(t) \le C|y_0|e^{(C\varepsilon-\alpha)(t-t_0)} \ \ \forall\, t \in [t_0,t^*].$$

Tomando ahora $\boxed{\varepsilon = \dfrac{\alpha}{2C},}$ resulta

$$u(t) \le C|y_0|e^{-(\alpha/2)(t-t_0)} \ \ \forall\, t \in [t_0,t^*], \tag{12}$$

y, en particular, para t^* tendremos

$$u(t^*) \le C|y_0|e^{-(\alpha/2)(t^*-t_0)} \le C\widetilde{\gamma}e^{-(\alpha/2)(t^*-t_0)} < \mu \;\; \text{si escogemos} \;\; \boxed{\widetilde{\gamma} < \frac{\mu}{C},}$$

lo que estaría en contradicción con la elección de t^*. Por tanto, se verificará que

$$|\varphi(t;t_0,y_0)| < \mu < \rho \;\; \forall\, t \in I(t_0,y_0) \cap [t_0,+\infty),$$

lo que conlleva que $I(t_0,y_0) \supset [t_0,+\infty)$ y que además la desigualdad (12) es válida en $[t_0,t^*]$ para todo $t^* > t_0$.

Por tanto, todo el desarrollo es correcto siempre que se escoja

$$\boxed{\begin{array}{c} \widetilde{C} = C, \;\; \mu \text{ el correspondiente a tomar } \varepsilon = \dfrac{\alpha}{2C}, \\ \widetilde{\gamma} < \min\{\mu, \dfrac{\mu}{C}\} \;\; \text{y} \;\; \widetilde{\alpha} = \dfrac{\alpha}{2}. \end{array}} \qquad \square$$

Observación 4.9 *Sobre este último resultado volveremos más adelante cuando hablemos del decaimiento de las soluciones y obtendremos una extensión del mismo así como una demostración mucho más fácil.*

5 El Segundo Método (Directo) de Liapunov

5.1 Algunas consideraciones previas

El método que vamos a exponer en esta sección tiene sus orígenes en la mecánica clásica (Teorema de Lagrange-Dirichlet). En pocas palabras, se trata de obtener resultados sobre la estabilidad del sistema haciendo uso de unas funciones auxiliares (las funciones de Liapunov) sin necesidad de resolver los sistemas diferenciales (de ahí el nombre de Método Directo). El mayor inconveniente que presenta este método radica en la necesidad de disponer de dichas funciones auxiliares. Aunque no existen fórmulas ni recetas generales para construir dichas funciones, en muchos sistemas diferenciales con origen físico, éstas suelen estar relacionadas con la energía del sistema. De este modo, parece lógico que si la energía del sistema decrece entonces la evolución del mismo conduzca a posiciones de equilibrio estables, o inestable en caso de que la energía no decrezca. Estas ideas fueron formalizadas por Liapunov y los generalizó al caso de sistemas diferenciales ordinarios generales.

Nuestro objetivo en este apartado es ofrecer una brevísima introducción al tema. Nos restringiremos al caso de los sistemas autónomos por dos razones principalmente. Por un lado, muchos de los sistemas diferenciales de importancia en la Ciencia suelen ser autónomos. Por otro, la mayor parte de los resultados que obtendremos se pueden generalizar de un modo natural al caso no autónomo aunque con cierta complicación de notación. Al final de esta sección expondremos cómo quedarán dichos resultados.

El marco en el que vamos a trabajar a partir de ahora es el siguiente. Consideraremos el sistemad diferencial autónomo

$$y' = f(y), \tag{13}$$

donde $f : D \subset \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N$ es una función localmente lipschitziana (lo que implica automáticamente que es continua) en el abierto $D \subset \mathbb{R}^N$, $0 \in D$ y $f(0) = 0$.

Por ser D abierto y verificarse que $0 \in D$, entonces existirá $\rho > 0$ tal que $B_\rho = B(0;\rho) \subset D$, y podemos hablar de los diferentes conceptos de estabilidad para la solución nula $\varphi_0 \equiv 0$ (que ahora serán todos uniformes) en el abierto $\Omega = \mathbb{R}\times D$.

Definición 5.1 *Sea $\rho \in (0,+\infty)$ fijado.*
a) Se dice que $a : [0,\rho] \to \mathbb{R}$ es una función de clase $\mathcal{K}$ en $[0,\rho]$, y lo representaremos por $a \in \mathcal{K}_\rho$ si se verifican:
i) $a \in C([0,\rho])$,
ii) $a(0) = 0$,
iii) a es estrictamente creciente en $[0,\rho]$ (brevemente, $a \upuparrows$ en $[0,\rho]$).
b) Sea $V : B_\rho \to \mathbb{R}$. Se dice que V es definida positiva en B_ρ (brevemente, def. +) si:
i) $V(0) = 0$,
ii) $\exists\ a \in \mathcal{K}_\rho$ tal que $V(y) \geq a(|y|),\ \forall\ y \in B_\rho$.
c) Se dice que $V : B_\rho \to \mathbb{R}$ es definida negativa (def. –) si $-V$ es def. +.

Ejemplo 5.2 *La función $V(y) = \sum_{i=1}^{N} y_i^2$ es def. + en $B_\rho \subset \mathbb{R}^N$ para todo $\rho > 0$. (En efecto, basta tomar como función $a(r) = r^2$).*

Ejemplo 5.3 *La función $V(y_1,y_2,y_3) = y_1^2 + y_2^2$ **NO** es def. + en ninguna bola de la forma $B_\rho \subset \mathbb{R}^3$.*

Ejemplo 5.4 *La función $V(y_1,y_2) = \frac{1}{2}y_2^2 + 1 - \cos y_1$ no es def. + en $B_{2\pi} \subset \mathbb{R}^2$ pero sí lo es en $B_{2\pi-\varepsilon}$ para todo $\varepsilon > 0$. En efecto, si V fuese def. + en $B_{2\pi}$, entonces existiría $a \in \mathcal{K}_{2\pi}$ tal que*

$$\frac{1}{2}y_2^2 + 1 - \cos y_1 \geq a\left(\sqrt{y_1^2 + y_2^2}\right), \quad \forall\ (y_1,y_2) \in B_{2\pi}.$$

Tomemos, para cada $n \in \mathbb{N}$, el punto $(2\pi - \frac{1}{n}, 0) \in B_{2\pi}$. Entonces habrá de cumplirse

$$1 - \cos\left(2\pi - \frac{1}{n}\right) \geq a\left(2\pi - \frac{1}{n}\right), \quad \forall\ n \in \mathbb{N}.$$

Tomando límite cuando $n \to +\infty$, tendríamos por la continuidad de la funciones cos *y a*

$$0 = 1 - \cos 2\pi \geq a(2\pi) > 0,$$

lo que es una contradicción. Sin embargo, sí que es def. + en cualquier $B_{2\pi-\varepsilon}$, y esto se deducirá como inmediata consecuencia del lema siguiente.

Lema 5.5 *Sean $\rho \in (0,+\infty)$ y $V \in C(\overline{B}_\rho)$ tal que $V(0) = 0$ y $V(y) > 0$ para todo $y \in \overline{B}_\rho \setminus \{0\}$. Entonces, V es def. + en B_ρ.*

Observemos que usando este resultado se sigue inmediatamente que $V(y_1, y_2) = \frac{1}{2}y_2^2 + 1 - \cos y_1$ es def. + en $B_{2\pi-\varepsilon}$. En efecto, es claro que

$$V(y_1, y_2) = \underbrace{\frac{1}{2}y_2^2}_{\geq 0} + \underbrace{1 - \cos y_1}_{\geq 0} \quad \forall\ (y_1, y_2) \in B_{2\pi-\varepsilon}.$$

De otro lado, si $V(y_1, y_2) = 0$, entonces necesariamente habrá de ser

$$\begin{cases} \frac{1}{2}y_2^2 = 0 \\ 1 - \cos y_1 = 0, \end{cases}$$

lo que sólo se cumplirá si $y_2 = 0$ e $y_1 = 2n\pi$, con lo que la única posibilidad de que esto ocurra en $B_{2\pi-\varepsilon}$ es que $(y_1, y_2) = (0, 0)$.

