Índice general

CAPÍTULO 1

Clasificación de las EDPs. Características.

1.1. Definiciones y notación

En este curso vamos a seguir y a ampliar el estudio de las Ecuaciones en Derivadas Parciales (en lo que sigue EDP) iniciado en la asignatura de cuarto curso, EDP y Análisis Funcional. Comenzamos recordando algunos conceptos introducidos el año pasado en la referida asignatura.

De manera imprecisa, una EDP es una ecuación en la que la incógnita es una función de dos o más variables independientes, y tal que en dicha ecuación aparecen derivadas parciales, respecto de las variables independientes, de la función incógnita. Se denomina orden de una EDP al mayor de los órdenes de las derivadas parciales que aparecen en la misma. Así, por ejemplo, si $u = u(x, y)$ es una función incógnita de las dos variables independientes x y y, entonces la ecuación

$$u + \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} + u^2 = 0$$

es una EDP de cuarto orden.

Definición 1.1. *Sea $N \geq 1$ un entero. Una EDP de segundo orden en las N variables independientes $x_1, x_2, ..., x_N$ y en la función incógnita $u = u(x_1, x_2, ..., x_N)$, es una expresión de la forma*

$$F\left(x_1, x_2 ..., x_N, u, \frac{\partial u}{\partial x_1}, \frac{\partial u}{\partial x_2}, ..., \frac{\partial u}{\partial x_N}, \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}, ..., \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}, ..., \frac{\partial^2 u}{\partial x_N^2}\right) = 0, \tag{1.1}$$

donde, por fijar ideas, $F : \mathcal{U} \to \mathbb{R}$, con $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^{N^2+2N+1}$ abierto no vacío, es una función continua dada, es decir, con la notación habitual, $F \in C^0(\mathcal{U})$.

Para simplificar la notación, es costumbre denotar

$$x = (x_1, x_2 ..., x_N), \quad u = u(x), \quad \nabla u = Du = \left(\frac{\partial u}{\partial x_1}, \frac{\partial u}{\partial x_2}, ..., \frac{\partial u}{\partial x_N}\right),$$

el denominado gradiente, y

$$D^2 u = \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}, ..., \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}, ..., \frac{\partial^2 u}{\partial x_N^2}\right),$$

(Hessiano de u) y con esta notación escribir la EDP (1.1) como

$$F(x, u, Du, D^2 u) = 0. \tag{1.2}$$

A diferencia de lo que sucede con las ecuaciones diferenciales ordinarias, no existe una teoría general de las EDP, ni de las EDP de segundo orden. Lo que se puede desarrollar son teorías generales de "tipos" de EDP.

El concepto de solución de una EDP resulta de capital importancia. Para la ecuación (1.2), el citado concepto, que a primera vista parece evidente, ha dado lugar al desarrollo de conceptos de gran importancia en la actualidad, tales como la teoría de Distribuciones, los espacios de Sobolev, etc, que serán introducidos en la segunda parte de este Curso.

Por el momento, nos limitamos a introducir el concepto siguiente:

Definición 1.2. *Una solución clásica de (1.2) es cualquier pareja (U, u) tal que*

a) $U \subset \mathbb{R}^N$ *es un abierto no vacío,*

b) $u : U \mapsto \mathbb{R}$ *función,* $u \in C^2(U)$*,*

c) $(x, u(x), Du(x), D^2u(x)) \in \mathcal{U} \quad \forall\, x \in U$ *y*

d) $F(x, u(x), Du(x), D^2u(x)) = 0 \quad \forall\, x \in U.$

Se dice entonces que u es solución de (1.2) en el abierto U.

Como ya ha sido dicho, no existe una teoría general para las EDP de segundo orden. Además, no todas estas últimas resultan tener el mismo interés; las hay que tienen tan sólo un interés puramente académico, mientras que hay otras cuyo interés reside en su origen en la Física, en otra Ciencia de la Naturaleza, o en las Matemáticas mismas. Nosotros nos vamos a interesar preferentemente por este último tipo de EDP de segundo orden.

A continuación, introducimos un caso particular muy importante de la EDP (1.2).

Definición 1.3. *Una EDP lineal de segundo orden en la incógnita u y en las variables independientes $x = (x_1, x_2, ..., x_N)$, es una EDP de la forma*

$$\sum_{i,j=1}^{N} a_{ij}(x)\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^{N} b_i(x)\frac{\partial u}{\partial x_i} + c(x)u = f(x), \tag{1.3}$$

donde a_{ij}, b_i, c y f son funciones dadas en $C^0(\Omega)$, con Ω un abierto de $\mathbb{R}^N$. A las funciones a_{ij}, b_i y c se las denominan los coeficientes de (1.3), mientras que la función f es denominada el término independiente de la ecuación.

Si $f \equiv 0$, se dice que (1.3) es homogénea. Si las funciones a_{ij}, b_i y c son todas constantes, se dice que (1.3) es una EDP lineal de segundo orden con coeficientes constantes.

Observación 1.4. *En (1.3) siempre supondremos, lo cual no es restrictivo, que $a_{ij} \equiv a_{ji}$. Evidentemente, una solución clásica de (1.3) es cualquier par (U, u) tal que $U \subset \Omega$ sea un abierto no vacío, $u \in C^2(U)$, y*

$$\sum_{i,j=1}^{N} a_{ij}(x)\frac{\partial^2 u(x)}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^{N} b_i(x)\frac{\partial u(x)}{\partial x_i} + c(x)u(x) = f(x) \quad \forall\, x \in U.$$

Observación 1.5. *Otras dos clases muy importantes de EDP de segundo orden son las semilineales, que son de la forma*

$$\sum_{i,j=1}^{N} a_{ij}(x)\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} = f(x, u, Du),$$

y las EDPs cuasilineales, cuya forma general es

$$\sum_{i,j=1}^{N} a_{ij}(x, u, Du)\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} = f(x, u, Du).$$

1.2. Reducción de EDP semilineales de segundo orden a la forma canónica

Nos planteamos en esta sección establecer primero una clasificación de ecuaciones semilineales de segundo orden en el caso particular $N = 2$, y luego considerar el caso de ecuaciones lineales con coeficientes constantes en el caso de N variables. Probaremos que éstas pueden reducirse a una forma simplificada denominada *canónica.*

1.2.1. Ecuación semilineal de segundo orden para $N = 2$

Trabajaremos con una ecuación semilineal de segundo orden en dos variables independientes (que denotaremos ahora x e y). Cambiaremos la notación utilizada hasta ahora y denotaremos u_x, u_y, u_{xx}, ... a las distintas derivadas parciales de la función u respecto de las variables independientes. Con esta notación consideramos

$$a(x, y)u_{xx} + 2b(x, y)u_{xy} + c(x, y)u_{yy} = d(x, y, u, u_x, u_y) \tag{1.4}$$

donde a, b, c y d son funciones regulares dadas. Como veremos posteriormente, será importante conocer el signo de la siguiente cantidad, denominada *discriminante* de la ecuación (1.4) en el punto $(x, y) \in G$:

$$\mathcal{D}(x, y) = a(x, y)c(x, y) - b^2(x, y).$$

Así podemos definir

Definición 1.6. *La ecuación (1.4) es llamada hiperbólica, parabólica o elíptica en el punto $(x, y) \in G$ si el discriminante $\mathcal{D}$ de la ecuación en el punto (x, y) es negativo, nulo o positivo respectivamente. La ecuación (1.4) es hiperbólica, parabólica o elíptica en G si lo es en cada uno de sus puntos.*

Observación 1.7. *a) Supongamos que los coeficientes a, b y c son constantes. La expresión*

$$(x, y)\begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 0,$$

representa geométricamente en coordenadas cartesianas una hipérbola si $ac - b^2 < 0$, una elipse si $ac - b^2 > 0$ y una parábola si $ac - b^2 = 0$. Ello justifica la terminología empleada en la definición anterior.

b) Es claro que si una ecuación es hiperbólica o elíptica en un punto (x_0, y_0) lo es en un entorno del punto.

Consideramos la ecuación semilineal (1.4). Nos planteamos encontrar un cambio local de variables independientes en un entorno $\mathcal{O}$ de un punto $(x_0, y_0) \in G$, dado por

$$\begin{cases} s = \phi(x, y) \\ t = \psi(x, y) \end{cases} \quad \text{con } \phi, \psi \in C^2(\mathcal{O})$$

con jacobiano $\phi_x\psi_y - \phi_y\psi_x$ no nulo en $\mathcal{O}$ y tal que la ecuación (1.4) se transforme en $u_{st} = g(s, t, u, u_s, u_t)$ con (s, t) variando en el abierto imagen. Supondremos también que no todos los coeficientes son nulos en (x_0, y_0). Utilizando la regla de la cadena y tras un sencillo cálculo obtenemos

$$\begin{aligned}
&u_x = u_s\phi_x + u_t\psi_x, \\
&u_y = u_s\phi_y + u_t\psi_y, \\
&u_{xx} = u_{ss}(\phi_x)^2 + 2u_{st}\phi_x\psi_x + u_{tt}(\psi_x)^2 + u_s\phi_{xx} + u_t\psi_{xx}, \\
&u_{xy} = u_{ss}\phi_x\phi_y + u_{st}(\phi_x\psi_y + \phi_y\psi_x) + u_{tt}\psi_x\psi_y + u_s\phi_{xy} + u_t\psi_{xy}, \\
&u_{yy} = u_{ss}(\phi_y)^2 + 2u_{st}\phi_y\psi_y + u_{tt}(\psi_y)^2 + u_s\phi_{yy} + u_t\psi_{yy}.
\end{aligned}$$

Llevando este cambio a la ecuación (1.4) y pasando todas las derivadas de primer orden al segundo miembro, llegamos a la ecuación en las nuevas variables

$$A(s,t)u_{ss} + 2B(s,t)u_{st} + C(s,t)u_{tt} = g(s,t,u,u_s,u_t) \tag{1.5}$$

cuyos coeficientes vienen dados por

$$\begin{aligned} A &= a(\phi_x)^2 + 2b\phi_x\phi_y + c(\phi_y)^2, \\ B &= a\phi_x\psi_x + b(\phi_x\psi_y + \phi_y\psi_x) + c\phi_y\psi_y, \\ C &= a(\psi_x)^2 + 2b\psi_x\psi_y + c(\psi_y)^2. \end{aligned}$$

El discriminante de la nueva ecuación (1.5) viene dado por

$$\widetilde{\mathcal{D}}(s,t) = (\phi_x\psi_y - \phi_y\psi_x)^2\mathcal{D}(x,y)$$

lo que demuestra que el signo de este discriminante es invariante bajo la transformación de variables anterior.

Como nuestro objetivo es reducir la ecuación (1.5) a una forma más sencilla, pensemos por ejemplo encontrar un cambio de variable de forma que

$$A = C = 0.$$

Esto es equivalente a encontrar soluciones de la EDP de primer orden

$$a(\phi_x)^2 + 2b\phi_x\phi_y + c(\phi_y)^2 = 0. \tag{1.6}$$

Una curva característica de (1.4) es cualquier curva plana definida de manera implícita por la igualdad $\phi(x,y) = k$, con $k \in \mathbb{R}$ fijado, y ϕ solución de (1.6). A la EDP (1.6) se la denomina la ecuación de las curvas características de (1.4).

1.2.1.1. Caso hiperbólico

Supongamos que la ecuación (1.4) es hiperbólica en (x_0, y_0) y por comodidad, supongamos que $a(x_0, y_0) \neq 0$ (si fuese $c(x_0, y_0) \neq 0$ razonaríamos de manera análoga intercambiando los papeles de las variables; si ambos coeficientes fuesen cero, ya tendríamos la ecuación en su forma canónica). Para anular los coeficientes A y C, bastaría tomar como funciones ϕ y ψ dos curvas características de la ecuación (1.4). En concreto, en este caso la ecuación

$$a\lambda^2 + 2b\lambda + c = 0 \tag{1.7}$$

tiene dos raíces reales distintas, $\lambda_1(x,y), \lambda_2(x,y)$, por lo que podemos tomar ϕ y ψ soluciones de

$$\phi_x - \lambda_1(x,y)\phi_y = 0, \qquad \psi_x - \lambda_2(x,y)\psi_y = 0.$$

De la expresión del discriminante $\widetilde{\mathcal{D}}$ y teniendo en cuenta que A y C son nulos, deducimos que $B^2 > 0$. Dividiendo la nueva ecuación por el coeficiente B, llegamos a la forma canónica

$$u_{st} = F(s,t,u,u_s,u_t).$$

Un cambio de variables adicional $\sigma = s + t$, $\tau = s - t$, transforma esta ecuación en

$$u_{\sigma\sigma} - u_{\tau\tau} = G(\sigma,\tau,u,u_\sigma,u_\tau),$$

en la conocida ecuación de ondas semilineal. En este caso hiperbólico, se dice que esta última ecuación es la forma canónica de (1.4).

1.2.1.2. Caso parabólico

Supongamos ahora que la ecuación (1.4) es parabólica en (x_0, y_0) y, de nuevo, que el coeficiente a es no nulo en (x_0, y_0). En este caso, (1.7) sólo tiene una raíz, λ_1, y podemos tomar como ϕ la solución correspondiente a λ_1 y como ψ una función regular tal que el jacobiano $\phi_x\psi_y - \phi_y\psi_x$ sea no nulo en un entorno de (x_0, y_0). En este caso el coeficiente A es idénticamente nulo y, gracias al carácter parabólico de la ecuación, $B^2 - AC = 0$, obtenemos $B \equiv 0$. Dividiendo la ecuación por el coeficiente C (necesariamente no nulo) llegamos

$$u_{tt} = F(s, t, u, u_s, u_t),$$

la forma canónica para ecuaciones parabólicas semilineales de segundo orden en dos variables independientes.

1.2.1.3. Caso elíptico

Este caso es el más complejo. La ecuación (1.7) no tiene raíces reales. Se procede de la siguiente forma: sea $\tilde{\lambda}$ una de las dos raíces complejas conjugadas. Calculamos $\tilde{\phi}$ tal que

$$\tilde{\phi}_x - \tilde{\lambda}\tilde{\phi}_y = 0$$

y después tomamos

$$\phi = Re(\tilde{\phi}), \qquad \psi = Im(\tilde{\phi}).$$

No es difícil comprobar que este cambio tiene jacobiano no nulo, que el coeficiente B de la ecuación en las nuevas variables se anula y que $A = C \neq 0$. Dividiendo por este último coeficiente, obtenemos la forma canónica:

$$u_{ss} + u_{tt} = F(s, t, u, u_t, u_s)$$

que es la ecuación de Laplace semilineal.

1.2.2. Caso general

Consideramos en este caso la ecuación lineal de segundo orden con coeficientes constantes

$$\sum_{i,j=1}^{N} a_{ij}\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^{N} b_i \frac{\partial u}{\partial x_i} + cu = f, \tag{1.8}$$

con $f \in C^0(\Omega)$ dada, siendo $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ abierto, y $a_{ij} = a_{ji} \in \mathbb{R}$, $b_i \in \mathbb{R}$ y $c \in \mathbb{R}$ dados. Denotemos por A a la matriz simétrica $A = (a_{ij})$. Sea $p \geq 0$ el número de autovalores positivos de A y $q \geq 0$ el número de autovalores negativos de A, en ambos casos, contando a cada autovalor tantas veces como indique su multiplicidad. Evidentemente, $p + q$ es el rango de A.

Por la ley de inercia de Sylvester, existe una matriz real $N \times N$ no singular, que denotaremos por P, tal que

$$A = PDP^t, \quad \text{con} \quad D = \begin{pmatrix} I_p & 0 & 0 \\ 0 & -I_q & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

donde I_p e I_q denotan respectivamente la matriz identidad $p \times p$ y $q \times q$.

En el caso en que p ó q es igual a N, se dice que la ecuación (1.8) es elíptica. Si $(p, q) = (N - 1, 1)$ ó $(p, q) = (1, N - 1)$, se dice que la ecuación (1.8) es hiperbólica. Finalmente, se dice ecuación (1.8) es parabólica si $(p, q) = (N - 1, 0)$ ó $(p, q) = (0, N - 1)$, y la componente N-ésima del vector $P^{-1}\mathbf{b}$, donde $\mathbf{b} = (b_1, ..., b_N)^t$, es no nula.

Se puede demostrar el resultado siguiente (ver [3]):

Teorema 1.8. *Con la notación precedente, consideremos el cambio de variables independientes y de función incógnita dado por*

$$y = P^{-1}x, \qquad v(y) = u(Py)e^{g(y)},$$

donde

$$g(y) = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{p} [P(\mathbf{b})]_i \, y_i - \frac{1}{2}\sum_{i=p+1}^{p+q} [P(\mathbf{b})]_i \, y_i.$$

En estas nuevas variables, la ecuación (1.8) se transforma, según los casos, como sigue:

a) Si (1.8) es elíptica, la ecuación se transforma en

$$\sum_{i=1}^{N} \frac{\partial^2 v}{\partial y_i^2} + kv = h(y), \tag{1.9}$$

donde $k \in \mathbb{R}$ y $h \in C^0\left(P^{-1}(\Omega)\right)$.

b) Si la ecuación (1.8) es hiperbólica, ésta se transforma en

$$\frac{\partial^2 v}{\partial y_N^2} - \sum_{i=1}^{N-1} \frac{\partial^2 v}{\partial y_i^2} + kv = h(y), \tag{1.10}$$

donde $k \in \mathbb{R}$ y $h \in C^0\left(P^{-1}(\Omega)\right)$.

c) Si la ecuación (1.8) es parabólica, ésta se transforma en

$$[P(\mathbf{b})]_N \frac{\partial v}{\partial y_N} + \delta \sum_{i=1}^{N-1} \frac{\partial^2 v}{\partial y_i^2} + kv = h(y), \tag{1.11}$$

donde $k \in \mathbb{R}$, $h \in C^0\left(P^{-1}(\Omega)\right)$, y $\delta = 1$ si $p = N-1$ ó $\delta = -1$ si $q = N-1$.

Observación 1.9. *En los casos a) y b) del teorema precedente, las ecuaciones (1.9) y (1.10) son denominadas, respectivamente, la forma canónica de (1.8) cuando ésta es elíptica ó cuando es hiperbólica. En el caso c), multiplicando si es preciso (1.11) por -1, ésta queda en la forma*

$$\alpha \frac{\partial v}{\partial y_N} - \sum_{i=1}^{N-1} \frac{\partial^2 v}{\partial y_i^2} + \beta v = l(y), \tag{1.12}$$

donde $\alpha \in \mathbb{R}$ con $\alpha \neq 0$, $\beta \in \mathbb{R}$, $l \in C^0\left(P^{-1}(\Omega)\right)$.

Si en (1.12) hacemos el cambio de variables

$$y_N = \alpha t, \qquad w(y-1, ..., y_{N-1}, t) = v(y-1, ..., y_{N-1}, \alpha t)e^{\beta t},$$

se obtiene la denominada forma canónica de la ecuación (1.8) en el caso parabólico:

$$\frac{\partial w}{\partial t} - \sum_{i=1}^{N-1} \frac{\partial^2 w}{\partial y_i^2} = \tilde{l}(y-1, ..., y_{N-1}, t).$$

Observación 1.10. *Es posible dar una clasificación de ecuaciones en derivadas parciales más generales. En concreto, una clasificación de ecuaciones y sistemas de ecuaciones lineales de orden superior a dos y una generalización para ecuaciones o sistemas de ecuaciones no lineales. Para profundizar algo más en el tema, consúltese [11].*

CAPÍTULO 2

Principios del máximo. Resolución del problema de Dirichlet-Laplace: Método de Perron.

El objetivo fundamental del presente tema es demostrar la existencia de solución al Problema de Dirichlet para la ecuación de Laplace.

Concretemos un poco más. Sea Ω un abierto acotado no vacío de $\mathbb{R}^N$ ($N \geq 2$ entero). Suponemos fijadas $f \in C^0(\Omega)$, no idénticamente nula, y $g \in C^0(\partial\Omega)$, y nos planteamos el problema:

$$(PDP) \qquad \begin{cases} -\Delta u = f & \text{en } \Omega, \\ u = g & \text{sobre } \partial\Omega. \end{cases}$$

Del problema (PDP) podemos afirmar los siguientes hechos:

a) Si (PDP) posee solución clásica, ésta es única.

b) Incluso aunque Ω sea una bola y $g \equiv 0$, no siempre posee solución clásica (para un contraejemplo en este sentido se puede consultar el libro de I. Peral [10]). En concreto, independientemente de la regularidad de Ω y de g, ni la hipótesis $f \in C^0(\bar{\Omega})$ es suficiente para garantizar existencia de solución clásica de (PDP). Si se quiere obtener existencia, se hace preciso considerar funciones f en una clase más restringida que las continuas; dicha clase va a estar constituida por las funciones localmente α-holderianas en Ω (ver Sección 2.4).

c) Si Ω es una bola, f acotada y α-holderiana en Ω y $g \in C^0(\partial\Omega)$, se sabe que existe una única solución de (PDP).

d) Por último, también conocemos que si somos capaces de resolver el problema de Dirichlet para la ecuación de Laplace,

$$(PDL) \qquad \begin{cases} -\Delta u = 0 & \text{en } \Omega, \\ u = g & \text{sobre } \partial\Omega, \end{cases}$$

resolveremos (PDP) (ver Sección 2.4).

Luego el objetivo fundamental de este tema es resolver (PDL). Para ello usaremos el método de Perron, también denominado método de las funciones subarmónicas, que se basa en el principio del máximo, propiedades de funciones armónicas y la solución del problema en bolas.

A lo largo del tema, denotaremos por $|x|$ la norma euclídea de $x \in \mathbb{R}^N$.

2.1. Funciones armónicas y subarmónicas. Primeras propiedades

Definición 2.1. *Sea $u \in C^0(\Omega)$ una función dada. Para cada $\xi \in \Omega$ y cada $\rho > 0$ tales que $\bar{B}(\xi,\rho) \subset \Omega$, se define la media esférica de u sobre $\partial B(\xi,\rho)$, denotada $M_u(\xi,\rho)$, como*

$$M_u(\xi,\rho) = \frac{1}{\omega_N \rho^{N-1}} \int_{\partial B(\xi,\rho)} u(x)\, d\sigma(x),$$

donde ω_N es la medida superficial de la esfera unidad (respecto de la norma euclídea) de $\mathbb{R}^N$.

Definición 2.2. a) *Diremos que u es una función armónica en Ω si $u \in C^0(\Omega)$, y para todo $\xi \in \Omega$ y todo $\rho > 0$ tales que $\bar{B}(\xi,\rho) \subset \Omega$, se satisface*

$$u(\xi) = M_u(\xi,\rho). \tag{2.1}$$

b) *Diremos que u es una función subarmónica en Ω si $u \in C^0(\Omega)$, y para todo $\xi \in \Omega$ y todo $\rho > 0$ tales que $\bar{B}(\xi,\rho) \subset \Omega$, se satisface*

$$u(\xi) \leq M_u(\xi,\rho). \tag{2.2}$$

Nota 2.3. *La propiedad (2.1) se expresa también diciendo que u satisface la ley de Gauss de la media aritmética en Ω.*

Nota 2.4. *Obsérvese que toda función constante es armónica en Ω, y que el conjunto de todas las funciones armónicas en Ω constituyen un subespacio vectorial de $C^0(\Omega)$.*

Evidentemente, toda función armónica en Ω es subarmónica en Ω. La suma de funciones subarmónicas en Ω es también una función subarmónica en Ω, y el producto de una función subarmónica en Ω por un número real no negativo es asimismo una función subarmónica en Ω.

Dos propiedades inmediatas de las funciones armónicas en Ω son las siguientes:

Proposición 2.5. *Si u es una función armónica en Ω, entonces para cada $\xi \in \Omega$ y cada $\rho > 0$ tales que $\bar{B}(\xi,\rho) \subset \Omega$ se satisface*

$$u(\xi) = \frac{N}{\omega_N \rho^N} \int_{B(\xi,\rho)} u(x)\, dx$$

Demostración.- Si $\xi \in \Omega$ y $\rho > 0$ son tales que $\bar{B}(\xi,\rho) \subset \Omega$, entonces, como u es armónica en Ω, para todo $r \in (0,\rho]$ se tiene $u(\xi) = M_u(\xi,r)$, es decir:

$$\omega_N r^{N-1} u(\xi) = \int_{\partial B(\xi,r)} u(x)\, d\sigma(x), \quad \forall\, r \in (0,\rho],$$

y en consecuencia, integrando entre 0 y ρ,

$$\omega_N \frac{\rho^N}{N} u(\xi) = \int_0^\rho \left(\int_{\partial B(\xi,r)} u(x)\, d\sigma(x) \right) dr = \int_{B(\xi,\rho)} u(x)\, dx.$$

■

Proposición 2.6. *Sea $\{u_n\}_{n\geq 1}$ una sucesión de funciones armónicas en Ω, tal que $u_n \to u$ cuando $n \to \infty$ uniformemente en compactos de Ω (es decir, $\lim_{n\to\infty} (\sup_K |u_n - u|) = 0$ para todo compacto $K \subset \Omega$). En estas condiciones, la función u es también armónica en Ω.*

Demostración.- Evidentemente $u \in C^0(\Omega)$. Fijemos $\xi \in \Omega$ y $\rho > 0$ tal que $\bar{B}(\xi, \rho) \subset \Omega$. Para cada función u_n se satisface $u_n(\xi) = M_{u_n}(\xi, \rho)$, con lo que teniendo en cuenta que $\partial B(\xi, \rho)$ es compacto, es inmediato comprobar que u también satisface $u(\xi) = M_u(\xi, \rho)$. ■

Obsérvese que para las funciones subarmónicas se tienen resultados similares a las dos proposiciones precedentes.

A continuación demostramos el siguiente resultado:

Proposición 2.7. *Sea $u \in C^2(\Omega)$ una función dada.*

a) *La función u es subarmónica en Ω si y sólo si $-\Delta u(x) \leq 0$ en todo punto $x \in \Omega$.*

b) *Si $-\Delta u(x) = 0$ en todo punto $x \in \Omega$, entonces u es armónica en Ω.*

Demostración.- Fijemos $\xi \in \Omega$ y $\rho > 0$ tales que $\bar{B}(\xi, \rho) \subset \Omega$, y denotemos $v(y) = u(\xi + y)$ para cada $y \in \bar{B}(0, \rho)$.

Como $v \in C^2(\bar{B}(0, \rho))$, por la fórmula de representación de Green obtenemos

$$v(\eta) = \int_{B(0,\rho)} G(y, \eta)\Delta_y v(y)\, dy + \int_{\partial B(0,\rho)} H(y, \eta) v(y)\, d\sigma(y), \tag{2.3}$$

para todo $\eta \in B(0, \rho)$, siendo G la función de Green para la bola $B(0, \rho)$, y H el correspondiente núcleo de Poisson dado por

$$H(y, \eta) = \frac{\rho^2 - |\eta|^2}{\omega_N \rho |y - \eta|^N}$$

Si $-\Delta u(x) = 0$ en todo punto $x \in \Omega$, entonces de (2.3) escrito en $\eta = 0$ obtenemos

$$\begin{aligned} u(\xi) = v(0) &= \frac{\rho^2}{\omega_N \rho} \int_{\partial B(0,\rho)} \frac{u(\xi + y)}{|y|^N}\, d\sigma(y) \\ &= \frac{1}{\omega_N \rho^{N-1}} \int_{\partial B(0,\rho)} u(\xi + y)\, d\sigma(y) = M_u(\xi, \rho), \end{aligned}$$

y por tanto u es armónica en Ω.

Análogamente, si $-\Delta u(x) \leq 0$ en todo punto $x \in \Omega$, entonces de (2.3) escrito en $\eta = 0$ y del hecho que $G(y, 0) < 0$ en todo punto $y \in B(0, \rho)$ tal que $y \neq 0$, obtenemos que $u(\xi) \leq M_u(\xi, \rho)$, y por tanto u es subarmónica en Ω.

Finalmente, si $\xi \in \Omega$ es un punto tal que $-\Delta u(\xi) > 0$, tomando un $\rho > 0$ tal que $\bar{B}(\xi, \rho) \subset \Omega$ y $-\Delta u > 0$ en $\bar{B}(\xi, \rho)$, y nuevamente teniendo en cuenta que $G(y, 0) < 0$ en todo punto $y \in B(0, \rho)$ tal que $y \neq 0$, es inmediato obtener de (2.3) que $u(\xi) > M_u(\xi, \rho)$, y por tanto u no es subarmónica en Ω. ■

En la sección siguiente vamos a ver que el recíproco de la afirmación b) de la Proposición precedente es también cierto.

2.2. Principio del máximo fuerte. Consecuencias

Recordemos que el Principio del máximo débil afirma que si Ω es acotado y $u \in C^2(\Omega) \cap C^0(\bar{\Omega})$ es subarmónica en Ω, entonces

$$\max_{\bar{\Omega}} u = \max_{\partial\Omega} u.$$

Un resultado más refinado que este Principio, es el siguiente:

Teorema 2.8. (Principio del máximo fuerte) *Sea Ω un abierto conexo (no necesariamente acotado), y supongamos que $u \in C^0(\Omega)$ es una función subarmónica en Ω. En estas condiciones, si existe un punto $\hat{x} \in \Omega$ tal que $u(\hat{x}) = \sup_{\Omega} u$, forzosamente es entonces u constante en Ω.*

Demostración.- Denotemos $M = \sup_{\Omega} u$, y supongamos que existe $\hat{x} \in \Omega$ tal que $u(\hat{x}) = M$. En tal caso, $M \in \mathbb{R}$ y el conjunto $\Omega_1 = \{x \in \Omega;\ u(x) = M\}$ es no vacío.

Además, Ω_1 es un subconjunto abierto de $\mathbb{R}^N$. En efecto, si $\xi \in \Omega_1$, podemos fijar un $\hat{\rho} > 0$ tal que $\bar{B}(\xi, \hat{\rho}) \subset \Omega$, y obtenemos

$$M = u(\xi) \leq M_u(\xi, \rho) = \frac{1}{\omega_N \rho^{N-1}} \int_{\partial B(\xi,\rho)} u(x)\, d\sigma(x) \leq M, \quad \forall\, \rho \in (0, \hat{\rho}],$$

es decir,

$$0 = u(\xi) - M \leq \frac{1}{\omega_N \rho^{N-1}} \int_{\partial B(\xi,\rho)} u(x)\, d\sigma(x) - M \leq 0, \quad \forall\, \rho \in (0, \hat{\rho}],$$

y por consiguiente

$$0 = \frac{1}{\omega_N \rho^{N-1}} \int_{\partial B(\xi,\rho)} u(x)\, d\sigma(x) - M = \frac{1}{\omega_N \rho^{N-1}} \int_{\partial B(\xi,\rho)} (u(x) - M)\, d\sigma(x),$$

para todo $\rho \in (0, \hat{\rho}]$. Esto último implica que $u - M$ es idénticamente nula en $\partial B(\xi, \rho)$ cualquiera que sea $\rho \in (0, \hat{\rho}]$, es decir, $\bar{B}(\xi, \hat{\rho}) \subset \Omega_1$.

Como el conjunto $\Omega_2 = \{x \in \Omega;\ u(x) < M\}$ es abierto, y evidentemente $\Omega_1 \cap \Omega_2 = \emptyset$ y $\Omega_1 \cup \Omega_2 = \Omega$, del carácter conexo de Ω concluimos que si existe $\hat{x} \in \Omega$ tal que $u(\hat{x}) = M$, entonces $u(x) = M$ para todo $x \in \Omega$. ■

Como consecuencia inmediata del Teorema 2.8, obtenemos:

Corolario 2.9. *Sea Ω un abierto conexo (no necesariamente acotado), y supongamos que $u \in C^0(\Omega)$ es una función armónica en Ω, y u no es idénticamente constante en Ω. En tal caso,*

$$\inf_{\Omega} u < u(x) < \sup_{\Omega} u, \qquad \forall\, x \in \Omega.$$

También podemos concluir:

Corolario 2.10. *Sea Ω un abierto conexo acotado, y supongamos que $u \in C^0(\bar{\Omega})$ es una función subarmónica en Ω y u no es idénticamente constante en Ω. En tal caso,*

$$u(x) < \max_{\partial\Omega} u, \qquad \forall\, x \in \Omega.$$

Demostración.- Por el Teorema 2.8, $u(x) < \sup_{\Omega} u$ para cada $x \in \Omega$. Pero, como $u \in C^0(\bar{\Omega})$, se tiene que $\sup_{\Omega} u = \max_{\bar{\Omega}} u$, y evidentemente el máximo de u en $\bar{\Omega}$ se ha de alcanzar en un punto de $\partial\Omega$. ■

Tenemos también el siguiente importante resultado:

Corolario 2.11. *Sea Ω un abierto conexo acotado, y supongamos que $u \in C^0(\bar{\Omega})$ es una función armónica en Ω. Si $v \in C^0(\bar{\Omega})$ es una función subarmónica en Ω tal que $v \leq u$ sobre $\partial\Omega$, entonces también es $v(x) \leq u(x)$ en todo punto $x \in \Omega$.*

Demostración.- Es inmediato que $v - u \in C^0(\bar{\Omega})$ y que $v - u$ es subarmónica en Ω. Si $v - u$ es idénticamente constante en Ω, como $v - u \leq 0$ sobre $\partial\Omega$, forzosamente $v - u \leq 0$ en Ω. Si $v - u$ no es idénticamente constante en Ω, entonces, por el Corolario 2.10, $v(x) - u(x) < 0$ en todo punto $x \in \Omega$. ■

Estamos ahora en condiciones de demostrar:

Proposición 2.12. *Si $u \in C^0(\Omega)$ es armónica en Ω (siendo Ω abierto no vacío cualquiera), entonces $u \in C^\omega(\Omega)$ y $-\Delta u(x) = 0$ en todo punto $x \in \Omega$.*

Demostración.- Fijemos $\xi \in \Omega$ y $\rho > 0$ tales que $\bar{B}(\xi,\rho) \subset \Omega$. Sea $w \in C^2(B(\xi,\rho)) \cap C^0(\bar{B}(\xi,\rho))$ la solución clásica de

$$\begin{cases} -\Delta w = 0 & \text{en } B(\xi,\rho), \\ w = u & \text{sobre } \partial B(\xi,\rho), \end{cases}$$

de la que sabemos que $w \in C^\omega(B(\xi,\rho))$.

Como u y $-u$ son subarmónicas en $B(\xi,\rho)$, continuas en $\bar{B}(\xi,\rho)$, y satisfacen $u = w$ y $-u = -w$ en $\partial B(\xi,\rho)$, por el Corolario 2.11 podemos afirmar que $u \le w$ y $-u \le -w$ en $B(\xi,\rho)$, y por tanto u coincide con w en dicha bola. ∎

Nota 2.13. *Como consecuencia inmediata de la Proposición 2.12, tenemos garantizado que si una función es armónica en Ω, todas sus derivadas parciales de cualquier orden también lo son.*

Proposición 2.14. (estimación interior del gradiente de una función armónica) *Sean Ω un abierto de $\mathbb{R}^N$ y $\Omega' \subset \Omega$ abierto acotado no vacío tal que $\bar{\Omega}' \subset \Omega$. Bajo estas condiciones, existe una constante $C > 0$, que únicamente depende de N, Ω y Ω', tal que para toda función u armónica en Ω se satisface*

$$\sup_{\Omega'} |\nabla u| \le C \sup_{\Omega} |u|.$$

Demostración.- Como $\bar{\Omega}'$ es un compacto contenido en el abierto Ω, la distancia $dist(\bar{\Omega}',\ \mathbb{R}^N \setminus \Omega) \in (0,+\infty]$ (se recuerda que, por definición, $dist(\bar{\Omega}',\ \emptyset) = +\infty$).

En consecuencia, existe un $\rho > 0$ tal que $\bar{B}(\xi,\rho) \subset \Omega$ para todo $\xi \in \Omega'$ (dicho ρ sólo depende de Ω y de Ω').

Fijemos un tal ρ. Como u es armónica en Ω, gracias a la Nota 2.13 también lo es la función $\partial_i u$ para cada $i = 1, ..., N$, con lo que, por la Proposición 2.5,

$$\partial_i u(\xi) = \frac{N}{\omega_N \rho^N} \int_{B(\xi,\rho)} \partial_i u(x)\, dx = \frac{N}{\omega_N \rho^N} \int_{\partial B(\xi,\rho)} u(x) n_i(x)\, d\sigma(x), \quad \forall\, \xi \in \Omega',$$

y en consecuencia

$$|\partial_i u(\xi)| \le \frac{N}{\rho} \left(\frac{1}{\omega_N \rho^{N-1}} \int_{\partial B(\xi,\rho)} |u(x)|\, d\sigma(x) \right) \le \frac{N}{\rho} \sup_{\Omega} |u|, \quad \forall\, \xi \in \Omega',$$

para todo $i = 1, ..., N$. ∎

2.3. Resolución del Problema de Dirichlet para la ecuación de Laplace: método de Perron

Analizamos en esta sección la existencia de solución clásica al problema de Dirichlet para la ecuación de Laplace,

$$(PDL) \qquad \begin{cases} -\Delta u = 0 & \text{en } \Omega, \\ u = g & \text{sobre } \partial\Omega, \end{cases}$$

utilizando para ello el denominado método de las funciones subarmónicas o método de Perron.