Demostración. Consideremos la función

$$\begin{aligned} &\widetilde{a} : [0, \rho] \to \mathbb{R} \\ &r \to \widetilde{a}(r) = \sup_{r \leq |y| \leq \rho} V(y). \end{aligned}$$

Es inmediato comprobar que $\widetilde{a}$ está bien definida, $\widetilde{a}(0) = 0, \widetilde{a}(r) > 0$ para $r > 0$, $\widetilde{a} \in C([0, \rho])$, $\widetilde{a}$ es creciente en $[0, \rho]$ pero no necesariamente estrictamente creciente, y $V(y) \geq a(|y|)$ para todo $y \in B_\rho$. Luego sólo resta probar que es estrictamente creciente o construir otra $a(\cdot)$ a partir de $\widetilde{a}$ que cumpla las anteriores condiciones y que además sea estrictamente creciente.

Definamos para ello

$$a(r) = \frac{1}{\rho}\int_0^r \widetilde{a}(s)ds, \quad \text{para} \quad r \in [0, \rho].$$

Entonces, se verifica que $a \in C^1([0, \rho])$, $a(0) = 0$ y es estrictamente creciente ya que

$$a'(r) = \frac{1}{\rho}\widetilde{a}(r) > 0, \quad \forall r > 0.$$

Además $\widetilde{a}(r) \geq a(r)$ $\forall r > 0$ pues

$$\int_0^r \widetilde{a}(s)ds \underset{TVM}{=} \underbrace{r\widetilde{a}(c_r)}_{0<c_r<r} \leq r\widetilde{a}(r) \leq \rho\widetilde{a}(r), \quad \forall r \in [0, \rho],$$

con lo que termina la demostración. $\square$

5.2 Condiciones suficientes de estabilidad (Liapunov)

Comenzaremos con la definición de función de Liapunov para un s.d.o. autónomo.

Definición 5.6 *Sea $V : B_\rho \to \mathbb{R}$ tal que $V \in C^1(B_\rho)$. Se llama derivada de V respecto del sistema (13) $y' = f(y)$ a la función $\dot{V} : B_\rho \to \mathbb{R}$ definida como*

$$\dot{V}(y) = \sum_{i=1}^{N} \frac{\partial V}{\partial y_i}(y) f_i(y), \quad y \in B_\rho.$$

Observación 5.7 *Observemos que si $\varphi(\cdot)$ es una solución del s.d.o. (13) y tal que $\varphi(t) \in B_\rho$ para todo $t \in I \subset \mathbb{R}$, entonces*

$$\frac{d}{dt}[V(\varphi(t))] = \sum_{i=1}^{N} \frac{\partial V}{\partial y_i}(\varphi(t))\varphi_i'(t) = \sum_{i=1}^{N} \frac{\partial V}{\partial y_i}(\varphi(t))f_i(\varphi(t)) = \dot{V}(\varphi(t)), \quad \textit{para} \quad t \in I.$$

Definición 5.8 *Se dice que $V \in C^1(B_\rho)$ es una función de Liapunov en B_ρ para el s.d.o. (13) si se verifican*

i) V es def. + en B_ρ.

ii) $\dot{V}(y) \leq 0 \quad \forall y \in B_\rho$.

Teorema 5.9 *(Condiciones suficientes de estabilidad de Liapunov) Sea $V \in C^1(B_\rho)$ una función de Liapunov para el s.d.o. (13). Entonces se verifican:*

a) El equilibrio φ_0 es uniformemente estable.

b) Si además $\dot{V}$ es def. –, entonces φ_0 es uniformemente asintóticamente estable.

Demostración. $\boxed{\text{a)}}$ Como el sistema diferencial es autónomo basta demostrar el resultado para $t_0 = 0$. Por tanto, necesitaremos demostrar que

$$\forall 0 < \varepsilon (< \rho), \quad \exists \delta(\varepsilon) \in (0, \rho), \quad \text{t.q.} \quad |y_0| \leq \delta \Longrightarrow |\varphi(t; 0, y_0)| \leq \varepsilon, \quad \forall t \in I(0, y_0) \cap [0, +\infty).$$

Como V es una función de Liapunov, entonces será def. + y además $\dot{V} \leq 0$ en B_ρ. Entonces, $\exists a \in K_\rho$ tal que $V(y) \geq a(|y|), \ \forall y \in B_\rho$.

De la continuidad de V se deduce que, tomando $a(\varepsilon) > 0, \ \exists \delta(\varepsilon) > 0, \ \text{t.q.}$ $|y - 0| \in \delta \Longrightarrow |V(y) - V(0)| \leq a(\varepsilon)$.

Tomemos ya $|y_0| \leq \delta(\varepsilon)$. Como sabemos que $\dot{V} \leq 0$ en B_ρ, a la luz de la Observación 5.7, se deduce que

$$\frac{d}{dt}[V(\varphi(t; 0, y_0))] = \dot{V}(\varphi(t; 0, y_0)) \leq 0, \ \forall t \in I(0, y_0) \cap [0, +\infty),$$

de donde se deduce que la aplicación

$$t \in I(0, y_0) \cap [0, +\infty) \mapsto V(\varphi(t; 0, y_0))$$

es decreciente, y por tanto,

$$V(\varphi(t; 0, y_0)) \leq V(\varphi(0; 0, y_0)) = V(y_0) \leq a(\varepsilon), \quad \forall t \in I(0, y_0) \cap [0, +\infty).$$

Así,

$$a(|\varphi(t; 0, y_0)|) \leq V(\varphi(t; 0, y_0)) \leq a(\varepsilon), \quad \forall t \in I(0, y_0) \cap [0, +\infty),$$

y como a es $\upuparrows$,

$$|\varphi(t; 0, y_0)| \leq \varepsilon, \quad \forall t \in I(0, y_0) \cap [0, +\infty).$$

La demostración de este apartado queda finalizada. No obstante, conviene aclarar un punto que ha sido pasado por alto. Nosotros hemos usado la notación $\varphi(\cdot; 0, y_0)$ para denotar la solución maximal del problema

$$\left\{ \begin{array}{l} y' = f(y) \\ y(0) = y_0 \end{array} \right.$$

en $\mathbb{R}\times B_\rho$, cuando en realidad dicha notación se refiere a la solución maximal del mismo problema de Cauchy pero en todo el abierto $\mathbb{R}\times D$. No hay ningún problema en dicho punto. En efecto, al haber demostrado nosotros que comenzando en un punto inicial y_0 con $|y_0|\le\delta$, la solución maximal del problema de Cauchy en $\mathbb{R}\times B_\rho$ siempre verifica que no se sale de la bola $B(0;\varepsilon)\subset B_\rho$, entonces dicha solución está siempre definida en el futuro y coincide con la solución maximal del mismo problema pero planteado en $\mathbb{R}\times D$.

$\boxed{\text{b)}}$ Ahora tendremos que demostrar que bajo esta hipótesis adicional, la solución φ_0 es además uniformemente atractiva.

Por ser $\dot{V}$ def. $-$, tendremos que $\exists b\in K_\rho$ tal que

$$-\dot{V}(y)\ge b(|y|),\quad \forall y\in B_\rho.$$

De momento, gracias al apartado a), ya sabemos que es uniformemente estable. Entonces dado $\varepsilon=\frac{\rho}{2}$, existirá $\gamma=\delta(\frac{\rho}{2})\in(0,\rho)$ tal que

$$|y_0|\le\gamma\Longrightarrow|\varphi(t;0,y_0)|\le\frac{\rho}{2},\quad\forall t\in[0,+\infty).$$

Nos resta por comprobar que

$$|y_0|\le\gamma\Longrightarrow\lim_{t\to+\infty}|\varphi(t;0,y_0)|=0.$$

Como por el apartado a) se verifica que la aplicación

$$t\in[0,+\infty)\mapsto V(\varphi(t;0,y_0))$$

es decreciente, entonces es claro que

$$\exists\lim_{t\to+\infty}V(\varphi(t;0,y_0))=\alpha\ge0.$$

Demostraremos que $\alpha=0$. Razonando por reducción al absurdo, si fuese $\alpha>0$, como $V(0)=0$ y V es continua, entonces de la definición de continuidad en 0 se deduce que

$$\exists\mu\in(0,\rho)\ \text{ t.q. }\ |y|\le\mu\Longrightarrow V(y)\le\frac{\alpha}{2},$$

y como

$$\lim_{t\to+\infty}V(\varphi(t;0,y_0))=\alpha>\frac{\alpha}{2},$$

entonces $\exists t_\alpha>0$ tal que

$$V(\varphi(t;0,y_0))>\frac{\alpha}{2},\quad\forall t\ge t_\alpha,$$

y por tanto

$$|\varphi(t;0,y_0)|\ge\mu>0,\quad\forall t\ge t_\alpha$$

(pues, en caso contrario, tendríamos que si para algún $t\ge t_\alpha$ $|\varphi(t;0,y_0)|\le\mu$, entonces $V(\varphi(t;0,y_0))\le\frac{\alpha}{2}$, lo que no es posible).