Partimos de la observación de que si $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ es un abierto conexo y acotado no vacío, dadas $u \in C^2(\Omega) \cap C^0(\bar{\Omega})$ armónica en Ω, y $v \in C^0(\bar{\Omega})$ subarmónica en Ω y satisfaciendo $v \le u$ sobre $\partial\Omega$, entonces, de acuerdo con el Corolario 2.11 al principio fuerte del máximo, $v \le u$ en todo $\bar{\Omega}$. En particular, en estas circunstancias, para cada punto $x \in \Omega$ el valor de u en x ha de ser el máximo de los valores que toman en dicho punto las funciones subarmónicas en Ω que sean de clase $C^0(\bar{\Omega})$ y que tomen sobre $\partial\Omega$ valores menores o iguales que u. Vamos a ver cómo esta observación permite establecer la existencia de solución clásica al problema (PDL) para una clase bastante amplia de dominios acotados.

Definición 2.15. *Sean $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ un abierto no vacío, $u \in C^0(\Omega)$ subarmónica en Ω y B una bola abierta tal que $\bar{B} \subset \Omega$. Se denomina levantamiento armónico de u en B a la función U definida por*

$$U(x) = \begin{cases} u(x) & si\ x \in \Omega \setminus \bar{B} \\ \bar{u}(x) & si\ x \in \bar{B}, \end{cases}$$

donde por $\bar{u} \in C^2(B) \cap C^0(\bar{B})$ denotamos a la solución del problema (PDL) en B con dato de contorno $\bar{u} = u$ sobre ∂B.

En el caso particular en que $u \in C^0(\bar{\Omega})$, el levantamiento armónico de u en B se considera extendido a $\bar{\Omega}$ por

$$U(x) = \begin{cases} u(x) & si\ x \in \bar{\Omega} \setminus \bar{B}, \\ \bar{u}(x) & si\ x \in \bar{B}. \end{cases}$$

Para el levantamiento armónico tenemos el resultado siguiente:

Proposición 2.16. *Sean $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ un abierto no vacío, $u \in C^0(\Omega)$ subarmónica en Ω y B una bola abierta tal que $\bar{B} \subset \Omega$. La función U levantamiento armónico de u en B satisface:*

$$U \in C^0(\Omega), \quad U \geq u \text{ en } \Omega, \quad U \text{ es subarmónica en } \Omega. \tag{2.4}$$

Además, si $u \in C^0(\bar{\Omega})$, entonces $U \in C^0(\bar{\Omega})$, siendo $U = u$ sobre $\partial\Omega$.

Demostración.- Es inmediato comprobar que $U \in C^0(\Omega)$ (ó que $U \in C^0(\bar{\Omega})$ en el caso en que $u \in C^0(\bar{\Omega})$). Por otro lado, se tiene $U \geq u$ en $\Omega \setminus \bar{B}$, mientras que la desigualdad $U \geq u$ en B es consecuencia del Corolario 2.11 aplicado al abierto B y a las funciones U y u.

Veamos que U es subarmónica en Ω y sea $\xi \in \Omega$. Si $\xi \in \Omega \setminus \bar{B}$ es fácil deducir (2.2) pues u es subarmónica en Ω. Para $\xi \in B$ llegamos a la desigualdad (2.2) (en este caso igualdad) pues $\bar{u}$ es armónica en B. Por último, si $\xi \in \partial B$, sea $\rho_0 > 0$ tal que se tiene (2.2) para u. Así, si $\rho \in (0, \rho_0]$

$$U(\xi) = u(\xi) \leq \frac{1}{\omega_N \rho^{N-1}} \int_{\partial B(\xi,\rho)} u(x)\, d\sigma(x) \leq \frac{1}{\omega_N \rho^{N-1}} \int_{\partial B(\xi,\rho)} U(x)\, d\sigma(x),$$

pues $U \geq u$ en Ω. De este modo obtenemos que U es subarmónica en Ω. ■

Ahora, en las dos proposiciones que siguen, establecemos los resultados que nos van a permitir obtener existencia de solución clásica al problema (PDL).

De manera general, dada $\varphi : \partial\Omega \to \mathbb{R}$, denotemos a partir de ahora

$$S_\varphi = \{v \in C^0(\bar{\Omega}) : \ v \text{ es subarmónica en } \ \Omega, \text{ y } v \leq \varphi \text{ sobre } \partial\Omega\}, \tag{2.5}$$

$$u_\varphi(x) = \sup_{v \in S_\varphi} v(x), \qquad \forall\, x \in \Omega. \tag{2.6}$$

Sobre la función u_φ con valores en $[-\infty, +\infty]$ así definida, se tiene el siguiente resultado:

Proposición 2.17. *Si $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ es un abierto acotado conexo no vacío, y $\varphi : \partial\Omega \to \mathbb{R}$ es una función acotada, entonces la función u_φ definida por (2.5) y (2.6) es armónica en Ω.*

Demostración.- En primer lugar, como $\partial\Omega \neq \emptyset$ y φ es acotada, $\inf\limits_{\partial\Omega} \varphi$ y $\sup\limits_{\partial\Omega} \varphi$ pertenecen a $\mathbb{R}$. La función constante $v \equiv \inf\limits_{\partial\Omega} \varphi$ pertenece a S_φ, con lo que $S_\varphi \neq \emptyset$. Además, si v es una función cualquiera de S_φ, se tiene que $v \leq \sup\limits_{\partial\Omega} \varphi$ sobre $\partial\Omega$, con lo que también $v \leq \sup\limits_{\partial\Omega} \varphi$ en Ω, y en consecuencia $u_\varphi \leq \sup\limits_{\partial\Omega} \varphi$ en Ω.

En resumen, bajo las condiciones de la proposición, podemos afirmar que $u_\varphi(x) \in \mathbb{R}$ y

$$\inf_{\partial\Omega} \varphi \leq u_\varphi(x) \leq \sup_{\partial\Omega} \varphi, \quad \forall\, x \in \Omega.$$

Para terminar, basta demostrar que dado $\xi_0 \in \Omega$ existen un entorno abierto de ξ_0 contenido en Ω, y una función armónica en dicho entorno, tales que u_φ coincide con la citada función armónica en el mencionado entorno.

Sea pues $\xi_0 \in \Omega$ fijado, y tomemos un $\rho_0 > 0$ tal que $\bar{B}(\xi_0, \rho_0) \subset \Omega$. Denotemos $B_0 = B(\xi_0, \rho_0)$.

Por definición de u_φ, existe una sucesión $\{v_n\} \subset S_\varphi$ tal que $\lim_{n\to\infty} v_n(\xi_0) = u_\varphi(\xi_0)$. Como es inmediato comprobar que si $v_n \in S_\varphi$, entonces $\max(v_n, \inf_{\partial\Omega} \varphi)$ también pertenece a S_φ, podemos suponer que la sucesión $\{v_n\}$ ha sido tomada satisfaciendo además

$$\inf_{\partial\Omega} \varphi \leq v_n(x) \leq \sup_{\partial\Omega} \varphi, \quad \forall\, x \in \bar{\Omega},$$

para cualquier n.

Denotemos por V_n al levantamiento armónico de v_n en B_0. Es inmediato comprobar que $V_n \in S_\varphi$, con lo que, como $V_n \geq v_n$ en $\bar{\Omega}$,

$$\lim_{n\to\infty} V_n(\xi_0) = u_\varphi(\xi_0).$$

y, por el Corolario 2.10 al principio del máximo fuerte,

$$\inf_{\partial\Omega} \varphi \leq V_n(x) \leq \sup_{\partial\Omega} \varphi, \quad \forall\, x \in \bar{\Omega},$$

para cualquier n.

Por otra parte, si tomamos $B = B(\xi_0, \frac{\rho_0}{2})$, por la Proposición 2.14 podemos afirmar que existe una constante $C > 0$ tal que

$$\sup_{\bar{B}} |\nabla V_n| \leq C \sup_{\bar{B}_0} |V_n| \leq \tilde{C} \quad \forall\, n,$$

y todas las V_n son armónicas en B.

Por el teorema de Ascoli-Arzelá y la Proposición 2.6, extrayendo eventualmente una subsucesión de las V_n, subsucesión que seguiremos denotando igual, podemos afirmar la existencia de una función $v \in C^0(\bar{B})$, armónica en B y tal que $V_n \to v$ en $C^0(\bar{B})$.

Sólo queda comprobar que $v = u_\varphi$ en B. Evidentemente,

$$v(\xi_0) = \lim_{n\to\infty} V_n(\xi_0) = u_\varphi(\xi_0),$$

y $v \leq u_\varphi$ en $\bar{B}$. Si $\xi^* \in B$ es un punto donde $v(\xi^*) < u_\varphi(\xi^*)$, entonces existe $w \in S_\varphi$ tal que $v(\xi^*) < w(\xi^*) \leq u_\varphi(\xi^*)$. Denotando $w_n = \max(w, V_n)$, y W_n al levantamiento armónico de w_n en B_0, podemos concluir, razonando como se hizo con anterioridad para las V_n, que, con extracción eventual de una subsucesión, $W_n \to w^*$ en $C^0(\bar{B})$. Así, llegamos a la existencia de un par de funciones v y w^* en $C^0(\bar{B})$, armónicas en B, tales que $w^* \geq v$ en $\bar{B}$, $w^*(\xi^*) > v(\xi^*)$ y $w^*(\xi_0) = v(\xi_0)$, en contradicción con el principio del máximo. ■

Como consecuencia evidente de la Proposición 2.17, se tiene que si $g \in C^0(\partial\Omega)$, con $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ abierto acotado y conexo no vacío, entonces la función $u(x)$ definida en $\bar{\Omega}$ por

$$u(x) = \begin{cases} u_g(x) & \text{si } x \in \Omega, \\ g(x) & \text{si } x \in \partial\Omega, \end{cases} \tag{2.7}$$

es armónica en Ω, y en consecuencia, si es continua en $\bar{\Omega}$, entonces es solución clásica del problema (PDL) con dato de contorno g.

Para el estudio de la continuidad de u dada por (2.7), introducimos los siguientes conceptos:

Definición 2.18. *Diremos que Ω satisface la condición de bola exterior en un punto $\xi_0 \in \partial\Omega$, si existen $\xi_1 \in \mathbb{R}^N$ y $\rho_1 > 0$ tales que*

$$\bar{B}(\xi_1, \rho_1) \cap \bar{\Omega} = \{\xi_0\}.$$

Podemos ahora demostrar el resultado siguiente:

Proposición 2.19. *Sean $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ un abierto acotado conexo no vacío, y $\varphi : \partial\Omega \to \mathbb{R}$ una función acotada. Si $\xi_0 \in \partial\Omega$ satisface la condición de bola exterior y φ es continua en ξ_0, entonces la función u_φ definida por (2.6) satisface*

$$\lim_{x\to\xi_0} u_\varphi(x) = \varphi(\xi_0).$$

Demostración.- Sea $\xi_0 \in \partial\Omega$ y $B(\xi_1, \rho_1)$ la bola exterior tal que $\bar{B}(\xi_1, \rho_1) \cap \bar{\Omega} = \{\xi_0\}$. Tomemos en primer lugar la función

$$w(x) = \begin{cases} |x - \xi_1|^{2-N} - \rho_1^{2-N} & \text{si } N \geq 3, \\ \log \dfrac{\rho_1}{|x - \xi_1|} & \text{si } N = 2. \end{cases} \tag{2.8}$$

Es inmediato demostrar que $w \in C^0(\bar{\Omega})$ y satisface que es subarmónica en Ω, tal que $w < 0$ en $\bar{\Omega} \setminus \{\xi_0\}$ y $w(\xi_0) = 0$.

Denotemos $M = \sup_{\partial\Omega} |\varphi|$. Fijemos $\varepsilon > 0$. Por la continuidad de φ en ξ_0 y las propiedades de w, podemos afirmar que existen $\delta > 0$ y $k > 0$ tales que

$$x \in \partial\Omega \quad \text{y} \quad |x - \xi_0| \leq \delta \Longrightarrow |\varphi(x) - \varphi(\xi_0)| \leq \varepsilon/2, \tag{2.9}$$

$$x \in \bar{\Omega} \quad \text{y} \quad |x - \xi_0| \geq \delta \Longrightarrow kw(x) \leq -2M. \tag{2.10}$$

En estas condiciones, la función $kw + \varphi(\xi_0) - \varepsilon/2$ pertenece a $C^0(\bar{\Omega})$, es subarmónica en Ω, y es fácil comprobar de (2.9) y (2.10), que satisface $kw(x) + \varphi(\xi_0) - \varepsilon/2 \leq \varphi(x)$ para todo $x \in \partial\Omega$. En consecuencia, $kw + \varphi(\xi_0) - \varepsilon/2$ pertenece a S_φ, y por tanto

$$kw(x) + \varphi(\xi_0) - \varepsilon/2 \leq u_\varphi(x) \quad \forall\, x \in \Omega. \tag{2.11}$$

Por otra parte, la función $kw - \varphi(\xi_0) - \varepsilon/2$ también pertenece a $C^0(\bar{\Omega})$, es subarmónica en Ω y, de nuevo por (2.9) y (2.10), satisface $kw(x) - \varphi(\xi_0) - \varepsilon/2 \leq -\varphi(x)$ para todo $x \in \partial\Omega$. Así, si $v \in S_\varphi$, $v + kw - \varphi(\xi_0) - \varepsilon/2$ pertenece a $C^0(\bar{\Omega})$, es subarmónica en Ω y satisface $v + kw - \varphi(\xi_0) - \varepsilon/2 \leq 0$ sobre $\partial\Omega$, con lo que, por el principio del máximo fuerte, $v(x) \leq -kw(x) + \varphi(\xi_0) + \varepsilon/2$ en todo punto $x \in \Omega$. Como la última desigualdad es válida para cualquiera $v \in S_\varphi$, concluimos que

$$u_\varphi(x) \leq -kw(x) + \varphi(\xi_0) + \varepsilon/2 \quad \forall\, x \in \Omega. \tag{2.12}$$

Teniendo en cuenta (2.11) y (2.12), podemos afirmar que, fijado $\varepsilon > 0$, existe $k > 0$ tal que

$$|u_\varphi(x) - \varphi(\xi_0)| \leq k|w(x)| + \varepsilon/2 \quad \forall\, x \in \Omega. \tag{2.13}$$

Finalmente, como $w(\xi_0) = 0$ y w es continua en ξ_0, existe un $\delta^* > 0$ tal que

$$x \in \Omega \quad \text{y} \quad |x - \xi_0| \leq \delta^* \Longrightarrow |w(x)| \leq \frac{\varepsilon}{2k}$$

con lo que, por (2.13), se obtiene que si $x \in \Omega$ y $|x - \xi_0| \leq \delta^*$, entonces $|u_\varphi(x) - \varphi(\xi_0| \leq \varepsilon$. ∎

Como consecuencia inmediata de las Proposiciones 2.17 y 2.19, obtenemos el resultado siguiente:

Teorema 2.20. *Si $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ es un abierto acotado conexo no vacío tal que todos los puntos de su frontera satisfacen la condición esfera exterior, entonces para cada $g \in C^0(\partial\Omega)$ existe una y sólo una solución clásica del problema (PDL).*

Nota 2.21. *Podemos afirmar que un abierto acotado y convexo de $\mathbb{R}^N$ satisface que todos los puntos de su frontera satisfacen la condición esfera exterior.*

2.4. El problema de Dirichlet para la ecuación de Poisson: potencial newtoniano

Como comentamos en la Introducción, para resolver (PDP) se hace preciso tomar f en una clase más restringida que las continuas; las funciones localmente α-holderianas en Ω.

Definición 2.22. *Sean $f : \Omega \to \mathbb{R}$, y $\alpha \in (0, 1]$. Diremos que f es α-holderiana en $D \subset \Omega$ si*

$$\sup_{x,y\in D,\, x\neq y} \frac{|f(x) - f(y)|}{|x - y|^\alpha} < +\infty.$$

Diremos que f es localmente α-holderiana en Ω si f es α-holderiana en todo compacto D contenido en Ω.

Al conjunto de todas las funciones localmente α-holderianas en Ω lo denotaremos $C^{0,\alpha}_{loc}(\Omega)$.

Nota 2.23. *Es inmediato comprobar que $C^{0,\alpha}_{loc}(\Omega)$ es un subespacio vectorial de $C^0(\Omega)$, y que $C^{0,1}_{loc}(\Omega)$ coincide con el espacio de las funciones localmente lipschitzianas en Ω.*

Para la resolución del problema (PDP) se introduce el concepto de potencial newtoniano asociado a la función f.

Definición 2.24. *Dada $f \in L^\infty(\Omega)$, se define el potencial newtoniano asociado a la función f como la función $w_f : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ dada por*

$$w_f(\xi) = \int_\Omega K(x, \xi) f(x)\, dx, \qquad \forall\, \xi \in \mathbb{R}^N, \tag{2.14}$$

donde por $K(\cdot, \cdot)$ denotamos a la solución fundamental de $-\Delta$ en $\mathbb{R}^N$, definida en el conjunto

$$\mathcal{A} = \{(x, \xi) \in \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N;\ x \neq \xi\},$$

por

$$K(x, \xi) = \begin{cases} -\dfrac{1}{(N-2)\omega_N |x - \xi|^{N-2}} & \text{si } N \geq 3, \\ \dfrac{1}{2\pi} \log |x - \xi| & \text{si } N = 2. \end{cases}$$

Para el potencial newtoniano se satisfacen los dos resultados siguientes, cuyas demostraciones omitimos (ver Gilbarg-Trudinger pp. 52-56 [5], o el libro de I. Peral [10]):

Proposición 2.25. *Si $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ es un abierto acotado no vacío y $f \in L^\infty(\Omega)$, la función w_f dada por (2.14) está bien definida y satisface $w_f \in C^1(\mathbb{R}^N)$, con*

$$\nabla_\xi w_f(\xi) = \int_\Omega \nabla_\xi K(x, \xi) f(x)\, dx, \qquad \forall\, \xi \in \mathbb{R}^N.$$

Proposición 2.26. *Si $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ es un abierto acotado no vacío y $f \in L^\infty(\Omega) \cap C^{0,\alpha}_{loc}(\Omega)$ para algún $\alpha \in (0, 1]$, la función w_f dada por (2.14) pertenece a $C^2(\Omega)$ y satisface $\Delta w_f \equiv f$ en Ω.*

Como consecuencia de la proposición precedente y del Teorema 2.20, es inmediato el resultado siguiente:

Teorema 2.27. *Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ un abierto acotado y conexo no vacío tal que todos los puntos de su frontera son regulares. Si $f \in L^\infty(\Omega) \cap C^{0,\alpha}_{loc}(\Omega)$ para algún $\alpha \in (0,1]$, y $g \in C^0(\partial\Omega)$, entonces existe una y sólo una solución clásica del problema (PDP).*

Demostración.- Basta tomar como solución $u = v - w_f$, con v la solución clásica del problema de Dirichlet

$$\begin{cases} -\Delta v = 0 & \text{en } \Omega, \\ v = g + w_f & \text{sobre } \partial\Omega. \end{cases}$$

■

Obsérvese que bajo las condiciones del Teorema 2.27, la solución clásica u, además de pertenecer a $C^2(\Omega) \cap C^0(\bar{\Omega})$, satisface que todas todas sus derivadas segundas pertenecen a $C^{0,\alpha}_{loc}(\Omega)$, es decir, $u \in C^0(\bar{\Omega}) \cap C^{2,\alpha}_{loc}(\Omega)$.

Nota 2.28. *Este resultado también es cierto cuando el operador $-\Delta$ es sustituido por un operador uniformemente elíptico con coeficientes en $C^{0,\alpha}_{loc}(\Omega)$.*

2.5. Resultados complementarios

Como hemos visto en una sección anterior, una condición suficiente para que exista solución clásica es que los puntos de la frontera satisfagan la condición frontera exterior.

Veamos que en realidad hay una condición necesaria y suficiente, para ello introduzcamos el siguiente concepto:

Definición 2.29. *Diremos que $\xi_0 \in \partial\Omega$ es un punto regular de $\partial\Omega$ si existe una función $w \in C^0(\bar{\Omega})$, subarmónica en Ω, tal que $w < 0$ en $\bar{\Omega} \setminus \{\xi_0\}$ y $w(\xi_0) = 0$. Una tal función w satisfaciendo las condiciones precedentes, es denominada una función barrera en ξ_0 relativa a Ω.*

Proposición 2.30. *Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ un abierto acotado conexo no vacío. Entonces para toda función $g \in C^0(\partial\Omega)$ existe solución clásica del correspondiente problema (PDL), si y sólo si, todos los puntos de la frontera de Ω son regulares,*

Demostración.- Supongamos que existe solución y sea $\xi_0 \in \partial\Omega$. Por hipótesis, existe solución w de

$$\begin{cases} w \in C^2(\Omega) \cap C^0(\bar{\Omega}), & \\ -\Delta w = 0 & \text{en } \Omega, \\ w(x) = -|x - \xi_0| & \text{sobre } \partial\Omega, \end{cases}$$

y es inmediato comprobar que, por el principio del máximo fuerte, w es una función barrera en ξ_0 relativa a Ω.

Supongamos que todos los puntos de la frontera son regulares, y veamos que existe solución de (PDL). Basta para ello probar que la función u definida en (2.7) es continua, o lo que es lo mismo, probar que la Proposición 2.19 es cierta suponiendo que los puntos de la frontera son regulares. Si ξ_0 es regular existe una función barrera w, $w \in C^0(\bar{\Omega})$, subarmónica en Ω, tal que $w < 0$ en $\bar{\Omega} \setminus \{\xi_0\}$ y $w(\xi_0) = 0$. Basta ahora observar que con una función w de esta forma podemos seguir exactamente la demostración de la Proposición 2.19, sustituyendo la función w definida en (2.8), por la función barrera. ■

CAPÍTULO 3

Introducción a la Teoría de Distribuciones

En todo el tema denotamos por Ω un abierto no vacío de $\mathbb{R}^N$ ($N \geq 1$ entero), por $|x|$ la norma euclídea de $x \in \mathbb{R}^N$, y por $B(x_0, r)$ la bola abierta (respecto de la norma euclídea) de centro $x_0 \in \mathbb{R}^N$ y radio $r > 0$.

3.1. Espacios de Lebesgue

Por comodidad, se recuerda la definición de los espacios $L^p(\Omega)$. Denotemos por $\mathcal{M}(\Omega)$ al conjunto de las funciones definidas sobre Ω con valores reales medibles en el sentido de Lebesgue. Es bien conocido que $\mathcal{M}(\Omega)$ es un espacio vectorial con la suma y producto por escalar usuales.

Por $\mathcal{L}^1(\Omega)$ denotamos el subespacio vectorial de $\mathcal{M}(\Omega)$ constituido por las funciones integrables en Ω respecto de la medida de Lebesgue. Si $u \in \mathcal{L}^1(\Omega)$, denotamos la integral de u en Ω respecto de la medida de Lebesgue por $\displaystyle\int_\Omega u(x)\,dx$.

Resulta conveniente identificar las funciones medibles que son iguales casi por doquier (c.p.d) en Ω, esto es, que son iguales salvo en un subconjunto de Ω de medida Lebesgue cero. Esto se traduce en considerar en vez de $\mathcal{M}(\Omega)$ el espacio cociente $\mathcal{M}(\Omega)/\mathcal{N}$, donde $\mathcal{N}$ denota el subespacio vectorial de $\mathcal{M}(\Omega)$ constituido por las funciones que valen cero c.p.d. en Ω. A este respecto se recuerda que $C^0(\Omega) \subset \mathcal{M}(\Omega)$, y que si u y v son dos funciones de $C^0(\Omega)$ tales que $u = v$ c.p.d. en Ω entonces $u(x) = v(x)$ para todo $x \in \Omega$. En consecuencia, no existe ambigüedad en identificar una función de $C^0(\Omega)$ con la clase de $\mathcal{M}(\Omega)/\mathcal{N}$ a la que pertenece, lo cual permite escribir $C^0(\Omega) \subset \mathcal{M}(\Omega)/\mathcal{N}$.

Si $p \in [1, +\infty)$, se define $L^p(\Omega)$ por

$$L^p(\Omega) = \{u \in \mathcal{M}(\Omega)/\mathcal{N} : \int_\Omega |u(x)|^p\,dx < +\infty\}.$$

$L^p(\Omega)$ es un subespacio vectorial de $\mathcal{M}(\Omega)/\mathcal{N}$. Sobre $L^p(\Omega)$ se define la norma

$$\|u\|_{L^p(\Omega)} = \left(\int_\Omega |u(x)|^p\,dx\right)^{1/p}.$$

Con dicha norma $L^p(\Omega)$ es un espacio de Banach separable, y en particular para $p = 2$ es un espacio de Hilbert.

Se define $L^\infty(\Omega)$ como el subespacio vectorial de $\mathcal{M}(\Omega)/\mathcal{N}$ constituido por las clases de funciones que están acotadas c.p.d. en Ω. Sobre $L^\infty(\Omega)$ se considera la norma

$$\|u\|_{L^\infty(\Omega)} = \text{ínf}\{M > 0 : \ |u(x)| \leq M \quad \text{c.p.d. en } \Omega\}.$$

Con dicha norma $L^\infty(\Omega)$ es un espacio de Banach no separable.

Es inmediato comprobar que $C^0(\Omega) \not\subset L^p(\Omega)$, $\forall\, p \in [1, +\infty]$. Se recuerdan las siguientes propiedades:

- **Desigualdad de Holder:** Si $u \in L^p(\Omega)$ y $v \in L^{p'}(\Omega)$, con $p \in [1, +\infty]$ y p' el exponente conjugado de p, esto es, tal que $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{p'} = 1$, entonces el producto $uv \in L^1(\Omega)$, con

$$\int_\Omega |u(x)v(x)|\, dx \leq \|u\|_{L^p(\Omega)} \|v\|_{L^{p'}(\Omega)}.$$

- **Desigualdad de interpolación:**

  a) Si $f_i \in L^{r_i}(\Omega)$, $i = 1, 2$, con $1/r = 1/r_1 + 1/r_2 \leq 1$, entonces $f_1 f_2 \in L^r(\Omega)$, y se satisface

$$\|f_1 f_2\|_{L^r(\Omega)} \leq \|f_1\|_{L^{r_1}(\Omega)} \|f_2\|_{L^{r_2}(\Omega)}.$$

  b) Si $1 \leq p \leq \widehat{p} \leq \infty$ y $f \in L^p(\Omega) \cap L^{\widehat{p}}(\Omega)$, entonces $f \in L^q(\Omega)$ para todo $q \in [p, \widehat{p}]$, y de hecho, si $1/q = \alpha/p + (1-\alpha)/\widehat{p}$, con $\alpha \in [0, 1]$, entonces

$$\|f\|_{L^q(\Omega)} \leq \|f\|^{\alpha}_{L^p(\Omega)} \|f\|^{1-\alpha}_{L^{\widehat{p}}(\Omega)}.$$

- **Convergencia dominada:** Sea $\{u_n\}$ una sucesión de funciones de $L^1(\Omega)$ tal que:

  a) existe $\lim\limits_{n\to\infty} u_n(x) = u(x)$ c.p.d. en Ω,

  b) existe $v \in L^1(\Omega)$ tal que para todo n $|u_n(x)| \leq v(x)$ c.p.d. en Ω.

  Entonces $u \in L^1(\Omega)$ y $\lim\limits_{n\to\infty} \|u_n - u\|_{L^1(\Omega)} = 0$.

- Sea $p \in [1, \infty)$ y $\{u_n\}_{n\geq 1} \subset L^p(\Omega)$ tal que $u_n \to u$ en $L^p(\Omega)$. Entonces, existe una subsucesión $\{u_{n_k}\}_{k\geq 1}$ de $\{u_n\}_{n\geq 1}$ y una función $h \in L^p(\Omega)$ tal que

$$\begin{aligned} &|u_{n_k}(x)| \leq h(x) \quad \text{p.c.t. } x \in \Omega, \quad \forall k \geq 1, \\ &u_{n_k}(x) \to u(x) \quad \text{p.c.t. } x \in \Omega. \end{aligned}$$

Motivado en parte por el hecho de que por ejemplo $C^0(\Omega) \not\subset L^1(\Omega)$, se introduce el espacio de las funciones localmente integrables en Ω:

Definición 3.1. *Diremos que u es localmente integrable en Ω si $u \in \mathcal{M}(\Omega)/\mathcal{N}$ y para todo K compacto contenido en Ω la función $u1_K$ pertenece a $L^1(\Omega)$. Al conjunto de todas las (clases de) funciones localmente integrables en Ω lo denotaremos por $L^1_{loc}(\Omega)$.*

Aunque el espacio $L^1_{loc}(\Omega)$ no es normado, podemos definir una noción de convergencia de sucesiones definida por:

Definición 3.2. *Diremos que $u_n \to u$ en $L^1_{loc}(\Omega)$ si y sólo si para todo compacto $K \subset \Omega$,*

$$\lim_{n\to\infty} \int_K |u_n(x) - u(x)|\, dx = 0.$$

Nota 3.3. *Es inmediato comprobar que $L^1_{loc}(\Omega)$ es un subespacio vectorial de $\mathcal{M}(\Omega)/\mathcal{N}$, así como que se tienen las inclusiones:*

$$C^0(\Omega) \subset L^1_{loc}(\Omega) \quad \text{y} \quad L^p(\Omega) \subset L^1_{loc}(\Omega), \quad \forall\, p \in [1, +\infty].$$

Además, si $u_n \to u$ en $L^p(\Omega)$ con $u \in L^p(\Omega)$, entonces $u_n \to u$ en $L^1_{loc}(\Omega)$.

3.2. Funciones tests: el espacio vectorial $\mathcal{D}(\Omega)$

Se recuerdan en esta sección algunas definiciones y propiedades estudiadas en la asignatura de cuarto curso EDPyAF.

Definición 3.4. *Dada $\varphi \in C^0(\Omega)$, se define el soporte de φ como el conjunto*

$$\operatorname{sop}\varphi = \overline{\{x \in \Omega : \ \varphi(x) \neq 0\}},$$

donde $\overline{\{...\}}$ denota la clausura en $\mathbb{R}^N$.

Obsérvese que en consecuencia $\operatorname{sop}\varphi$ es un conjunto cerrado contenido en $\bar{\Omega}$. En el caso en que $\operatorname{sop}\varphi$ es compacto y está contenido en Ω, se dice que φ es de ***soporte compacto en*** Ω. Se definen los subconjuntos de $C^0(\Omega)$ siguientes:

$$C_c^0(\Omega) = \{\varphi \in C^0(\Omega) : \ \varphi \text{ es de soporte compacto en } \Omega\},$$

$$C_c^k(\Omega) = C^k(\Omega) \cap C_c^0(\Omega),$$

$$\mathcal{D}(\Omega) = C^\infty(\Omega) \cap C_c^0(\Omega).$$

Es inmediato comprobar que todos los conjuntos definidos precedentemente son subespacios vectoriales de $C^0(\Omega)$ y que $C_c^0(\Omega) \subset L^p(\Omega)$. A $\mathcal{D}(\Omega)$, el espacio de las funciones de clase infinito y de soporte compacto en Ω, se le denomina también el ***espacio de las funciones test***, por constituir el espacio de base sobre el que se construye el concepto de distribución sobre Ω.

Nota 3.5. *Dados dos abiertos $\Omega \subset \tilde{\Omega}$, y prolongando por cero las funciones de $\mathcal{D}(\Omega)$, se tiene que $\mathcal{D}(\Omega) \subset \mathcal{D}(\tilde{\Omega})$.*

Sobre $\mathcal{D}(\Omega)$ recordamos los resultados que siguen, cuyas demostraciones pueden consultarse, por ejemplo, en las notas de la asignatura EDPyAF. En primer lugar se tiene:

Teorema 3.6. *a) Dado $K \subset \Omega$, con K compacto, existe $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ tal que $0 \leq \varphi(x) \leq 1$ en Ω y $\varphi \equiv 1$ en un entorno de K.*

b) Para todo $p \in [1, +\infty)$, el conjunto $\mathcal{D}(\Omega)$ es denso en $L^p(\Omega)$.

c) Si $u \in L^1_{loc}(\Omega)$ es tal que

$$\int_\Omega u(x)\varphi(x)\,dx = 0 \qquad \text{para toda } \varphi \in \mathcal{D}(\Omega),$$

entonces $u = 0$ c.p.d. en Ω.

3.3. Convolución de funciones. Sucesiones regularizantes

Introducimos y estudiamos la convolución de dos funciones, en el caso particular en que una pertenece a $C_c^0(\mathbb{R}^N)$ y la otra a $L^1_{loc}(\mathbb{R}^N)$.

Si $\varphi \in C_c^0(\mathbb{R}^N)$ y $u \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^N)$, es inmediato comprobar que para cada $x \in \mathbb{R}^N$ fijado la función $y \in \mathbb{R}^N \mapsto \varphi(x-y)u(y) \in \mathbb{R}$ pertenece a $L^1(\mathbb{R}^N)$, con lo cual tiene sentido definir

Definición 3.7. *Dadas $\varphi \in C_c^0(\mathbb{R}^N)$ y $u \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^N)$, se define el producto de convolución de φ con u, como la función $\varphi * u$ dada por*

$$(\varphi * u)(x) = \int_{\mathbb{R}^N} \varphi(x-y)u(y)\,dy, \quad \forall\, x \in \mathbb{R}^N.$$

Es inmediato comprobar que el producto de convolución es conmutativo, es decir, para todo $x \in \mathbb{R}^N$ se satisface

$$(\varphi * u)(x) = \int_{\mathbf{R}^N} \varphi(y)u(x-y)\,dy.$$

Por otra parte $\varphi * u$ es "regular", en concreto se tiene el siguiente resultado:

Proposición 3.8. *Si $\varphi \in C_c^0(\mathbb{R}^N)$ y $u \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^N)$, el producto de convolución de ambas satisface las propiedades siguientes:*

a) $\varphi * u \in C^0(\mathbb{R}^N)$.

b) *Si $K \subset \mathbb{R}^N$ es tal que $u = 0$ c.p.d. en $\mathbb{R}^N \setminus K$, entonces* $\operatorname{sop}(\varphi * u) \subset \overline{\operatorname{sop}\varphi + K}$.

c) *Si $\varphi \in C_c^k(\mathbb{R}^N)$, con $k \geq 1$ entero, entonces $\varphi * u \in C^k(\mathbb{R}^N)$, y para todo multiíndice α con $|\alpha| \leq k$ se tiene $\partial^\alpha(\varphi * u)(x) = (\partial^\alpha \varphi * u)(x) \quad \forall\, x \in \mathbb{R}^N$*

Demostración.- Las propiedades a) y c) son consecuencias inmediatas de las propiedades de dependencia continua y derivabilidad de la integral de Lebesgue respecto de parámetros (ver [2] para los detalles).

Para demostrar b), sea $x \in \mathbb{R}^N \setminus (\operatorname{sop}\varphi + K)$. En tal caso, si $y \in K$, entonces $x - y \notin \operatorname{sop}\varphi$, y en consecuencia $\varphi(x-y)u(y) = 0$. Por otra parte, c.p.d. $y \in \mathbb{R}^N \setminus K$ se tiene $u(y) = 0$. En consecuencia, c.p.d. en $\mathbb{R}^N$, $\varphi(x-y)u(y) = 0$, con lo que $(\varphi * u)(x) = 0$. ■

Otro resultado de interés lo constituye el siguiente:

Proposición 3.9. *Si $\varphi \in C_c^0(\mathbb{R}^N)$ y $u \in L^p(\mathbb{R}^N)$ con $p \in [1, +\infty]$, entonces $\varphi * u \in L^p(\mathbb{R}^N)$ y satisface:*

$$\|\varphi * u\|_{L^p(\mathbf{R}^N)} \leq \|\varphi\|_{L^1(\mathbf{R}^N)} \|u\|_{L^p(\mathbf{R}^N)}.$$

Demostración.- Si $p = +\infty$, el resultado es inmediato.