En consecuencia, para $t\ge t_\alpha$ tendremos que

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}(V(\varphi(t;0,y_0)))&=\dot{V}(\varphi(t;0,y_0))\\&\le-b(|\varphi(t;0,y_0)|)\quad[\text{como } b \text{ es } \upuparrows]\\&\le-b(\mu)\\&<0.\end{aligned}$$

Integrando entre t_α y t,

$$V(\varphi(t;0,y_0)) - V(\varphi(t_\alpha;0,y_0)) \leq -b(\mu)(t-t_\alpha)$$

y así

$$0 \leq V(\varphi(t;0,y_0)) \leq \underbrace{V(\varphi(t_\alpha;0,y_0)) - b(\mu)(t-t_\alpha)}_{\substack{\downarrow \\ -\infty}} \quad , \quad \forall t \geq t_\alpha,$$

$$\text{cuando } t \to +\infty$$

lo que es claramente una contradicción.

Por tanto, $\alpha = 0$. Es decir,

$$\lim_{t\to+\infty} V(\varphi(t;0,y_0)) = 0,$$

y como

$$V(\varphi(t;0,y_0)) \geq a(|\varphi(t;0,y_0)|) \geq 0,$$

entonces

$$\lim_{t\to+\infty} a(|\varphi(t;0,y_0)|) = 0.$$

Por ser a $\upuparrows$ continua y $a(0) = 0$, se tendrá que existe a^{-1} $\upuparrows$ y es continua. Aplicando a^{-1} a la igualdad anterior se deduce inmediatamente que

$$\lim_{t\to+\infty} |\varphi(t;0,y_0)| = 0. \qquad \square$$

Ejemplo 5.10 *a)* El péndulo simple. *Consideremos el sistema que modela el movimiento del péndulo simple*

$$\begin{cases} y_1' = y_2 \\ y_2' = -\text{sen } y_1. \end{cases}$$

Sea la función $V(y_1, y_2) = \frac{1}{2}y_2^2 + 1 - \cos y_1$ *que es def. + en* B_π. *Como*

$$\dot{V}(y_1, y_2) = y_2 \text{sen } y_1 - y_2 \text{sen } y_1 = 0,$$

entonces V *es una función de Liapunov y podemos asegurar que la solución nula es uniformemente estable. Observemos que al no ser* $\dot{V}$ *def. – no podemos asegurar que* φ_0 *sea uniformemente asintóticamente estable, pero podría ocurrir que fuésemos capaces de encontrar otra función de Liapunov* W *tal que* $\dot{W}$ *sí sea def. –, y entonces podríamos asegurar que* φ_0 *no sólo es estable sino uniformemente asintóticamente estable.*

b) El péndulo con rozamiento. *Consideremos ahora un modelo de péndulo con rozamiento regido por la e.d.o.*

$$y'' + \alpha y' + \text{sen } y = 0, \quad \alpha > 0,$$

que es equivalente al s.d.o.

$$\begin{cases} y_1' = y_2 \\ y_2' = -\text{sen } y_1 - \alpha y_2. \end{cases}$$

Si consideramos de nuevo la función $V(y_1, y_2) = \frac{1}{2}y_2^2 + 1 - \cos y_1$ *en* B_π, *se verifica que*

$$\dot{V}(y_1, y_2) = -\alpha y_2^2 \leq 0,$$

y por tanto φ_0 *es al menos uniformemente estable. Más adelante comprobaremos, haciendo uso del Teorema de La Salle, que con la misma función de Liapunov y un pequeño análisis adicional es posible concluir que* φ_0 *es uniformemente asintóticamente estable.*

Observación 5.11 *No obstante, un gran inconveniente de este método es que no existen procedimientos generales para construir funciones de Liapunov. Si el sistema bajo estudio se corresponde con algún modelo físico, entonces se puede ensayar con funciones que representen la energía total del sistema. En cualquier otro caso, aparte del método "a ojo de buen cubero", se puede comenzar probando con la función*

$$V(y) = \sum_{i=1}^{N} f_i^2(y).$$

Por ejemplo, si consideramos el s.d.o.

$$\begin{cases} y_1' = -y_1 - y_2 - y_1^3 \\ y_2' = y_1 - y_2 - y_2^3, \end{cases}$$

se observa que $V(y_1, y_2) = \left(-y_1 - y_2 - y_1^3\right)^2 + \left(y_1 - y_2 - y_2^3\right)^2$ *es def. + (pues sólo se anula en* $y_1 = y_2 = 0$*, y en el resto de puntos es positiva) y es inmediato comprobar que*

$$\dot{V}(y_1, y_2) = -2V(y_1, y_2),$$

luego $\dot{V}$ *es def. – y podemos concluir que* φ_0 *es uniformemente asintóticamente estable.*

Conviene mencionar que usando el resultado de estabilidad en primera aproximación se puede demostrar que la solución nula es exponencialmente asintóticamente estable.

5.3 Una condición suficiente de inestabilidad. El Teorema de Chetaev.

Estableceremos ahora una condición suficiente que garantiza la inestabilidad de φ_0.

Teorema 5.12 *Supongamos que existe* $\rho > 0$ *tal que* $B_\rho \subset D$ *y existe* $V \in C^1(B_\rho)$ *tal que*

1. $V(0) = 0$,
2. $\dot{V}$ *es def. + en* B_ρ
3. $\forall \sigma \in (0, \rho)$ $\exists y_\sigma \in B_\sigma$ *tal que* $V(y_\sigma) > 0$.

Entonces, φ_0 *es inestable.*

Demostración. Procedemos por reducción al absurdo. Si φ_0 es estable, entonces dado $\varepsilon = \frac{\rho}{2}$ existe $\delta(\frac{\rho}{2}) > 0$ tal que

$$|y_0| \leq \delta \Longrightarrow \begin{cases} I(0, y_0) \supset [0, +\infty) \\ |\varphi(t; 0, y_0)| \leq \frac{\rho}{2}. \end{cases}$$

Como V es continua y $\overline{B}_{\frac{\rho}{2}}$ es un compacto, entonces existe $M > 0$ tal que

$$V(\varphi(t; 0, y_0)) \leq M, \quad \forall t \geq 0.$$

De la condición 3. se deduce la existencia de $y_\delta \in B_{\delta(\frac{\rho}{2})}$ tal que $V(y_\delta) > 0$.

De otra parte, como $\dot{V}$ es def. + existirá $a \in K_\rho$ tal que $\dot{V}(y) \geq a(|y|)$, para todo $y \in B_\rho$.

En consecuencia, como $|y_\delta| < \delta(\frac{\rho}{2}) \leq \rho$ entonces

$$\frac{d}{dt}\left(V(\varphi(t; 0, y_\delta))\right) = \dot{V}(\varphi(t; 0, y_\delta)) \geq a(|\varphi(t; 0, y_\delta)|) > 0 \quad \text{para todo } \ t \geq 0.$$

Esto implica que la aplicación $t \in [0, +\infty) \to V(\varphi(t; 0, y_\delta))$ es creciente y por tanto

$$V(\varphi(t; 0, y_\delta)) \geq V(y_\delta) > 0.$$

Ahora afirmamos[1] que

$$\exists \alpha > 0, \quad \text{t.q.} \quad |\varphi(t; 0, y_\delta)| \geq \alpha, \quad \forall t \geq 0.$$

Por tanto,

$$\frac{d}{dt}\left(V(\varphi(t; 0, y_\delta))\right) = \dot{V}(\varphi(t; 0, y_\delta)) \geq a(|\varphi(t; 0, y_\delta)|) \geq a(\alpha) > 0, \quad \forall t \geq 0,$$

e integrando entre 0 y t resulta

$$V(\varphi(t; 0, y_\delta)) \geq \underbrace{V(y_\delta) + a(\alpha) t}_{\substack{\downarrow \\ +\infty}} \quad {\scriptstyle t \to +\infty}$$

lo que contradice que V esté acotada por M. $\square$

Ejemplo 5.13 *Consideremos el s.d.o.*

$$\begin{cases} y_1' = y_1 + y_1 y_2 \\ y_2' = -y_2 + y_1^2. \end{cases}$$

La función $V(y_1, y_2) = y_1^2 - y_2^2$ *satisface las condiciones del Teorema de Chetaev y por tanto la solución* φ_0 *es inestable.*

---

[1]Si no, entonces para cada $n \in \mathbb{N}$ $\exists t_n \geq n$ tal que

$$|\varphi(t_n; 0, y_\delta)| \leq \frac{1}{n},$$

y por tanto

$$0 < V(y_\delta) \leq V\left(\varphi(t_n; 0, y_\delta)\right) \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} V(0) = 0,$$

lo que es imposible.

6 Órbitas de los sistemas autónomos. Los Teorema de La Salle y de Poincaré-Bedixson

Analizaremos con cierto detalle cuál es el comportamiento asintótico de las soluciones de un sistema autónomo y realizaremos también un estudio global de las órbitas del sistema. Conviene mencionar que en el caso de los sistemas planos (es decir, para $N = 2$) vamos a poder aportar mucha más información sobre la evolución del sistema que en dimensión $N \geq 3$, donde la evolución puede llegar a ser muy compleja, y conduce al interesante problema del análisis de los sistemas (aparentemente) caóticos.

6.1 El concepto de órbita de un sistema autónomo

Consideremos el s.d.o. (13)

$$y' = f(y)$$

donde $f : D \subset \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N$ es una función localmente lipschitziana en el abierto $D \subset \mathbb{R}^N$. Recordemos que podemos interpretar que el sistema (13) representa el movimiento de una masa puntual en el *espacio de fases* D. Recordemos también que en este caso autónomo se verifican

- $I(t_0, y_0) = t_0 + I(0, y_0), \quad \forall (t_0, y_0) \in \mathbb{R} \times D.$
- $\varphi(t; t_0, y_0) = \varphi(t - t_0; 0, y_0), \quad \forall t \in I(t_0, y_0).$

En consecuencia,

$$\begin{aligned} \{\varphi(t; t_0, y_0) : t \in I(t_0, y_0)\} &= \{\varphi(t - t_0; 0, y_0) : \ t \in t_0 + I(0, y_0)\} \\ &= \{\varphi(t - t_0; 0, y_0) : t - t_0 \in I(0, y_0)\} \\ &= \{\varphi(\tau; 0, y_0) : \tau \in I(0, y_0)\}. \end{aligned}$$

Esto nos conduce a la definición de órbita asociada a cada punto $y_0 \in D$.

Observación 6.1 *En adelante, denotaremos*

$$I(y_0) = I(0, y_0), \qquad \text{para } \ y_0 \in D.$$

Definición 6.2 *Se llama órbita (o también característica) del sistema (13) asociada a (o que pasa por)* $y_0 \in D$ *al subconjunto* $\gamma(y_0) \subset D$ *definido por*

$$\begin{aligned} \gamma(y_0) &= \{\varphi(t; 0, y_0) : t \in I(y_0)\} \\ &= \{\varphi(t; t_0, y_0) : t \in I(t_0, y_0)\} \end{aligned}$$

Observación 6.3 *Conviene diferenciar entre el concepto de órbita que pasa por un punto y el de trayectoria asociada a una solución de un problema de Cauchy para el sistema diferencial.*

Definición 6.4 *Se dice que* $y_0 \in D$ *es un punto crítico o estacionario para el sistema (13) si* $f(y_0) = 0$, *en cuyo caso se verifica que*

$$\gamma(y_0) = \{y_0\}.$$

6.2 Órbitas de un sistema autónomo plano lineal

En este caso, las propiedades de estabilidad de la solución nula, es decir, del único punto crítico que tiene el sistema lineal homogéneo (i.e. el cero), es determinante para la configuración de las órbitas del sistema. Puede consultarse el texto de J.C. Robinson (2003) para un estudio detallado de dichas configuraciones.

No obstante, lo que sí conviene resaltar aquí es que cuando el sistema plano es no lineal, entonces no sólo el punto crítico es el determinante de la evolución del sistema sino que aparecen otras órbitas (cíclicas) que van a influir en la representación del mismo. Por ejemplo, consideremos el sistema

$$\left\{ \begin{array}{l} y_1' = y_2 + y_1(1 - y_1^2 - y_2^2) \\ y_2' = -y_1 + y_2(1 - y_1^2 - y_2^2) \end{array} \right. \quad \text{en } \Omega = \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2. \tag{14}$$

Es inmediato comprobar que el único punto crítico del sistema es el origen, i.e. $(0, 0)$. Efectuando el cambio a coordenadas polares

$$\left\{ \begin{array}{l} y_1 = \rho(t) \cos \theta(t) \\ y_2 = \rho(t) \text{ sen } \theta(t) \end{array} \right.$$

el problema se escribe como

$$\left\{ \begin{array}{l} \rho' = \rho(1 - \rho^2) \\ \theta' = -1. \end{array} \right.$$

Integrando este sistema se obtiene

$$\rho(t) = \frac{1}{\sqrt{1 + ke^{-2t}}}, \qquad \theta(t) = -t + c,$$

lo que implica que las soluciones de nuestro sistema son

$$(y_1(t), y_2(t)) = \left(\frac{\cos(-t + c)}{\sqrt{1 + ke^{-2t}}}, \frac{\text{sen } (-t + c)}{\sqrt{1 + ke^{-2t}}} \right).$$

Es fácil comprobar ahora que las órbitas del sistema son:

1. el punto crítico $\{(0, 0)\}$,
2. la circunferencia unidad,
3. espirales que vienen del punto crítico y se acercan a la circunferencia unidad, o que vienen desde fuera de ésta y acercándose a ella.

En consecuencia, el referente para el comportamiento de las órbitas no es precisamente el punto crítico como ocurría en el caso lineal sino la circunferencia unidad. En este caso se suele decir que esta circunferencia es un ciclo límite hacia el que se acercan todas las órbitas salvo la trivial. Es lo que se suele denominar un conjunto límite *atractivo*. Volveremos a este asunto más adelante.

6.3 Órbitas cíclicas y conjuntos límites. Propiedades.

Consideremos de nuevo el sdo autónomo (13), y vamos a demostrar una serie de propiedades que nos serán de utilidad posteriormente.

Proposición 6.5 *Sea $y_0 \in D$ dado. Se verifican:*

a) *Si $t_0 \in \mathbb{R}$, $t_1 \in I(t_0, y_0)$ e $y_1 = \varphi(t_1; t_0, y_0)$, entonces $I(t_0, y_0) = I(t_1, y_1)$ y $\varphi(t; t_0, y_0) = \varphi(t; t_1, y_1)$ $\forall t \in I(t_0, y_0)$.*

b) *Si $t_1 \in I(y_0)$ e $y_1 = \varphi(t_1; 0, y_0)$, entonces $I(y_0) = t_1 + I(y_1)$ y $\varphi(t; 0, y_1) = \varphi(t + t_1; 0, y_0)$, $\forall t \in I(y_1)$.*

Demostración. El apartado a) es consecuencia directa de la unicidad de solución maximal del problema de Cauchy.