Si $p = 1$, denotando $f(x,y) = \varphi(x-y)u(y)$, se tiene:

$$\int_{\mathbf{R}^N} |f(x,y)|\,dx = |u(y)| \int_{\mathbf{R}^N} |\varphi(x-y)|\,dx = \|\varphi\|_{L^1(\mathbf{R}^N)} |u(y)|,$$

con lo que $\displaystyle\int_{\mathbf{R}^N} \left(\int_{\mathbf{R}^N} |f(x,y)|\,dx \right) dy = \|\varphi\|_{L^1(\mathbf{R}^N)} \|u\|_{L^1(\mathbf{R}^N)} < +\infty$, así que, por Fubini-Tonelli, $f \in L^1(\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N)$ y

$$\int_{\mathbf{R}^N} \left(\int_{\mathbf{R}^N} |f(x,y)|\,dy \right) dx = \int_{\mathbf{R}^N} \left(\int_{\mathbf{R}^N} |f(x,y)|\,dx \right) dy = \|\varphi\|_{L^1(\mathbf{R}^N)} \|u\|_{L^1(\mathbf{R}^N)},$$

lo que, en particular, implica que $\varphi * u \in L^1(\mathbb{R}^N)$ con norma en $L^1(\mathbb{R}^N)$ menor o igual que $\|\varphi\|_{L^1(\mathbf{R}^N)} \|u\|_{L^1(\mathbf{R}^N)}$.

Finalmente, si $p \in (1, +\infty)$, para todo x fijado en $\mathbb{R}^N$ la función de y $\;|\varphi(x-y)||u(y)|^p$ pertenece a $L^1(\mathbb{R}^N)$ y, denotando por p' el exponente conjugado de p, se tiene

$$\begin{aligned}
|(\varphi * u)(x)| &\leq \int_{\mathbf{R}^N} |\varphi(x-y)||u(y)|\,dy = \int_{\mathbf{R}^N} |\varphi(x-y)|^{\frac{1}{p}} |u(y)| |\varphi(x-y)|^{\frac{1}{p'}}\,dy \\
&\leq \left(\int_{\mathbf{R}^N} |\varphi(x-y)||u(y)|^p\,dy \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_{\mathbf{R}^N} |\varphi(x-y)|\,dy \right)^{\frac{1}{p'}} \\
&= ((|\varphi| * |u|^p)(x))^{\frac{1}{p}} \|\varphi\|_{L^1(\mathbf{R}^N)}^{\frac{1}{p'}}.
\end{aligned}$$

Elevando a p esta última desigualdad, integrando en x, y teniendo en cuenta lo visto en el caso $p = 1$, se obtiene

$$\int_{\mathbf{R}^N} |(\varphi * u)(x)|^p\,dx \leq \|\varphi\|_{L^1(\mathbf{R}^N)}^{\frac{p}{p'}} \||\varphi| * |u|^p\|_{L^1(\mathbf{R}^N)} \leq$$

$$\leq \|\varphi\|_{L^1(\mathbb{R}^N)}^{\frac{p}{p'}} \|\varphi\|_{L^1(\mathbb{R}^N)} \||u|^p\|_{L^1(\mathbb{R}^N)} = \|\varphi\|_{L^1(\mathbb{R}^N)}^p \|u\|_{L^p(\mathbb{R}^N)}^p.$$

■

A continuación, introducimos la importante técnica de regularización, debida a Leray y Friedrichs, consistente en convolucionar con una sucesión regularizante.

Definición 3.10. *Una sucesión regularizante en $\mathbb{R}^N$ es cualquier sucesión de funciones $(\rho_n)_{n\geq 1} \subset \mathcal{D}(\mathbb{R}^N)$ tal que:*

a) $\rho_n \geq 0$ *en* $\mathbb{R}^N$,

b) $\operatorname{sop} \rho_n \subset \bar{B}(0, \frac{1}{n})$,

c) $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^N} \rho_n(x)\, dx = 1.$

Es fácil demostrar la existencia de sucesiones regularizantes; Consideramos la función real de variable real

$$\psi(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t \geq 0 \\ e^{1/t} & \text{si } t < 0, \end{cases}$$

que, evidentemente, es una función infinitamente derivable en $\mathbb{R}$. Así, para $k > 0$ dado, construimos la función

$$\rho(x) = k\psi\left(|x|^2 - 1\right)$$

que es una función de $\mathcal{D}(\mathbb{R}^N)$ que además verifica que $\operatorname{sop}\rho = \overline{B}(0,1)$, $\rho(x) > 0$ en $B(0,1)$ y, eligiendo k de forma conveniente, también

$$\int_{\mathbb{R}^N} \rho(x)\, dx = 1.$$

Si queremos una función de $\mathcal{D}(\mathbb{R}^N)$ que tenga soporte en $\overline{B}(0,1/n)$, basta hacer

$$\rho_n(x) = n^N \rho\,(nx)\,.$$

Esta función verifica que $\rho_n \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^N)$, $\operatorname{sop}\rho_n = \overline{B}(0,1/n)$, $\rho_n > 0$ en $B(0,1/n)$ y

$$\int_{\mathbb{R}^N} \rho_n(x)\, dx = 1.$$

Nota 3.11. *Es también inmediato comprobar a partir de los resultados precedentes que si $(\rho_n)_{n\geq 1}$ es una sucesión regularizante, y $u \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^N)$ entonces $\rho_n * u \in C^\infty(\mathbb{R}^N)$. Si, además, u es cero c.p.d. en el complementario de un compacto entonces $\rho_n * u \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^N)$.*

El interés de la convolución por una sucesión regularizante radica en las propiedades de aproximación que posee.

Proposición 3.12. *Sea $(\rho_n)_{n\geq 1}$ una sucesión regularizante. Se tiene:*

a) *Si $u \in C^0(\mathbb{R}^N)$, entonces $\rho_n * u \to u$ uniformemente sobre compactos de $\mathbb{R}^N$, cuando $n \to +\infty$.*

b) *Si $u \in L^p(\mathbb{R}^N)$ con $p \in [1, +\infty)$, entonces $\rho_n * u \to u$ en $L^p(\mathbb{R}^N)$, cuando $n \to +\infty$.*

Demostración.-

a) Sean $u \in C^0(\mathbb{R}^N)$, K un compacto de $\mathbb{R}^N$ y $\varepsilon > 0$ fijados. Hemos de demostrar que existe un $n_0 \geq 1$ tal que $|(\rho_n * u)(x) - u(x)| \leq \varepsilon \quad \forall x \in K \quad \forall n \geq n_0$.

Como u es uniformemente continua en los compactos de $\mathbb{R}^N$, existe un $\delta > 0$ tal que

$$|u(x-y) - u(x)| \leq \varepsilon \quad \forall x \in K \quad \forall |y| \leq \delta.$$

Fijado un tal δ, basta tomar n_0 entero tal que $n_0 \geq \dfrac{1}{\delta}$. Con esta elección, si $n \geq n_0$ entonces $\operatorname{sop} \rho_n \subset \bar{B}(0, \frac{1}{n}) \subset \bar{B}(0, \delta)$, con lo que para todo $x \in K$ se tiene:

$$\begin{aligned}|(\rho_n * u)(x) - u(x)| &= \left| \int_{\mathbb{R}^N} (u(x-y) - u(x))\rho_n(y)\, dy \right| \\ &= \left| \int_{\bar{B}(0, \frac{1}{n})} (u(x-y) - u(x))\rho_n(y)\, dy \right| \leq \varepsilon.\end{aligned}$$

b) Sea $u \in L^p(\mathbb{R}^N)$ con $p \in [1, +\infty)$. Sabemos que en tal caso $\rho_n * u \in L^p(\mathbb{R}^N)$, para todo $n \geq 1$.

Fijemos $\varepsilon > 0$, entonces gracias al Teorema 3.6 2) existe $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^N)$ tal que

$$\|u - \varphi\|_{L^p(\mathbb{R}^N)} \leq \varepsilon.$$

Ya sabemos que $\rho_n * \varphi$ converge a φ, cuando n tiende a ∞, uniformemente sobre los compactos de $\mathbb{R}^N$; en particular, como

$$\operatorname{sop} \varphi, \operatorname{sop}(\rho_n * \varphi) \subset \operatorname{sop} \varphi + \bar{B}(0, 1),$$

es inmediato que

$$\rho_n * \varphi \to \varphi \quad \text{cuando } n \text{ tiende a } \infty \text{ en } L^p(\mathbb{R}^N).$$

En consecuencia:

$$\|\rho_n * u - u\|_{L^p(\mathbb{R}^N)} \leq \|\rho_n * (u - \varphi)\|_{L^p(\mathbb{R}^N)} + \|\rho_n * \varphi - \varphi\|_{L^p(\mathbb{R}^N)} + \|\varphi - u\|_{L^p(\mathbb{R}^N)} \leq$$

$$2\|\varphi - u\|_{L^p(\mathbb{R}^N)} + \|\rho_n * \varphi - \varphi\|_{L^p(\mathbb{R}^N)} \leq 2\varepsilon + \|\rho_n * \varphi - \varphi\|_{L^p(\mathbb{R}^N)},$$

y en consecuencia $\limsup_{n\to\infty} \|\rho_n * u - u\|_{L^p(\mathbb{R}^N)} \leq 2\varepsilon$. Basta ahora tener en cuenta que $\varepsilon > 0$ es arbitrario. ■

3.4. El espacio de las distribuciones sobre Ω. Convergencia de distribuciones

El espacio $\mathcal{D}(\Omega)$ puede ser dotado de una topología, la denominada topología límite inductivo, que no proviene de una norma, pero que es compatible con la estructura de espacio vectorial del mismo. Nos contentamos con describir en qué se traduce la convergencia de sucesiones para esta topología.

Definición 3.13. *Sean (φ_n) una sucesión en $\mathcal{D}(\Omega)$ y $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$. Diremos que φ_n converge a φ en $\mathcal{D}(\Omega)$ (y escribiremos $\varphi_n \to \varphi$) si existe un compacto $K \subset \Omega$ tal que*

$$\operatorname{sop} \varphi_n \subset K, \quad \forall n \geq 1 \quad y \quad \partial^\alpha \varphi_n \to \partial^\alpha \varphi \text{ uniformemente en } \Omega, \quad \forall \alpha \in \mathbb{N}^N,$$

(recordemos que, ∂^0 es la identidad).

Es inmediato comprobar la compatibilidad de la noción de convergencia anterior con la estructura de espacio vectorial de $\mathcal{D}(\Omega)$, es decir, si φ_n converge a φ y ϕ_n converge a ϕ en $\mathcal{D}(\Omega)$ entonces $\varphi_n + \phi_n$ converge a $\varphi + \phi$ y $\lambda\varphi_n$ converge a $\lambda\varphi$ en $\mathcal{D}(\Omega)$ para todo escalar $\lambda \in \mathbb{R}$. En particular, φ_n converge a φ en $\mathcal{D}(\Omega)$ si y sólo si $\varphi_n - \varphi$ converge a cero en $\mathcal{D}(\Omega)$.

Como ya hemos dicho, es posible introducir en $\mathcal{D}(\Omega)$ una topología para la que la noción de convergencia de sucesiones coincide con la de la Definición 3.13. Al dual topológico de $\mathcal{D}(\Omega)$, es decir al espacio vectorial de las formas lineales continuas sobre $\mathcal{D}(\Omega)$, se le denota $\mathcal{D}'(\Omega)$ y se le denomina el ***espacio de las distribuciones sobre*** Ω.

Nos vamos a contentar en estas notas con una definición equivalente de $\mathcal{D}'(\Omega)$ que tan sólo utiliza la noción de convergencia de sucesiones en $\mathcal{D}(\Omega)$.

Definición 3.14. *Una distribución sobre Ω es cualquier aplicación $T : \mathcal{D}(\Omega) \to \mathbb{R}$ tal que:*

a) *T es lineal.*

b) *T es (secuencialmente) continua, es decir, tal que si $\varphi_n \to \varphi$ en $\mathcal{D}(\Omega)$, entonces $T(\varphi_n) \to T(\varphi)$ en $\mathbb{R}$.*

Al conjunto de todas las distribuciones sobre Ω se le denota $\mathcal{D}'(\Omega)$.

A partir de ahora, si $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$, usaremos de manera indistinta las notaciones $T(\varphi)$ y $\langle T, \varphi\rangle$.

Nota 3.15. *Es inmediato comprobar que dada $T : \mathcal{D}(\Omega) \to \mathbb{R}$ lineal, T es una distribución sobre Ω si y sólo si $\varphi_n \to 0$ en $\mathcal{D}(\Omega)$ implica $\langle T, \varphi_n\rangle \to 0$ en $\mathbb{R}$.*

El conjunto $\mathcal{D}'(\Omega)$ se considera dotado de las operaciones suma y producto por escalar definidos de manera natural para cada T y S en $\mathcal{D}'(\Omega)$ y cada escalar λ por:

$$\langle T + S, \varphi\rangle = \langle T, \varphi\rangle + \langle S, \varphi\rangle, \qquad \langle \lambda T, \varphi\rangle = \lambda\langle T, \varphi\rangle, \quad \forall\, \varphi \in \mathcal{D}(\Omega).$$

Es inmediato comprobar que $\mathcal{D}'(\Omega)$, dotado de las operaciones así definidas, es un espacio vectorial.

El espacio $\mathcal{D}'(\Omega)$ es muy rico en elementos, en particular toda función de $L^1_{loc}(\Omega)$ es (identificable con) una distribución sobre Ω. En concreto se tiene:

Proposición 3.16. *Para cada $u \in L^1_{loc}(\Omega)$ denotemos por T_u la aplicación definida sobre $\mathcal{D}(\Omega)$ con valores en $\mathbb{R}$, dada por*

$$\langle T_u, \varphi\rangle = \int_\Omega u(x)\varphi(x)\, dx \quad \forall\, \varphi \in \mathcal{D}(\Omega). \tag{3.1}$$

Entonces $T_u \in \mathcal{D}'(\Omega)$, y la aplicación $u \in L^1_{loc}(\Omega) \to T_u \in \mathcal{D}'(\Omega)$ es lineal e inyectiva.

Demostración.- Inmediata a partir de los resultados obtenidos hasta ahora. ■

Nota 3.17. *A partir de ahora, si $u \in L^1_{loc}(\Omega)$ identificamos u con la distribución sobre Ω definida por (3.1). Con esta identificación, teniendo en cuenta la proposición precedente, resulta que $L^1_{loc}(\Omega)$ es un subespacio vectorial de $\mathcal{D}'(\Omega)$.*

Otro ejemplo de distribución es la **distribución o delta de Dirac:** dado $a \in \Omega$, se define δ_a (la delta de Dirac en a) como la aplicación

$$\delta_a : \varphi \in \mathcal{D}(\Omega) \mapsto \varphi(a) \in \mathbb{R}.$$

Es inmediato comprobar que $\delta_a \in \mathcal{D}'(\Omega)$, y que no es la distribución nula, pues existe $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ tal que $\langle \delta_a, \varphi\rangle = \varphi(a) = 1$.

El espacio $L^1_{loc}(\Omega)$ está contenido de manera estricta en $\mathcal{D}'(\Omega)$, es decir, la aplicación dada por $u \in L^1_{loc}(\Omega) \to T_u \in \mathcal{D}'(\Omega)$ no es sobre. Un ejemplo de distribución sobre Ω que no es identificable mediante (3.1) con una función de $L^1_{loc}(\Omega)$ lo constituye la delta de Dirac en un punto de Ω. Se tiene:

Proposición 3.18. *Dado $a \in \Omega$, la distribución δ_a no pertenece a $L^1_{loc}(\Omega)$, es decir, no existe $u \in L^1_{loc}(\Omega)$ tal que $T_u = \delta_a$ como elementos de $\mathcal{D}'(\Omega)$.*

Demostración.- Supongamos que existe $u \in L^1_{loc}(\Omega)$ tal que $T_u = \delta_a$ como elementos de $\mathcal{D}'(\Omega)$. Entonces, en particular

$$\int_\Omega u(x)\varphi(x)\,dx = 0, \quad \forall\, \varphi \in \mathcal{D}(\Omega \setminus \{a\}),$$

y en consecuencia $u = 0$ c.p.d. en $\Omega \setminus \{a\}$, y por tanto también $u = 0$ c.p.d. en Ω.

Así,

$$0 = \int_\Omega u(x)\varphi(x)\,dx = \varphi(a), \quad \forall\, \varphi \in \mathcal{D}(\Omega),$$

contra el hecho de que, por ejemplo, sabemos que existen funciones $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ tales que $\varphi(a) = 1$. ■

Sobre el espacio $\mathcal{D}'(\Omega)$ es posible definir una topología (a partir de la de $\mathcal{D}(\Omega)$) para la que la noción de convergencia de sucesiones se traduce en la definición siguiente:

Definición 3.19. *Dada una sucesión $(T_n)_{n\geq 1}$ en $\mathcal{D}'(\Omega)$, diremos que la sucesión converge a un elemento $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$, cuando $n \to \infty$, si para toda φ en $\mathcal{D}(\Omega)$ se satisface que*

$$\lim_{n\to\infty} \langle T_n, \varphi\rangle = \langle T, \varphi\rangle.$$

Nota 3.20. *a) Si $\{\rho_n\}$ es una sucesión regularizante en $\mathbb{R}^N$ entonces ρ_n converge a δ_0 en $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^N)$.*

b) Con el convenio de identificar u y T_u, es fácil comprobar que las inyecciones de $L^p(\Omega)$ en $\mathcal{D}'(\Omega)$ son (secuencialmente) continuas para todo $p \in [1, \infty]$, es decir, $u_n \to u$ en *$L^p(\Omega)$ implica $u_n \to u$* en *$\mathcal{D}'(\Omega)$.*

Lo mismo sucede con la inyección de $L^1_{loc}(\Omega)$ en $\mathcal{D}'(\Omega)$.

Una propiedad importante es la completitud (secuencial) de $\mathcal{D}'(\Omega)$. En concreto se tiene el siguiente resultado, cuya demostración omitimos (consultar, por ejemplo, [11]).

Proposición 3.21. *Sea $(T_n)_{n\geq 1} \subset \mathcal{D}'(\Omega)$ una sucesión satisfaciendo que existe $\lim\limits_{n\to\infty} \langle T_n, \varphi\rangle$ para toda φ en $\mathcal{D}(\Omega)$. En tal caso, si se define $\langle T, \varphi\rangle = \lim\limits_{n\to\infty} \langle T_n, \varphi\rangle$, para toda $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$, la aplicación T pertenece a $\mathcal{D}'(\Omega)$, y en consecuencia la sucesión T_n converge a T en $\mathcal{D}'(\Omega)$.*

Utilizando un razonamiento de reducción al absurdo similar al que se emplea para demostrar la proposición precedente, se puede también probar que la aplicación $(T, \varphi) \in \mathcal{D}'(\Omega) \times \mathcal{D}(\Omega) \mapsto \langle T, \varphi\rangle \in \mathbb{R}$, es (secuencialmente) continua.

3.5. Derivación de distribuciones

En esta sección vamos a introducir un concepto de derivación en $\mathcal{D}'(\Omega)$, de tal manera que toda distribución va a ser derivable de todos los órdenes. En particular, con este concepto, toda función de $L^1_{loc}(\Omega)$ será derivable en el sentido de $\mathcal{D}'(\Omega)$.

Para motivar la definición consideremos dada una función $u \in C^0(\Omega)$ tal que existe la derivada parcial (en sentido clásico) $\partial_k u$ para algún $1 \leq k \leq N$ y $\partial_k u \in C^0(\Omega)$. En tal caso u y $\partial_k u$ pertenecen a $\mathcal{D}'(\Omega)$ y se puede uno plantear qué relación existe entre $\partial_k u$ y u como distribuciones. En primer lugar es evidente que para toda $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$:

$$\langle \partial_k u, \varphi\rangle = \int_\Omega \partial_k(u\varphi)(x)\,dx - \int_\Omega u(x)\partial_k\varphi(x)\,dx.$$

Pero $u\varphi \in C^0_c(\Omega)$ y existe $\partial_k(u\varphi) \in C^0_c(\Omega)$. Denotando por $\tilde{v}$ la prolongación por cero en el complementario de Ω de una función v definida en Ω, es inmediato que $\widetilde{u\varphi} \in C^0_c(\mathbb{R}^N)$ y existe $\partial_k(\widetilde{u\varphi}) \in C^0_c(\mathbb{R}^N)$, satisfaciéndose que $\partial_k(\widetilde{u\varphi}) \equiv \widetilde{\partial_k(u\varphi)}$, y

$$\int_\Omega \partial_k(u\varphi)(x)\,dx = \int_{\mathbb{R}^N} \partial_k(\widetilde{u\varphi})(x)\,dx.$$

Tomando $M > 0$ tal que $\varphi(x) = 0$ para toda x tal que $|x_k| \geq M$, se tiene

$$\int_{\mathbf{R}^N} \partial_k(\widetilde{u\varphi})(x)\, dx = \int_{\mathbf{R}^{N-1}} \left(\int_{-M}^{M} \partial_k(\widetilde{u\varphi})(x)\, dx_k \right) dx_1 ... dx_{k-1} dx_{k+1} ... dx_N = 0.$$

En consecuencia, hemos demostrado el siguiente resultado:

Proposición 3.22. *Si $u \in C^0(\Omega)$ es tal que existe la derivada parcial (en sentido clásico) $\partial_k u$ para algún $1 \leq k \leq N$ y $\partial_k u \in C^0(\Omega)$, entonces*

$$\langle \partial_k u, \varphi \rangle = -\langle u, \partial_k \varphi \rangle, \quad \forall\, \varphi \in \mathcal{D}(\Omega).$$

Por aplicación reiterada de la proposición precedente, se obtiene de manera inmediata que si $u \in C^k(\Omega)$, con $k \geq 1$ entero, entonces

$$\langle \partial^\alpha u, \varphi \rangle = (-1)^{|\alpha|} \langle u, \partial^\alpha \varphi \rangle, \quad \forall\, \varphi \in \mathcal{D}(\Omega), \quad \forall\, |\alpha| \leq k.$$

Por otra parte, es fácil comprobar que si T es un elemento cualquiera de $\mathcal{D}'(\Omega)$, para cada multíndice de derivación α, la aplicación

$$\varphi \in \mathcal{D}(\Omega) \mapsto \langle T, \partial^\alpha \varphi \rangle \in \mathbb{R},$$

define un elemento de $\mathcal{D}'(\Omega)$. Queda, en consecuencia motivada y con sentido la definición que sigue:

Definición 3.23. *Dada $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$, para cualquier multiíndice α se define $\partial^\alpha T$, la derivada α de T, como el elemento de $\mathcal{D}'(\Omega)$ determinado de manera unívoca por la igualdad*

$$\langle \partial^\alpha T, \varphi \rangle = (-1)^{|\alpha|} \langle T, \partial^\alpha \varphi \rangle, \quad \forall\, \varphi \in \mathcal{D}(\Omega).$$

Nota 3.24. *a) De las consideraciones precedentes, es claro que la noción de derivación en $\mathcal{D}'(\Omega)$ es congruente con la derivación ordinaria de funciones de $C^k(\Omega)$.*

b) Con esta noción, toda distribución, y en particular toda función localmente integrable, es derivable de cualquier orden (aunque la derivada no tiene porqué ser una función).

c) Se tiene la independencia del orden en la derivación, es decir, para todo par α y β de multiíndices de derivación y toda $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$ se tiene que

$$\partial^\alpha(\partial^\beta T) = \partial^\beta(\partial^\alpha T) = \partial^{\alpha+\beta} T.$$

d) Es también fácil comprobar que la derivación es una operación lineal secuencialmente continua en $\mathcal{D}'(\Omega)$, es decir, para todo multiíndice de derivación α la aplicación

$$T \in \mathcal{D}'(\Omega) \to \partial^\alpha T \in \mathcal{D}'(\Omega)$$

es lineal y tal que $T_n \to T$ en $\mathcal{D}'(\Omega)$, *implica que*

$$\partial^\alpha T_n \to \partial^\alpha T \quad \text{en } \mathcal{D}'(\Omega).$$

En relación con la derivación de distribuciones, resulta de interés el siguiente resultado, recíproco de la Proposición 3.22, y cuya demostración se puede consultar en [11].

Proposición 3.25. *Sean u y v dos funciones en $C^0(\Omega)$ tales que para algún entero k con $1 \leq k \leq N$ se satisface $\partial_k u = v$ en $\mathcal{D}'(\Omega)$. Entonces u es derivable en sentido clásico respecto de x_k en Ω, con derivada igual a v.*

3.6. El producto de una función C^∞ por una distribución

En general, es imposible definir el producto de dos distribuciones sobre Ω de tal manera que sea compatible con el producto de funciones. Un caso particular en que resulta fácil tal definición es aquel en que una de las distribuciónes corresponde a una función de $C^\infty(\Omega)$.

Definición 3.26. *Sean $u \in C^\infty(\Omega)$ y $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$. Se define el producto de u con T, denotado uT, como el elemento de $\mathcal{D}'(\Omega)$ determinado por la igualdad*

$$\langle uT, \varphi\rangle = \langle T, u\varphi\rangle \quad \forall\, \varphi \in \mathcal{D}(\Omega). \tag{3.2}$$

Es inmediato comprobar que efectivamente (3.2) define una distribución en Ω. Es también fácil demostrar que $\partial_k(uT) = (\partial_k u)T + u\partial_k T$, para toda $u \in C^\infty(\Omega)$ y toda $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$.

Nota 3.27. *Utilizando el denominado valor principal de $\dfrac{1}{x}$, que denotamos por* $\mathrm{vp}\,(\dfrac{1}{x})$ *(ver la definición en la hoja de ejercicios), y δ_0, es fácil comprobar la imposibilidad de definir un producto en $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ que sea a la vez asociativo, conmutativo y compatible con la Definición 3.26.*

Como consecuencia de la definición anterior aparece el problema de división en $\mathcal{D}'(\Omega)$, consistente en, dados $u \in C^\infty(\Omega)$ y $S \in \mathcal{D}'(\Omega)$, encontrar $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$ tal que $uT = S$ en $\mathcal{D}'(\Omega)$. Este problema tiene solución inmediata si u no se anula en Ω; en caso contrario, la respuesta al problema es, en general, difícil. El resultado que sigue proporciona una respuesta en un caso muy particular:

Proposición 3.28. *Una distribución $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ satisface $xT = 0$ en $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ si y sólo si existe $c \in \mathbb{R}$ tal que $T = c\delta_0$.*

Demostración.- Si $T = c\delta_0$, entonces es inmediato que $xT = 0$ en $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$.

Recíprocamente, sea $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ tal que $xT = 0$ en $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$. En tal caso $< T, \varphi >= 0$ para toda $\varphi \in \mathcal{C}$, siendo $\mathcal{C} = \{x\psi :\ \psi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})\}$.

Pero es fácil comprobar que $\mathcal{C} = \{\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}) :\ \varphi(0) = 0\}$. En efecto, es inmediato que $\mathcal{C} \subset \{\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}) : \varphi(0) = 0\}$, y recíprocamente, si φ pertenece a $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ y es tal que $\varphi(0) = 0$, entonces $\varphi(x) = x\int_0^1 \varphi'(sx)\,ds$, para todo $x \in \mathbb{R}$, y es inmediato que la función

$$\psi(x) = \int_0^1 \varphi'(sx)\,ds$$

es tal que $\psi \in C^\infty(\mathbb{R})$ y $\mathrm{sop}\,\psi$ está contenido en $\mathrm{sop}\,\varphi \cup \{0\}$, con lo que $\psi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$.

En resumen, si $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ satisface $xT = 0$ en $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$, entonces $\langle T, \varphi\rangle = 0$ para toda $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ tal que $\varphi(0) = 0$. Basta ahora fijar $\varphi_0 \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ tal que $\varphi_0(0) = 1$; dada cualquier $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$, se tiene $\varphi = \varphi(0)\varphi_0 + \tilde{\varphi}$, donde $\tilde{\varphi} = \varphi - \varphi(0)\varphi_0$, es tal que pertenece a $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ y satisface $\tilde{\varphi}(0) = 0$. En consecuencia,

$$\langle T, \varphi\rangle = \langle T, \varphi_0\rangle\varphi(0) = c\langle \delta_0, \varphi\rangle,$$

con $c = \langle T, \varphi_0\rangle$. ■

Para más detalles sobre distribuciones (en particular el estudio de la convolución de distribuciones, distribuciones atemperadas y transformada de Fourier de distribuciones) se puede consultar [3] y [13]. Nosotros vamos a terminar estas notas con unas consideraciones sobre la búsqueda de primitivas en $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$.

3.7. Resultados comlementarios: Primitivas en $\mathcal{D}'(I)$

Dados $I = (a, b)$, intervalo abierto de $\mathbb{R}$, y $S \in \mathcal{D}'(I)$, diremos que T es una primitiva de S en I si $T \in \mathcal{D}'(I)$ y $T' = S$ en $\mathcal{D}'(I)$.

En primer lugar, se tiene el siguiente resultado:

Proposición 3.29. *Dada $T \in \mathcal{D}'(I)$, la distribución T es una primitiva en I de la distribución nula si y sólo si es constante. Es decir, $T' = 0$ en $\mathcal{D}'(I)$ si y sólo si existe $c \in \mathbb{R}$ tal que*

$$\langle T, \varphi \rangle = c \int_I \varphi(t)\, dt, \quad \textit{para toda } \varphi \in \mathcal{D}(I).$$

Demostración.- Es evidente que si T es constante entonces $T' = 0$.

Recíprocamente, si $T' = 0$ entonces $< T, \varphi' >= 0$ para toda $\varphi \in \mathcal{D}(I)$. Pero

$$\{\varphi' : \ \varphi \in \mathcal{D}(I)\} = \{\psi \in \mathcal{D}(I) : \ \int_I \psi(t)\, dt = 0\}.$$

En efecto, es evidente que si $\psi = \varphi'$ con $\varphi \in \mathcal{D}(I)$ entonces $\displaystyle\int_I \psi(t)\, dt = 0$. Recíprocamente, si $\psi \in \mathcal{D}(I)$ satisface $\displaystyle\int_I \psi(t)\, dt = 0$ entonces la función φ definida por $\varphi(t) = \displaystyle\int_a^t \psi(s)\, ds$, $t \in I$, es la única función tal que $\varphi \in \mathcal{D}(I)$ y satisface $\varphi' = \psi$ en I.

En consecuencia, si $T' = 0$ entonces $\langle T, \psi \rangle = 0$ para toda función $\psi \in \mathcal{D}(I)$ que satisfaga la igualdad $\displaystyle\int_I \psi(t)\, dt = 0$. Fijemos $\varphi_0 \in \mathcal{D}(I)$ tal que $\displaystyle\int_I \varphi_0(t)\, dt = 1$; en tal caso, para cada $\varphi \in \mathcal{D}(I)$ la función $\varphi - \left(\displaystyle\int_I \varphi(t)\, dt\right) \varphi_0$ pertenece a $\mathcal{D}(I)$ y tiene integral cero en I. De la identidad

$$\varphi \equiv \left(\int_I \varphi(t)\, dt\right) \varphi_0 + \varphi - \left(\int_I \varphi(t)\, dt\right) \varphi_0,$$

se obtiene entonces $\langle T, \varphi \rangle = \langle c, \varphi \rangle$, con $c = \langle T, \varphi_0 \rangle$. ■

Nota 3.30. *La proposición precedente puede ser extendida al caso de $\mathbb{R}^N$. En concreto, se puede demostrar que si $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ es un abierto conexo y $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$ es tal que $\nabla T = 0$ en $\mathcal{D}'(\Omega)$, entonces existe $c \in \mathbb{R}$ tal que $T = c$ en $\mathcal{D}'(\Omega)$. Para la demostración de este resultado se puede consultar, por ejemplo, el libro de Renardy y Rogers, [11].*

Como consecuencia de la Proposición 3.29 se obtiene la siguiente,

Proposición 3.31. *Dados $I = (a, b)$ intervalo abierto de $\mathbb{R}$ y $S \in \mathcal{D}'(I)$, existe $T \in \mathcal{D}'(I)$ tal que $T' = S$ en $\mathcal{D}'(I)$. Además, dicha T es única salvo constantes aditivas, es decir, si $\tilde{T}$ es otra primitiva de S en $\mathcal{D}'(I)$, entonces existe $c \in \mathbb{R}$ tal que $T - \tilde{T} = c$ en $\mathcal{D}'(I)$.*

Demostración.- La unicidad de T salvo constantes aditivas es consecuencia inmediata de la Proposición 3.29.

En cuanto a la existencia de T, lo primero que es claro es que T es una primitiva de S en $\mathcal{D}'(I)$ si y sólo si $\langle T, \varphi' \rangle = -\langle S, \varphi \rangle$ para toda $\varphi \in \mathcal{D}(I)$, lo cual es equivalente, de acuerdo con la demostración de la proposición anterior, a que para toda $\psi \in \mathcal{D}(I)$ tal que $\displaystyle\int_I \psi(t)\, dt = 0$ se satisfaga:

$$\langle T, \psi \rangle = -\langle S, \Psi \rangle, \tag{3.3}$$

siendo $\Psi(t) = \displaystyle\int_a^t \psi(s)\, ds$.

Fijemos $\varphi_0 \in \mathcal{D}(I)$ tal que $\displaystyle\int_I \varphi_0(t)\, dt = 1$. Para cada $\varphi \in \mathcal{D}(I)$ definamos T por $\langle T, \varphi \rangle = -\langle S, \chi \rangle$, con

$$\chi(t) = \int_a^t \left(\varphi(s) - (\int_I \varphi(x)\, dx)\varphi_0(s)\right) ds. \tag{3.4}$$

Evidentemente, la T así definida satisface (3.3), y es un funcional lineal sobre $\mathcal{D}(I)$. Es un ejercicio sencillo comprobar que si $\varphi_n \to 0$ en $\mathcal{D}(I)$ entonces la sucesión correspondiente χ_n definida por (3.4) converge también a cero en $\mathcal{D}(I)$. En consecuencia la T definida por (3.3) es un elemento del espacio $\mathcal{D}'(I)$ ■

Supongamos que queremos resolver en $\mathcal{D}'(I)$ la EDO

$$T' = f(t)T + g(t), \tag{3.5}$$

donde $f \in C^\infty(I)$ y $g \in \mathcal{D}'(I)$ están dadas. Considerando la nueva incógnita S dada por $S = e^{-F}T$, con $F \in C^\infty(I)$ una primitiva de f, la ecuación original (3.5) equivale a $S' = e^{-F}g$ en $\mathcal{D}'(I)$. Podemos en consecuencia afirmar, por aplicación de la Proposición 3.31, que (3.5) posee infinitas soluciones en $\mathcal{D}'(I)$, siendo todas de la forma $T = T_p + ce^F$, con T_p una solución particular de (3.5), y $c \in \mathbb{R}$ una constante arbitraria. En particular, si $g \in C^0(I)$, podemos afirmar que el conjunto de soluciones de (3.5) en $\mathcal{D}'(I)$ coincide con el de las soluciones clásicas.

En general, si g es una distribución arbitraria, las soluciones de (3.5) no son funciones de $C^1(I)$. Lo mismo sucede con una EDO de primer orden implícita aunque los datos sea regulares; así la EDO $tT' = 0$ en $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ tiene por solución particular la función de Heaviside, $H(t) = 1_{(0,\infty)}(t)$.

CAPÍTULO 4

Espacios de Sobolev. Primeras propiedades

Dedicamos el tema a introducir los espacios de Sobolev y a estudiar las primeras propiedades de estos espacios. Igual que en el tema anterior, Ω denotará un abierto no vacío de $\mathbb{R}^N$, con $N \geq 1$ entero.

4.1. Espacios de Sobolev. Definiciones

En el tema anterior vimos que, dada $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$ y $\alpha \in \mathbf{Z}_+^N$, existe $\partial^\alpha T \in \mathcal{D}'(\Omega)$. En particular, si $u \in L^p(\Omega)$, con $p \in [1, \infty]$, entonces existe $\partial^\alpha u \in \mathcal{D}'(\Omega)$ y verifica

$$\langle \partial^\alpha u, \varphi \rangle = (-1)^{|\alpha|} \langle u, \partial^\alpha \varphi \rangle = (-1)^{|\alpha|} \int_\Omega u(x) \partial^\alpha \varphi(x)\, dx, \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega).$$

A veces, se tiene que $\partial^\alpha u \in L^p(\Omega)$ (es una función). Por ejemplo, si $u \in C^{|\alpha|}(\bar{\Omega})$ y Ω es acotado, entonces su derivada distribucional coincide con la clásica y $\partial^\alpha u \in L^p(\Omega)$.