Para demostrar el apartado b), notemos que de las primeras propiedades de los sistemas autónomos se deduce que

$$I(t_1, y_1) = t_1 + I(y_1)$$

y por el apartado a) habrá de cumplirse que

$$t_1 + I(y_1) = I(y_0).$$

Además, es inmediato comprobar que, si denotamos por $\varphi_1(t) = \varphi(t; 0, y_1)$ y $\varphi_2(t) = \varphi(t + t_1; 0, y_0)$, ambas funciones son soluciones de

$$\begin{cases} y' = f(y) \\ y(0) = y_1 \end{cases}$$

en $I(y_1)$. La unicidad de solución maximal permite asegurar que entonces $\varphi_1 \equiv \varphi_2$. $\square$

Observación 6.6 *Observemos que si $y_1 = \varphi(t_1; 0, y_0)$ para $t_1 \in I(y_0)$, entonces*

$$\begin{aligned} \gamma(y_1) &= \{\varphi(t; 0, y_1) : t \in I(y_1)\} \\ &= \{\varphi(t + t_1; 0, y_0) : t \in I(y_1)\} \\ &= \{\varphi(t + t_1; 0, y_0) : t + t_1 \in t_1 + I(y_1)\} \\ &= \{\varphi(t + t_1; 0, y_0) : t + t_1 \in I(y_0)\} \\ &= \{\varphi(\tau; 0, y_0) : \tau \in I(y_0)\} \\ &= \gamma(y_0). \end{aligned}$$

Por lo tanto, como consecuencia directa de esta observación se deduce:

Proposición 6.7 *Sean $y_0, y_1 \in D$. Se verifican:*

a) $y_1 \in \gamma(y_0) \Longleftrightarrow \gamma(y_0) = \gamma(y_1)$

b) $\gamma(y_0) \cap \gamma(y_1) \neq \emptyset \Longleftrightarrow \gamma(y_0) = \gamma(y_1)$ *(en otras palabras: dos órbitas o coinciden o no se cortan).*

Observación 6.8 *Así pues, dado un punto $y_0 \in D$, existe una única órbita que pasa por y_0. Dicha órbita se puede descomponer en dos semiórbitas $\gamma^+(y_0)$ (positiva) y $\gamma^-(y_0)$ (negativa) dadas por*

$$\gamma^+(y_0) = \{\varphi(t; 0, y_0) : t \in I(y_0) \cap [0, +\infty)\}$$
$$\gamma^-(y_0) = \{\varphi(t; 0, y_0) : t \in I(y_0) \cap (-\infty, 0]\}.$$

Es inmediato demostrar que se verifica la siguiente proposición.

Proposición 6.9 *Sean $y_0 \in D$ e $y_1 = \varphi(t_1; 0, y_0) \in \gamma(y_0)$. Se verifican:*

a) *Si $t_1 \geq 0 \Longrightarrow \gamma^+(y_0) = \gamma^+(y_1) \cap \{\varphi(t; 0, y_0) : t \in [0, t_1)\}$.*

b) *Si $t_1 < 0 \Longrightarrow \gamma^+(y_1) = \gamma^+(y_0) \cap \{\varphi(t; 0, y_0) : t \in [t_1, 0]\}$.*

Definición 6.10 *Se dice que la órbita $\gamma(y_0)$ es cíclica o cerrada si $I(y_0) = \mathbb{R}$ y además $\exists T > 0$ tal que*

$$\varphi(t + T; 0, y_0) = \varphi(t; 0, y_0), \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

En tal caso se dice que T es un periodo de la órbita.

Observación 6.11 .

1. *Resulta inmediato comprobar que las órbitas cíclicas del sdo (13) se corresponden con las soluciones periódicas de dicho sistema. En el caso en que $y_0 \in D$ sea un punto crítico, entonces se tendrá que $\gamma(y_0) = \{y_0\}$ y en este caso se dice que $\gamma(y_0)$ es una órbita cíclica degenerada.*

2. *Si $\gamma(y_0)$ es cíclica, entonces $\gamma(y_0) = \gamma^+(y_0) = \gamma^-(y_0)$. Además, si $y_1 \in \gamma(y_0) \Longrightarrow \gamma^+(y_0) = \gamma^+(y_1)$*

Proposición 6.12 *Sea $y_0 \in D$. Si la órbita $\gamma(y_0)$ se corta a sí misma, es decir, si existen $t_1, t_2 \in I(y_0), t_1 \neq t_2$, tales que $\varphi(t_1; 0, y_0) = \varphi(t_2; 0, y_0)$, entonces $\gamma(y_0)$ es cíclica.*

Demostración. Sea $y_1 = \varphi(t_1; 0, y_0) = \varphi(t_2; 0, y_0)$. Entonces,

$$I(t_1, y_1) = t_1 + I(y_1)$$
$$I(t_2, y_1) = t_2 + I(y_1).$$

Por la Proposición 6.5 tendremos que

$$t_1 + I(y_1) = t_2 + I(y_1)$$

lo cual es únicamente posible si $I(y_1) = I(y_2) = \mathbb{R}$ (en caso contrario se llegaría a contradicción con el hecho de que $I(y_1)$ e $I(y_2)$ son abiertos y maximales).

Por otra parte, si suponemos por fijar ideas que $t_2 > t_1$, tomando $T = t_2 - t_1$, resulta que las funciones $\varphi_1(t) = \varphi(t; 0, y_0)$ y $\varphi_2(t) = \varphi(t + T; 0, y_0)$ son soluciones del sistema diferencial (13) en $\mathbb{R} \times D$ y verifican además $\varphi_1(t_1) = \varphi_2(t_1)$, con lo que habrán de ser idénticas en todo $\mathbb{R}$. $\square$

Ahora introduciremos otro concepto importante como es el de conjunto invariante.

Definición 6.13 *Sea $\Gamma \subset D$. Se dice que Γ es*

a) *invariante si $\gamma(y_0) \subset \Gamma$ para todo $y_0 \in \Gamma$,*

b) *positivamente invariante si $\gamma^+(y_0) \subset \Gamma$ para todo $y_0 \in \Gamma$,*

c) *negativamente invariante si $\gamma^-(y_0) \subset \Gamma$ para todo $y_0 \in \Gamma$.*

Observación 6.14 *Es inmediato comprobar que*

1. *Toda órbita es un conjunto invariante.*
2. *$\Gamma \subset D$ es invariante $\Longleftrightarrow \Gamma = \bigcup_{y_0 \in \Gamma} \gamma(y_0)$.*
3. *$\Gamma \subset D$ es positivamente (resp. negativamente) invariante $\Longleftrightarrow \Gamma = \bigcup_{y_0 \in \Gamma} \gamma^+(y_0)$ (resp. $\Gamma = \bigcup_{y_0 \in \Gamma} \gamma^-(y_0)$).*

Finalmente definimos el concepto de conjunto límite que jugará un papel primordial en el análisis de las órbitas.

Definición 6.15 *Sea $p \in \mathbb{R}^N$. Se dice que p es un punto límite positivo (resp. negativo) asociado a $y_0 \in D$ si $\exists \{t_n\} \subset I(y_0)$ tal que*

1. *$t_n \underset{n\to\infty}{\to} \sup I(y_0)$ (resp. $t_n \underset{n\to\infty}{\to} \inf I(y_0)$),*
2. *$\lim_{n\to\infty} \varphi(t_n; 0, y_0) = p$.*

Definición 6.16 *Dado $y_0 \in D$ se llama conjunto límite positivo (resp. negativo) asociado a y_0 al conjunto*

$$\Lambda^+(y_0) = \{p \in \mathbb{R}^N : \ p \ \text{ es un punto límite positivo asociado a } y_0\}$$

$$(\text{resp. } \Lambda^-(y_0) = \{p \in \mathbb{R}^N : \ p \ \text{ es un punto límite negativo asociado a } y_0\}).$$

Si $A \subset D$, se define

$$\Lambda^\pm(A) = \bigcup_{y_0 \in A} \Lambda^\pm(y_0).$$

Observación 6.17 *Observemos ahora lo siguiente.*

1. *Los conjuntos límites son subconjuntos (eventualmente vacíos) de $\overline{D}$.*
2. *Si $\gamma(y_0)$ es cíclica, entonces $\Lambda^+(y_0) = \Lambda^-(y_0) = \Lambda(y_0)$. En efecto, procedamos con $\Lambda^+(y_0)$. Como $\gamma(y_0)$ es cíclica, entonces existirá $T > 0$ tal que*

   $$\gamma(y_0) = \{\varphi(t; 0, y_0) : t \in [0, T]\}$$

   que es un compacto (cerrado y acotado por tanto). Sea ahora $p \in \Lambda^+(y_0)$, entonces $\exists \{t_n\} \subset I(y_0)$ con $t_n \to \sup I(y_0)$ tal que

   $$p = \lim_{n\to\infty} \varphi(t_n; 0, y_0) \in \overline{\gamma(y_0)} = \gamma(y_0).$$

   Luego $\Lambda^+(y_0) \subset \gamma(y_0)$. Para demostrar la inclusión contraria observemos que si $p \in \gamma(y_0)$ entonces $\exists t_1 \in [0, T]$ tal que $p = \varphi(t_1; 0, y_0) = \varphi(t_1 + nT; 0, y_0)$ para todo $n \in \mathbb{N}$. De esta forma se tendrá que

   $$p = \lim_{n\to\infty} \varphi(t_1 + nT; 0, y_0) \in \Lambda^+(y_0).$$

3. *En el ejemplo correspondiente al sistema (14) considerado anteriormente se verifica que:*

$$\Lambda^+(y_0) = \begin{cases} \text{Ccf. unidad} & \text{si } y_0 \neq 0, \\ 0 & \text{si } y_0 = 0 \end{cases}, \quad \Lambda^-(y_0) = \begin{cases} 0 & \text{si } |y_0| < 1 \\ \text{Ccf. unidad} & \text{si } |y_0| = 1 \\ \emptyset & \text{si } |y_0| > 1. \end{cases}$$

4. *Denotemos por $(\alpha, \beta) = I(y_0)$. Si $\beta < +\infty$ entonces se puede comprobar que*

$$T^+_{\varphi(\cdot;0,y_0)} = \{\beta\} \times \Lambda^+(y_0).$$

Análogamente, si $-\infty < \alpha$ entonces

$$T^-_{\varphi(\cdot;0,y_0)} = \{\alpha\} \times \Lambda^-(y_0).$$

A continuación demostraremos una serie de propiedades de los conjuntos límites que nos serán de utilidad.