Definición 4.1. *Sean $k \geq 1$ un entero y $p \in [1, \infty]$. Definimos el espacio de Sobolev $W^{k,p}(\Omega)$ como*

$$W^{k,p}(\Omega) = \{u \in L^p(\Omega) \,:\, \partial^\alpha u \in L^p(\Omega), \quad \forall \alpha \in \mathbf{Z}_+^N \text{ tal que } |\alpha| \leq k\}.$$

Nota 4.2. Evidentemente,

$$W^{1,p}(\Omega) = \{u \in L^p(\Omega) \,:\, \partial_i u \in L^p(\Omega), \quad \forall 1 \leq i \leq N\},$$

$$W^{2,p}(\Omega) = \{u \in L^p(\Omega) \,:\, \partial_i u \in L^p(\Omega), \partial_{ij} u \in L^p(\Omega), \quad \forall 1 \leq i, j \leq N\}.$$

Nota 4.3. En la definición de $W^{k,p}(\Omega)$, las derivadas consideradas son derivadas distribucionales. Así, decir que $\partial^\alpha u \in L^p(\Omega)$ significa que existe $v_\alpha \in L^p(\Omega)$ tal que $\partial^\alpha u = v_\alpha$ en $\mathcal{D}'(\Omega)$, es decir, tal que

$$(-1)^{|\alpha|} \int_\Omega u \partial^\alpha \varphi \, dx = \int_\Omega v_\alpha \varphi \, dx, \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega).$$

Obsérvese que en tal caso v_α está unívocamente determinada.

Nota 4.4. Obsérvese que $u \in W^{k,p}(\Omega)$ si y sólo si para cada $\alpha \in \mathbf{Z}_+^N$ con $|\alpha| \leq k$ existe $v_\alpha \in L^p(\Omega)$ tal que

$$(-1)^{|\alpha|} \int_\Omega u \partial^\alpha \varphi \, dx = \int_\Omega v_\alpha \varphi \, dx, \quad \forall \varphi \in C_c^k(\Omega).$$

La demostración de esta afirmación se puede hacer mediante convolución con una sucesión regularizante, y se deja como ejercicio.

Es fácil comprobar que $W^{k,p}(\Omega)$ es un subespacio vectorial de $L^p(\Omega)$.

Sobre $W^{k,p}(\Omega)$ se considera la norma

$$||u||_{W^{k,p}(\Omega)} = \left(\sum_{|\alpha| \leq k} ||\partial^\alpha u||^p_{L^p(\Omega)} \right)^{1/p} \quad \text{si} \quad p < \infty, \tag{4.1}$$

$$||u||_{W^{k,\infty}(\Omega)} = \max_{|\alpha| \leq k} ||\partial^\alpha u||_{L^\infty(\Omega)} \quad \text{si} \quad p = \infty. \tag{4.2}$$

En particular, para $p < \infty$,

$$||u||_{W^{1,p}(\Omega)} = \left(||u||^p_{L^p(\Omega)} + \sum_{i=1}^N ||\partial_i u||^p_{L^p(\Omega)} \right)^{1/p},$$

$$||u||_{W^{2,p}(\Omega)} = \left(||u||^p_{L^p(\Omega)} + \sum_{i=1}^N ||\partial_i u||^p_{L^p(\Omega)} + \sum_{i,j=1}^N ||\partial_{ij} u||^p_{L^p(\Omega)} \right)^{1/p} = \left(||u||^p_{W^{1,p}(\Omega)} + \sum_{i,j=1}^N ||\partial_{ij} u||^p_{L^p(\Omega)} \right)^{1/p}.$$

Observación 4.5. *Se deja como ejercicio la comprobación de que* $|| \cdot ||_{W^{k,p}(\Omega)}$ *es efectivamente una norma en* $W^{k,p}(\Omega)$.

Así mismo, se deja como ejercicio la comprobación de que, tanto si p es finito como si no, una norma equivalente a la dada por (4.1) y (4.2), es la definida por

$$|u|_{W^{k,p}(\Omega)} = \sum_{|\alpha| \leq k} ||\partial^\alpha u||_{L^p(\Omega)}. \tag{4.3}$$

Definición 4.6. *El caso* $p = 2$ *es un caso de especial interés, ya que la norma* $|| \cdot ||_{W^{k,2}(\Omega)}$ *procede del producto escalar*

$$(u, v)_{H^k(\Omega)} = \sum_{|\alpha| \leq k} (\partial^\alpha u, \partial^\alpha v)_{L^2(\Omega)}.$$

Utilizaremos la notación $H^k(\Omega)$ *para representar a* $W^{k,2}(\Omega)$, *es decir*

$$H^k(\Omega) \equiv W^{k,2}(\Omega).$$

Observación 4.7. *De la propia definición de la norma, es inmediato deducir que* $u_n \to u$ *en* $W^{k,p}(\Omega)$ *si y sólo si* $\partial^\alpha u_n \to \partial^\alpha u$ *en* $L^p(\Omega)$, *para todo* $0 \leq |\alpha| \leq k$.

En lo que sigue, vamos a hacer uso del siguiente resultado:

Proposición 4.8. *Sean* $\alpha \in \mathbf{Z}^N_+$, $\{u_n\}_{n \geq 1} \subset L^p(\Omega)$ *y* $u, v_\alpha \in L^p(\Omega)$ *tales que* $u_n \to u$ *y* $\partial^\alpha u_n \to v_\alpha$ *en* $L^p(\Omega)$. *Entonces* $v_\alpha = \partial^\alpha u$.

Demostración.- Si $u_n \to u$ en $L^p(\Omega)$, entonces $u_n \to u$ en $\mathcal{D}'(\Omega)$, y en consecuencia $\partial^\alpha u_n \to \partial^\alpha u$ en $\mathcal{D}'(\Omega)$.

Pero, $\partial^\alpha u_n \to v_\alpha$ en $L^p(\Omega)$ implica que $\partial^\alpha u_n \to v_\alpha$ en $\mathcal{D}'(\Omega)$, así que $v_\alpha = \partial^\alpha u$. ■

Teorema 4.9. *Sean* $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ *un abierto no vacío,* $k \geq 1$ *un entero, y* $p \in [1, \infty]$. *Se tiene*

a) $W^{k,p}(\Omega)$ *es un espacio de Banach y* $H^k(\Omega)$ *es un espacio de Hilbert.*

b) $W^{k,p}(\Omega)$ *es un espacio reflexivo si* $p \in (1, \infty)$.

c) *$W^{k,p}(\Omega)$ es un espacio separable si $p \in [1,\infty)$.*

d) *$\mathcal{D}(\Omega) \subset W^{k,p}(\Omega)$.*

e) *$C_c^k(\Omega) \subset W^{k,p}(\Omega)$, y si Ω es acotado, entonces $C^k(\overline{\Omega}) \subset W^{k,p}(\Omega)$.*

Demostración.- Sea $M = \mathrm{card}\,\{\alpha \in \mathbf{Z}_+^N : |\alpha| \leq k\}$ y consideramos el espacio producto

$$X = \prod_{|\alpha|\leq k} L^p(\Omega) = [L^p(\Omega)]^M,$$

que es un espacio de Banach para la norma (producto):

$$||U||_X = \left(\sum_{|\alpha|\leq k} ||u_\alpha||^p_{L^p(\Omega)}\right)^{1/p} \qquad \text{si } p \in [1,\infty),$$
$$||U||_X = \text{máx}_{|\alpha|\leq k}\, ||u_\alpha||_{L^\infty(\Omega)} \quad \text{si } p = \infty,$$

donde $U = (u_\alpha)_{|\alpha|\leq k} \in X$. De hecho, sabemos que X es reflexivo si y sólo si $L^p(\Omega)$ es reflexivo y X es separable si y sólo si $L^p(\Omega)$ lo es.

Consideramos la aplicación lineal

$$J : u \in W^{k,p}(\Omega) \mapsto (\partial^\alpha u)_{|\alpha|\leq k} \in X,$$

y sea $E = J(W^{k,p}(\Omega)) \subset X$. Por la Proposición 4.8 es inmediato comprobar que E es un subespacio vectorial cerrado de X. Así, $(E, ||\cdot||_X)$ es un espacio de Banach que hereda las propiedades de reflexividad y separabilidad de X. Además, J es un isomorfismo isométrico entre $W^{k,p}(\Omega)$ y E. Concluimos que $\left(W^{k,p}(\Omega), ||\cdot||_{W^{k,p}(\Omega)}\right)$ es un espacio de Banach y se tienen b) y c). Los dos últimos apartados son fáciles de comprobar. ■

Observación 4.10. *Los espacios $W^{k,1}(\Omega)$ y $W^{k,\infty}(\Omega)$ no son reflexivos. Además, $W^{k,\infty}(\Omega)$ no es separable (ver [2]).*

Definición 4.11. *Sean $k \geq 1$ un entero y $p \in [1,\infty]$. Definimos $W_0^{k,p}(\Omega)$ como la clausura de $\mathcal{D}(\Omega)$ en $W^{k,p}(\Omega)$, es decir,*

$$W_0^{k,p}(\Omega) \equiv \overline{\mathcal{D}(\Omega)}^{||\cdot||_{W^{k,p}(\Omega)}}.$$

En el caso particular $p = 2$, usaremos la notación $H_0^k(\Omega) \equiv W_0^{k,2}(\Omega)$.

De la propia definición deducimos que $W_0^{k,p}(\Omega)$ es un subespacio vectorial cerrado de $W^{k,p}(\Omega)$ y que, con la norma $||\cdot||_{W^{k,p}(\Omega)}$, es un espacio de Banach que hereda las propiedades de reflexividad y separabilidad de $W^{k,p}(\Omega)$. En el caso $p = 2$, al igual que $H^k(\Omega)$, $H_0^k(\Omega)$ es un espacio de Hilbert con el producto escalar $(\cdot,\cdot)_{H^k(\Omega)}$.

Nota 4.12. *a) Obsérvese que decir que $u \in W_0^{k,p}(\Omega)$ es equivalente a decir que existe una sucesión $\{\varphi_n\}_{n\geq 1} \subset \mathcal{D}(\Omega)$ tal que $\varphi_n \to u$ en $W^{k,p}(\Omega)$, es decir, tal que $\partial^\alpha \varphi_n \to \partial^\alpha u$ en $L^p(\Omega)$, para todo $0 \leq |\alpha| \leq k$, con lo que es interesante encontrar una caracterización manejable del espacio $W_0^{k,p}(\Omega)$.*

b) Aunque $\mathcal{D}(\Omega)$ es denso en $W_0^{k,p}(\Omega)$ no podemos deducir que las funciones $W_0^{k,p}(\Omega)$ tenga soporte compacto en Ω.

c) Utilizando la convolución con una sucesión regularizante, es inmediato comprobar que $C_c^k(\Omega) \subset W_0^{k,p}(\Omega)$, para todo $k \geq 1$, $p \in [1,\infty]$.

d) Sabemos que $W_0^{k,p}(\Omega)$ es un subespacio vectorial cerrado de $W^{k,p}(\Omega)$ y veremos que, en general, es un subespacio vectorial cerrado propio de $W^{k,p}(\Omega)$, aunque en algunos casos coinciden.

Teorema 4.13. *Sean $k \geq 1$, $p \in [1, \infty]$ y sea $u \in W_0^{k,p}(\Omega)$. Definamos $\widetilde{u}$ como la extensión por 0 de u a $\mathbb{R}^N \setminus \Omega$, esto es*

$$\widetilde{u}(x) = \begin{cases} u(x) & x \in \Omega, \\ 0 & x \in \mathbb{R}^N \setminus \Omega. \end{cases}$$

Entonces,

a) $\widetilde{u} \in W_0^{k,p}(\mathbb{R}^N)$,

b) $\partial^\alpha \widetilde{u} = \widetilde{\partial^\alpha u}, \quad \forall |\alpha| \leq k$ y

c) $||\widetilde{u}||_{W^{k,p}(\mathbb{R}^N)} = ||u||_{W^{k,p}(\Omega)}$.

Demostración.- Por hipótesis $u \in W_0^{k,p}(\Omega)$, por lo que existe $\{\varphi_n\}_{n\geq 1} \subset \mathcal{D}(\Omega)$ tal que

$$\begin{cases} \varphi_n \to u \text{ en } L^p(\Omega) \text{ y} \\ \partial^\alpha \varphi_n \to \partial^\alpha u \text{ en } L^p(\Omega), \quad \forall |\alpha| \leq k. \end{cases}$$

Consideramos $\widetilde{\varphi}_n$ definida por

$$\widetilde{\varphi}_n(x) = \begin{cases} \varphi_n(x) & x \in \Omega, \\ 0 & x \in \mathbb{R}^N \setminus \Omega, \end{cases}$$

que evidentemente verifica que $\widetilde{\varphi}_n \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^N)$ y $\partial^\alpha \widetilde{\varphi}_n = \widetilde{\partial^\alpha \varphi_n}$ para $|\alpha| \leq k$. Deducimos que

$$\begin{cases} \widetilde{\varphi}_n \to \widetilde{u} \text{ en } L^p(\mathbb{R}^N) \text{ y} \\ \partial^\alpha \widetilde{\varphi}_n = \widetilde{\partial^\alpha \varphi_n} \to \widetilde{\partial^\alpha u} \text{ en } L^p(\mathbb{R}^N), \quad \forall |\alpha| \leq k. \end{cases}$$

Aplicando la Proposición 4.8 llegamos a que existe $\partial^\alpha \widetilde{u} = \widetilde{\partial^\alpha u} \in L^p(\mathbb{R}^N)$ para todo $|\alpha| \leq k$, es decir, $\widetilde{u} \in W_0^{k,p}(\mathbb{R}^N)$ y $||\widetilde{u}||_{W^{k,p}(\mathbb{R}^N)} = ||u||_{W^{k,p}(\Omega)}$. ∎

Corolario 4.14. *En general, $W^{k,p}(\Omega) \not\equiv W_0^{k,p}(\Omega)$.*

Demostración.- Para ello, consideramos $u \equiv 1$ en $\Omega = (0,1)$. Está claro que $u \in W^{k,p}(\Omega)$ para cualesquiera valores de k y p. Sin embargo $u \notin W_0^{k,p}(\Omega)$, pues eso daría que $\widetilde{u} \in W_0^{k,p}(\mathbb{R})$ y que $\widetilde{u}' \in L^p(\mathbb{R})$, contra el hecho de que $\widetilde{u}' = \delta_0 - \delta_1$, que se puede comprobar que no es una función. ∎

Observación 4.15. *a) Sea $u \in W^{1,p}(\Omega)$ dada. De lo que hemos dicho hasta ahora, podemos afirmar que, en general, $\widetilde{u} \in L^p(\mathbb{R}^N)$, pero $\widetilde{u} \notin W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$.*

b) Lo que sí puede afirmarse por ejemplo es que si $\psi \in C_c^1(\Omega)$, entonces $u\psi \in W^{1,p}(\Omega)$ con

$$\partial_i(u\psi) = \psi \partial_i u + u \partial_i \psi \,,$$

para todo $1 \leq i \leq N$. Además, $\widetilde{u\psi}$ (la prolongación por cero a $\mathbb{R}^N \setminus \Omega$) pertenece a $W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$ y se satisface

$$\partial_i(\widetilde{u\psi}) = \widetilde{\psi \partial_i u} + \widetilde{u \partial_i \psi}, \quad 1 \leq i \leq N.$$

Se deja la comprobación como ejercicio. Lo mismo se satisface si solamente $\psi \in C^1(\mathbb{R}^N) \cap L^\infty(\mathbb{R}^N)$ es tal que $\nabla \psi \in L^\infty(\mathbb{R}^N)^N$ y $\operatorname{sop} \psi \subset \mathbb{R}^N \setminus \partial\Omega$.

4.2. Primeras propiedades de los espacios de Sobolev. Teorema de Friedrichs

Aunque los resultados que vamos a obtener en esta sección son válidos, con los cambios pertinentes, en los espacios $W^{k,p}(\Omega)$, nos vamos a restringir a partir de ahora, por comodidad de notación, a los $W^{1,p}(\Omega)$.

Ya sabemos que en general $\mathcal{D}(\Omega)$ no es denso en $W^{1,p}(\Omega)$, pero, como vamos a demostrar, sí que se tiene la densidad en el caso $\Omega = \mathbb{R}^N$ y $p < \infty$. Para demostrar esto último utilizamos el siguiente resultado:

Lema 4.16. *Si $\rho \in C_c^0(\mathbb{R}^N)$ y $u \in W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$, entonces $\rho * u \in W^{1,p}(\mathbb{R}^N) \cap C^1(\mathbb{R}^N)$ y*

$$\partial_i(\rho * u) = \rho * \partial_i u, \quad \forall\, 1 \le i \le N. \tag{4.4}$$

Demostración.- Basta comprobar (4.4) en el sentido de $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^N)$ y tener en cuenta la Proposición 3.25.

Para cada $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^N)$ fijada se tiene, aplicando Fubini,

$$< \partial_i(\rho * u), \varphi >= -\int_{\mathbf{R}^N} (\rho * u)(x)\partial_i\varphi(x)\,dx$$

$$= -\int_{\mathbf{R}^N}\left(\int_{\mathbf{R}^N} \rho(x-y)\partial_i\varphi(x)\,dx\right)u(y)\,dy = -\int_{\mathbf{R}^N} (\breve{\rho} * \partial_i\varphi)(y)u(y)\,dy,$$

con $\breve{\rho}(y) = \rho(-y)$. Ahora bien, de las propiedades ya vistas para el producto de convolución, sabemos que $\breve{\rho} * \varphi$ pertenece a $\mathcal{D}(\mathbb{R}^N)$, con derivada (clásica) $\partial_i(\breve{\rho} * \varphi) = \breve{\rho} * \partial_i\varphi$.

En consecuencia, aplicando de nuevo Fubini,

$$< \partial_i(\rho * u), \varphi >= -\int_{\mathbf{R}^N} (\breve{\rho} * \partial_i\varphi)(x)u(x)\,dx = -\int_{\mathbf{R}^N} \left(\partial_i(\breve{\rho} * \varphi)\right)(x)u(x)\,dx$$

$$= \int_{\mathbf{R}^N} (\breve{\rho} * \varphi)(x)\partial_i u(x)\,dx = \int_{\mathbf{R}^N} (\rho * \partial_i u)(x)\varphi(x)\,dx =< \rho * \partial_i u, \varphi > .$$

■

Definición 4.17. *Se denomina sucesión truncante en $\mathbb{R}^N$ a cualquier sucesión $\{\zeta_n\} \subset \mathcal{D}(\mathbb{R}^N)$ definida por:*

a) $\zeta_1(x) = \zeta(x)$, *con $\zeta \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^N)$ tal que $0 \le \zeta \le 1$ en $\mathbb{R}^N$, $\zeta \equiv 1$ en $\bar{B}(0,1)$ y $\operatorname{sop}\zeta \subset \bar{B}(0,2)$,*

b) $\zeta_n(x) = \zeta(\frac{x}{n})$, *para todo $n \ge 2$.*

Teorema 4.18. *$\mathcal{D}(\mathbb{R}^N)$ es denso en $W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$, para todo $1 \le p < \infty$.*

Demostración.- La demostración se basa en dos pasos:

1. Regularización: Sea $u \in W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$ fijado. Tomemos $\{\rho_n\}$, una sucesión regularizante en $\mathbb{R}^N$, y denotemos $v_n = \rho_n * u$. Evidentemente, $\{v_n\} \subset C^\infty(\mathbb{R}^N)$ y $v_n \to u$ en $L^p(\mathbb{R}^N)$. Además, por (4.4) y Proposición 3.12 b) sigue que

$$\partial_i v_n = \rho_n * \partial_i u \to \partial_i u \quad \text{en} \quad L^p(\mathbb{R}^N),$$

con lo que

$$v_n \to u \quad \text{en } W^{1,p}(\mathbb{R}^N).$$

2. Truncamiento: Sea $\{\zeta_n\}$ una sucesión truncante en $\mathbb{R}^N$, y denotemos $u_n = \zeta_n v_n$. Veamos que u_n verifica las tesis del Teorema. Evidentemente $u_n \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^N)$. Además,

$$\int_{\mathbf{R}^N} |u_n - v_n|^p\,dx = \int_{\{|x|>n\}} |\zeta_n v_n - v_n|^p\,dx \le \int_{\{|x|>n\}} |v_n|^p\,dx$$

$$\leq 2^p \int_{\{|x|>n\}} |u|^p\,dx + 2^p \int_{\{|x|>n\}} |v_n - u|^p\,dx \to 0.$$

En consecuencia

$$u_n \to u \quad L^p(\mathbb{R}^N).$$

Por otro lado,

$$\partial_i u_n = \zeta_n \partial_i v_n + v_n \frac{1}{n}(\partial_i \zeta)(\frac{x}{n}).$$

De manera análoga a lo hecho anteriormente se demuestra que $\zeta_n \partial_i v_n \to \partial_i u$ en $L^p(\mathbb{R}^N)$. Además, denotando por C una cota superior de los valores absolutos de las parciales primeras de ζ,

$$\int_{\mathbb{R}^N} \left| v_n \frac{1}{n}(\partial_i \zeta)(\frac{x}{n})\right|^p dx \leq \frac{C^p}{n^p} \int_{\mathbb{R}^N} |v_n|^p\,dx \to 0,$$

de donde se deduce que

$$\partial_i u_n \to \partial_i u \quad L^p(\mathbb{R}^N).$$

■

Es claro ahora el siguiente resultado:

Corolario 4.19. *Se tiene que $W^{1,p}(\mathbb{R}^N) = W_0^{1,p}(\mathbb{R}^N)$, para todo $1 \leq p < \infty$.*

A partir de ahora utilizamos la notación $\Omega' \subset\subset \Omega$ para expresar que Ω' es un abierto tal que su clausura es un compacto contenido en Ω. En el caso de $\Omega \neq \mathbb{R}^N$, se tiene:

Teorema 4.20. (de Friedrichs) *Sean $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ abierto y $1 \leq p < \infty$. Dada $u \in W^{1,p}(\Omega)$, existe una sucesión $\{u_n\} \subset \mathcal{D}(\mathbb{R}^N)$ tal que*

$$u_n \to u \text{ en } L^p(\Omega), \qquad \partial_i u_n \to \partial_i u \text{ en } L^p(\Omega'),$$

para todo $1 \leq i \leq N$ y todo abierto $\Omega' \subset\subset \Omega$.

Demostración.- De nuevo la demostración consiste en un proceso de regularización seguido por uno de truncamiento.

1. Regularización: Denotemos por $\tilde{u}$ la prolongación de u por cero a $\mathbb{R}^N \setminus \Omega$. En principio, $\tilde{u}$ no pertenece a $W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$.

Fijemos $\{\rho_n\}$, una sucesión regularizante en $\mathbb{R}^N$, y denotemos $v_n = \rho_n * \tilde{u}$. Sabemos que $v_n \in C^\infty(\mathbb{R}^N)$ y

$$v_n \to \tilde{u} \quad \text{en } L^p(\mathbb{R}^N).$$

Dado $\Omega' \subset\subset \Omega$, fijemos $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ tal que $0 \leq \varphi \leq 1$ y $\varphi \equiv 1$ en todo un entorno de Ω' contenido en Ω, que existe gracias al Teorema 3.6 1). En primer lugar, observemos que

$$\operatorname{sop}(\rho_n * \widetilde{\varphi u} - \rho_n * \tilde{u}) = \operatorname{sop}(\rho_n * (\widetilde{\varphi} - 1)\widetilde{u}) \subset \overline{\operatorname{sop}(\rho_n) + \operatorname{sop}(\widetilde{\varphi} - 1)\widetilde{u}} \subset \overline{\overline{B}(0, 1/n) + \operatorname{sop}(\widetilde{\varphi} - 1)\widetilde{u}} \subset \mathbb{R}^N \setminus \Omega',$$

para todo n suficientemente grande, con lo que podemos afirmar la existencia de un n_0 tal que si $n \geq n_0$ entonces

$$\rho_n * \widetilde{\varphi u} = \rho_n * \tilde{u} \quad \text{en } \Omega'. \tag{4.5}$$

Por la Observación 4.15 2), $\widetilde{\varphi u} \in W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$ y $\partial_i(\widetilde{\varphi u}) = \widetilde{\varphi \partial_i u} + \widetilde{u \partial_i \varphi}$. Así:

$$\partial_i(\rho_n * \widetilde{\varphi u}) \to \widetilde{\varphi \partial_i u} + \widetilde{u \partial_i \varphi} \quad \text{en } L^p(\mathbb{R}^N),$$

y en particular

$$\partial_i v_n = \partial_i(\rho_n * \widetilde{\varphi u}) \to \varphi \partial_i u + u \partial_i \varphi \quad \text{en } L^p(\Omega').$$

Pero en Ω' se satisface $\varphi = 1$ y $\partial_i \varphi = 0$, con lo que, por (4.5),

$$\partial_i(\rho_n * \tilde{u}) = \partial_i v_n \to \partial_i u \quad \text{en } L^p(\Omega').$$

2. Truncamiento: Consideremos ahora una sucesión truncante ζ_n y tomemos

$$u_n = \zeta_n v_n \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^N).$$

Basta ahora, para terminar la demostración, razonar como en el Teorema 4.18. ■

A partir de ahora, en la demostración de los resultados que siguen, que son válidos para todo $p \in [1, \infty]$, vamos a suponer que p es finito; para el razonamiento en el caso $p = \infty$ consúltese [2].

Como primera consecuencia del teorema de Friedrichs, es fácil obtener algunas reglas básicas de derivación en $W^{1,p}(\Omega)$.

Proposición 4.21. (Derivación del producto) *Si u y v pertenecen a $W^{1,p}(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$, entonces también $uv \in W^{1,p}(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$, con*

$$\partial_i(uv) = u \partial_i v + v \partial_i u\,, i = 1, ..., N. \tag{4.6}$$

Demostración.- Como $u, v \in L^\infty(\Omega) \cap L^p(\Omega)$ es inmediato que $uv \in L^\infty(\Omega) \cap L^p(\Omega)$.

Es inmediato ahora que basta demostrar (4.6) para concluir el resultado. Suponemos que $1 \leq p < \infty$, para el caso $p = \infty$ consúltese [2].

Consideremos las sucesiones $u_n = \zeta_n(\rho_n * \tilde{u})$ y $v_n = \zeta_n(\rho_n * \tilde{v})$ de la demostración del teorema de Friedrichs. Obsérvese que

$$\|u_n\|_{L^\infty(\Omega)} = \|\zeta_n(\rho_n * \tilde{u})\|_{L^\infty(\Omega)} \leq \|\rho_n * \tilde{u}\|_{L^\infty(\mathbf{R}^N)} \leq \|\rho_n\|_{L^1(\mathbf{R}^N)} \|\tilde{u}\|_{L^\infty(\mathbf{R}^N)} = \|u\|_{L^\infty(\Omega)},$$

y por tanto,

$$\|u_n\|_{L^\infty(\Omega)} \leq \|u\|_{L^\infty(\Omega)}\,, \qquad \|v_n\|_{L^\infty(\Omega)} \leq \|v\|_{L^\infty(\Omega)}\,. \tag{4.7}$$

Dada $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$, se fija un abierto Ω' tal que $\operatorname{sop} \varphi \subset \Omega' \subset\subset \Omega$. Probar (4.6) es equivalente a probar

$$\int_{\Omega'} uv \partial_i \varphi \, dx = -\int_{\Omega'} (u \partial_i v + v \partial_i u)\, \varphi \, dx.$$

Recordemos que gracias al Teorema de Friedrichs

$$u_n \to u, \quad v_n \to v \qquad \text{en } L^p(\Omega) \text{ y},$$

$$\partial_i u_n \to \partial_i u, \quad \partial_i v_n \to \partial_i v \qquad \text{en } L^p(\Omega').$$

Además, extrayendo subsucesiones si es preciso (ver Capítulo 3), podemos suponer que

$$u_n \to u \text{ y } v_n \to v \text{ c.p.d. en } \Omega \text{ y } |u_n| \leq h,\ |v_n| \leq g \text{ con } h, g \in L^p(\Omega).$$

Como las u_n y las v_n son en particular de $C^\infty(\Omega)$, se tiene:

$$\int_{\Omega'} u_n v_n \partial_i \varphi \, dx = -\int_{\Omega'} (u_n \partial_i v_n + v_n \partial_i u_n)\, \varphi \, dx. \tag{4.8}$$

Basta ahora hacer pasar al límite en (4.8) por convergencia dominada, para obtener (4.6). En efecto, denotando por

$$f_n := u_n v_n \partial_i \varphi,$$

es claro que $f_n(x) \to u(x)v(x)\partial v_i(x)$ c.p.d. en Ω' y gracias a (4.7)

$$|f_n| \leq C < \infty,$$

y por tanto gracias al Teorema de la Convergencia Dominada

$$\int_{\Omega'} u_n v_n \partial_i \varphi \, dx \to \int_{\Omega'} uv \partial_i \varphi \, dx.$$

Análogamente se actúa con las otras integrales de (4.8). ■

Observación 4.22. Si u y v pertenecen a $H^1(\Omega)$, la fórmula (4.6) continúa siendo válida aunque ninguna de las dos funciones esté acotada (razónese), y por tanto, al menos, tenemos garantizado que $uv \in W^{1,1}(\Omega)$.

Proposición 4.23. (Derivada de una composición) *Sea $G \in C^1(\mathbb{R})$ una función tal que $G(0) = 0$ y $|G'(s)| \leq C < \infty$, $\forall s \in \mathbb{R}$. Si $u \in W^{1,p}(\Omega)$, entonces*

$$G(u) \in W^{1,p}(\Omega) \quad y \quad \partial_i (G(u)) = G'(u)\partial_i u \quad \forall\, 1 \leq i \leq N. \tag{4.9}$$

Además, si $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$, entonces también $G(u) \in W_0^{1,p}(\Omega)$.

Demostración.- Evidentemente

$$|G(u)| = |G(u) - G(0)| \leq C|u|,$$

con lo que $G(u) \in L^p(\Omega)$. Además, como $G'(u) \in L^\infty(\Omega)$ se tiene que $G'(u)\partial_i u \in L^p(\Omega)$. Así que, para ver que $G(u) \in W^{1,p}(\Omega)$, sólo falta demostrar que

$$\int_\Omega G'(u)(\partial_i u)\varphi \, dx = -\int_\Omega G(u)\partial_i \varphi \, dx \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega). \tag{4.10}$$

Supongamos que p es finito, para el caso $p = \infty$ consúltese [2]. Para demostrar (4.10), se toma una sucesión u_n en las condiciones del teorema de Friedrichs. Dada $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$, se fija un abierto Ω' tal que $\operatorname{sop} \varphi \subset \Omega' \subset\subset \Omega$. Como $G(u_n) \in C^1(\mathbb{R}^N)$, en particular se satisface

$$\int_{\Omega'} G'(u_n)(\partial_i u_n)\varphi \, dx = -\int_{\Omega'} G(u_n)\partial_i \varphi \, dx. \tag{4.11}$$

Basta ahora pasar al límite en (4.11), para alguna subsucesión de las u_n. Para ello se observa que de $\{u_n\}$ se puede extraer otra subsucesión $\{u_\mu\}$ tal que

$$\begin{aligned}
&u_\mu \to u \quad \text{c.p.d. en } \Omega,\\
&\partial_i u_\mu \to \partial_i u \quad \text{c.p.d. en } \Omega',\\
&|u_\mu(x)| \leq v(x) \quad \text{c.p.d. en } \Omega, \text{ con } v \in L^p(\Omega),\\
&|\partial_i u_\mu(x)| \leq h_i(x) \quad \text{c.p.d. en } \Omega', \text{ con } h_i \in L^p(\Omega').
\end{aligned}$$

Con lo que, en particular, llamando

$$f_\mu = G(u_\mu)\partial_i \varphi,$$

tenemos que

$$\begin{aligned}
&f_\mu(x) \to G(u(x))\partial_i \varphi(x) \quad \text{c.p.d. en } \Omega' \text{ y}\\
&|f_\mu| \leq |G(u_\mu)| \leq C|u_\mu| \leq Cv \quad \text{en } \Omega'.
\end{aligned}$$

Teniendo en cuenta el teorema de convergencia dominada de Lebesgue se tiene que

$$\int_{\Omega'} G(u_\mu)\partial_i \varphi \to \int_{\Omega'} G(u)\partial_i \varphi.$$

Por otro lado, tomando

$$g_\mu = G'(u_\mu)(\partial_i u_\mu)\varphi,$$

se tiene que

$$\begin{aligned} &g_\mu(x) \to G'(u(x))\partial_i u(x)\varphi(x) \quad \text{c.p.d. en } \Omega' \text{ y además} \\ &|g_\mu| = |G'(u_\mu)||\partial_i u_\mu||\varphi| \le C h_i \in L^p(\Omega'), \end{aligned}$$

por el teorema de convergencia dominada de Lebesgue se concluye que

$$\int_{\Omega'} G'(u_\mu)\partial_i u_\mu \varphi \to \int_{\Omega'} G'(u)\partial_i u \varphi.$$

Finalmente, si $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$, existe una sucesión $\{\varphi_n\}_{n\ge1} \subset \mathcal{D}(\Omega)$ tal que $\varphi_n \to u$ en $W^{1,p}(\Omega)$. Como $G \in C^1(\mathbb{R})$ y $G(0) = 0$, sigue que

$$\operatorname{sop}(G(\varphi_n)) \subset \operatorname{sop}(\varphi_n)$$

por lo que es inmediato que $G(\varphi_n) \in C_c^1(\Omega) \subset W_0^{1,p}(\Omega)$.

Por otra parte, existe una subsucesión $\{\varphi_\mu\}_{\mu\ge1} \subset \{\varphi_n\}_{n\ge1}$ tal que $\varphi_\mu \to u$ y $\partial_i\varphi_\mu \to \partial_i u$ c.p.d. en Ω, para todo $i = 1, .., N$, satisfaciéndose además que

$$|\varphi_\mu(x)| \le h(x), \quad |\partial_i\varphi_\mu(x)| \le h(x), \quad \text{c.p.d. en } \Omega, \text{ para todo } i = 1, .., N,$$

para alguna función $h \in L^p(\Omega)$.

Es ahora inmediato comprobar que $G(\varphi_\mu) \to G(u)$ en $W^{1,p}(\Omega)$, y por tanto $G(u) \in W_0^{1,p}(\Omega)$. ■

Observación 4.24. *Las proposiciones precedentes pueden ser extendidas a situaciones más generales:*

a) La igualdad (4.6) continúa siendo válida si u y v son dos funciones de $L^1_{loc}(\Omega)$ tales $uv \in L^1_{loc}(\Omega)$ y ∇u, ∇v y $u\nabla v + v\nabla u$ pertenecen todas a $L^1_{loc}(\Omega)^N$ (ver [5]).

b) También la Proposición 4.23 es cierta con G globalmente-Lipschitz, ver [7] pag 60.

Por otra parte, se puede demostrar que

Corolario 4.25. *Sea $p \in [1,\infty)$ y $u \in W^{1,p}(\Omega)$ (resp. $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$). Entonces, las funciones*

$$u^+ := \max\{u, 0\},\ u^- := \max\{-u, 0\},\ |u| \in W^{1,p}(\Omega) \quad (\textit{resp. en } W_0^{1,p}(\Omega)) \textit{ y}$$

$$\partial_i u^+(x) = \begin{cases} \partial_i u & \textit{si } u(x) > 0, \\ 0 & \textit{si } u(x) \le 0, \end{cases} \quad \partial_i u^-(x) = \begin{cases} 0 & \textit{si } u(x) \ge 0, \\ -\partial_i u & \textit{si } u(x) < 0, \end{cases} \quad \partial_i|u|(x) = \begin{cases} \partial_i u & \textit{si } u(x) > 0, \\ -\partial_i u & \textit{si } u(x) < 0, \\ 0 & \textit{si } u(x) = 0, \end{cases}$$

casi por doquier en Ω.

Se propone como ejercicio demostrar este resultado, usando las funciones

$$G_\epsilon(s) = \left[(s^2 + \epsilon^2)^{1/2} - \epsilon\right] 1_{\{s>0\}}.$$

Como una última consecuencia del teorema de Friedrichs, obtenemos es resultado siguiente:

Proposición 4.26. (Fórmula de cambio de variables) *Sean Ω y $\widetilde{\Omega}$ dos abiertos de $\mathbb{R}^N$, y $H : \widetilde{\Omega} \to \Omega$ una aplicación biyectiva, $x = H(y)$, tal que*

$$H \in C^1(\widetilde{\Omega})^N, \quad H^{-1} \in C^1(\Omega)^N, \quad \operatorname{Jac} H \in L^\infty(\widetilde{\Omega})^{N\times N}, \quad \operatorname{Jac} H^{-1} \in L^\infty(\Omega)^{N\times N},$$

donde por $\operatorname{Jac} H$ *denotamos a la matriz jacobiana de H.*

En estas condiciones, si $u \in W^{1,p}(\Omega)$, entonces $u \circ H \in W^{1,p}(\widetilde{\Omega})$, y

$$\frac{\partial}{\partial y_j}(u \circ H)(y) = \sum_{i=1}^{N} \frac{\partial u}{\partial x_i}(H(y))\frac{\partial H_i}{\partial y_j}(y) \quad \forall j = 1, ..., N. \tag{4.12}$$

Demostración.- Como $\operatorname{Jac} H^{-1} \in L^\infty(\Omega)^{N\times N}$ es inmediato comprobar que $u\circ H \in L^p(\widetilde{\Omega})$, y por la misma razón, y el hecho de que $\operatorname{Jac} H \in L^\infty(\widetilde{\Omega})^{N\times N}$, para probar que $u\circ H \in W^{1,p}(\widetilde{\Omega})$, basta con demostrar (4.12).