Proposición 6.18 *Sea $y_0 \in D$. Se verifican:*

1. $\Lambda^+(y_0) = \Lambda^+(\gamma(y_0)) = \Lambda^+(\gamma^+(y_0)) = \Lambda^+(\gamma^-(y_0))$.
2. $\overline{\gamma^+(y_0)} = \gamma^+(y_0) \cup \Lambda^+(y_0)$.
3. $\Lambda^+(y_0) = \displaystyle\bigcap_{y_1 \in \gamma(y_0)} \overline{\gamma^+(y_1)}$.

Demostración. $\boxed{1.}$ Observemos en primer lugar que $y_1 \in \gamma(y_0) \iff y_0 \in \gamma(y_1)$. En consecuencia, basta con demostrar que si $y_1 \in \gamma(y_0)$ entonces $\Lambda^+(y_1) \subset \Lambda^+(y_0)$.

Sea pues $y_1 \in \gamma(y_0)$, entonces $\exists t_1 \in I(y_0)$ tal que $y_1 = \varphi(t_1; 0, y_0)$. Sea ahora $p \in \Lambda^+(y_1)$, entonces $\exists \{\overline{t_n}\} \subset I(y_1)$ con $\overline{t_n} \to \sup I(y_1)$ tal que

$$p = \lim_{n\to\infty} \varphi(\overline{t_n}; 0, y_1).$$

Por la Proposición 6.5 sabemos que $I(y_0) = t_1 + I(y_1)$ y que

$$\varphi(\bar{t}; 0, y_1) = \varphi(t_1 + \bar{t}; 0, y_0) \quad \forall \bar{t} \in I(y_1).$$

Denotando por $\widetilde{t_n} = t_1 + \overline{t_n}$, tendremos que $\widetilde{t_n} \to \sup I(y_0)$ y

$$p = \lim_{n\to\infty} \varphi(\widetilde{t_n}; 0, y_0),$$

luego $p \in \Lambda^+(y_0)$.

$\boxed{2.}$ La inclusión $\gamma^+(y_0) \cup \Lambda^+(y_0) \subset \overline{\gamma^+(y_0)}$ es inmediata. Sea pues $p \in \overline{\gamma^+(y_0)}$, entonces $\exists t_n \in I(y_0) \cap [0, +\infty)$ tal que

$$\lim_{n\to\infty} \varphi(t_n; 0, y_0) = p.$$

Sea $\beta = \sup I(y_0)$. Si $\sup_n t_n = b < \beta$, entonces existe una subsucesión $\{t_n\}$ que converge a b y, por tanto, $p = \varphi(b; 0, y_0) \in \gamma^+(y_0)$. Si, en cambio, lo que se verifica es que $\sup_n t_n = \beta$, entonces existe una subsucesión $\{t_{n_k}\} \to \beta$ tal que $\lim\limits_{k\to\infty} \varphi(t_{n_k}; 0, y_0) = p$, con lo que $p \in \Lambda^+(y_0)$.

$\boxed{3.}$ Sea $p \in \Lambda^+(y_0) \Longrightarrow \exists\{\overline{t_n}\} \subset I(y_0)$ con $\overline{t_n} \to \sup I(y_0)$ tal que

$$\lim_{n\to\infty} \varphi(\overline{t_n}; 0, y_0) = p.$$

Sea ahora $y_1 \in \gamma(y_0) \Longrightarrow \exists t_1 \in I(y_0)$ tal que $y_1 = \varphi(t_1; 0, y_0)$.

Como $\overline{t_n} \to \sup I(y_0)$ y $t_1 \in I(y_0)$, entonces $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\overline{t_n} > t_1$ $\forall n \geq n_0$. Por tanto, gracias a la Proposición 6.5, se tiene

$$\begin{aligned} p &= \lim_{n\to\infty} \varphi(\overline{t_n}; 0, y_0) \\ &= \lim_{n\to\infty} \varphi(\underbrace{\overline{t_n} - t_1}_{\geq 0 \text{ si } n \geq n_0} + t_1; 0, y_0) \\ &= \lim_{n\to\infty} \varphi(\overline{t_n} - t_1; 0, y_1) \\ &\subset \overline{\gamma^+(y_1)}. \end{aligned}$$

Reciprocamente, sea $p \in \overline{\gamma^+(y_1)}$, $\forall y_1 \in \gamma(y_0)$. Tendremos que demostrar que $\exists\{\overline{t_n}\} \to \sup I(y_0)$ tal que

$$p = \lim_{n\to\infty} \varphi(\overline{t_n}; 0, y_0).$$

Consideremos ahora una sucesión $\{\alpha_n\} \subset I(y_0)$ tal que $\alpha_n \to \sup I(y_0)$.

Para α_1, como $p \in \overline{\gamma^+(\varphi(\alpha_1; 0, y_0))}$, existirá $t_1 \in I(y_0)$ con $t_1 > \alpha_1$ y tal que $d(\varphi(t_1; 0, y_0), p) < 1$.

Para α_2, como $p \in \overline{\gamma^+(\varphi(\alpha_2; 0, y_0))}$, existirá $t_2 \in I(y_0)$ con $t_2 > \alpha_2$ y tal que $d(\varphi(t_2; 0, y_0), p) < \frac{1}{2}$.

En general, para α_n, como $p \in \overline{\gamma^+(\varphi(\alpha_n; 0, y_0))}$, existirá $t_n \in I(y_0)$ con $t_n > \alpha_n$ y tal que $d(\varphi(t_n; 0, y_0), p) < \frac{1}{n}$.

En consecuencia, se tiene que $t_n \to \sup I(y_0)$ y que

$$\lim_{n\to\infty} \varphi(t_n; 0, y_0) = p,$$

luego $p \in \Lambda^+(y_0)$. $\square$

Proposición 6.19 *Sea $y_0 \in D$. Se verifica que $\Lambda^+(y_0) \cap D$ es un conjunto invariante (eventualmente vacío). En particular, si $\Lambda^+(y_0) \cap D$ es un único punto, entonces dicho punto es crítico.*

Demostración. Supongamos que $\Lambda^+(y_0) \cap D \neq \emptyset$, entonces $\exists y_1 \in \Lambda^+(y_0) \cap D$. Demostremos que $\gamma(y_1) \subset \Lambda^+(y_0) \cap D$.

Como $y_1 \in D \Longrightarrow \gamma(y_1) \subset D$. Resta por tanto comprobar que $\gamma(y_1) \subset \Lambda^+(y_0)$.

Observemos en primer lugar que $\sup I(y_0) = +\infty$, ya que, si fuese $\sup I(y_0) = \beta \in \mathbb{R}$, entonces $(\beta, y_1) \in T^+_{\varphi(\cdot;0,y_0)}$ y $(\beta, y_1) \in \mathbb{R} \times D$, lo que contradice la caracterización de las soluciones maximales del problema de Cauchy. En consecuencia, $\exists t_n \to +\infty$ tal que $y_1 = \lim\limits_{n\to\infty} \varphi(t_n; 0, y_0)$.