Supongamos que $1 \leq p < \infty$. En tal caso, por el teorema de Friedrichs, existe una sucesión $\{u_n\} \subset \mathcal{D}(\mathbb{R}^N)$ tal que $u_n \to u$ en $L^p(\Omega)$ y $\partial_i u_n \to \partial_i u$ en $L^p(\Omega')$ para todo $1 \leq i \leq N$ y todo abierto $\Omega' \subset\subset \Omega$. Entonces, nuevamente por el carácter L^∞ de $\operatorname{Jac} H$ y $\operatorname{Jac} H^{-1}$, tenemos que $u_n \circ H \to u \circ H$ en $L^p(\widetilde{\Omega})$ y

$$\left(\frac{\partial u_n}{\partial x_i} \circ H\right) \frac{\partial H_i}{\partial y_j} \to \left(\frac{\partial u}{\partial x_i} \circ H\right) \frac{\partial H_i}{\partial y_j} \quad \text{en } L^p(\widetilde{\Omega}') \text{ para todo abierto } \widetilde{\Omega}' \subset\subset \widetilde{\Omega}.$$

Como $u_n \circ H \in C^1(\widetilde{\Omega})$, dada cualquier $\varphi \in \mathcal{D}(\widetilde{\Omega})$, se tiene

$$\int_{\widetilde{\Omega}} (u_n \circ H) \frac{\partial \varphi}{\partial y_j}\, dy = -\int_{\widetilde{\Omega}} \sum_{i=1}^N \left(\frac{\partial u_n}{\partial x_i} \circ H\right) \frac{\partial H_i}{\partial y_j} \varphi\, dy\,.$$

Pasando al límite en esta igualdad, se obtiene (4.12). ■

CAPÍTULO 5

Teoremas de Prolongación y de Densidad en los Espacios de Sobolev

En general, hay resultados que son más fáciles de probar para funciones que están definidas en todo $\mathbb{R}^N$. Así, para poder probarlo en un abierto Ω, una técnica consiste en prolongar la función de Ω a todo $\mathbb{R}^N$, usar el resultado válido en $\mathbb{R}^N$ y, finalmente, restringir la función a Ω. Estos son resultados de <u>prolongación</u>, de entre los que ya sabemos que si $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$ entonces su prolongación $\widetilde{u}$ por cero a $\mathbb{R}^N \setminus \Omega$ pertenece a $W_0^{1,p}(\mathbb{R}^N)$ y de hecho tiene la misma norma en $L^p(\mathbb{R}^N)$ y $W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$ que u en $L^p(\Omega)$ y $W^{1,p}(\Omega)$ respectivamente. También hemos visto cómo esta afirmación no es cierta en general para las funciones de $W^{1,p}(\Omega)$.

Por otra parte, hay muchos resultados relativos a espacios de funciones fáciles de probar para funciones regulares. Mediante razonamientos de <u>densidad</u>, éstos pueden ser generalizados a funciones arbitrarias de un espacio dado. En este sentido, son importantes resultados de densidad (aproximación) de los elementos de $W^{k,p}(\Omega)$. Ya sabemos que $\mathcal{D}(\Omega)$ es denso en $L^p(\Omega)$, $1 \leq p < \infty$, que $\mathcal{D}(\mathbb{R}^N)$ es denso en $W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$, para todo $1 \leq p < \infty$, y por supuesto por definición $\mathcal{D}(\Omega)$ es denso en $W_0^{k,p}(\Omega)$, así como el importante Teorema de Friedrichs. En este tema vamos a ver la manera en que se pueden extender estos resultados a las funciones de $W^{1,p}(\Omega)$, cuando el abierto Ω es regular.

En todo el tema, Ω denotará un abierto no vacío de $\mathbb{R}^N$, con $N \geq 1$ entero. Dado $x \in \mathbb{R}^N$, escribiremos también $x = (x', x_N)$, con $x' \in \mathbb{R}^{N-1}$, $x_N \in \mathbb{R}$, y usaremos $|x'|$ para denotar la norma euclidiana de x'.

Denotaremos

$$\mathbb{R}_+^N = \{x = (x', x_N) \in \mathbb{R}^N : \ x_N > 0\},$$

$$Q = \{x = (x', x_N) \in \mathbb{R}^N : \ |x'| < 1, \ |x_N| < 1\},$$

$$Q_+ = Q \cap \mathbb{R}_+^N,$$

$$Q_0 = \{x = (x', 0) \in \mathbb{R}^N : \ |x'| < 1\}.$$

5.1. Teorema de Prolongación

Introducimos en primer lugar la clase de abiertos para los que vamos a demostrar el resultado de prolongación.

Definición 5.1. *Sea $m \geq 1$ un entero. Diremos que Ω es un abierto de clase C^m si para cada punto $x \in \partial\Omega$ existen un entorno abierto $\mathcal{O}$ de x y una aplicación biyectiva $H : Q \to \mathcal{O}$ tal que*

$$H \in C^m(\overline{Q}), \quad H^{-1} \in C^m(\overline{\mathcal{O}}), \quad H(Q_+) = \mathcal{O} \cap \Omega, \quad H(Q_0) = \mathcal{O} \cap \partial\Omega\,.$$

Nosotros vamos a establecer el resultado de prolongación para los abiertos de clase C^1 con frontera acotada, y también en el caso en que $\Omega = \mathbb{R}^N_+$.

Lema 5.2. *Sea $u \in W^{1,p}(Q_+)$ una función dada, y denotemos por u^* a la función definida sobre Q mediante prolongación por reflexión de u, es decir,*

$$u^*(x', x_N) = \begin{cases} u(x', x_N) & si\ x_N > 0, \\ u(x', -x_N) & si\ x_N < 0. \end{cases}$$

Entonces $u^* \in W^{1,p}(Q)$ y satisface

$$\|u^*\|_{L^p(Q)} \le 2\|u\|_{L^p(Q_+)}, \quad \|u^*\|_{W^{1,p}(Q)} \le 2\|u\|_{W^{1,p}(Q_+)}\,.$$

Demostración.- El resultado es consecuencia de que las derivadas parciales primeras de u^* en el sentido de $\mathcal{D}'(Q)$ vienen dadas por

$$\partial_i u^* = (\partial_i u)^*, \quad \text{si } 1 \le i \le N-1, \quad \partial_N u^* = (\partial_N u)^\diamond, \tag{5.1}$$

donde $(\partial_i u)^*$ es la prolongación por reflexión de $\partial_i u$, y para cualquier función real f definida sobre Q_+ se denota $f^\diamond$ a la función definida sobre Q por

$$f^\diamond(x', x_N) = \begin{cases} f(x', x_N) & \text{si } x_N > 0, \\ -f(x', -x_N) & \text{si } x_N < 0. \end{cases}$$

Las igualdades en (5.1), aunque intuitivamente claras, no son inmediatas, y necesitan de una demostración cuidadosa que omitimos y que se puede consultar en [2] (Lema IX.2) o [7] (Teorema 2.3.1). ■

Observación 5.3. *El resultado del Lema 5.2 continúa siendo cierto, con la misma demostración, si sustituimos Q_+ por $\mathbb{R}^N_+$.*

En lo que sigue, y en varias ocasiones durante el curso, vamos a hacer uso del siguiente resultado, cuya demostración se puede consultar, por ejemplo, en [3].

Lema 5.4. *(**Partición de la unidad**) Sean Γ un compacto de $\mathbb{R}^N$ y $\mathcal{O}_1$,..., $\mathcal{O}_k$ subconjuntos abiertos de $\mathbb{R}^N$ tales que $\Gamma \subset \bigcup_{i=1}^{k} \mathcal{O}_i$.*

Entonces, existen $k+1$ funciones θ_0, θ_1,...,θ_k de $C^\infty(\mathbb{R}^N)$ tales que

a) $0 \le \theta_i(x) \le 1$ *para todo* $x \in \mathbb{R}^N$ *y cualquier* $i = 0, 1, ..., k$,

b) $\sum_{i=0}^{k} \theta_i(x) = 1$ *para todo* $x \in \mathbb{R}^N$,

c) *sop*(θ_i) *es un compacto y sop*$(\theta_i) \subset \mathcal{O}_i$ *para todo* $i = 1, ..., k$,

d) *sop*$(\theta_0) \subset \mathbb{R}^N \setminus \Gamma$.

Si Ω un abierto acotado y $\Gamma = \partial\Omega$, entonces $\theta_{0|\Omega} \in \mathcal{D}(\Omega)$.

A la familia $(\theta_i)_{0\le i\le k}$ se le denomina una partición de la unidad subordinada al recubrimiento $(\mathcal{O}_i)_{1\le i\le k}$ de Γ.

Estamos ahora en condiciones de demostrar el teorema de prolongación para funciones de $W^{1,p}(\Omega)$.

Teorema 5.5. *Supongamos que Ω es un abierto de $\mathbb{R}^N$ de clase C^1 con frontera $\partial\Omega$ acotada. Entonces existe una aplicación $P : W^{1,p}(\Omega) \to W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$ lineal y tal que para toda $u \in W^{1,p}(\Omega)$*

a) $Pu_{|\Omega} = u$,

b) $\|Pu\|_{L^p(\mathbb{R}^N)} \leq C\|u\|_{L^p(\Omega)}$,

c) $\|Pu\|_{W^{1,p}(\mathbb{R}^N)} \leq C\|u\|_{W^{1,p}(\Omega)}$,

donde $C > 0$ es una constante que sólo depende de Ω.

El resultado continúa siendo cierto si $\Omega = \mathbb{R}^N_+$.

Demostración.- Que el teorema se satisface si $\Omega = \mathbb{R}^N_+$ es consecuencia evidente de la Observación 5.3, tomando en este caso $Pu = u^*$ y $C = 2$.

Supongamos ahora que Ω es un abierto de $\mathbb{R}^N$ de clase C^1 con frontera $\partial\Omega$ acotada. En tal caso, existe un recubrimiento abierto finito $(\mathcal{O}_i)_{1\leq i\leq k}$ de $\partial\Omega$ tal que para para cada $i = 1,..,k$ existe una aplicación biyectiva $H_i : Q \to \mathcal{O}_i$ tal que

$$H_i \in C^1(\overline{Q}), \quad H_i^{-1} \in C^1(\overline{\mathcal{O}}_i), \quad H_i(Q_+) = \mathcal{O}_i \cap \Omega, \quad H_i(Q_0) = \mathcal{O}_i \cap \partial\Omega\,.$$

Consideremos una partición de la unidad subordinada al recubrimiento $(\mathcal{O}_i)_{1\leq i\leq k}$ de $\Gamma = \partial\Omega$, formada por las funciones θ_0, $\theta_1, ..., \theta_k$, con las propiedades descritas en el Lema 5.4. Diremos en tal caso que hemos rectificado $\partial\Omega$ por cartas locales y hemos introducido una partición de la unidad.

Dada una función $u \in W^{1,p}(\Omega)$, denotemos $u_i = \theta_i u$, $i = 0, 1, .., k$, con lo que podemos escribir que

$$u = \sum_{i=0}^{k} u_i.$$

Lo que hacemos a continuación es prolongar a $\mathbb{R}^N$ cada función u_i, distinguiendo el caso $i = 0$ de los demás.

Prolongación de u_0.- Evidentemente, $\theta_0 \in C^1(\mathbb{R}^N) \cap L^\infty(\mathbb{R}^N)$, con $\operatorname{sop}(\theta_0) \subset \mathbb{R}^N \setminus \partial\Omega$. Además, como

$$\nabla\theta_0 = -\sum_{i=1}^{k} \nabla\theta_i,$$

es claro que $\nabla\theta_0 \in L^\infty(\mathbb{R}^N)^N$, gracias a que cada $\operatorname{sop}(\theta_i)$ es un compacto y $\operatorname{sop}(\theta_i) \subset \mathcal{O}_i$. En consecuencia, si consideramos la función $\widetilde{u}_0$, prolongación por cero de u_0 a $\mathbb{R}^N \setminus \Omega$, por la Observación 4.15 podemos afirmar que $\widetilde{u}_0 \in W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$, y satisface

$$\partial_i\widetilde{u}_0 = \theta_0\widetilde{\partial_i u} + \widetilde{u}\partial_i\theta_0,$$

con lo que

$$\|\widetilde{u}_0\|_{L^p(\mathbb{R}^N)} \leq C_0\|u\|_{L^p(\Omega)} \quad \text{y} \quad \|\widetilde{u}_0\|_{W^{1,p}(\mathbb{R}^N)} \leq C_0\|u\|_{W^{1,p}(\Omega)},$$

con $C_0 > 0$ sólo dependiente de θ_0.

Prolongación de u_i para $i = 1, ..., k$.- Se considera la restricción de u a $\mathcal{O}_i \cap \Omega$. Se define

$$v_i(y) = u(H_i(y)), \quad \text{para cada } y \in Q_+.$$

Por la Proposición 4.26, sabemos que $v_i \in W^{1,p}(Q_+)$. A continuación, se considera la función v_i^*, definida sobre Q por prolongación por reflexión de v_i, que sabemos que satisface $v_i^* \in W^{1,p}(Q)$. Seguidamente, se define

$$w_i(x) = v_i^*(H_i^{-1}(x)), \quad \forall\, x \in \mathcal{O}_i.$$

Por construcción y por la Proposición 4.26, $w_i \in W^{1,p}(\mathcal{O}_i)$, $w_i(x) = u(x)$ sobre $\mathcal{O}_i \cap \Omega$,

$$\|w_i\|_{L^p(\mathcal{O}_i)} \leq c_i \|u\|_{L^p(\Omega)} \quad \text{y} \quad \|w_i\|_{W^{1,p}(\mathcal{O}_i)} \leq c_i \|u\|_{W^{1,p}(\Omega)},$$

con $c_i > 0$ una constante que sólo depende de H_i.

Si se define ahora

$$\widehat{u}_i(x) = \begin{cases} \theta_i(x) w_i(x) & \text{si } x \in \mathcal{O}_i, \\ 0 & \text{si } x \in \mathbb{R}^N \setminus \mathcal{O}_i, \end{cases}$$

por la Observación 4.15 2) y por construcción, podemos afirmar que $\widehat{u}_i \in W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$, $\widehat{u}_i(x) = u_i(x)$ para todo $x \in \Omega$, y

$$\|\widehat{u}_i\|_{L^p(\mathbb{R}^N)} \leq C_i \|u\|_{L^p(\Omega)} \quad \text{y} \quad \|\widehat{u}_i\|_{W^{1,p}(\mathbb{R}^N)} \leq C_i \|u\|_{W^{1,p}(\Omega)},$$

con $C_i > 0$ una constante que sólo depende de c_i y de θ_i.

Basta definir

$$Pu = \widetilde{u}_0 + \sum_{i=1}^{k} \widehat{u}_i.$$

Es inmediato comprobar que P satisfacen todas las condiciones del teorema. ■

Observación 5.6. *El teorema de prolongación es también válido para algunos abiertos que no son C^1. Así por ejemplo, lo es para $\Omega = (0,1) \times (0,1)$ (ver [2]).*

5.2. Teorema de densidad

Como una consecuencia sencilla del teorema de prolongación, obtenemos el resultado de densidad siguiente.

Teorema 5.7. *Supongamos que Ω es un abierto de $\mathbb{R}^N$ de clase C^1 y sea $u \in W^{1,p}(\Omega)$, con $1 \leq p < \infty$. Entonces, existe una sucesión $\{u_n\} \subset \mathcal{D}(\mathbb{R}^N)$ tal que*

$$u_{n|\Omega} \to u \quad \text{en } W^{1,p}(\Omega).$$

Es decir, si denotamos por $\mathcal{D}(\overline{\Omega})$ al espacio de las restricciones a Ω de funciones de $\mathcal{D}(\mathbb{R}^N)$, podemos afirmar que $\mathcal{D}(\overline{\Omega})$ es denso en $W^{1,p}(\Omega)$, para todo $1 \leq p < \infty$.

Demostración.- Sea $u \in W^{1,p}(\Omega)$, con $1 \leq p < \infty$. Sean $\{\rho_n\}$ una sucesión regularizante y $\{\zeta_n\}$ una sucesión truncante en $\mathbb{R}^N$.

a) Si $\partial\Omega$ es acotada, entonces existe un operador de prolongación P satisfaciendo las condiciones del Teorema 5.5. Es sencillo comprobar que $u_n = \zeta_n(\rho_n * Pu)$ es una sucesión tal que $u_n \to Pu$ en $W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$ y satisface las condiciones del teorema.

b) Si $\partial\Omega$ no es acotada, dado $\varepsilon > 0$ existe un $n_0 \geq 1$ tal que $\|u - \zeta_{n_0} u\|_{W^{1,p}(\Omega)} < \varepsilon$. Teniendo en cuenta que sólo interviene la intersección de $\partial\Omega$ con la bola de centro 0 y radio grande, se puede construir una prolongación $v \in W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$ de $\zeta_{n_0} u$. Basta ahora tener en cuenta que existe $w \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^N)$ tal que $\|v - w\|_{W^{1,p}(\mathbb{R}^N)} < \varepsilon$. ■

Observación 5.8. *En el caso de un abierto Ω general, un resultado de demostración difícil debido a Meyers y Serrin afirma que $C^\infty(\Omega) \cap W^{1,p}(\Omega)$ es denso en $W^{1,p}(\Omega)$ para todo $1 \leq p < \infty$ (ver [1]).*

CAPÍTULO 6

Teoremas de Inyección continua y compacta en los Espacios de Sobolev

En todo el tema, Ω denotará un abierto no vacío de $\mathbb{R}^N$, con $N \geq 2$ entero, y por definición, para cada $1 \leq p \leq \infty$,

$$\|\nabla u\|_{L^p(\Omega)^N} = \sum_{i=1}^{N} \|\partial_i u\|_{L^p(\Omega)}.$$

6.1. Teoremas de Inyección continua

Teorema 6.1. (Sobolev-Gagliardo-Nirenberg) *Sea $1 \leq p < N$ y denotemos p^* al número definido por*

$$\frac{1}{p^*} = \frac{1}{p} - \frac{1}{N} \qquad \left(p^* = \frac{Np}{N-p}\right).$$

Se satisface

$$W^{1,p}(\mathbb{R}^N) \hookrightarrow L^{p^*}(\mathbb{R}^N),$$

con inyección continua. Además, existe una constante positiva $C = C(p, N)$ tal que

$$\|u\|_{L^{p^*}(\mathbb{R}^N)} \leq C\|\nabla u\|_{L^p(\mathbb{R}^N)^N}, \quad \textit{para toda } u \in W^{1,p}(\mathbb{R}^N). \tag{6.1}$$

Demostración.- Vamos a demostrar el resultado en el caso $N = 2$. La prueba del caso N general se puede consultar en [2].

Así pues, suponemos $N = 2$, y en consecuencia $1 \leq p < 2$ y $p^* = \dfrac{2p}{2-p} \geq 2p \geq 2$.

Supongamos en primer lugar que $u \in C_c^1(\mathbb{R}^2)$. En tal caso, para todo $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$,

$$|u(x_1, x_2)| = \left| \int_{-\infty}^{x_1} \partial_1 u(t, x_2)\, dt \right| \leq \int_{-\infty}^{\infty} |\partial_1 u(t, x_2)|\, dt,$$

$$|u(x_1, x_2)| = \left| \int_{-\infty}^{x_2} \partial_2 u(x_1, t)\, dt \right| \leq \int_{-\infty}^{\infty} |\partial_2 u(x_1, t)|\, dt,$$

y en consecuencia, multiplicando ambas desigualdades e integrando en $\mathbb{R}^2$, obtenemos

$$\|u\|^2_{L^2(\mathbb{R}^2)} \leq \|\partial_1 u\|_{L^1(\mathbb{R}^2)} \|\partial_2 u\|_{L^1(\mathbb{R}^2)}. \tag{6.2}$$

Obsérvese que si $p = 1$, entonces $p^* = 2$, y en este caso (6.1) se obtiene directamente de (6.2), con $C = 1/2$.

Supongamos por tanto $p > 1$, sea ahora $r \geq 1$, y consideremos la función $|u|^{r-1}u$, que también pertenece a $C_c^1(\mathbb{R}^2)$, con derivadas parciales $\partial_i(|u|^{r-1}u) = r|u|^{r-1}\partial_i u$. Aplicando la desigualdad (6.2) a $|u|^{r-1}u$, obtenemos

$$\int_{\mathbf{R}^2} |u(x)|^{2r}\,dx \leq r^2 \||u|^{r-1}\partial_1 u\|_{L^1(\mathbf{R}^2)} \||u|^{r-1}\partial_2 u\|_{L^1(\mathbf{R}^2)},$$

y por tanto, teniendo en cuenta que por la desigualdad de Hölder

$$\||u|^{r-1}\partial_i u\|_{L^1(\mathbf{R}^2)} \leq \left(\int_{\mathbf{R}^2} |u(x)|^{(r-1)p'}\,dx\right)^{1/p'} \|\partial_i u\|_{L^p(\mathbf{R}^2)},$$

obtenemos

$$\int_{\mathbf{R}^2} |u(x)|^{2r}\,dx \leq r^2 \left(\int_{\mathbf{R}^2} |u(x)|^{(r-1)p'}\,dx\right)^{2/p'} \|\partial_1 u\|_{L^p(\mathbf{R}^2)} \|\partial_2 u\|_{L^p(\mathbf{R}^2)}, \tag{6.3}$$

para todo $r \geq 1$.

Tomando $r = \dfrac{p^*}{2} = \dfrac{p}{2-p}$, con lo cual $(r-1)p' = p^*$, obtenemos de (6.3)

$$\int_{\mathbf{R}^2} |u(x)|^{p^*}\,dx \leq \left(\frac{p^*}{2}\right)^2 \left(\int_{\mathbf{R}^2} |u(x)|^{p^*}\,dx\right)^{2/p'} \|\partial_1 u\|_{L^p(\mathbf{R}^2)} \|\partial_2 u\|_{L^p(\mathbf{R}^2)},$$

y de aquí, teniendo en cuenta que $1 - \dfrac{2}{p'} = \dfrac{2}{p^*}$,

$$\|u\|_{L^{p^*}(\mathbf{R}^2)} \leq \frac{p^*}{2} \|\partial_1 u\|_{L^p(\mathbf{R}^2)}^{1/2} \|\partial_2 u\|_{L^p(\mathbf{R}^2)}^{1/2} \leq \frac{p^*}{4}\left(\|\partial_1 u\|_{L^p(\mathbf{R}^2)} + \|\partial_2 u\|_{L^p(\mathbf{R}^2)}\right). \tag{6.4}$$

Ahora, si $u \in W^{1,p}(\mathbb{R}^2)$, existe una sucesión $\{u_n\} \subset \mathcal{D}(\mathbb{R}^2)$, tal que $u_n \to u$ en $W^{1,p}(\mathbb{R}^2)$. Teniendo en cuenta que por (6.4)

$$\|u_n - u_m\|_{L^{p^*}(\mathbf{R}^2)} \leq \frac{p^*}{4}\left(\|\partial_1(u_n - u_m)\|_{L^p(\mathbf{R}^2)} + \|\partial_2(u_n - u_m)\|_{L^p(\mathbf{R}^2)}\right)$$

la sucesión $\{u_n\}$ también converge a u en $L^{p^*}(\mathbb{R}^2)$, y por tanto pasando al límite en la desigualdad (6.4) escrita para las u_n, la obtenemos para u. ∎

Observación 6.2. *A lo largo del tema se utilizará en muchas ocasiones la desigualdad de Young,*

$$ab \leq \frac{a^r}{r} + \frac{b^{r'}}{r'},$$

válida para todo $a \geq 0$, $b \geq 0$ y $1 < r < \infty$, con $1/r + 1/r' = 1$ (ver [2] pag. 56).

Como consecuencia del teorema anterior y de la desigualdad de interpolación (ver Tema 3), obtenemos el resultado siguiente:

Corolario 6.3. *Sea $1 \leq p < N$ y denotemos p^* al número definido por $1/p^* = 1/p - 1/N$. Se satisface que*

$$W^{1,p}(\mathbb{R}^N) \hookrightarrow L^q(\mathbb{R}^N), \quad \text{para todo } q \in [p, p^*],$$

con inyección continua.

En el caso $p = N$ se tiene el resultado siguiente:

Corolario 6.4. (Caso límite $p = N$) *Se satisface*

$$W^{1,N}(\mathbb{R}^N) \hookrightarrow L^q(\mathbb{R}^N), \quad \textit{para todo } q \in [N, +\infty),$$

con inyección continua.

Demostración.- De nuevo vamos a demostrar el resultado en el caso $N = 2$. La prueba del caso N general se puede consultar en [2].

Así pues, vamos a demostrar que

$$W^{1,2}(\mathbb{R}^2) \hookrightarrow L^q(\mathbb{R}^2), \quad \text{para todo } q \in [2, +\infty), \tag{6.5}$$

con inyección continua.

Sea $u \in C_c^1(\mathbb{R}^2)$. De acuerdo con la desigualdad (6.3) con $p = 2$, para todo $r \geq 1$ se satisface

$$\|u\|_{L^{2r}(\mathbf{R}^2)} \leq r \left(\int_{\mathbf{R}^2} |u(x)|^{2(r-1)}\, dx \right)^{1/(2r)} \|\nabla u\|_{L^2(\mathbf{R}^2)}^{1/r},$$

es decir, teniendo en cuenta que

$$\frac{1}{2r} = \frac{1}{2(r-1)} \left(1 - \frac{1}{r} \right),$$

$$\|u\|_{L^{2r}(\mathbf{R}^2)} \leq r \|u\|_{L^{2(r-1)}(\mathbf{R}^2)}^{1-1/r} \|\nabla u\|_{L^2(\mathbf{R}^2)}^{1/r},$$

con lo que por la desigualdad de Young,

$$\|u\|_{L^{2r}(\mathbf{R}^2)} \leq (r-1)\|u\|_{L^{2(r-1)}(\mathbf{R}^2)} + \|\nabla u\|_{L^2(\mathbf{R}^2)}, \tag{6.6}$$

para todo $r \geq 1$.

Tomando $r = 2$ en (6.6), se obtiene que $\|u\|_{L^4(\mathbf{R}^2)} \leq \|u\|_{L^2(\mathbf{R}^2)} + \|\nabla u\|_{L^2(\mathbf{R}^2)}$, con lo que, por la desigualdad de interpolación, se tiene

$$\|u\|_{L^q(\mathbf{R}^2)} \leq C_q(\|u\|_{L^2(\mathbf{R}^2)} + \|\nabla u\|_{L^2(\mathbf{R}^2)}),$$

para todo $q \in [2, 4]$.

Reiterando el argumento con $r = 3$, $r = 4$, etc, se llega a

$$\|u\|_{L^q(\mathbf{R}^2)} \leq C_q(\|u\|_{L^2(\mathbf{R}^2)} + \|\nabla u\|_{L^2(\mathbf{R}^2)}), \tag{6.7}$$

para todo $q \in [2, +\infty)$ y toda $u \in C_c^1(\mathbb{R}^2)$, con C_q una función que sólo depende de q.

A continuación, la desigualdad (6.7) se prolonga por densidad a toda función u de $W^{1,2}(\mathbb{R}^2)$. ∎

Teorema 6.5. (Morrey) *Si $p > N$, entonces*

$$W^{1,p}(\mathbb{R}^N) \hookrightarrow L^\infty(\mathbb{R}^N), \tag{6.8}$$

con inyección continua.

Además existe una constante positiva $C = C(p, N)$ tal que

$$|u(x) - u(y)| \leq C\|\nabla u\|_{L^p(\mathbf{R}^N)^N} |x - y|^{1-N/p}, \quad \textit{c.p.d. } x, y \in \mathbb{R}^N, \textit{ para toda } u \in W^{1,p}(\mathbb{R}^N). \tag{6.9}$$

Demostración.- Supongamos que $u \in C_c^1(\mathbb{R}^N)$. Evidentemente, se satisface

$$u(x) - u(0) = \int_0^1 \frac{d}{dt} u(tx)\, dt \quad \text{para todo } x \in \mathbb{R}^N. \tag{6.10}$$

Sea Q un cubo abierto de $\mathbb{R}^N$ de lados de longitud $r > 0$ paralelos a los ejes de coordenadas y tal que $0 \in Q$. Denotemos por $\overline{u}$ a la media de u sobre Q, dada por

$$\overline{u} = \frac{1}{|Q|} \int_Q u(x)\, dx\,.$$

Integrando en (6.10) es inmediato que

$$\overline{u} - u(0) = \frac{1}{|Q|} \int_Q \int_0^1 \frac{d}{dt} u(tx)\, dt\, dx = \frac{1}{|Q|} \sum_{i=1}^N \int_Q \int_0^1 x_i \partial_i u(tx)\, dt\, dx,$$

y en consecuencia, teniendo en cuenta que $|Q| = r^N$,

$$|\overline{u} - u(0)| \leq \frac{1}{r^{N-1}} \sum_{i=1}^N \int_Q \int_0^1 |\partial_i u(tx)|\, dt\, dx$$

$$= \frac{1}{r^{N-1}} \sum_{i=1}^N \int_0^1 \int_Q |\partial_i u(tx)|\, dx\, dt = \frac{1}{r^{N-1}} \sum_{i=1}^N \int_0^1 \int_{tQ} \frac{|\partial_i u(y)|}{t^N}\, dy\, dt. \tag{6.11}$$

Teniendo en cuenta que $tQ \subset Q$ para todo $0 < t < 1$, es inmediato de la desigualdad de Hölder que

$$\int_{tQ} |\partial_i u(y)|\, dy \leq \|\partial_i u\|_{L^p(Q)} |tQ|^{1/p'} = \|\partial_i u\|_{L^p(Q)} t^{N/p'} r^{N/p'},$$

con lo que de (6.11) obtenemos

$$|\overline{u} - u(0)| \leq \frac{1}{r^{N-1}} \|\nabla u\|_{L^p(Q)} r^{N/p'} \int_0^1 \frac{t^{N/p'}}{t^N}\, dt = \frac{r^{1-N/p}}{1 - N/p} \|\nabla u\|_{L^p(Q)}\,. \tag{6.12}$$

Por translación, la desigualdad (6.12) continúa siendo cierta para todo cubo Q de lados de longitud $r > 0$ paralelos a los ejes de coordenadas y todo punto $x \in Q$, es decir

$$|\overline{u} - u(x)| \leq \frac{r^{1-N/p}}{1 - N/p} \|\nabla u\|_{L^p(Q)} \quad \text{para todo } x \in Q, \tag{6.13}$$

y en consecuencia

$$|u(x) - u(y)| \leq \frac{2r^{1-N/p}}{1 - N/p} \|\nabla u\|_{L^p(Q)} \quad \text{para todo } x, y \in Q. \tag{6.14}$$

Ahora, basta tener en cuenta que dados dos puntos cualesquiera $x, y \in \mathbb{R}^N$ existe un cubo Q de lados de longitud $2|x - y|$ paralelos a los ejes de coordenadas, para deducir (6.9) con $C = \dfrac{2^{2-N/p}}{1 - N/p}$, para todo $u \in C_c^1(\mathbb{R}^N)$.

Si $u \in W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$, basta considerar una sucesión $\{u_n\} \subset C_c^1(\mathbb{R}^N)$ tal que $u_n \to u$ en $W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$ y c.p.d. en $\mathbb{R}^N$.

Finalmente, para demostrar (6.8), se considera en primer lugar $u \in C_c^1(\mathbb{R}^N)$, y se tiene en cuenta que si $x \in \mathbb{R}^N$ y Q es un cubo de lados de longitud $r = 1$ paralelos a los ejes de coordenadas que contenga a x, entonces por (6.13),

$$|u(x)| \leq |\overline{u}| + \frac{1}{1-N/p}\|\nabla u\|_{L^p(Q)},$$

con lo que teniendo en cuenta que $\|\nabla u\|_{L^p(Q)} \leq \|\nabla u\|_{L^p(\mathbb{R}^N)}$ y que

$$|\overline{u}| \leq \|u\|_{L^p(Q)} \leq \|u\|_{L^p(\mathbb{R}^N)},$$

es inmediato que

$$\|u\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)} \leq \frac{1}{1-N/p}\|u\|_{W^{1,p}(\mathbb{R}^N)}, \quad \text{para toda } u \in C_c^1(\mathbb{R}^N).$$

Ahora, si $u \in W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$, basta considerar una sucesión $\{u_n\} \subset C_c^1(\mathbb{R}^N)$ tal que $u_n \to u$ en $W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$. ■

Observación 6.6. *De la desigualdad (6.9) es sencillo comprobar que si $p > N$, entonces toda función de $W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$ posee un (y sólo un) representante continuo, de hecho α-höderiano, en todo $\mathbb{R}^N$, con $\alpha = 1-N/p$.*

Nota 6.7. *Asimismo, es inmediato comprobar por (6.8) que si $p > N$, entonces*

$$W^{1,p}(\mathbb{R}^N) \hookrightarrow L^q(\mathbb{R}^N),$$

con inyección continua, para todo $q \in [p, \infty]$.

Como consecuencia inmediata de los resultados precedentes y de los Teoremas 4.13 y 5.5, se tienen los teoremas siguientes:

Teorema 6.8. *Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ un abierto cualquiera no vacío. Se satisfacen:*

a) *si $1 \leq p < N$, entonces*
$$W_0^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^{p^*}(\Omega)$$
con inyección continua, siendo $\frac{1}{p^*} = \frac{1}{p} - \frac{1}{N}$, y de hecho existe una constante $C = C(p,N) > 0$ tal que para toda $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$ se tiene
$$\|u\|_{L^{p^*}(\Omega)} \leq C\|\nabla u\|_{L^p(\Omega)},$$

b) *si $p = N$, entonces*
$$W_0^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$$
con inyección continua, para todo $q \in [p, +\infty)$,

c) *si $p > N$, entonces*
$$W_0^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$$
con inyección continua, para todo $q \in [p, \infty]$, y además existe una constante $C = C(p,N) > 0$ tal que para toda $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$ se tiene
$$|u(x) - u(y)| \leq C\|\nabla u\|_{L^p(\Omega)}|x-y|^{1-N/p}, \quad c.p.d.\ x, y \in \Omega,$$
con lo que, en particular en este caso, $W_0^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow C^0(\overline{\Omega})$.

Idea de la Demostración.- Veamos sólo el caso $1 \leq p < N$. Si $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$ entonces por el Teorema 4.13, $\tilde{u} \in W_0^{1,p}(\mathbb{R}^N) = W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$. Gracias ahora al Teorema 6.1 sigue que $\tilde{u} \in L^{p^*}(\mathbb{R}^N)$ y por tanto $u \in L^{p^*}(\Omega)$. Además,

$$\|u\|_{L^{p^*}(\Omega)} = \|\tilde{u}\|_{L^{p^*}(\mathbb{R}^N)} \leq C\|\nabla \tilde{u}\|_{L^p(\mathbb{R}^N)} = C\|\nabla u\|_{L^p(\Omega)}.$$

■

Teorema 6.9. *Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ un abierto de clase C^1 con frontera acotada, o sea $\Omega = \mathbb{R}^N_+$. Se satisfacen:*

a) *si $1 \leq p < N$, entonces*
$$W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^{p^*}(\Omega)$$
con inyección continua, siendo $\dfrac{1}{p^*} = \dfrac{1}{p} - \dfrac{1}{N}$,

b) *si $p = N$, entonces*
$$W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$$
con inyección continua, para todo $q \in [p, +\infty)$,

c) *si $p > N$, entonces*
$$W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$$
con inyección continua, para todo $q \in [p, \infty]$, y además existe una constante $C = C(p, N) > 0$ tal que para toda $u \in W^{1,p}(\Omega)$ se tiene
$$|u(x) - u(y)| \leq C\|u\|_{W^{1,p}(\Omega)}|x - y|^{1-N/p}, \quad c.p.d.\ x, y \in \Omega, \tag{6.15}$$
con lo que, en particular en este caso, $W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow C^0(\overline{\Omega})$.