Dado $p \in \gamma(y_1), \exists t^* \in I(y_1)$ tal que $p = \varphi(t^*; 0, y_1)$. Ahora bien, como $(t^*; 0, y_1) \in \Theta$, este conjunto Θ es abierto y

$$(t^*; 0, \varphi(t_n; 0, y_0)) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} (t^*; 0, y_1),$$

entonces $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\forall n \geq n_0$

$$(t^*; 0, \varphi(t_n; 0, y_0)) \in \Theta$$

y por tanto

$$p = \varphi(t^*; 0, y_1) = \lim_{n\to\infty} \varphi(t^*; 0, \varphi(t_n; 0, y_0)) = \lim_{n\to\infty} \varphi(t^* + t_n; 0, y_0),$$

y como $t^* + t_n \in I(y_0) \ \ \forall n \geq n_0$, y $t^* + t_n \to \infty$, se tiene que $p \in \Lambda^+(y_0)$. $\square$

Proposición 6.20 *Sea $y_0 \in D$ tal que $\gamma^+(y_0)$ está acotada. Entonces,*

1. *$\Lambda^+(y_0)$ es un compacto no vacío.*
2. $\displaystyle\lim_{t\to\sup I(y_0)} d(\varphi(t; 0, y_0), \Lambda^+(y_0)) = 0.$

Demostración. $\boxed{1.}$ Como por la Proposición 6.18 se tiene que

$$\Lambda^+(y_0) = \bigcap_{y_1\in\gamma(y_0)} \overline{\gamma^+(y_1)},$$

es inmediato comprobar que $\Lambda^+(y_0)$ es cerrado. Por otra parte, como $\Lambda^+(y_0) \subset \overline{\gamma^+(y_0)}$, entonces es también acotado, y por tanto compacto.

Por otro lado, para cualquier sucesión $t_n \to \sup I(y_0)$ se tiene que $\{\varphi(t_n; 0, y_0)\}$ es una sucesión acotada que posee una subsucesión convergente. Luego $\Lambda^+(y_0)$ es no vacío.

$\boxed{2.}$ Por reducción al absurdo, si $\displaystyle\lim_{t\to\sup I(y_0)} \mathrm{d}(\varphi(t; 0, y_0), \Lambda^+(y_0)) \neq 0$, entonces

$$\exists \varepsilon > 0, \exists t_n \in I(y_0) \cap [0, +\infty) \ \text{ con } \ t_n \to \sup I(y_0) \ \text{ y } \ \mathrm{d}(\varphi(t_n; 0, y_0), \Lambda^+(y_0)) \geq \varepsilon > 0.$$

Ahora bien, como $\{\varphi(t_n; 0, y_0)\} \subset \gamma^+(y_0)$ que está acotada, entonces existirá una subsucesión $t_{n_k} \to \sup I(y_0)$ tal que

$$\lim_{n_k\to\infty} \varphi(t_n; 0, y_0) = p \in \Lambda^+(y_0).$$

Pero esto no es posible pues como

$$\mathrm{d}(\varphi(t_{n_k}; 0, y_0), \Lambda^+(y_0)) \geq \varepsilon > 0,$$

tendremos que

$$\mathrm{d}(p, \Lambda^+(y_0)) = \lim_{n_k\to\infty} \mathrm{d}(\varphi(t_{n_k}; 0, y_0), \Lambda^+(y_0)) \geq \varepsilon > 0. \ \square$$

6.4 El Teorema de La Salle. Consecuencias

El Teorema de La Salle es un resultado muy importante que asegura la existencia de conjuntos atrayentes para las órbitas de un sistema autónomo. Este conjunto va a ser fundamental para el estudio asintótico de la dinámica del sistema diferencial.

Teorema 6.21 ***(de La Salle)*** *Sea $K \subset D$ un compacto y sea $V \in C^1(D)$ tal que $\dot{V}(y) \leq 0$ para todo $y \in K$. Sea $y_0 \in K$ tal que $\gamma^+(y_0) \subset K$. Denotemos por*

$$E = \{y \in K : \dot{V}(y) = 0\}$$

y sea M el mayor subconjunto invariante de E (i.e. el subconjunto de E formado por todas las órbitas completas). Entonces

i) $\sup I(y_0) = +\infty$,

ii) $\Lambda^+(y_0) \subset M$ *(en particular, $M \neq \emptyset$),*

iii) $\lim_{t \to +\infty} d(\varphi(t; 0, y_0), M) = 0$.

Demostración. $\boxed{\text{i)}}$ Observemos en primer lugar que por ser $\gamma^+(y_0) \subset K$, se tiene que $\gamma^+(y_0)$ está acotada, de donde se deduce que $\Lambda^+(y_0)$ es un compacto no vacío e invariante. Además se verifica que $\Lambda^+(y_0) \subset K \subset D$, lo que implica que $\sup I(y_0) = +\infty$ (véase la demostración de la Proposición 6.19).

$\boxed{\text{ii)}}$ Para demostrar este apartado basta comprobar que $\Lambda^+(y_0) \subset E$, ya que al ser $\Lambda^+(y_0)$ invariante, necesariamente habrá de estar contenido en el mayor subconjunto invariante de E, es decir, habrá de verificarse que $\Lambda^+(y_0) \subset M$. Y por tanto bastará con demostrar que $\dot{V}(p) = 0$ para todo $p \in \Lambda^+(y_0)$. Para ello, denotemos por

$$v(t) = V(\varphi(t; 0, y_0)), \quad t \geq 0.$$

Entonces

$$v'(t) = \dot{V}(\varphi(t; 0, y_0)) \leq 0, \forall t \geq 0,$$

de donde se deduce que

$$\exists\ L = \lim_{t \to +\infty} v(t) \in [-\infty, V(y_0)].$$

Observemos que $\lim_{t \to +\infty} v(t) > -\infty$ ya que, al ser $\Lambda^+(y_0) \neq \emptyset$, existirá al menos un punto $p_0 \in \Lambda^+(y_0)$, lo que implica la existencia de una sucesión $t_n \to +\infty$ tal que $\lim_{n \to \infty} \varphi(t_n; 0, y_0) = p_0$, y por tanto

$$\lim_{t \to +\infty} v(t) = \lim_{n \to \infty} v(t_n) = V(p_0) \in \mathbb{R}.$$

Más aún, del razonamiento anterior se deduce en realidad que

$$L = \lim_{t \to +\infty} v(t) = V(p), \quad \text{para todo } \ p \in \Lambda^+(y_0).$$

Demostremos ya que $\dot{V}(p) = 0$ para todo $p \in \Lambda^+(y_0)$. Tomemos para ello un punto $p \in \Lambda^+(y_0)$. Como $\Lambda^+(y_0)$ es invariante, $\gamma(p) \subset \Lambda^+(y_0)$, es decir, $\varphi(t; 0, p) \in \Lambda^+(y_0)$ para $t \in I(p)$. Entonces

$$V(\varphi(t; 0, p)) = L, \quad \text{para todo } \ t \in I(p),$$

y, consecuentemente,

$$\dot{V}(\varphi(t;0,p)) = \frac{d}{dt}V(\varphi(t;0,p)) = 0, \quad \forall t \in I(p),$$

y particularizando para $t = 0$ se deduce

$$\dot{V}(p) = 0.$$

$\boxed{\text{iii)}}$ Este apartado es consecuencia directa de la Proposición 6.20. $\square$

Corolario 6.22 *Sea $K \subset D$ un compacto positivamente invariante y sea $V \in C^1(D)$ tal que $\dot{V}(y) \leq 0$ para todo $y \in K$. Denotemos por*

$$E = \{y \in K : \dot{V}(y) = 0\}$$

y sea M el mayor subconjunto invariante de E. Entonces

$$\lim_{t\to+\infty} d(\varphi(t;0,y_0), M) = 0, \quad \textit{para todo} \ \ y_0 \in K.$$

(Se suele decir que M es un atractor para el compacto K).

Demostración. Es una consecuencia directa del Teorema de La Salle. $\square$

Corolario 6.23 *Supongamos que $D = \mathbb{R}^N$ y que existe $V \in C^1(\mathbb{R}^N)$ verifica que $\dot{V}(y) \leq 0$ para todo $y \in \mathbb{R}^N$ y $\lim_{|y|\to+\infty} V(y) = +\infty$. Entonces,*

1. *para todo $y_0 \in \mathbb{R}^N$ se tiene que $\gamma^+(y_0)$ está acotada;*
2. *denotando por*
$$E = \{y \in \mathbb{R}^N : \dot{V}(y) = 0\}$$
y por M el mayor subconjunto invariante de E, se verifica que $M \neq \emptyset$ y
$$\lim_{t\to+\infty} d(\varphi(t;0,y_0), M) = 0, \quad \textit{para todo} \ \ y_0 \in \mathbb{R}^N$$
(se dice entonces que M es un atractor global para el sistema diferencial (13)). $\square$

Corolario 6.24 *Supongamos que $0 \in D$, $f(0) = 0$ y existe $\rho > 0$ tal que $B_\rho \subset D$ y existe $V \in C^1(B_\rho)$ tal que*

i) *V es def. + en B_ρ,*

ii) *$\dot{V}(y) \leq 0$ para todo $y \in B_\rho$,*

iii) *$\{0\}$ es el único subconjunto invariante de $E = \{y \in B_\rho : \dot{V}(y) = 0\}$.*

Entonces la solución nula de (13) es uniformemente asintóticamente estable.

Demostración. De i)+ii) se sigue que V es una función de Liapunov para (13), lo que implica que φ_0 sea uniformemente estable. Aplicando la definición de estabilidad uniforme con $\varepsilon = \frac{\rho}{2}$ se deduce la existencia de $\gamma > 0$ tal que

$$|y_0| \leq \gamma \Longrightarrow \begin{cases} I(y_0) \supset [0, +\infty) \\ |\varphi(t; 0, y_0)| \leq \frac{\rho}{2}, \quad \forall t \geq 0. \end{cases}$$

Denotemos por $K = \overline{B}_{\rho/2} \subset D$ que es un compacto tal que $\dot{V}(y) \leq 0$ para todo $y \in K$ y además $\gamma^+(y_0) \subset K$ para todo $y_0 \in K$. Entonces el Teorema de La Salle implica que

$$\lim_{t \to +\infty} d(\varphi(t; 0, y_0), M) = 0,$$

y como $M = \{0\}$, entonces φ_0 es atractivo. $\square$

Este corolario es de gran interés para poder asegurar que determinados sistemas diferenciales poseen soluciones uniformemente asintóticamente estables usando funciones de Liapunov cuya derivada respecto del sistema no sea definida negativa. Ilustrémoslo con el ejemplo del péndulo con rozamiento.

Ejemplo 6.25 *Consideremos la edo del péndulo con rozamiento*

$$y'' + ky' + \text{sen } y = 0, \quad \textit{con} \quad k > 0.$$

Esta ecuación es equivalente al s.d.o.

$$\begin{cases} y_1' = y_2 \\ y_2' = -ky_2 - \text{sen } y_1. \end{cases}$$

Ya conocemos que la función $V(y_1, y_2) = \frac{1}{2}y_2^2 + 1 - \cos y_1$ *satisface i)+ii) del Corolario 6.24 en* B_π, *con lo que* φ_0 *es uniformemente estable. Para demostrar que es atractivo basta comprobar que* $\{0\}$ *es el único subconjunto invariante de*

$$E = \{y \in B_\pi : \dot{V}(y) = 0\} = \{y \in B_\pi : -ky_2^2 = 0\} = \{(y_1, 0) : |y_1| < \pi\}.$$

Tomemos un punto $y_0 = (y_{01}, 0) \in E \backslash \{(0,0)\}$ *y comprobemos que* $\gamma(y_0) \subsetneq E$. *Para ello, observemos que*

$$\gamma(y_0) = \{\varphi(t; 0, y_0) = (\varphi_1(t), \varphi_2(t)) : t \in I(y_0)\},$$

y por tanto

$$\begin{cases} \varphi_1'(0) = \varphi_2(0) = 0 \\ \varphi_2'(0) = -k\varphi_2(0) - \text{sen } \varphi_1(0) = -\text{sen } y_{01} \neq 0, \end{cases}$$

luego φ_2 *no puede ser idénticamente nula, y consecuentemente* $\gamma(y_0) \subsetneq E$.

6.5 El Teorema de Poincaré-Bendixson

Ya hemos visto anteriormente un ejemplo de un sistema autónomo plano en el que la existencia de una órbita cíclica determinaba completamente el comportamiento global del sistema. Esta situación es bastante frecuente en los sistemas autónomos planos como vamos a poner de manifiesto a continuación, gracias al Teorema de Poincaré-Bendixson. Es interesante resaltar que este resultado es exclusivo para sistemas planos pues la demostración (que omitiremos) se basa en el Teorema de la curva cerrada de Jordan que sólo se verifica en dimensión 2.

En general, ya sabemos que se verifica que si $y_0 \in D$ es tal que $\gamma^+(y_0)$ está acotada, entonces $\Lambda^+(y_0)$ es un compacto no vacío e invariante (es decir, formado por puntos críticos y órbitas completas). Pues bien, en dimensión $N = 2$ se puede afirmar más, en concreto, si $\Lambda^+(y_0)$ no contiene puntos críticos, entonces es una órbita cíclica no degenerada y además $\gamma^+(y_0)$ se acerca a $\Lambda^+(y_0)$ en espiral.

Estableceremos pues este importante resultado.

Comenzaremos con la definición de segmento sin contacto (ssc) y acercamiento en espiral. A partir de ahora suponemos $N = 2$.

Definición 6.26 *Se llama (ssc) respecto del sistema diferencial (13) a todo segmento finito $L \subset D$ tal que*

1. *L no contiene puntos críticos.*
2. *f no es paralelo a L en ningún punto de L, es decir, si $L = [y_1, y_2] = \{y \in D : y = \lambda y_1 + (1-\lambda)y_2, \lambda \in [0,1]\}$ entonces*

$$\begin{cases} f(y) \neq 0, \quad \forall y \in L, \\ (y_1, y_2) \cdot (f_2(y), -f_1(y)) \neq 0, \quad \forall y \in L. \end{cases}$$

Definición 6.27 *Sean $y_0, y^* \in D$ y supongamos que $\gamma(y^*)$ es cíclica. Se dice que $\gamma^+(y_0)$ se acerca en espiral a $\gamma(y^*)$ si dados $t \in \mathbb{R}$ y un ssc L que contenga a $\varphi(t; 0, y^*)$ en su interior, se verifica que*

$$L \cap \gamma^+(y_0) = \{\varphi(t_n; 0, y_0) : n \geq 1\}$$

tales que

1. *$\varphi(t_n; 0, y_0) \to \varphi(t; 0, y^*)$ cuando $n \to \infty$,*
2. *sobre el segmento L se verifica que $\varphi(t_{n+1}; 0, y_0)$ se encuentra entre $\varphi(t_n; 0, y_0)$ y $\varphi(t_{n+2}; 0, y_0)$.*

Podemos ya enunciar el teorema.

Teorema 6.28 ***(Poincaré-Bendixson)*** *Sea $y_0 \in D$ y sea $K \subset D$ un compacto tal que $\gamma^+(y_0) \subset K$ (resp. $\gamma^-(y_0) \subset K$) y supongamos que $\Lambda^+(y_0)$ (resp. $\Lambda^-(y_0)$) no contiene puntos críticos. Entonces,*

i) *$\Lambda^+(y_0)$ (resp. $\Lambda^-(y_0)$) es una órbita cíclica no degenerada.*

ii) *O bien $\gamma^+(y_0)$ (resp. $\gamma^-(y_0)$) es cíclica y en ese caso $\gamma^+(y_0) = \Lambda^+(y_0)$ (resp. $\gamma^-(y_0) = \Lambda^-(y_0)$), o bien $\gamma^+(y_0)$ (resp. $\gamma^-(y_0)$) se acerca en espiral hacia $\Lambda^+(y_0)$ (resp. $\Lambda^-(y_0)$), en cuyo caso se dice que $\Lambda^+(y_0)$ (resp. $\Lambda^-(y_0)$) es un **ciclo-límite**.*

Referencias.

1. P. Hartman, Ordinary differential equations, John Wiley & Sons, Inc., New York, 1964

2. R.K. Miller & A.N. Michel, Ordinary differential equations, Academic Press, London, 1982.

3. M.R. Rao, Ordinary differential equations. Theory and applications, E. Arnold (Publisher) Ltd. London, 1981.

4. J.C. Robinson, An introduction to ordinary differential equations, Cambridge University Press, Cambridge, 2004.

5. N. Rouché & J. Mawhin, Equations différentielles ordinaires, Tomo 2, Ed. Masson, Paris, 1973.