Supongamos ahora que $1 \leq p < N/2$ y supongamos $u \in W^{2,p}(\Omega)$. Entonces, $u, \partial_i u \in W^{1,p}(\Omega)$ y como $p < N/2 < N$ se tiene que $u, \partial_i u \in L^{p^*}(\Omega)$, esto es $u \in W^{1,p^*}(\Omega)$. Gracias a la condición $p < N/2$ sigue que $p^* < N$ y por tanto por el Teorema 6.9 se tiene que
$$u \in L^{(p^*)^*}(\Omega),$$
con
$$\frac{1}{(p^*)^*} = \frac{1}{p^*} - \frac{1}{N} = \frac{1}{p} - \frac{2}{N}.$$

Por aplicación reiterada del Teorema 6.9 y de los resultados anteriores para el caso de $\mathbb{R}^N$, se obtiene el siguiente:

Teorema 6.10. *Sea $k \geq 1$ un entero y sea $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ un abierto de clase C^1 con frontera acotada, o sea $\Omega = \mathbb{R}^N_+$, o sea $\Omega = \mathbb{R}^N$. Se satisfacen:*

a) *si* $\dfrac{1}{p} - \dfrac{k}{N} > 0$, *entonces $W^{k,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$ con inyección continua, siendo* $\dfrac{1}{q} = \dfrac{1}{p} - \dfrac{k}{N}$,

b) *si* $\dfrac{1}{p} - \dfrac{k}{N} = 0$, *entonces $W^{k,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$ con inyección continua, para todo $q \in [p, +\infty)$,*

c) *si* $\dfrac{1}{p} - \dfrac{k}{N} < 0$, *entonces $W^{k,p}(\Omega) \hookrightarrow L^\infty(\Omega)$ con inyección continua, y además si* $k - \dfrac{N}{p} > 0$ *no es un entero, y denotamos*
$$m = [k - N/p], \quad \theta = (k - N/p) - m,$$
existe una constante $C = C(k, p, N) > 0$ tal que para toda $u \in W^{k,p}(\Omega)$ se tienen
$$\|\partial^\alpha u\|_{L^\infty(\Omega)} \leq C\|u\|_{W^{k,p}(\Omega)}, \quad \text{para todo } |\alpha| \leq m,$$
$$|\partial^\alpha u(x) - \partial^\alpha u(y)| \leq C\|u\|_{W^{k,p}(\Omega)}|x - y|^\theta, \quad c.p.d.\ x, y \in \Omega, \text{ para todo } |\alpha| \leq m,$$
con lo que, en particular en este caso, $W^{k,p}(\Omega) \hookrightarrow C^m(\overline{\Omega})$.

Observación 6.11. *a) El Teorema 6.10 admite una versión para $W_0^{k,p}(\Omega)$, con Ω un abierto no vacío de $\mathbb{R}^N$ cualquiera.*

b) En general no es cierto que $W^{1,N}(\Omega) \hookrightarrow L^\infty(\Omega)$.

6.2. Teoremas de Inyección compacta

Comenzamos con una caracterización de los espacios $W^{1,p}$ en el caso $p > 1$.

Proposición 6.12. *Sean Ω un abierto no vacío de $\mathbb{R}^N$ y $u \in L^p(\Omega)$ con $p > 1$. Las tres propiedades siguientes son equivalentes:*

a) $u \in W^{1,p}(\Omega)$.

b) *Existe una constante $C > 0$ tal que*

$$\left| \int_\Omega u \partial_i \varphi \, dx \right| \leq C \|\varphi\|_{L^{p'}(\Omega)},$$

para toda $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ y todo $i = 1, ..., N$.

c) *Existe una constante $C > 0$ tal que para todo abierto $\Omega' \subset\subset \Omega$ y todo $h \in \mathbb{R}^N$ tal que $|h| < \operatorname{dist}(\Omega', \mathbb{R}^N \setminus \Omega)$, se satisface*

$$\|\tau_h u - u\|_{L^p(\Omega')} \leq C|h|,$$

donde $\tau_h u(x) = u(x + h)$, y en tal caso se puede tomar $C = \|\nabla u\|_{L^p(\Omega)}$ en b) *y* c).

Demostración.- Se deja como ejercicio (ver Ejercicio 41) comprobar que a) y b) son equivalentes.
a) implica c): Supongamos en primer lugar que $1 \leq p < \infty$. Sea $u \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^N)$. Sea $h \in \mathbb{R}^N$, y definamos

$$v(t) = u(x + th), \quad t \in [0, 1].$$

En tal caso, $\dfrac{dv}{dt}(t) = h \cdot \nabla u(x + th)$, y en consecuencia

$$u(x + h) - u(x) = v(1) - v(0) = \int_0^1 h \cdot \nabla u(x + th) \, dt,$$

con lo que,

$$|\tau_h u(x) - u(x)|^p \leq |h|^p \int_0^1 |\nabla u(x + th)|^p \, dt,$$

y por tanto, dado $\Omega' \subset\subset \Omega$,

$$\int_{\Omega'} |\tau_h u(x) - u(x)|^p \, dx \leq |h|^p \int_{\Omega'} \int_0^1 |\nabla u(x + th)|^p \, dt \, dx$$
$$= |h|^p \int_0^1 \int_{\Omega'} |\nabla u(x + th)|^p \, dx \, dt = |h|^p \int_0^1 \int_{\Omega' + th} |\nabla u(y)|^p \, dy \, dt \, .$$

Si $h \in \mathbb{R}^N$ es tal que $|h| < \operatorname{dist}(\Omega', \mathbb{R}^N \setminus \Omega)$, existe $\Omega_h \subset\subset \Omega$ tal que $\Omega' + th \subset \Omega_h$ para todo $t \in [0, 1]$, y en consecuencia, por la desigualdad anterior,

$$\|\tau_h u - u\|^p_{L^p(\Omega')} \leq |h|^p \int_{\Omega_h} |\nabla u(x)|^p \, dx \, . \tag{6.16}$$

Ahora, si $u \in W^{1,p}(\Omega)$, basta aplicar el teorema de Friedrichs y tener en cuenta (6.16) para obtener c). Finalmente, si $p = \infty$, se aplica lo que precede para p finito y se hace tender p a $+\infty$ en (6.16) (razónese).
c) implica b): Sea $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$, y consideremos un abierto $\Omega' \subset\subset \Omega$ tal que $\operatorname{sop} \varphi \subset \Omega'$. Sea $h \in \mathbb{R}^N$ tal que $|h| < \operatorname{dist}(\Omega', \mathbb{R}^N \setminus \Omega)$. Por c),

$$\left| \int_\Omega (\tau_h u - u) \varphi \, dx \right| = \left| \int_{\Omega'} (\tau_h u - u) \varphi \, dx \right| \leq C|h| \|\varphi\|_{L^{p'}(\Omega)}. \tag{6.17}$$

Ahora bien, es inmediato comprobar que,

$$\int_\Omega (\tau_h u - u)\varphi\, dx = \int_\Omega u(y)(\varphi(y-h) - \varphi(y))\, dy,$$

con lo que de (6.17) se obtiene

$$\left| \int_\Omega u(y) \frac{\varphi(y-h) - \varphi(y)}{|h|}\, dy \right| \le C \|\varphi\|_{L^{p'}(\Omega)},$$

y tomando $h = te_i$, y pasando al límite para $t \to 0$, se obtiene b). ■

Observación 6.13. *De la demostración precedente queda claro que a) implica c) también en el caso $p = 1$.*

Haciendo uso de los dos teoremas de compacidad que aparecen en el Anexo y de los resultados de inyección continua demostrados en la sección anterior, podemos ahora demostrar:

Teorema 6.14. (Rellich-Kondrachov) *Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ un abierto acotado de clase C^1. Se satisfacen:*

a) *si $1 \le p < N$, entonces $W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$ con inyección compacta, para todo $q \in [1, p^*)$, siendo $\dfrac{1}{p^*} = \dfrac{1}{p} - \dfrac{1}{N}$,*

b) *si $p = N$, entonces $W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$ con inyección compacta, para todo $q \in [1, +\infty)$,*

c) *si $p > N$, entonces $W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow C^0(\overline{\Omega})$ con inyección compacta.*

Demostración.-

a) Si $1 \le p < N$.

En este caso sabemos que $W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^{p^*}(\Omega)$ con inyección continua, y como Ω es acotado, sabemos que $L^{p^*}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$ con inyección continua, para todo $q \in [1, p^*)$. También por ser Ω acotado, es inmediato que $W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow W^{1,1}(\Omega)$ con inyección continua.

Sea $\mathcal{F}$ un subconjunto acotado de $W^{1,p}(\Omega)$, y fijemos $q \in [1, p^*)$. Desde luego, $\mathcal{F}$ es un subconjunto acotado de $L^{p^*}(\Omega)$ y por tanto de $L^q(\Omega)$, y también de $W^{1,1}(\Omega)$. Hemos de demostrar que $\mathcal{F}$ es relativamente compacto en $L^q(\Omega)$, para lo que usaremos el Teorema 6.18.

En primer lugar, observemos que existe $\alpha \in (0, 1]$ tal que $1/q = \alpha + (1-\alpha)/p^*$. Dados un abierto $\Omega' \subset\subset \Omega$, $h \in \mathbb{R}^N$ tal que $|h| < \operatorname{dist}(\Omega', \mathbb{R}^N \setminus \Omega)$, y un función $u \in \mathcal{F}$, gracias a la desigualdad de interpolación (ver Tema 3) podemos escribir

$$\|\tau_h u - u\|_{L^q(\Omega')} \le \|\tau_h u - u\|^\alpha_{L^1(\Omega')} \|\tau_h u - u\|^{1-\alpha}_{L^{p^*}(\Omega')}. \tag{6.18}$$

Teniendo en cuenta la Observación 6.13, podemos afirmar que $\|\tau_h u - u\|_{L^1(\Omega')} \le |h| \|\nabla u\|_{L^1(\Omega)}$, y por tanto, de la desigualdad de Minkowski y del hecho de que $\mathcal{F}$ es un subconjunto acotado de $L^{p^*}(\Omega)$ y de $W^{1,1}(\Omega)$, deducimos de (6.18) que

$$\|\tau_h u - u\|_{L^q(\Omega')} \le (|h| \|\nabla u\|_{L^1(\Omega)})^\alpha (2\|u\|_{L^{p^*}(\Omega)})^{1-\alpha} \le C|h|^\alpha,$$

desigualdad de la que es evidente concluir que $\mathcal{F}$ satisface la condición a) del Teorema 6.18.

Para ver que $\mathcal{F}$ también satisface la condición b) del Teorema 6.18 observemos que si $u \in \mathcal{F}$, por la desigualdad de Hölder, para todo abierto $\Omega' \subset\subset \Omega$ se tiene

$$\|u\|_{L^q(\Omega \setminus \Omega')} \le \|u\|_{L^{p^*}(\Omega \setminus \Omega')} |\Omega \setminus \Omega'|^{1/q - 1/p^*} \le C |\Omega \setminus \Omega'|^{1/q - 1/p^*}.$$

Basta ahora tener en cuenta que fijado cualquier $\delta > 0$, existe un abierto $\Omega'_\delta \subset\subset \Omega$ tal que $|\Omega \setminus \Omega'_\delta| < \delta$ (razónese), para concluir que $\mathcal{F}$ también satisface la condición b) del Teorema 6.18, y por tanto, por dicho teorema es relativamente compacto en $L^q(\Omega)$.

b) Si $p = N$.

En este caso, el resultado es consecuencia inmediata de lo ya visto para el caso $p < N$.

c) Si $p > N$.

En este caso, el resultado se deduce fácilmente de los Teoremas 6.9, del Teorema de Ascoli-Arzelá (ver Teorema 6.17 en el Anexo) y la desigualdad (6.15). ■

Observación 6.15. *Obsérvese que como consecuencia del Teorema de Rellich-Kondrachov, si $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ es un abierto acotado de clase C^1, en particular $W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^p(\Omega)$ con inyección compacta, para todo $p \in [1, \infty]$.*

Observación 6.16. *Obsérvese que como consecuencia del Teorema 6.8, las conclusiones del teorema de Rellich-Kondrachov son también válidas sustituyendo $W^{1,p}(\Omega)$ por $W_0^{1,p}(\Omega)$, y en este caso para todo abierto acotado $\Omega \subset \mathbb{R}^N$.*

6.3. Anexo: Dos resultados de compacidad

Para demostrar el resultado de inyección compacta en los espacios de Sobolev, hemos hecho uso de los dos siguientes importantes criterios de compacidad relativa, ver [4] y [2] para las demostraciones.

Teorema 6.17. (**Ascoli-Arzelá**) *Sean K un espacio métrico compacto y $\mathcal{F}$ un subconjunto acotado de $C(K)$ (i.e., tal que $\sup_{u\in\mathcal{F}}(\max_{x\in K}|u(x)|) < +\infty$) que sea equicontinuo, es decir, tal que para todo $\varepsilon > 0$ existe un $\delta > 0$ tal que*

$$x_1, x_2 \in K, \quad d(x_1, x_2) < \delta \Rightarrow |u(x_1) - u(x_2)| < \varepsilon, \quad \text{para toda } u \in \mathcal{F}.$$

Entonces $\mathcal{F}$ es relativamente compacto en $C(K)$, es decir, de toda sucesión de elementos de $\mathcal{F}$ se puede extraer una subsucesión uniformemente convergente en K.

Teorema 6.18. (Fréchet-Kolmogorov) *Sean $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ un conjunto abierto y $\mathcal{F}$ un subconjunto acotado de $L^q(\Omega)$ con $1 \le q < \infty$. Supongamos que además,*

a) *para todo $\varepsilon > 0$ y todo abierto $\Omega' \subset\subset \Omega$, existe un $\delta > 0$ con $\delta < \operatorname{dist}(\Omega', \mathbb{R}^N \setminus \Omega)$, tal que*

$$\|\tau_h u - u\|_{L^q(\Omega')} < \varepsilon, \quad \text{para todo } h \in \mathbb{R}^N \text{ que satisfaga } |h| < \delta, \text{ y toda } u \in \mathcal{F},$$

b) *para todo $\varepsilon > 0$ existe un abierto $\Omega' \subset\subset \Omega$ tal que*

$$\|u\|_{L^q(\Omega\setminus\Omega')} < \varepsilon, \quad \text{para toda } u \in \mathcal{F}.$$

Entonces $\mathcal{F}$ es relativamente compacto en $L^q(\Omega)$, es decir, de toda sucesión de elementos de $\mathcal{F}$ se puede extraer una subsucesión convergente en $L^q(\Omega)$.

CAPÍTULO 7

Aplicación traza. Caracterización de $H_0^k(\Omega)$. Normas equivalentes

7.1. Espacios $L^p(\partial\Omega)$

En todo el tema, Ω denotará un abierto no vacío de $\mathbb{R}^N$, de clase C^1 con frontera $\partial\Omega$ acotada. En tal caso, existe un recubrimiento abierto finito $(\mathcal{O}_i)_{1\leq i\leq k}$ de $\partial\Omega$ tal que para para cada $i = 1, .., k$ existe una aplicación biyectiva $H_i : Q \to \mathcal{O}_i$ satisfaciendo

$$H_i \in C^1(\overline{Q}), \quad H_i^{-1} \in C^1(\overline{\mathcal{O}}_i), \quad H_i(Q_+) = \mathcal{O}_i \cap \Omega, \quad H_i(Q_0) = \mathcal{O}_i \cap \partial\Omega\,.$$

Consideraremos fijada una partición de la unidad subordinada al recubrimiento $(\mathcal{O}_i)_{1\leq i\leq k}$ de $\Gamma = \partial\Omega$, formada por funciones θ_0, θ_1,...,θ_k, con las propiedades descritas en el Lema 5.4.

Definición 7.1. *Diremos que $A \subset \partial\Omega$ es σ-medible si para todo $1 \leq i \leq k$, $H_i^{-1}(A)$ es un subconjunto medible Lebesgue de $\mathbb{R}^{N-1}$.*

Dada $f : \partial\Omega \to \mathbb{R}$, diremos que f es σ-integrable en $\partial\Omega$, si para todo $1 \leq i \leq k$ la función $f(H_i(y', 0))$ es integrable en Q_0 respecto de la medida de Lebesgue en $\mathbb{R}^{N-1}$.

Definición 7.2. *Dada $f : \partial\Omega \to \mathbb{R}$ que sea σ-integrable en $\partial\Omega$, se define su integral en $\partial\Omega$ como sigue.*

En primer lugar, para cada $1 \leq i \leq k$, se denota

$$\int_{\mathcal{O}_i\cap\partial\Omega} (\theta_i f)(x)\, d\sigma(x) = \int_{|y'|<1} (\theta_i f)(H_i(y', 0)) \left(\sum_{r=1}^{N} (\widehat{H}_{ir}(y', 0))^2\right)^{1/2} dy', \tag{7.1}$$

siendo $\widehat{H}_{ir}(y) = \det\left(\dfrac{\partial H_i^l}{\partial y_j}(y);\ 1 \leq l \leq N,\ l \neq r,\ 1 \leq j \leq N-1\right)$, donde por H_i^l denotamos a la componente l-ésima de H_i.

Finalmente, se define

$$\int_{\partial\Omega} f(x)\, d\sigma(x) = \sum_{i=1}^{k} \int_{\mathcal{O}_i\cap\partial\Omega} (\theta_i f)(x)\, d\sigma(x)\,. \tag{7.2}$$

Definición 7.3. *Diremos que un conjunto σ-medible $A \subset \partial\Omega$ tiene medida σ nula si se satisface que* $\displaystyle\int_{\partial\Omega} 1_A(x)\, d\sigma(x) = 0$.

Diremos que dos funciones σ-integrables en $\partial\Omega$ son iguales casi por doquier en dicho conjunto si el conjunto de los puntos de $\partial\Omega$ donde no coinciden tiene medida σ nula.

A partir de ahora, identificaremos todas las funciones σ-integrables en $\partial\Omega$ que sean iguales casi por doquier en dicho conjunto. Con este convenio, dado $1 \leq p < \infty$, denotaremos por $L^p(\partial\Omega)$ al conjunto de todas las funciones $f : \partial\Omega \to \mathbb{R}$ tales que $|f|^p$ sea σ-integrable en $\partial\Omega$, y definiremos

$$\|f\|_{L^p(\partial\Omega)} = \left(\int_{\partial\Omega} |f(x)|^p \, d\sigma(x)\right)^{1/p}, \quad \forall\, f \in L^p(\partial\Omega).$$

Diremos que $f \in L^\infty(\partial\Omega)$ si f es acotada respecto a la medida σ en $\partial\Omega$.

El espacio $L^p(\partial\Omega)$, con la suma de funciones y producto de una función por un número real definidos en la forma usual, es un espacio vectorial, y dotado de $\|\cdot\|_{L^p(\partial\Omega)}$ es un espacio de Banach, separable si $p \in [1,\infty)$, reflexivo si $p \in (1,\infty)$ y cuyo dual es $L^{p'}(\partial\Omega)$ cuando $p \in [1,\infty)$ y $1/p + 1/p' = 1$. En particular, $L^2(\partial\Omega)$ es un espacio de Hilbert con el producto escalar definido por

$$(f,g)_{L^2(\partial\Omega)} = \int_{\partial\Omega} f(x)g(x)\, d\sigma(x), \quad \forall\, f,g \in L^2(\partial\Omega).$$

Para todo punto $x \in \partial\Omega$ es posible definir el vector unitario normal exterior en x, que denotaremos $\vec{n}(x)$. Se define así una función vectorial $\vec{n} = (n_1, ..., n_N)$ tal que $\vec{n} \in C^0(\partial\Omega)^N \subset L^\infty(\partial\Omega)^N$, para la que se satisface la fórmula de Green (ver [9] ó [14])

$$\int_\Omega u\partial_i v\, dx = -\int_\Omega v\partial_i u\, dx + \int_{\partial\Omega} uvn_i\, d\sigma(x), \qquad \text{para todo } u,v \in C_c^1(\mathbb{R}^N),\ 1 \leq i \leq N. \tag{7.3}$$

Observación 7.4. *La fórmula (7.3) es también cierta en el caso $\Omega = \mathbb{R}_+^N$.*

7.2. Teorema de trazas en $H^1(\Omega)$

Si $u \in H^1(\Omega)$ pero $u \notin C^0(\bar{\Omega})$, en principio no tiene sentido hablar de los valores de u sobre $\partial\Omega$. No obstante, si Ω es “regular”es posible introducir un concepto, *la traza*, que generaliza el de valor de una función regular sobre la frontera de Ω.

Comenzamos con el caso $\Omega = \mathbb{R}_+^N$. Evidentemente $\partial\mathbb{R}_+^N = \mathbb{R}^{N-1} \times \{0\}$, y la medida de superficie sobre $\partial\mathbb{R}_+^N$ consiste en integrar en la variable x'.

En lo que sigue, consideramos identificado en la manera obvia $\mathbb{R}^{N-1} \times \{0\}$ con $\mathbb{R}^{N-1}$, y en consecuencia identificamos Q_0 con la bola unidad de $\mathbb{R}^{N-1}$.

Lema 7.5. *Para toda función $u \in C_c^1(\mathbb{R}^N)$ se satisface*

$$\int_{\mathbb{R}^{N-1}} |u(x',0)|^2\, dx' \leq \|u\|^2_{H^1(\mathbb{R}_+^N)}. \tag{7.4}$$

Demostración.- Si $u \in C_c^1(\mathbb{R}^N)$ y $x' \in \mathbb{R}^{N-1}$, es evidente que

$$\begin{aligned}|u(x',0)|^2 &= -\int_0^{+\infty} \partial_N(u^2(x',x_N))\, dx_N = -2\int_0^{+\infty} u(x',x_N)\partial_N u(x',x_N)\, dx_N \\ &\leq 2\left(\int_0^{+\infty} u^2(x',x_N)\, dx_N\right)^{1/2}\left(\int_0^{+\infty} (\partial_N u(x',x_N))^2\, dx_N\right)^{1/2} \\ &\leq \int_0^{+\infty} u^2(x',x_N)\, dx_N + \int_0^{+\infty} (\partial_N u(x',x_N))^2\, dx_N.\end{aligned}$$

Integrando esta desigualdad en $\mathbb{R}^{N-1}$, se obtiene

$$\int_{\mathbb{R}^{N-1}} |u(x',0)|^2\, dx' \leq \|u\|^2_{L^2(\mathbb{R}_+^N)} + \|\partial_N u\|^2_{L^2(\mathbb{R}_+^N)} \leq \|u\|^2_{H^1(\mathbb{R}_+^N)}.$$

$\blacksquare$

Podemos definir ahora la aplicación $\gamma_0 : C_c^1(\mathbb{R}^N) \mapsto L^2(\mathbb{R}^{N-1})$, $\varphi \mapsto \gamma_0(\varphi) = \varphi\rfloor_{\mathbb{R}^{N-1}} = \varphi(x', 0)$ para todo $x' \in \mathbb{R}^{N-1}$. Es claro que γ_0 es lineal y que por el Lema anterior

$$\|\gamma_0(\varphi)\|_{L^2(\mathbb{R}^{N-1})} \leq C\|u\|_{H^1(\mathbb{R}^N_+)} \qquad \forall \varphi \in C_c^1(\mathbb{R}^N),$$

y teniendo en cuenta que $C_c^1(\mathbb{R}^N)$ es denso en $H^1(\mathbb{R}^N_+)$, se deduce fácilmente,

Teorema 7.6. *Existe una y sólo una aplicación $\gamma_0 \in \mathcal{L}\left(H^1(\mathbb{R}^N_+);\ L^2(\partial\mathbb{R}^N_+)\right)$ tal que para toda $u \in C_c^1(\mathbb{R}^N)$ se satisface $\gamma_0(u) = u_{|\partial\mathbb{R}^N_+}$.*

A la aplicación γ_0 así definida se le denomina la **aplicación traza (de orden cero) sobre $H^1(\mathbb{R}^N_+)$.** Dicha aplicación permite dar un sentido a la expresión "el valor de $u \in H^1(\mathbb{R}^N_+)$ sobre la frontera de $\mathbb{R}^N_+$". Estas consideraciones pueden ser extendidas al caso de un abierto de clase C^1.

Vamos a definir la traza sobre $\partial\Omega$ de una función de $H^1(\Omega)$. Consideremos en primer lugar fijada $u \in C_c^1(\mathbb{R}^N)$, y para cada $1 \leq i \leq k$ consideremos la función $w_i : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ definida por

$$w_i(y) = \begin{cases} (\theta_i u)(H_i(y)) & \text{si } y \in Q, \\ 0 & \text{si } y \in \mathbb{R}^N \setminus Q. \end{cases}$$

Obsérvese que

$$\begin{aligned} \int_{\partial\Omega} |u(x)|^2\, d\sigma(x) &= \int_{\partial\Omega} \left(\sum_{i=1}^k \theta_i(x)\right)^2 |u(x)|^2\, d\sigma(x) \leq k \sum_{i=1}^k \int_{\partial\Omega} |\theta_i(x)|^2 |u(x)|^2\, d\sigma(x) \\ &= k \sum_{i,j=1}^k \int_{|y'|<1} [\theta_j(\theta_i^2|u|^2)](H_j(y',0)) \left(\sum_{r=1}^N (\widehat{H}_{jr}(y',0))^2\right)^{1/2} dy', \end{aligned}$$

y en consecuencia, teniendo en cuenta que si $H_j(y',0) \notin \mathcal{O}_i$ entonces $[\theta_j(\theta_i^2|u|^2)](H_j(y',0)) = 0$, y si $H_j(y',0) \in \mathcal{O}_i$ entonces $H_j(y',0) = H_i[H_i^{-1}(H_j(y',0))]$, se puede comprobar que existe una constante $C_1 > 0$, independiente de u, tal que

$$\int_{\partial\Omega} |u(x)|^2\, d\sigma(x) \leq k^2 C_1 \sum_{i=1}^k \int_{\mathbb{R}^{N-1}} |w_i(y',0)|^2\, dy' \tag{7.5}$$

Por otra parte, teniendo en cuenta que $\operatorname{sop}\theta_i$ es un compacto contenido en $\mathcal{O}_i$, es inmediato ver que $\operatorname{sop}(\theta_i u) \circ H_i$ es un compacto contenido en Q, y por consiguiente $w_i \in C_c^1(Q) \subset C_c^1(\mathbb{R}^N)$. Así pues, por el Lema 7.5,

$$\int_{\mathbb{R}^{N-1}} |w_i(y',0)|^2\, dy' \leq \|w_i\|^2_{H^1(\mathbb{R}^N_+)}, \quad \text{para todo } 1 \leq i \leq k. \tag{7.6}$$

Ahora bien, de la definición de w_i no es difícil deducir que existe una constante $C_2 > 0$, independiente de u, tal que

$$\|w_i\|^2_{H^1(\mathbb{R}^N_+)} \leq C_2\|u\|^2_{H^1(\Omega)}, \quad \text{para todo } 1 \leq i \leq k,$$

y por tanto, de (7.5) y (7.6) obtenemos

$$\|u\|^2_{L^2(\partial\Omega)} \leq k^3 C_1 C_2 \|u\|^2_{H^1(\Omega)}, \quad \text{para toda } u \in C_c^1(\mathbb{R}^N). \tag{7.7}$$

Teorema 7.7. *Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ un abierto de clase C^1 de frontera acotada. Existe una y sólo una aplicación $\gamma_0 \in \mathcal{L}(H^1(\Omega);\ L^2(\partial\Omega))$ tal que*

$$\gamma_0(u) = u_{|\partial\Omega} \quad \forall\, u \in C_c^1(\mathbb{R}^N).$$

Demostración.- Basta tener en cuenta la desigualdad (7.7), y que $C_c^1(\mathbb{R}^N)$ es denso en $H^1(\Omega)$. ■

A γ_0 se le denomina **aplicación traza (de orden cero) sobre $\partial\Omega$.** Para cada $u \in H^1(\Omega)$, a la función $\gamma_0(u)$ se le denomina la traza de u sobre $\partial\Omega$, y por abuso de notación se denota $\gamma_0(u) = u|_{\partial\Omega}$ (i.e., $\gamma_0(u)$ es el "valor"de u sobre la frontera de Ω).

Es inmediato obtener que la fórmula de integración por partes se satisface para las funciones de $H^1(\Omega)$.

Proposición 7.8. *Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ un abierto de clase C^1 de frontera acotada, o sea $\Omega = \mathbb{R}_+^N$. Se satisface,*

$$\int_\Omega u\partial_i v\, dx = -\int_\Omega v\partial_i u\, dx + \int_{\partial\Omega} uvn_i\, d\sigma(x), \qquad \text{para todo } u, v \in H^1(\Omega),\ 1 \le i \le N. \tag{7.8}$$

Demostración.- Basta aplicar la igualdad (7.3), teniendo en cuenta que $C_c^1(\mathbb{R}^N)$ es denso en $H^1(\Omega)$, y que $\gamma_0 \in \mathcal{L}(H^1(\Omega);\ L^2(\partial\Omega))$. ■

También se satisface que $H_0^1(\Omega)$ está formado por los elementos de traza nula. Para demostrar esta afirmación, haremos uso del siguiente resultado, cuya prueba se puede encontrar en [2], del que ya parte conocemos por el Teorema 4.13.

Proposición 7.9. *Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ un abierto de clase C^1 y $u \in L^2(\Omega)$. Entonces, $u \in H_0^1(\Omega)$ si y sólo si la función $\widetilde{u}$, prolongación por cero de u a $\mathbb{R}^N \setminus \Omega$, pertenece a $H^1(\mathbb{R}^N)$, y en tal caso $\partial_i\widetilde{u} = \widetilde{\partial_i u}$ para todo $1 \le i \le N$.*

Proposición 7.10. *Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ un abierto de clase C^1 de frontera acotada, o sea $\Omega = \mathbb{R}_+^N$. Se satisface*

$$H_0^1(\Omega) = \ker(\gamma_0) = \{u \in H^1(\Omega) :\ \gamma_0(u) = 0\}.$$

Demostración.- Si u pertenece a $H_0^1(\Omega)$, por definición existe una sucesión $\{u_n\} \subset \mathcal{D}(\Omega)$ tal que $u_n \to u$ en $H^1(\Omega)$. Evidentemente, para cada n, se tiene que $\gamma_0(u_n) = 0$, y en consecuencia, por continuidad, también $\gamma_0(u) = 0$.

Recíprocamente, sea $u \in H^1(\Omega)$, tal que $\gamma_0(u) = 0$. Consideremos la función $\widetilde{u} \in L^2(\mathbb{R}^N)$, prolongación por cero de u a $\mathbb{R}^N \setminus \Omega$. Dada $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^N)$, como dicha función en particular pertenece a $H^1(\Omega)$, de (7.8) obtenemos

$$\langle \partial_i\widetilde{u}, \varphi\rangle = -\int_\Omega u\partial_i\varphi\, dx = \int_\Omega (\partial_i u)\varphi\, dx = \int_{\mathbb{R}^N} (\widetilde{\partial_i u})\varphi\, dx, \quad \text{para todo } 1 \le i \le N.$$

En consecuencia, $\widetilde{u} \in H^1(\mathbb{R}^N)$, con $\partial_i\widetilde{u} = \widetilde{\partial_i u}$ para todo $1 \le i \le N$, y por tanto $u \in H_0^1(\Omega)$. ■

Observación 7.11. *La imagen de γ_0 no es todo el espacio $L^2(\partial\Omega)$ (ver [7]). Por razones que se pueden ver en la referencia citada, se denota*

$$H^{1/2}(\partial\Omega) := \gamma_0(H^1(\Omega)) \subset L^2(\partial\Omega),$$

con contenido estricto.

Observación 7.12. *a) La noción de traza y las propiedades que hemos estudiado pueden ser extendidas al caso de funciones de $W^{1,p}(\Omega)$, con $1 \le p < \infty$ (ver [2]).*

b) Asimismo, se puede extender la noción de traza a los espacios de Sobolev de orden superior; nos contentamos con exponer aquí el caso de $H^2(\Omega)$.

Suponemos por tanto que Ω es de clase C^1 con frontera acotada, o que $\Omega = \mathbb{R}^N_+$. Si $u \in H^2(\Omega)$, entonces tanto $u, \partial_i u$, $1 \le i \le N$, pertenecen a $H^1(\Omega)$, y por consiguiente están bien definidas las trazas $\gamma_0(u)$ y $\gamma_0(\partial_i u)$, $1 \le i \le N$, siendo todas elementos de $L^2(\partial\Omega)$. Se define la traza de orden 1 de u sobre $\partial\Omega$ por,

$$\gamma_1(u) = \sum_{i=1}^{N} \gamma_0(\partial_i u) n_i, \tag{7.9}$$

que evidentemente satisface $\gamma_1(u) \in L^2(\partial\Omega)$. Es claro que si u es regular, entonces $\gamma_1(u)$ coincide con la derivada de u en la dirección de $\vec{n}$, es por ello que también se denota

$$\partial_{\vec{n}} u := \gamma_1(u)\,, \quad \forall\, u \in H^2(\Omega).$$

Si consideramos la aplicación $(\gamma_0, \gamma_1) : u \in H^2(\Omega) \mapsto (\gamma_0(u), \gamma_1(u)) \in L^2(\partial\Omega) \times L^2(\partial\Omega)$, es inmediato comprobar que $H^2_0(\Omega) \subset \ker(\gamma_0, \gamma_1)$. De hecho, se puede demostrar (ver [8]) que

$$H^2_0(\Omega) = \ker(\gamma_0, \gamma_1) = \{u \in H^2(\Omega) :\ u = \partial_{\vec{n}} u = 0 \text{ sobre } \partial\Omega\}.$$

Nota 7.13. *Tampoco es difícil ver que se satisface la identidad de Green,*

$$\int_\Omega \nabla u(x) \cdot \nabla v(x)\, dx = -\int_\Omega v(x) \Delta u(x)\, dx + \int_{\partial\Omega} v(x) \partial_{\vec{n}} u(x)\, d\sigma(x),$$

para toda $u \in H^2(\Omega)$ y toda $v \in H^1(\Omega)$.

7.3. Normas equivalentes en $H^1(\Omega)$

Comencemos recordando una importante desigualdad cuya prueba puede verse en [2] o en los apuntes de la asignatura de cuarto curso EDPyAF.

Proposición 7.14. (Primera desigualdad de Poincaré) *Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ un abierto no vacío acotado al menos en una dirección. Entonces existe una constante positiva C (que sólo depende de Ω) tal que*

$$\int_\Omega |u|^2 dx \le C \int_\Omega |\nabla u|^2 \qquad \forall u \in H^1_0(\Omega). \tag{7.10}$$

Corolario 7.15. *La expresión*

$$\left(\int_\Omega |\nabla u|^2 \right)^{1/2}$$

define sobre $H^1_0(\Omega)$ una norma equivalente a la usual de $H^1(\Omega)$.

El siguiente resultado nos proporcionará una norma equivalente a la usual en $H^1(\Omega)$.

Teorema 7.16. *Supongamos que Ω es un abierto acotado conexo de clase C^1 de $\mathbb{R}^N$, y sea $\Omega_0 \subset \Omega$ un subconjunto medible Lebesgue tal que $|\Omega_0| > 0$. Entonces, existe una constante $C > 0$ tal que*

$$\|u\|^2_{H^1(\Omega)} \le C(\|u\|^2_{L^2(\Omega_0)} + \|\nabla u\|^2_{L^2(\Omega)^N}) \quad \textit{para toda } u \in H^1(\Omega). \tag{7.11}$$

Demostración.- Razonemos por reducción al absurdo. Si no existe $C > 0$ tal que se satisfaga (7.11), entonces para todo entero $n \ge 1$ existe una función $u_n \in H^1(\Omega)$ tal que

$$\|u_n\|^2_{H^1(\Omega)} > n(\|u_n\|^2_{L^2(\Omega_0)} + \|\nabla u_n\|^2_{L^2(\Omega)^N}).$$

Denotando por

$$v_n = \frac{u_n}{\|u_n\|_{H^1(\Omega)}},$$

obtenemos una sucesión $\{v_n\} \subset H^1(\Omega)$ tal que $\|v_n\|_{H^1(\Omega)} = 1$ y

$$1/n > \|v_n\|^2_{L^2(\Omega_0)} + \|\nabla v_n\|^2_{L^2(\Omega)^N} \quad \text{para todo } n \geq 1. \tag{7.12}$$

De (7.12) es evidente que

$$\partial_i v_n \to 0 \quad \text{en } L^2(\Omega), \text{ para toda } 1 \leq i \leq N, \text{ y que} \quad v_n \to 0 \text{ en } L^2(\Omega_0). \tag{7.13}$$

Como la sucesión $\{v_n\}$ está acotada en $H^1(\Omega)$, por el Teorema de Rellich-Kondrachov podemos extraer una subsucesión de v_n, que lo seguiremos denotando igual, tal que

$$v_n \to v \quad \text{en } L^2(\Omega) \text{ para alguna función } v \in L^2(\Omega).$$

Como $v_n \to v$ en $L^2(\Omega)$, se tiene que $\partial_i v_n \to \partial_i v$ en $\mathcal{D}'(\Omega)$, con lo que por (7.13) se obtiene que $\partial_i v = 0$ para todo $1 \leq i \leq N$, y por tanto, al ser Ω conexo, podemos afirmar que v es constante en Ω. Al tener también que $v_n \to 0$ en $L^2(\Omega_0)$, sigue que $v = 0$ en Ω. Por lo tanto, $v_n \to 0$ en $H^1(\Omega)$, lo que es un absurdo con el hecho de que $\|v_n\|_{H^1(\Omega)} = 1$. ■

Como una consecuencia del teorema de Rellich-Kondrachov y de la noción de traza, obtenemos el siguiente resultado.

Teorema 7.17. (Desigualdad de Friedrichs) *Supongamos que Ω es un abierto acotado conexo de clase C^1 de $\mathbb{R}^N$, y sea $\Gamma_0 \subset \partial\Omega$ tal que $\sigma(\Gamma_0) > 0$. Entonces, existe una constante $C > 0$ tal que*

$$\|u\|^2_{H^1(\Omega)} \leq C(\|u\|^2_{L^2(\Gamma_0)} + \|\nabla u\|^2_{L^2(\Omega)^N}) \quad \textit{para toda } u \in H^1(\Omega), \tag{7.14}$$

siendo $\|\nabla u\|^2_{L^2(\Omega)^N} = \sum_{i=1}^{N} \|\partial_i u\|^2_{L^2(\Omega)}$.

Demostración.- Razonemos de nuevo por reducción al absurdo. Si no existe $C > 0$ tal que se satisfaga (7.14), entonces para todo entero $n \geq 1$ existe una función $u_n \in H^1(\Omega)$ tal que

$$\|u_n\|^2_{H^1(\Omega)} > n(\|u_n\|^2_{L^2(\Gamma_0)} + \|\nabla u_n\|^2_{L^2(\Omega)^N}).$$

En consecuencia, si denotamos

$$v_n = \frac{u_n}{\|u_n\|_{H^1(\Omega)}},$$

obtenemos una sucesión $\{v_n\} \subset H^1(\Omega)$ tal que $\|v_n\|_{H^1(\Omega)} = 1$ y

$$1/n > \|v_n\|^2_{L^2(\Gamma_0)} + \|\nabla v_n\|^2_{L^2(\Omega)^N} \quad \text{para todo } n \geq 1. \tag{7.15}$$

De (7.15) es evidente que

$$\partial_i v_n \to 0 \quad \text{en } L^2(\Omega), \text{ para toda } 1 \leq i \leq N, \text{ y que} \quad v_n \to 0 \text{ en } L^2(\Gamma_0). \tag{7.16}$$

Por otra parte, como la sucesión $\{v_n\}$ es acotada en $H^1(\Omega)$, por el teorema de Rellich-Kondrachov, podemos extraer una subsucesión de las v_n, que por comodidad vamos a seguir denotando igual, tal que

$$v_n \to v \quad \text{en } L^2(\Omega)$$

para alguna función $v \in L^2(\Omega)$.

Podemos ahora probar que v_n es de Cauchy en $H^1(\Omega)$. En efecto,

$$\|v_n - v_m\|^2_{H^1(\Omega)} = \|v_n - v_m\|^2_{L^2(\Omega)} + \|\nabla(v_n - v_m)\|^2_{L^2(\Omega)^N} \leq \|v_n - v_m\|^2_{L^2(\Omega)} + 2\|\nabla(v_n)\|^2_{L^2(\Omega)^N} + 2\|\nabla(v_m)\|^2_{L^2(\Omega)^N},$$

y por tanto $v_n \to v$ en $H^1(\Omega)$.

Como $\gamma_0 \in \mathcal{L}(H^1(\Omega); L^2(\partial\Omega))$, sigue que $v_n \to v$ en $L^2(\Gamma_0)$, con lo que, teniendo en cuenta que $v_n \to 0$ en $L^2(\Gamma_0)$, obtenemos

$$v = 0 \quad \text{sobre } \Gamma_0. \tag{7.17}$$

Por otra parte, como $v_n \to v$ en $L^2(\Omega)$, se tiene que $\partial_i v_n \to \partial_i v$ en $\mathcal{D}'(\Omega)$, con lo que por (7.16) se obtiene que $\partial_i v = 0$ para todo $1 \leq i \leq N$, y por tanto, al ser Ω conexo, podemos afirmar que v es constante en Ω. Con esto, si tenemos en cuenta (7.17) y el hecho de que $\sigma(\Gamma_0) > 0$, concluimos que $v = 0$ en Ω. Pero esta conclusión es un absurdo, ya que entonces tenemos $v_n \to 0$ en $L^2(\Omega)$, lo que unido a (7.16) implica que $v_n \to 0$ en $H^1(\Omega)$, lo cual está en contradicción con el hecho de que $\|v_n\|_{H^1(\Omega)} = 1$ para todo $n \geq 1$. ■

Nota 7.18. *La desigualdad (7.11) implica evidentemente que bajo las condiciones del Teorema 7.16, la expresión*

$$\left(\|u\|^2_{L^2(\Omega_0)} + \|\nabla u\|^2_{L^2(\Omega)^N}\right)^{1/2}$$

define sobre $H^1(\Omega)$ una norma equivalente a la usual.

Igualmente, la desigualdad (7.14) implica evidentemente que bajo las condiciones del Teorema 7.17, la expresión

$$\left(\|u\|^2_{L^2(\Gamma_0)} + \|\nabla u\|^2_{L^2(\Omega)^N}\right)^{1/2}$$

también define sobre $H^1(\Omega)$ una norma equivalente a la usual.

Otra norma equivalentes puede ser obtenidas como consecuencia inmediata del resultado siguiente, cuya demostración es similar a la del Teorema 7.17, y dejamos como ejercicio (ver [3]).

Teorema 7.19. (Segunda desigualdad de Poincaré) *Supongamos que Ω es un abierto acotado conexo de clase C^1 de $\mathbb{R}^N$. Entonces, existe una constante $C > 0$ tal que*

$$\|u\|^2_{H^1(\Omega)} \leq C \left(\left| \int_\Omega u(x)\,dx \right|^2 + \|\nabla u\|^2_{L^2(\Omega)^N} \right) \quad \textit{para toda } u \in H^1(\Omega). \tag{7.18}$$

CAPÍTULO 8

El espacio $H^{-k}(\Omega)$

Aunque sean espacios de Hilbert, es interesante no identificar mediante el teorema de Riesz los espacios $H_0^k(\Omega)$ con sus duales topológicos.

Definición 8.1. *Se define $H^{-k}(\Omega)$ como el dual topológico de $H_0^k(\Omega)$.*

Sobre $H^{-k}(\Omega)$ se considera la norma natural

$$\|F\|_{H^{-k}(\Omega)} = \sup_{\{u\in H_0^k(\Omega), u\neq 0\}} \frac{|F(u)|}{\|u\|_{H^k(\Omega)}} = \sup_{\{u\in H_0^k(\Omega)\colon \|u\|_{H^k(\Omega)}\leq 1\}} |F(u)|.$$

Analicemos el caso de $H^{-1}(\Omega)$, siendo el caso general similar. Sean f_0, f_1,..., f_N en $L^2(\Omega)$, y consideremos la distribución $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$ definida por

$$T = f_0 - \sum_{i=1}^{N} \partial_i f_i. \tag{8.1}$$

Evidentemente, si $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ entonces

$$\langle T, \varphi\rangle = \int_\Omega f_0\varphi\, dx + \sum_{i=1}^{N} \int_\Omega f_i \partial_i \varphi\, dx,$$

con lo que aplicando la desigualdad de Cauchy-Schwartz

$$|\langle T, \varphi\rangle| \leq \left(\sum_{i=0}^{N} \|f_i\|^2_{L^2(\Omega)}\right)^{1/2} \cdot \|\varphi\|_{H^1(\Omega)} \quad \forall\varphi \in \mathcal{D}(\Omega),$$

y en consecuencia, por ser $\mathcal{D}(\Omega)$ denso en $H_0^1(\Omega)$, T admite una única extensión a un único elemento de $H^{-1}(\Omega)$. En resumen, toda distribución de la forma (8.1) es identificable con un elemento de $H^{-1}(\Omega)$. Recíprocamente se tiene el siguiente resultado, cuya prueba puede verse en los apuntes de EDPyAF. Presentamos aquí otra prueba alternativa válida también para caracterizar los duales de los espacios $W_0^{1,p}(\Omega)$ con p general.

Teorema 8.2. *Si $F \in H^{-1}(\Omega)$, entonces existen $N + 1$ funciones f_0, f_1,..., f_N en $L^2(\Omega)$ tales que*

$$F(u) = \int_\Omega f_0 u\, dx + \sum_{i=1}^{n} \int_\Omega f_i \partial_i u\, dx, \quad \forall u \in H_0^1(\Omega), \tag{8.2}$$

y

$$\|F\|_{H^{-1}(\Omega)} = \left(\sum_{i=0}^{N} \|f_i\|^2{}_{L^2(\Omega)}\right)^{1/2}.$$

Además, si Ω es acotado, entonces se puede tomar $f_0 = 0$.

En consecuencia, todo elemento de $H^{-1}(\Omega)$ es identificable, en el sentido de $\mathcal{D}'(\Omega)$, con una suma de funciones y de derivadas primeras de funciones de $L^2(\Omega)$.

Demostración.- Sea $Y = L^2(\Omega)^{N+1}$, con el producto escalar

$$((u_0, u_1, ..., u_N), (v_0, v_1, ..., v_N)) = \sum_{i=0}^{N} (u_i, v_i)_{L^2(\Omega)},$$

y denotemos por J a la aplicación $J : u \in H_0^1(\Omega) \mapsto (u, \partial_1 u, ..., \partial_N u) \in Y$. Evidentemente, J es lineal inyectiva y conserva las normas, con lo que $J^{-1} \in \mathcal{L}(J(H_0^1(\Omega)), H_0^1(\Omega))$ es biyectiva y conserva las normas.

En consecuencia, $F \circ J^{-1} \in \left[J(H_0^1(\Omega))\right]'$, con norma

$$\|F \circ J^{-1}\|_{\left[J(H_0^1(\Omega))\right]'} = \|F\|_{H^{-1}(\Omega)}.$$

Por el teorema de Hahn-Banach, existe $\Phi \in Y'$ tal que

$$\Phi|_{J(H_0^1(\Omega))} \equiv F \circ J^{-1}, \quad \text{y} \quad \|\Phi\|_{Y'} = \|F\|_{H^{-1}(\Omega)}.$$

Como Y es un espacio de Hilbert, existen f_0, f_1,..., f_N en $L^2(\Omega)$ tales que

$$\langle \Phi, (u_0, u_1, ..., u_n) \rangle = \sum_{i=0}^{n} \int_\Omega f_i u_i \, dx, \quad \forall (u_0, u_1, ..., u_n) \in Y$$

y

$$\|(f_0, f_1, ..., f_N)\|_Y = \|\Phi\|_{Y'}.$$

En particular, si $u \in H_0^1(\Omega)$ se tiene:

$$\langle \Phi, (u, \partial_1 u, ..., \partial_n u) \rangle = \int_\Omega f_0 u \, dx + \sum_{i=1}^{n} \int_\Omega f_i \partial_i u \, dx,$$

y

$$\langle \Phi, (u, \partial_1 u, ..., \partial_n u) \rangle = \langle \Phi, J(u) \rangle = \langle F \circ J^{-1}, J(u) \rangle = F(u).$$

Cuando Ω es acotado se puede razonar igual pero considerando, en vez de J, la aplicación

$$\tilde{J} : u \in H_0^1(\Omega) \to \nabla u \in L^2(\Omega)^N,$$

y sobre $H_0^1(\Omega)$ el producto escalar $(\cdot, \cdot)_{H_0^1(\Omega)}$. ■

Nota 8.3. *En particular, podemos definir la derivada de una función de $L^2(\Omega)$ como un elemento de $H^{-1}(\Omega)$, esto es para $f \in L^2(\Omega)$, se tiene que $\partial_i f \in H^{-1}(\Omega)$, $1 \leq i \leq N$ que verifica*

$$\partial_i f(v) = -\int_\Omega f \partial_i v \qquad \forall v \in H_0^1(\Omega).$$

Observación 8.4. *Utilizando la misma argumentación que en la demostración precedente, es fácil concluir que dado $F \in (H^1(\Omega))'$ también existen $N+1$ funciones $f_0, f_1, ..., f_N$ en $L^2(\Omega)$ tales que se satisface (8.2) para toda $u \in H^1(\Omega)$ y*

$$\|F\|_{(H^1(\Omega))'} = \left(\sum_{i=0}^{N} \|f_i\|^2{}_{L^2(\Omega)} \right)^{1/2}.$$

La diferencia con el caso de $H^{-1}(\Omega)$ reside en que la extensión de la distribución asociada

$$T = f_0 - \sum_{i=1}^{N} \partial_i f_i$$

a un elemento de $(H^1(\Omega))'$ puede no ser única.

Observación 8.5. *Con argumentos similares a los del Teorema 8.2 se puede demostrar que todo elemento de $T \in H^{-k}(\Omega)$ se puede identificar en el sentido de $\mathcal{D}'(\Omega)$ con una distribución de la forma*

$$T = \sum_{|\alpha| \leq k} \partial^\alpha g_\alpha,$$

siendo todas las funciones $g_\alpha \in L^2(\Omega)$.

Observación 8.6. *Recordemos que por el Teorema de Representación de Riesz, puede ser identificado un espacio de Hilbert con su dual. Si identificamos sólo el espacio $L^2(\Omega)$ con su dual $(L^2(\Omega))' = L^2(\Omega)$ se tiene*

$$\mathcal{D}(\Omega) \hookrightarrow H_0^k(\Omega) \hookrightarrow L^2(\Omega) \equiv (L^2(\Omega))' \hookrightarrow H^{-k}(\Omega) \hookrightarrow \mathcal{D}'(\Omega).$$

CAPÍTULO 9

Formulación débil de problemas de contorno elípticos

En este tema se lleva a cabo una introducción a la formulación variacional de los problemas de contorno para EDP lineales elípticas de segundo y cuarto orden.

Recordemos el teorema de Lax-Milgram, demostrado en la asignatura EDP y Análisis Funcional, que usaremos de manera constante en este tema.

Teorema 9.1. (**Lax-Milgram**) *Sean V un espacio de Hilbert real, cuya norma denotamos por $\|\cdot\|$, y $a(\cdot,\cdot) : V \times V \to \mathbb{R}$ una forma bilineal continua y coerciva, es decir, tal que existen $M > 0$ y $\alpha > 0$ satisfaciendo*

$$|a(u,v)| \leq M\|u\|\|v\| \quad \forall\, u,v \in V \text{ (continuidad)},$$

$$a(u,u) \geq \alpha\|u\|^2 \quad \forall\, u \in V \text{ (coercividad)}.$$

En tal caso, para cada $L \in V'$ dado se tiene:

a) *Existe un y sólo un $u \in V$ tal que $a(u,v) = L(v) \quad \forall\, v \in V$.*

b) *Si $a(\cdot,\cdot)$ es simétrica, entonces u está caracterizado por ser la única solución de*

$$\frac{1}{2}a(u,u) - L(u) = \min_{v\in V}\left(\frac{1}{2}a(v,v) - L(v)\right).$$

Observación 9.2. *En las condiciones del teorema de Lax-Milgram, es evidente que la igualdad $a(u,v) = L(v) \quad \forall\, v \in V$, junto a la coercividad, implican en particular que*

$$\alpha\|u\|^2 \leq a(u,u) = L(u) \leq \|L\|_{V'}\|u\|,$$

y en consecuencia se tiene la dependencia continua de u respecto de L, i.e.,

$$\|u\| \leq \frac{1}{\alpha}\|L\|_{V'}.$$

9.1. Problema de Dirichlet para un operador lineal elíptico de segundo orden en forma de divergencia

Suponemos fijado $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ abierto acotado, y el operador en derivadas parciales

$$Au = -\sum_{i,j=1}^{N} \partial_j\left(a_{ij}(x)\partial_i u(x)\right) + \sum_{i=1}^{N} b_i(x)\partial_i u(x) + c(x)u(x), \tag{9.1}$$

donde los coeficientes satisfacen la hipótesis

(H1) $a_{ij},\ b_i,\ c \in L^\infty(\Omega), \quad 1 \leq i,j \leq N.$

De la hipótesis (H1) se concluye fácilmente que A está bien definido como operador de $H^1(\Omega)$ con valores en $\mathcal{D}'(\Omega)$. De hecho, $Au \in H^{-1}(\Omega)$ para todo $u \in H^1(\Omega)$. Al operador A se le asocia la forma bilineal $a(\cdot,\cdot)$ definida por

$$a(u,v) = \sum_{i,j=1}^{N} \int_\Omega a_{ij}(x)\partial_i u \partial_j v\, dx + \sum_{i=1}^{N} \int_\Omega b_i(x) v \partial_i u\, dx + \int_\Omega c(x) uv\, dx, \quad \forall\, u,v \in H^1(\Omega). \tag{9.2}$$

Ahora es fácil demostrar

Lema 9.3. *La forma bilineal $a(\cdot,\cdot)$ está bien definida y es continua en $H^1(\Omega) \times H^1(\Omega)$.*

Además, si $b_i = 0$ para todo $i = 1, ..., N$ y $a_{ij} = a_{ji}$ c.p.d. en Ω para todo $1 \leq i,j \leq N$ entonces a es simétrica.

Demostración.- Sean $u, v \in H^1(\Omega)$ entonces aplicando (H1) se tiene que

$$\begin{aligned}
|a(u,v)| \leq & \sum_{i,j=1}^{N} \int_\Omega |a_{ij}||\partial_i u||\partial_j v| + \sum_{i=1}^{N} \int_\Omega |b_i||\partial_i u||v| + \int_\Omega |c||uv| \\
\leq & \ C\left(\int_\Omega |\nabla u||\nabla v| + \int_\Omega |\nabla u||v| + \int_\Omega |u||v|\right) \\
\leq & \ C\left(\|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}\|\nabla v\|_{L^2(\Omega)} + \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}\|v\|_{L^2(\Omega)} + \|u\|_{L^2(\Omega)}\|v\|_{L^2(\Omega)}\right) \\
\leq & \ C\|u\|_{H^1(\Omega)}\|v\|_{H^1(\Omega)}.
\end{aligned}$$

Cuando $b_i = 0$ para todo $i = 1, ..., N$ y $a_{ij} = a_{ji}$ c.p.d. en Ω para todo $1 \leq i,j \leq N$ es claro que a es simétrica. ■

Consideremos en primer lugar el problema de Dirichlet homogéneo

$$\begin{cases} Au = F & \text{en } \Omega, \\ u = 0 & \text{sobre } \partial\Omega, \end{cases} \tag{9.3}$$

con

$$F \in H^{-1}(\Omega). \tag{9.4}$$

Definición 9.4. *Se denomina solución débil o generalizada del problema de Dirichlet (9.3) a cualquier función u que sea solución de*

$$\begin{cases} u \in H_0^1(\Omega), \\ a(u,v) = \langle F, v\rangle \quad \forall v \in H_0^1(\Omega), \end{cases} \tag{9.5}$$

donde por $\langle\cdot,\cdot\rangle$ denotamos al producto de dualidad entre $H^{-1}(\Omega)$ y $H_0^1(\Omega)$.

Nota 9.5. *Recordemos que por el Teorema 8.2 si $F \in H^{-1}(\Omega)$, entonces existen $N+1$ funciones f_0, f_1,..., f_N en $L^2(\Omega)$ tales que*

$$\langle F, v\rangle = \int_\Omega f_0 v\, dx + \sum_{i=1}^{n} \int_\Omega f_i \partial_i v\, dx, \quad \forall v \in H_0^1(\Omega),$$

y

$$\|F\|_{H^{-1}(\Omega)} = \left(\sum_{i=0}^{N} \|f_i\|^2{}_{L^2(\Omega)}\right)^{1/2}.$$

Se considera ahora el problema de Dirichlet no homogéneo

$$\begin{cases} Au = F & \text{en } \Omega, \\ u = \widetilde{g} & \text{sobre } \partial\Omega, \end{cases} \tag{9.6}$$

con F y $\widetilde{g}$ dadas satisfaciendo

$$F \in H^{-1}(\Omega), \quad \widetilde{g} \in H^1(\Omega). \tag{9.7}$$

Definición 9.6. *Se denomina solución débil o generalizada del problema de Dirichlet (9.6) a cualquier función u que sea solución de*

$$\begin{cases} u \in \widetilde{g} + H_0^1(\Omega), \\ a(u,v) = \langle F, v\rangle \quad \forall v \in H_0^1(\Omega), \end{cases} \tag{9.8}$$

o equivalentemente de

$$\begin{cases} u \in \widetilde{g} + H_0^1(\Omega), \\ Au = F \quad \text{en } \mathcal{D}'(\Omega). \end{cases} \tag{9.9}$$

A (9.8) se la denomina la formulación variacional del problema de Dirichlet (9.6).

A lo largo del capítulo usaremos también las siguientes hipótesis sobre el operador A:

(H2) Supongamos además que A es *uniformemente elíptico*; es decir, existe $\alpha > 0$ satisfaciendo

$$\sum_{i,j=1}^{N} a_{ij}(x)\xi_i\xi_j \geq \alpha|\xi|^2 \quad \text{para todo } \xi \in \mathbb{R}^N, \ c.p.d. \ x \in \Omega.$$

(H3) El coeficiente $c(x) \geq 0$ *c.p.d.* $x \in \Omega$.

Recordemos que en el caso en que todos los coeficientes b_i son nulos, el problema (9.6) ha sido ya analizado en la asignatura Ecuaciones en Derivadas Parciales y Análisis Funcional. Como extensión del resultado obtenido en ese caso, obtenemos el siguiente.

Teorema 9.7. *Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ abierto acotado, y supongamos que se satisfacen las hipótesis (H1)-(H2)-(H3) y (9.7). Supongamos también que o bien*

(D1) los coeficientes b_i son todos constantes o

(D2) satisfacen que existe $\beta > 0$ tal que

$$\beta \max_{1\leq i\leq N} \|b_i\|_{L^\infty(\Omega)} < \alpha, \quad \text{con} \quad \sum_{i=1}^{N} |b_i(x)| \leq 4\beta c(x) \quad c.p.d. \ x \in \Omega. \tag{9.10}$$

Entonces, existe una y sólo una solución débil del problema de Dirichlet (9.6). Además, existe una constante $C > 0$, independiente de F y $\widetilde{g}$, tal que

$$\|u\|_{H^1(\Omega)} \leq C\left(\|F\|_{H^{-1}(\Omega)} + \|\widetilde{g}\|_{H^1(\Omega)}\right).$$

Finalmente, si todos los b_i son nulos y $a_{ij} = a_{ji}$ c.p.d. en Ω para todo $1 \leq i,j \leq N$, entonces u viene caracterizada por

$$\frac{1}{2}a(u,u) - l(u) = \min_{v\in\widetilde{g}+H_0^1(\Omega)} \left(\frac{1}{2}a(v,v) - l(v)\right), \tag{9.11}$$

donde l viene definido por $l(v) = \langle F, v\rangle$

Demostración.- Tomemos $V = H_0^1(\Omega)$ con norma $\|v\| = \|\nabla v\|_{L^2(\Omega)^N}$, que como sabemos es norma equivalente a la usual de $H^1(\Omega)$ en V y denotemos

$$L(v) = l(v) - a(\widetilde{g}, v) \quad \text{para toda } v \in H_0^1(\Omega).$$

Observemos que $L \in H^{-1}(\Omega)$, y u es solución débil de (9.6) si y sólo si

$$u = \widetilde{u} + \widetilde{g} \quad \text{con} \quad \widetilde{u} \in H_0^1(\Omega), \quad \text{y} \quad a(\widetilde{u}, v) = L(v) \quad \forall\, v \in H_0^1(\Omega).$$

Si comprobamos que la forma bilineal $a(\cdot,\cdot)$ es coerciva en $H_0^1(\Omega)$, es inmediato obtener nuestro teorema como consecuencia del de Lax-Milgram.

La coercividad de $a(\cdot,\cdot)$ en el caso (D1) en que todos los b_i sean constantes es consecuencia directa de que

$$\int_\Omega v\partial_i v\, dx = 0 \quad \forall\, v \in H_0^1(\Omega) \quad \forall\, 1 \leq i \leq N,$$

como se deduce de la Proposición 7.8.

Supongamos ahora la hipótesis (D2). Obsérvese en primer lugar que para todo par de números reales a y b se tiene

$$ab = 2\sqrt{\beta}a\frac{1}{2\sqrt{\beta}}b \leq \beta a^2 + \frac{1}{4\beta}b^2,$$

por lo que es fácil concluir que para toda $v \in H^1(\Omega)$ se satisface

$$\left|\sum_{i=1}^N \int_\Omega b_i v\partial_i v\, dx\right| \leq \beta \max_{1\leq i\leq N} \|b_i\|_{L^\infty(\Omega)} \int_\Omega |\nabla v|^2\, dx + \frac{1}{4\beta}\sum_{i=1}^N \int_\Omega |b_i(x)||v(x)|^2\, dx.$$

Sea ahora $v \in V$, entonces usando (H2), la desigualdad anterior y (9.10) sigue que

$$\begin{aligned}
a(v,v) = {} & \sum_{i,j=1}^N \int_\Omega a_{ij}\partial_i v\partial_j v + \sum_{i=1}^N \int_\Omega b_i v\partial_i v + \int_\Omega cv^2 \\
\geq {} & (\alpha - \beta \max_{1\leq i\leq N} \|b_i\|_{L^\infty(\Omega)}) \int_\Omega |\nabla v|^2\, dx + \int_\Omega \left(c - \frac{1}{4\beta}\sum_{i=1}^N |b_i(x)|\right)|v(x)|^2 \\
\geq {} & \gamma\|v\|^2_{H_0^1(\Omega)}.
\end{aligned}$$

■

Teniendo en cuenta el teorema de trazas, las consideraciones precedentes pueden ser trasladadas al caso de un dato g definido sobre $\partial\Omega$, si ésta es regular. En concreto, supongamos la situación precedente, salvo que ahora Ω es, además, de clase C^1, por lo que tenemos definido la aplicación traza

$$\gamma_0 : H^1(\Omega) \mapsto L^2(\partial\Omega)$$

que es lineal y continua pero no sobreyectiva. Es decir, existen $g \in L^2(\partial\Omega)$ que no son trazas de funciones de $H^1(\Omega)$. Recordemos que en el Tema 7 habíamos definido

$$H^{1/2}(\partial\Omega) = \gamma_0(H^1(\Omega)) \subset L^2(\partial\Omega),$$

y que por tanto dada $g \in H^{1/2}(\partial\Omega)$ existe $\tilde{g} \in H^1(\Omega)$ tal que $\gamma_0(\tilde{g}) = g$. Podemos ahora plantear el problema

$$\text{(9.12)} \qquad \begin{cases} Au = F & \text{en } \Omega, \\ u = g & \text{sobre } \partial\Omega, \end{cases}$$

con $g \in H^{1/2}(\partial\Omega)$.

Definición 9.8. *Se denomina solución débil del problema de Dirichlet (9.12) a cualquier función u que sea solución de*

$$\begin{cases} u \in H^1(\Omega), \\ a(u,v) = \langle F, v\rangle \quad \forall v \in H_0^1(\Omega), \\ \gamma_0(u) = g, \end{cases}$$

o equivalentemente de

$$\begin{cases} u \in H^1(\Omega), \\ Au = F \qquad en\ \mathcal{D}'(\Omega), \\ \gamma_0(u) = g. \end{cases} \tag{9.13}$$

Consideremos sobre $H^{1/2}(\partial\Omega) = \gamma_0(H^1(\Omega))$ la norma definida por

$$\|g\|_{H^{1/2}(\partial\Omega)} := \inf_{v\in\gamma_0^{-1}(g)} \|v\|_{H^1(\Omega)}, \quad \forall\, g \in H^{1/2}(\partial\Omega), \tag{9.14}$$

con la que $H^{1/2}(\partial\Omega)$ es un espacio de Banach (de hecho de Hilbert).

Teorema 9.9. *Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ un abierto acotado de clase C^1 y supongamos que se satisfacen las hipótesis (H1)-(H2)-(H3), (D1) o (D2) y además*

$$F \in H^{-1}(\Omega), \quad g \in H^{1/2}(\partial\Omega). \tag{9.15}$$

Entonces, existe una y sólo una solución débil del problema de Dirichlet (9.12). Además, existe una constante $C > 0$ independiente de F y g tal que

$$\|u\|_{H^1(\Omega)} \le C \left(\|F\|_{H^{-1}(\Omega)} + \|g\|_{H^{1/2}(\partial\Omega)} \right).$$

Finalmente, si todos los b_i son nulos y $a_{ij} = a_{ji}$ c.p.d. en Ω para todo $1 \le i,j \le N$, entonces u viene caracterizada por (9.11) con $\widetilde{g}$ cualquiera en $\gamma_0^{-1}(g)$.

Demostración.- Dada $g \in H^{1/2}(\partial\Omega)$ existe $\tilde{g} \in H^1(\Omega)$ tal que $\gamma_0(\tilde{g}) = g$. Basta aplicar el Teorema 9.7 y obtener la existencia de una solución u de (9.7) tal que $u \in \tilde{g} + H_0^1(\Omega)$. Pero entonces $\gamma_0(u) = \gamma_0(\tilde{g}) = g$, y por lo tanto u es solución de (9.12).

Falta probar la unicidad. Para ello consideremos dos soluciones u_1 y u_2 de (9.12). Entonces, $w = u_1 - u_2$ es solución de $a(w,v) = 0$ para todo $v \in H_0^1(\Omega)$ y $\gamma_0(w) = 0$. Por el Teorema de Lax-Milgram podemos concluir que $w \equiv 0$. ■

Observación 9.10. *Tomemos $\widetilde{g} \in H^1(\Omega)$ tal que $\gamma_0(\widetilde{g}) = g$. Teniendo en cuenta que* $\ker(\gamma_0) = H_0^1(\Omega)$, *es inmediato comprobar que el conjunto $\widetilde{g} + H_0^1(\Omega)$ es independiente del representante $\widetilde{g}$ elegido en $\gamma_0^{-1}(g)$.*

Observación 9.11. *Una vez que se ha demostrado existencia y unicidad de solución débil, el problema siguiente es determinar bajo qué condiciones se tiene regularidad de dicha solución, para, eventualmente, concluir que es una solución clásica. Sobre este particular obtendremos algunos resultados en el Tema 11.*

9.2. El problema de Neumann para $-\Delta$

Consideremos el problema de Neumann

$$\begin{cases} -\Delta u + c(x)u = f & \text{en } \Omega, \\ \partial_{\vec{n}} u = g & \text{sobre } \partial\Omega. \end{cases} \tag{9.16}$$

Obsérvese que si buscamos $u \in H^1(\Omega)$ solución de (**??**) entonces en principio no está definida la derivada normal de u, $\partial_{\vec{n}} u$. Obsérvese que si por ejemplo $u \in H^2(\Omega)$ es solución de (**??**), por la identidad de Green se obtiene de manera inmediata que

$$\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v \, dx + \int_\Omega c(x) uv \, dx = \int_\Omega fv \, dx + \int_{\partial\Omega} gv \, d\sigma(x) \quad \forall\, v \in H^1(\Omega).$$

Así, por ejemplo si $c \in L^\infty(\Omega)$ y $f \in L^2(\Omega)$ para tomar la igualdad anterior como definición basta con dar sentido a

$$\int_{\partial\Omega} gv \, d\sigma(x)$$

para lo que bastaría que $g \in L^2(\partial\Omega)$. Pero podemos considerar un espacio mayor.

Sea ahora $\Omega \subset \mathbb{R}^N$, abierto acotado de clase C^1, y denotemos por

$$H^{-1/2}(\partial\Omega) := (H^{1/2}(\partial\Omega))',$$

esto es $H^{-1/2}(\partial\Omega)$ es es dual topológico de $H^{1/2}(\partial\Omega)$, donde a este último espacio se considera con la norma definida por (9.14). Consideremos el problema de Neumann (**??**) con c, f y g dados satisfaciendo

$$c \in L^\infty(\Omega), \quad f \in L^2(\Omega), \quad g \in H^{-1/2}(\partial\Omega). \tag{9.17}$$

En consecuencia, se introduce el concepto de solución débil de (**??**) por

Definición 9.12. *Una solución débil de (**??**) es cualquier función $u \in H^1(\Omega)$ tal que*

$$\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v \, dx + \int_\Omega c(x) uv \, dx = \int_\Omega fv \, dx + \langle g, \gamma_0(v) \rangle_{\partial\Omega} \quad \forall\, v \in H^1(\Omega), \tag{9.18}$$

donde por $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\partial\Omega}$ denotamos al producto de dualidad entre $H^{-1/2}(\partial\Omega)$ y $H^{1/2}(\partial\Omega)$.

Teorema 9.13. *Sean $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ abierto acotado de clase C^1, los datos c, f y g satisfaciendo (9.17), y supongamos que además existe $c_0 > 0$ tal que*

$$c(x) \geq c_0 \ c.p.d.\ x \in \Omega. \tag{9.19}$$

*Entonces existe una y sólo una solución débil del problema de Neumann (**??**). Dicha solución está caracterizada por satisfacer*

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla u|^2 \, dx + \frac{1}{2}\int_\Omega c(x) u^2 \, dx - \int_\Omega fu \, dx - \langle g, \gamma_0(u) \rangle_{\partial\Omega} \\ &= \min_{v \in H^1(\Omega)} \left(\frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla v|^2 \, dx + \frac{1}{2}\int_\Omega c(x) v^2 \, dx - \int_\Omega fv \, dx - \langle g, \gamma_0(v) \rangle_{\partial\Omega} \right). \end{aligned}$$

Además (dependencia continua), existe una constante $C > 0$ independiente de f y g tal que

$$\|u\|_{H^1(\Omega)} \leq C \left(\|f\|_{L^2(\Omega)} + \|g\|_{H^{-1/2}(\partial\Omega)} \right).$$

Demostración.- Basta aplicar el Teorema de Lax-Milgram con $V = H^1(\Omega)$,

$$a(u, v) = \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v \, dx + \int_\Omega c(x) uv \, dx,$$

y $L(v) = \displaystyle\int_\Omega fv \, dx + \langle g, \gamma_0(v) \rangle_{\partial\Omega}$. ■

Observación 9.14. *1) La hipótesis (9.19) puede ser debilitada a $c(x) \geq 0$ c.p.d. en Ω y $\|c\|_{L^\infty(\Omega)} > 0$ (ver [3] para la demostración).*

*2) Sin embargo, el teorema precedente es falso si $c = 0$ c.p.d. en Ω. En este caso es obvio que si u es solución débil de (**??**), también lo es $u + k$ con $k \in \mathbb{R}$ arbitraria; además, tomando $v = 1$ en (9.18), resulta claro que para que exista solución débil se ha de satisfacer la condición de compatibilidad*

$$\int_\Omega f\,dx + \langle g, 1\rangle_{\partial\Omega} = 0. \tag{9.20}$$

3) Demostraremos en ejercicios, que usando la desigualdad de Poincaré en $H^1(\Omega)$, si se denota por V al conjunto

$$V = \{u \in H^1(\Omega) : \int_\Omega u\,dx = 0\},$$

entonces

a) V es un subespacio vectorial cerrado de $H^1(\Omega)$ cuyo ortogonal en dicho espacio es el conjunto formado por las funciones constantes.

*b) Si $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ es un abierto acotado conexo de clase C^1, f y g satisfacen (9.17) y la relación de compatibilidad (9.20), entonces el problema de Neumann (**??**) con $c = 0$ posee infinitas soluciones débiles, siendo la diferencia de dos cualesquiera de ellas una constante.*

Observación 9.15. *Es posible extender el Teorema 9.13 al caso del problema de Neumann*

$$(PN)\begin{cases} Au = f & \textit{en } \Omega, \\ \partial_{\vec{n}_A} u = g & \textit{sobre } \partial\Omega, \end{cases}$$

donde el operador A es de la forma (9.1), con los coeficientes satisfaciendo (H1)-(H2) y una condición similar a (H3), siendo $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ abierto acotado de clase C^1, $f \in L^2(\Omega)$, $g \in H^{-1/2}(\partial\Omega)$, y $\partial_{\vec{n}_A} u$, la denominada derivada conormal asociada al operador A, está definida (formalmente) por

$$(\partial_{\vec{n}_A} u)(x) = \sum_{i,j=1}^N (a_{ij}(x)\partial_i u(x))\vec{n}_j(x)$$

(ver [3] para los detalles).

Observación 9.16. *Usando un espacio denotado por $H(\mathrm{div}, \Omega)$ (ver [3]), es posible demostrar, al ser $f \in L^2(\Omega)$, que si $u \in H^1(\Omega)$ es solución débil de (**??**), se puede definir $\partial_{\vec{n}} u$ como un elemento de $H^{-1/2}(\partial\Omega)$, y de hecho u es solución débil de (**??**) si y sólo si*

$$\begin{cases} -\Delta u + c(x)u = f & \textit{en } \mathcal{D}'(\Omega), \\ \partial_{\vec{n}} u = g & \textit{como elementos de } H^{-1/2}(\partial\Omega). \end{cases}$$

9.3. Problemas con condiciones de contorno de tipo Fourier o Robin

Consideremos el problema

$$\begin{cases} -\Delta u = f & \text{en } \Omega, \\ \alpha(x)u + \partial_{\vec{n}} u = g & \text{sobre } \partial\Omega, \end{cases} \tag{9.21}$$

con $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ un abierto acotado conexo de clase C^1, $f \in L^2(\Omega)$, $\alpha \in L^\infty(\partial\Omega)$ y $g \in H^{-1/2}(\partial\Omega)$ dadas. Sobre α suponemos además que no es idénticamente nula, y que $\alpha(x) \geq 0$, σ-c.p.d. en $\partial\Omega$.

Es sencillo comprobar que si todos los datos, así como la solución u de (9.21), son regulares, entonces

$$\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v\,dx + \int_{\partial\Omega} \alpha(x)u(x)v(x)\,d\sigma(x) = \int_\Omega fv\,dx + \int_{\partial\Omega} g(x)v(x)\,d\sigma(x) \quad \forall\, v \in H^1(\Omega).$$

Definición 9.17. *Una solución débil de (9.21) es cualquier función* $u \in H^1(\Omega)$ *tal que*

$$\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v \, dx + \int_{\partial\Omega} \alpha(x) u(x) v(x) \, d\sigma(x) = \int_\Omega f v \, dx + \langle g, v \rangle_{\partial\Omega} \quad \forall \, v \in H^1(\Omega),$$

donde por $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\partial\Omega}$ *denotamos el producto de dualidad entre* $H^{-1/2}(\partial\Omega)$ *y* $H^{1/2}(\partial\Omega)$.

Teorema 9.18. *Existe una única solución débil de (9.21). Además, existe una constante* $C > 0$ *independiente de* f *y* g*, tal que*

$$\|u\|_{H^1(\Omega)} \leq C \left(\|f\|_{L^2(\Omega)} + \|g\|_{H^{-1/2}(\partial\Omega)} \right).$$

Demostración.- El resultado es consecuencia del Teorema de Lax-Milgram. El único punto delicado es demostrar el carácter coercivo en $H^1(\Omega)$ de la forma bilineal

$$a(u,v) := \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v \, dx + \int_{\partial\Omega} \alpha(x) u(x) v(x) \, d\sigma(x),$$

pero esto es consecuencia de la Desigualdad de Friedrichs (Teorema 7.17), si tenemos en cuenta que de las condiciones sobre α se deduce que existen $\varepsilon > 0$ y $\Gamma_0 \subset \partial\Omega$ tales que $\sigma(\Gamma_0) > 0$ y $\alpha(x) \geq \varepsilon$, σ-c.p.d. en Γ_0 (ver ejercicio 48). ■

Observación 9.19. *También es fácil caracterizar la solución débil de (9.21) como solución de un problema de minimización en* $H^1(\Omega)$.

9.4. Problemas de contornos mixtos

Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ un abierto acotado conexo de clase C^1, y $\Gamma_0 \subset \partial\Omega$ tal que $\sigma(\Gamma_0) > 0$. El objetivo es analizar un problema con condiciones de contorno de tipo mixto de la forma

$$(9.22) \qquad \begin{cases} -\Delta u = f & \text{en } \Omega, \\ u = u_0 & \text{sobre } \Gamma_0, \\ \partial_{\vec{n}} u = g & \text{sobre } \Gamma_g = \partial\Omega \setminus \Gamma_0, \end{cases}$$

con $f \in L^2(\Omega)$, $u_0 \in H^{1/2}(\Gamma_0)$ y $g \in H^{-1/2}(\Gamma_g)$ dadas, donde por $H^{1/2}(\Gamma_0)$ se denota al espacio de las restricciones a Γ_0 de los elementos de $H^{1/2}(\partial\Omega)$, dotado de la norma

$$\|u_0\|_{H^{1/2}(\Gamma_0)} := \inf_{\widetilde{u}_{|\Gamma_0} = u_0} \|\widetilde{u}\|_{H^1(\Omega)},$$

donde $\widetilde{u}_{|\Gamma_0}$ denota $\gamma_0(\widetilde{u})_{|\Gamma_0}$ (análogamente para $H^{1/2}(\Gamma_g)$), y $H^{-1/2}(\Gamma_g)$ es el dual topológico de $H^{1/2}(\Gamma_g)$.

Denotemos

$$(9.23) \qquad V = \{v \in H^1(\Omega) : \; v_{|\Gamma_0} = 0\}.$$

Si todos los datos, así como la solución u de (9.22) son regulares, es inmediato comprobar que

$$\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v \, dx = \int_\Omega f v \, dx + \int_{\Gamma_g} g(x) v(x) \, d\sigma(x) \quad \forall \, v \in V.$$

En consecuencia,

Definición 9.20. *Una solución débil de (9.22) es cualquier función* $u \in H^1(\Omega)$ *tal que* $u = u_0$ *sobre* Γ_0 *y*

$$\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v \, dx = \int_\Omega f v \, dx + \langle g, v \rangle_{\Gamma_g} \quad \forall \, v \in V,$$

donde por $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\Gamma_g}$ *denotamos el producto de dualidad entre* $H^{-1/2}(\Gamma_g)$ *y* $H^{1/2}(\Gamma_g)$.

Ahora podemos probar

Teorema 9.21. *Existe una única solución débil de (9.22). Además, existe una constante $C > 0$ independiente de f, u_0 y g, tal que*

$$\|u\|_{H^1(\Omega)} \leq C\left(\|f\|_{L^2(\Omega)} + \|u_0\|_{H^{1/2}(\Gamma_0)} + \|g\|_{H^{-1/2}(\Gamma_g)}\right).$$

Demostración.- Para resolver el problema (9.22), de manera similar al caso del problema de Dirichlet, se fija en primer lugar una función $\widetilde{u} \in H^1(\Omega)$ tal que $\widetilde{u}_{|\Gamma_0} = u_0$. Es sencillo comprobar que u es solución débil de (9.22) si y sólo si $u = \widetilde{u} + u_g$, siendo u_g solución de

$$\text{(9.24)} \qquad \begin{cases} u_g \in V, \\ \displaystyle\int_\Omega \nabla u_g \cdot \nabla v\, dx = \int_\Omega f v\, dx - \int_\Omega \nabla\widetilde{u} \cdot \nabla v\, dx + \langle g, v\rangle_{\Gamma_g} \quad \forall\, v \in V. \end{cases}$$

Consideremos la forma bilineal $a : V \times V \mapsto \mathbb{R}$ definida por

$$a(u,v) = \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v.$$

Para probar que a es coercivo hay que recordar que como consecuencia de la Desigualdad de Friedrichs (ver Teorema 7.17) la expresión

$$\left(\|u\|^2_{L^2(\Gamma_0)} + \|\nabla u\|^2_{L^2(\Omega)^N}\right)^{1/2}$$

define sobre $H^1(\Omega)$ una norma equivalente a la usual, y por tanto sobre V es equivalente a

$$\|\nabla u\|_{L^2(\Omega)^N}.$$

Basta ahora aplicar el Teorema de Lax-Milgram con esa norma en V. ■

Observación 9.22. *También, es fácil caracterizar la solución débil de (9.22) como solución de un problema de minimización en V similar a los obtenidos en situaciones anteriores.*

Observación 9.23. *Finalmente, digamos que tanto el problema (9.22) como el problema (9.21) pueden ser generalizados al caso de un operador elíptico A de la forma (9.1), con los coeficientes satisfaciendo (H1)-(H2) (ver [3]).*

9.5. Problemas con dominios no acotados

Evidentemente también nos podemos plantear un problema elíptico en un dominio no acotado. Presentamos a continuación un ejemplo en el que el dominio es todo el espacio $\mathbb{R}^N$, y por lo tanto no hay condición frontera.

Nos planteamos resolver el siguiente problema

$$\text{(9.25)} \qquad -\Delta u + u = f \quad \text{en } \mathbb{R}^N,$$

con $f \in L^2(\mathbb{R}^N)$.

Definición 9.24. *Diremos que $u \in H^1(\mathbb{R}^N)$ es solución débil de (9.25) si*

$$\int_{\mathbb{R}^N} \nabla u \cdot \nabla v + \int_{\mathbb{R}^N} uv = \int_{\mathbb{R}^N} fv, \quad \forall v \in H^1(\mathbb{R}^N).$$

De nuevo se tiene

Teorema 9.25. *Existe una única solución débil de (9.25).*

Demostración.- Basta aplicar de nuevo el Teorema de Lax-Milgram a la forma bilineal

$$a(u,v) = \int_{\mathbb{R}^N} \nabla u \cdot \nabla v + \int_{\mathbb{R}^N} uv.$$

■

9.6. El problema de Dirichlet homogéneo para el bilaplaciano

Al operador de cuarto orden Δ^2, definido por $\Delta^2 u = \Delta(\Delta u)$, se le denomina el operador *bilaplaciano*, o también operador *biarmónico*. Se denomina problema de Dirichlet homogéneo para el bilaplaciano al problema

$$\left\{ \begin{array}{ll} \Delta^2 u = f & \text{en } \Omega, \\ u = \partial_{\vec{n}} u = 0 & \text{sobre } \partial\Omega, \end{array} \right. \tag{9.26}$$

con $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ un abierto acotado y $f \in L^2(\Omega)$ dados.

Si $u \in C^4(\overline{\Omega})$ es solución de (9.26), es inmediato que

$$\int_\Omega \Delta u \Delta \varphi \, dx = \int_\Omega f\varphi \, dx \quad \forall \, \varphi \in \mathcal{D}(\Omega).$$

Por esto, y teniendo en cuenta el carácter denso de $\mathcal{D}(\Omega)$ en $H_0^2(\Omega)$, y la caracterización de este último espacio cuando Ω es C^1, se dice

Definición 9.26. *u es una solución débil del problema (9.26) si satisface*

$$\left\{ \begin{array}{l} u \in H_0^2(\Omega), \\ \displaystyle\int_\Omega \Delta u \Delta v \, dx = \int_\Omega f v \, dx \quad \forall \, v \in H_0^2(\Omega). \end{array} \right. \tag{9.27}$$

Teorema 9.27. *Para cada $f \in L^2(\Omega)$ el problema (9.26) posee una y sólo una solución débil u, que viene caracterizada por ser solución del problema de minimización*

$$\frac{1}{2}\int_\Omega |\Delta u|^2 \, dx - \int_\Omega f u \, dx = \min_{v \in H_0^2(\Omega)} \left(\frac{1}{2}\int_\Omega |\Delta v|^2 \, dx - \int_\Omega f v \, dx \right).$$

Además, se obtiene dependencia continua respecto del dato f,

$$\|u\|_{H^2(\Omega)} \leq \frac{1}{\alpha}\|f\|_{L^2(\Omega)}.$$

Demostración.- Consideremos la forma

$$a(u,v) := \int_\Omega \Delta u \Delta v \, dx, \quad u, v \in H_0^2(\Omega),$$

que evidentemente está bien definida y es bilineal continua sobre $H_0^2(\Omega)$. En efecto,

$$|a(u,v)| \leq \|\Delta u\|_{L^2(\Omega)} \|\Delta v\|_{L^2(\Omega)} \leq \|u\|_{H^2(\Omega)} \|v\|_{H^2(\Omega)}.$$

Para poder aplicar el Teorema de Lax-Milgram al problema (9.27), es necesario comprobar que la forma es también coerciva sobre dicho espacio. Es decir, hemos de probar que existe $\alpha > 0$ tal que

$$a(u,u) = \int_\Omega |\Delta u|^2 \, dx \geq \alpha \|u\|^2_{H^2(\Omega)} \quad \forall \, u \in H_0^2(\Omega). \tag{9.28}$$

Para demostrar (9.28), lo primero que se observa es que, para toda función $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ y todo $1 \leq i, j \leq N$, se satisface

$$\int_\Omega \partial_{ii}\varphi \partial_{jj}\varphi \, dx = \int_\Omega |\partial_{ij}\varphi|^2 \, dx,$$

y en consecuencia, por densidad, se obtiene

$$\int_\Omega |\Delta u|^2 = \sum_{i,j=1}^N \|\partial_{ij} u\|^2_{L^2(\Omega)} \quad \forall \, u \in H_0^2(\Omega). \tag{9.29}$$

Por otra parte, para toda función $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ y todo $1 \leq i \leq N$, se satisface

$$\int_\Omega |\partial_i \varphi|^2 \, dx = -\int_\Omega \varphi \partial_{ii} \varphi \, dx,$$

y por tanto, nuevamente por densidad,

$$\|\nabla u\|^2_{L^2(\Omega)^N} = -\int_\Omega u \Delta u \, dx \quad \forall\, u \in H^2_0(\Omega). \tag{9.30}$$

Finalmente, recordemos que por la desigualdad de Poincaré, existe una constante $C > 0$ tal que en particular

$$\|u\|^2_{L^2(\Omega)} \leq C \|\nabla u\|^2_{L^2(\Omega)^N} \quad \forall\, u \in H^2_0(\Omega). \tag{9.31}$$

De (9.30) es inmediato que para todo $\varepsilon > 0$,

$$\|\nabla u\|^2_{L^2(\Omega)^N} \leq \frac{1}{2\varepsilon} \|\Delta u\|^2_{L^2(\Omega)} + \varepsilon \|u\|^2_{L^2(\Omega)} \quad \forall\, u \in H^2_0(\Omega). \tag{9.32}$$

De (9.31) y (9.32) podemos concluir que

$$\|\nabla u\|^2_{L^2(\Omega)^N} \leq \frac{1}{2\varepsilon} \|\Delta u\|^2_{L^2(\Omega)} + \varepsilon C \|\nabla u\|^2_{L^2(\Omega)^N},$$

y por tanto

$$(1 - \varepsilon C) \|\nabla u\|^2_{L^2(\Omega)^N} \leq \frac{1}{2\varepsilon} \|\Delta u\|^2_{L^2(\Omega)}.$$

Usando ahora (9.29), sigue que

$$\begin{aligned}
\|u\|^2_{H^2(\Omega)} &= \|u\|^2_{L^2(\Omega)} + \|\nabla u\|^2_{L^2(\Omega)^N} + \sum_{i,j=1}^N \|\partial_{ij} u\|^2_{L^2(\Omega)} \\
&\leq (C+1) \|\nabla u\|^2_{L^2(\Omega)^N} + \sum_{i,j=1}^N \|\partial_{ij} u\|^2_{L^2(\Omega)} \\
&\leq \frac{C+1}{2\varepsilon(1 - \varepsilon C)} \|\Delta u\|^2_{L^2(\Omega)} + \|\Delta u\|^2_{L^2(\Omega)}.
\end{aligned}$$

Tomando $\varepsilon = \dfrac{1}{2C}$ es sencillo comprobar que se satisface (9.28) con $\alpha = \dfrac{1}{1 + 2C(1+C)}$.

Con esto podemos aplicar el Teorema de Lax-Milgram y concluir el resultado.

Observación 9.28. *Es sencillo ver que lo que precede se puede generalizar al caso en que $f \in H^{-2}(\Omega)$.*

CAPÍTULO 10

Principio del máximo. Unicidad de solución débil del problema de Dirichlet

Consideremos un dominio $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ abierto, conexo, acotado y de clase C^1 y el operador

$$Au = -\sum_{i,j=1}^{N} \partial_j \left(a_{ij}(x) \partial_i u(x) \right) + \sum_{i=1}^{N} b_i(x) \partial_i u(x) + c(x)u(x),$$

donde los coeficientes satisfacen

(H1) $a_{ij},\ b_i,\ c \in L^\infty(\Omega), \quad 1 \leq i,j \leq N.$

(H2) A es uniformemente elíptico, esto es, existe $\alpha > 0$ tal que

$$\sum_{i,j=1}^{N} a_{ij}(x)\xi_i\xi_j \geq \alpha|\xi|^2, \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^N,\ \text{c.p.d. } x \in \Omega.$$

(H3) $c(x) \geq 0$ c.p.d. $x \in \Omega$.

10.1. Principio del Máximo débil

A lo largo del tema usaremos la notación siguiente

$$u^+ := \max\{u, 0\}, \qquad u^- := \min\{u, 0\},$$

y definimos

Definición 10.1. *Sea $u \in H^1(\Omega)$, definimos*

$$\sup_{\partial\Omega} u = \inf\{K \in \mathbb{R} : u \leq K \quad \text{en } \partial\Omega\}.$$

Es claro que $\inf_{\partial\Omega} u = -\sup_{\partial\Omega}(-u)$.

Con esta notación se puede ya enunciar el Principio del máximo.

Teorema 10.2. *(**Principio del máximo en forma generalizada**) Sea $u \in H^1(\Omega)$ tal que $Au \leq 0$ en Ω, esto es,*

$$\int_\Omega Auv \leq 0, \quad \forall v \in H_0^1(\Omega),\ v \geq 0 \quad \text{en } \Omega,$$

o equivalentemente

$$a(u,v) \le 0, \quad \forall v \in H_0^1(\Omega),\ v \ge 0 \quad \text{en } \Omega, \tag{10.1}$$

donde a es la forma bilineal asociada a A.

a) Supongamos que A verifica $(H1)-(H2)-(H3)$. Entonces,

$$\sup_{\Omega} u \le \sup_{\partial\Omega} u^+.$$

b) Supongamos que A verifica $(H1)-(H2)$ y $c \equiv 0$. Entonces,

$$\sup_{\Omega} u \le \sup_{\partial\Omega} u.$$

Demostración.- Supondremos por simplicidad que $b_i \equiv 0$ para $i = 1, \ldots, N$, para el caso general ver [5].

Sea

$$l := \sup_{\partial\Omega} u^+ \ge 0.$$

Es claro que si $l = +\infty$ el resultado está probado. Así podemos suponer que $l < \infty$. Tomemos

$$v := (u-l)^+.$$

Es claro que $v \ge 0$ y que $v \in H_0^1(\Omega)$ gracias al Corolario 4.25. Por tanto, tomando esta función en (10.1) llegamos a

$$\sum_{i,j=1}^{N} \int_{\Omega} a_{ij}(x)\partial_i u \partial_j (u-l)^+ \, dx + \int_{\Omega} c(x) u (u-l)^+ \, dx \le 0,$$

y por tanto usando que

$$\partial_i u \partial_j (u-l)^+ = \partial_i (u-l)^+ \partial_j (u-l)^+, \qquad c(x)u(u-l)^+ \ge 0, \tag{10.2}$$

se tiene que

$$\int_{\Omega} |\nabla (u-l)^+|^2 \le 0,$$

de donde se deduce que $(u-l)^+ \equiv 0$ y por tanto $u \le l$ c.p.d. en $x \in \Omega$.

Supongamos ahora que $c \equiv 0$, tomemos ahora

$$l := \sup_{\partial\Omega} u,$$

del que desconocemos su signo. Tomando de nuevo $v := (u-l)^+$, se tiene (10.2) y nuevamente obtenemos que $v \equiv 0$. Esto completa la prueba. ∎

Cambiando u por $-u$ en el Teorema 10.2 se tiene el siguiente corolario

Corolario 10.3. *Sea $u \in H^1(\Omega)$ tal que $Au \ge 0$ en Ω.*

a) Supongamos que A verifica $(H1)-(H2)-(H3)$. Entonces,

$$\inf_{\Omega} u \ge \inf_{\partial\Omega} u^-.$$

b) Supongamos que A verifica $(H1)-(H2)$ y $c \equiv 0$. Entonces,

$$\inf_{\Omega} u \ge \inf_{\partial\Omega} u.$$

Es inmediata la siguiente consecuencia

Corolario 10.4. *Supongamos que A verifica $(H1)-(H2)-(H3)$ y sea $u \in H^1(\Omega)$ tal que*

$$\begin{cases} Au \leq 0 & \text{en } \Omega, \\ u \leq 0 & \text{sobre } \partial\Omega. \end{cases}$$

Entonces,

$$u \leq 0 \quad \text{en } \Omega.$$

10.2. Unicidad de solución débil del problema de Dirichlet

Se puede obtener un resultado de unicidad para el problema de Dirichlet más general que el obtenido en el Tema 9. Consideremos el problema general

$$(PD) \qquad \begin{cases} Au = F & \text{en } \Omega, \\ u = g & \text{sobre } \partial\Omega, \end{cases}$$

con $F \in H^{-1}(\Omega)$ y $g \in H^{1/2}(\partial\Omega)$. Se tiene

Corolario 10.5. *Supongamos que A verifica $(H1)-(H2)-(H3)$. Entonces si existe solución débil de (PD), ésta es única.*

Demostración.- Supongamos que existen dos soluciones $u_1, u_2 \in H^1(\Omega)$ de (PD). Definamos

$$w := u_1 - u_2 \in H_0^1(\Omega),$$

que satisface claramente que $Aw = 0$. Aplicando ahora el Teorema 10.2 y el Corolario 10.3 se tiene que

$$\inf_{\partial\Omega} w^- \leq \inf_{\Omega} w \leq \sup_{\Omega} w \leq \sup_{\partial\Omega} w^+.$$

Pero como $w \in H_0^1(\Omega)$ se tiene que $\inf_{\partial\Omega} w^- = \sup_{\partial\Omega} w^+ = 0$, de donde concluimos que $w = 0$. ■

CAPÍTULO 11

Regularidad de las soluciones débiles

En este tema exponemos resultados de regularidad para las soluciones de algunos de los problemas de contorno estudiados en el Tema 9.

11.1. Un resultado de regularidad en $\mathbb{R}^N$

Para empezar, obtenemos un resultado de regularidad para la solución débil de

$$\left\{\begin{array}{l} u \in H^1(\mathbb{R}^N), \\ \displaystyle\int_{\mathbb{R}^N} \nabla u \cdot \nabla v \, dx + \int_{\mathbb{R}^N} uv \, dx = \int_{\mathbb{R}^N} fv \, dx, \quad \forall v \in H^1(\mathbb{R}^N), \end{array}\right. \tag{11.1}$$

o equivalentemente

$$\left\{\begin{array}{l} u \in H^1(\mathbb{R}^N), \\ -\Delta u + u = f \quad \text{en } \mathcal{D}'(\mathbb{R}^N). \end{array}\right.$$

Teorema 11.1. *Dada $f \in L^2(\mathbb{R}^N)$, si u es la solución débil de (11.1), entonces $u \in H^2(\mathbb{R}^N)$, y de hecho*

$$\|u\|_{H^2(\mathbb{R}^N)} \leq C\|f\|_{L^2(\mathbb{R}^N)}, \quad \text{con } C = 1 + N.$$

Además, si $f \in H^m(\mathbb{R}^N)$, con $m \geq 1$ entero, entonces $u \in H^{m+2}(\mathbb{R}^N)$, y existe una constante $C_m > 0$, que sólo depende de m y N, tal que

$$\|u\|_{H^{m+2}(\mathbb{R}^N)} \leq C_m\|f\|_{H^m(\mathbb{R}^N)}.$$

En particular, si $m > N/2$ entonces $u \in C^2(\mathbb{R}^N)$.

Demostración.- Vamos a usar el método de las traslaciones, también conocido como método de los cocientes diferenciales, debido a L. Nirenberg (ver [7] para otra demostración).

Si $w : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ es una función dada, y $h \in \mathbb{R}^N$, con $h \neq 0$, denotamos $(\tau_h w)(x) = w(x+h)$, y $D_h w = (\tau_h w - w)/|h|$, es decir

$$(D_h w)(x) = \frac{w(x+h) - w(x)}{|h|} \quad \text{para todo } x \in \mathbb{R}^N.$$

Es inmediato que si $w \in H^1(\mathbb{R}^N)$, entonces $D_h w \in H^1(\mathbb{R}^N)$, con $\partial_i(D_h w) = D_h(\partial_i w)$. En particular, por tanto, tomando $v = D_{-h}(D_h u)$ en (11.1), obtenemos

$$\int_{\mathbb{R}^N} \nabla u \cdot (D_{-h}(\nabla D_h u)) \, dx + \int_{\mathbb{R}^N} u(D_{-h}(D_h u)) \, dx = \int_{\mathbb{R}^N} f(D_{-h}(D_h u)) \, dx,$$

con lo que teniendo en cuenta que, como se comprueba fácilmente, de manera general se satisface

$$\int_{\mathbb{R}^N} w(D_{-h}(D_h u))\,dx = \int_{\mathbb{R}^N} (D_h w)(D_h u)\,dx,$$

obtenemos

$$\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla D_h u|^2\,dx + \int_{\mathbb{R}^N} |D_h u|^2\,dx = \int_{\mathbb{R}^N} f(D_{-h}(D_h u))\,dx,$$

y por tanto

$$\|D_h u\|^2_{H^1(\mathbb{R}^N)} \leq \|f\|_{L^2(\mathbb{R}^N)} \|D_{-h}(D_h u)\|_{L^2(\mathbb{R}^N)}, \quad \forall h \in \mathbb{R}^N \setminus \{0\}. \tag{11.2}$$

Por otra parte, recordemos que por la Proposición 6.12 para toda $w \in H^1(\mathbb{R}^N)$ y todo $h \in \mathbb{R}^N \setminus \{0\}$ se satisface

$$\|D_{-h} w\|_{L^2(\Omega')} \leq \|\nabla w\|_{L^2(\mathbb{R}^N)^N},$$

para todo $\Omega' \subset\subset \mathbb{R}^N$, y por tanto

$$\|D_{-h} w\|_{L^2(\mathbb{R}^N)} \leq \|\nabla w\|_{L^2(\mathbb{R}^N)^N}.$$

De esta última desigualdad y de (11.2), obtenemos de manera inmediata que

$$\|D_h u\|_{H^1(\mathbb{R}^N)} \leq \|f\|_{L^2(\mathbb{R}^N)}, \quad \forall h \in \mathbb{R}^N \setminus \{0\}. \tag{11.3}$$

Observando que $\partial_i(D_h u) = D_h(\partial_i u)$, de (11.3) se deduce en particular

$$\|D_h(\partial_i u)\|_{L^2(\mathbb{R}^N)} \leq \|f\|_{L^2(\mathbb{R}^N)}, \quad \forall h \in \mathbb{R}^N \setminus \{0\}, \quad \forall\, i = 1,..,N,$$

y por consiguiente, por la Proposición 6.12, para todo $i = 1,...,N$, se satisface que $\partial_i u \in H^1(\mathbb{R}^N)$, con lo que $u \in H^2(\mathbb{R}^N)$ y

$$\|\partial_{ij} u\|_{L^2(\mathbb{R}^N)} \leq \|f\|_{L^2(\mathbb{R}^N)}, \quad \forall\, i,j = 1,..,N. \tag{11.4}$$

Como u es solución de (11.1) sigue que

$$\|u\|_{H^1(\mathbb{R}^N)} \leq \|f\|_{L^2(\mathbb{R}^N)},$$

luego usando (11.4) se tiene

$$\|u\|^2_{H^2(\mathbb{R}^N)} \leq \|f\|^2_{L^2(\mathbb{R}^N)} + N^2 \|f\|^2_{L^2(\mathbb{R}^N)},$$

de donde se deduce la desigualdad

$$\|u\|_{H^2(\mathbb{R}^N)} \leq C\|f\|_{L^2(\mathbb{R}^N)}, \quad \text{con } C = 1 + N.$$

Supongamos ahora que $f \in H^1(\mathbb{R}^N)$, y demostremos que entonces $u \in H^3(\mathbb{R}^N)$. Para ello, hemos de demostrar que $\partial_i u \in H^2(\mathbb{R}^N)$ para todo $1 \leq i \leq N$. Por lo ya demostrado anteriormente, sabemos que $\partial_i u \in H^1(\mathbb{R}^N)$, y para demostrar que pertenece de hecho a $H^2(\mathbb{R}^N)$ basta ver que

$$\int_{\mathbb{R}^N} \nabla(\partial_i u) \cdot \nabla v\,dx + \int_{\mathbb{R}^N} (\partial_i u) v\,dx = \int_{\mathbb{R}^N} (\partial_i f) v\,dx, \quad \forall v \in H^1(\mathbb{R}^N). \tag{11.5}$$

Para comprobar (11.5), basta tener en cuenta que por (11.1),

$$-\Delta u + u = f \quad \text{en } \mathcal{D}'(\mathbb{R}^N),$$

y por tanto, $-\Delta(\partial_i u) + \partial_i u = \partial_i f$ en $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^N)$, con lo que, como $\mathcal{D}(\mathbb{R}^N)$ es denso en $H^1(\mathbb{R}^N)$, es inmediato obtener (11.5).

Para demostrar que si $f \in H^m(\mathbb{R}^N)$ entonces $u \in H^{m+2}(\mathbb{R}^N)$, basta razonar por recurrencia sobre m y usar (11.5). ■

11.2. Un resultado de regularidad local

En esta sección demostramos el siguiente resultado de regularidad local, también denominado de regularidad en el interior.

Teorema 11.2. *Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ un abierto no vacío y supongamos que u satisface*

$$\left\{ \begin{array}{l} u \in H^1(\Omega), \\ \displaystyle\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v \, dx + \int_\Omega uv \, dx = \int_\Omega fv \, dx, \quad \forall v \in H_0^1(\Omega), \end{array} \right. \tag{11.6}$$

con $f \in L^2(\Omega)$. Entonces, para toda $\theta \in \mathcal{D}(\Omega)$, se satisface que $\theta u \in H^2(\Omega)$, y de hecho, si $f \in H^m(\Omega)$, entonces $\theta u \in H^{m+2}(\Omega)$.

Demostración.- Denotemos $w = \widetilde{\theta u}$, la prolongación por cero a $\mathbb{R}^N \setminus \Omega$ de θu. De acuerdo con la Observación 4.15, $w \in H^1(\mathbb{R}^N)$, y se satisface

$$\partial_i w = \widetilde{\theta \partial_i u} + \widetilde{u \partial_i \theta}, \quad 1 \leq i \leq N,$$

igualdad en el sentido de $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^N)$. En consecuencia, dada $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^N)$, para todo $1 \leq i \leq N$ se satisface

$$\begin{aligned} \int_{\mathbf{R}^N} \partial_i w \partial_i \varphi \, dx &= \int_{\mathbf{R}^N} \widetilde{\theta \partial_i u} \partial_i \varphi \, dx + \int_{\mathbf{R}^N} \widetilde{u \partial_i \theta} \partial_i \varphi \, dx = \int_\Omega \theta \partial_i u \partial_i \varphi \, dx + \int_\Omega u \partial_i \theta \partial_i \varphi \, dx \\ &= \int_\Omega \partial_i u \partial_i (\theta \varphi) \, dx - \int_\Omega \varphi \partial_i u \partial_i \theta \, dx + \int_\Omega u \partial_i \theta \partial_i \varphi \, dx. \end{aligned} \tag{11.7}$$

Teniendo en cuenta que $\partial_i \theta \partial_i \varphi = \partial_i(\varphi \partial_i \theta) - \varphi \partial_{ii} \theta$, y que al ser $\varphi \partial_i \theta \in \mathcal{D}(\Omega)$,

$$\int_\Omega u \partial_i (\varphi \partial_i \theta) \, dx = -\int_\Omega \varphi \partial_i u \partial_i \theta \, dx,$$

de (11.7) obtenemos

$$\int_{\mathbf{R}^N} \nabla w \cdot \nabla \varphi \, dx = \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla(\theta \varphi) \, dx - 2 \int_\Omega (\nabla u \cdot \nabla \theta) \varphi \, dx - \int_\Omega (\Delta \theta) u \varphi \, dx,$$

con lo que si observamos que por (11.6), al ser $\theta \varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$,

$$\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla(\theta \varphi) \, dx = -\int_\Omega u \theta \varphi \, dx + \int_\Omega f \theta \varphi \, dx,$$

obtenemos fácilmente que

$$\int_{\mathbf{R}^N} \nabla w \cdot \nabla \varphi \, dx + \int_{\mathbf{R}^N} w \varphi \, dx = \int_{\mathbf{R}^N} g \varphi \, dx, \quad \forall \, \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^N),$$

con $g = \widetilde{f\theta} - 2\widetilde{\nabla u} \cdot \widetilde{\nabla \theta} - \widetilde{u \Delta \theta}$.

Basta ahora tener en cuenta que $\mathcal{D}(\mathbb{R}^N)$ es denso en $H^1(\mathbb{R}^N)$ y la expresión de g, para concluir, por aplicación del Teorema 11.1 que $w \in H^2(\mathbb{R}^N)$, con lo que $\theta u \in H^2(\Omega)$.

Supongamos ahora que $f \in H^1(\Omega)$. Observemos que por lo que acabamos de probar $(\partial_i \theta) u \in H^2(\Omega)$ por lo que $\partial_i((\partial_i \theta) u) \in H^1(\Omega)$, o lo que es equivalente $\partial_i \theta \partial_i u + (\partial_{ii} \theta) u \in H^1(\Omega)$ y por tanto

$$\partial_i \theta \partial_i u \in H^1(\Omega).$$

Así, $g \in H^1(\mathbb{R}^N)$ y por tanto $w \in H^3(\mathbb{R}^N)$, lo que implica que $\theta u \in H^3(\Omega)$. Por recurrencia sobre m, se prueba el resultado general para $f \in H^m(\Omega)$. ∎

El siguiente resultado muestra el carácter de regularidad interior del resultado anterior:

Corolario 11.3. *En las condiciones del Teorema anterior, si $\Omega' \subset\subset \Omega$ entonces $u \in H^2(\Omega')$ si $f \in L^2(\Omega)$ y $u \in H^{m+2}(\Omega')$ si $f \in H^m(\Omega)$.*

Observación 11.4. *Obsérvese que los resultados anteriores no dependen de la condición de contorno que satisfaga u.*

11.3. Teoremas de regularidad para los problemas de Dirichlet, Robin y Neumann homogéneos

A continuación enunciamos tres resultados de regularidad (para las demostraciones ver [2]).

Teorema 11.5. *Sean $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ un abierto de clase C^2 de frontera acotada, $f \in L^2(\Omega)$ y $u \in H_0^1(\Omega)$ la solución débil del problema de Dirichlet*

$$(PD) \qquad \begin{cases} -\Delta u + u = f & en\ \Omega, \\ u = 0 & sobre\ \partial\Omega. \end{cases}$$

Entonces, $u \in H^2(\Omega)$, y de hecho

$$\|u\|_{H^2(\Omega)} \leq C\|f\|_{L^2(\Omega)},$$

con $C > 0$ una constante que sólo depende de Ω.

Además, si Ω es de clase C^{m+2} y $f \in H^m(\Omega)$, con $m \geq 1$ entero, entonces $u \in H^{m+2}(\Omega)$, y existe una constante $C_m > 0$, que sólo depende de m y Ω, tal que

$$\|u\|_{H^{m+2}(\Omega)} \leq C_m\|f\|_{H^m(\Omega)}.$$

En particular, si $m > N/2$ entonces $u \in C^2(\overline{\Omega})$.

Teorema 11.6. *Sean $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ un abierto de clase C^2 de frontera acotada, $f \in L^2(\Omega)$, $\sigma \in C^1(\overline{\Omega})$ y $u \in H^1(\Omega)$ la solución débil del problema de Robin*

$$(PR) \qquad \begin{cases} -\Delta u + u = f & en\ \Omega, \\ \partial_{\vec{n}} u + \sigma(x)u = 0 & sobre\ \partial\Omega. \end{cases}$$

Entonces, $u \in H^2(\Omega)$, y de hecho

$$\|u\|_{H^2(\Omega)} \leq C\|f\|_{L^2(\Omega)},$$

con $C > 0$ una constante que sólo depende de Ω.

Además, si Ω es de clase C^{m+2}, $f \in H^m(\Omega)$ y $\sigma \in C^{m+1}(\overline{\Omega})$ con $m \geq 1$ entero, entonces $u \in H^{m+2}(\Omega)$, y existe una constante $C_m > 0$, que sólo depende de m y Ω, tal que

$$\|u\|_{H^{m+2}(\Omega)} \leq C_m\|f\|_{H^m(\Omega)}.$$

En particular, si $m > N/2$ entonces $u \in C^2(\overline{\Omega})$. ■

Como consecuencia inmediata tenemos el siguiente resultado:

Teorema 11.7. *Sean $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ un abierto de clase C^2 de frontera acotada, $f \in L^2(\Omega)$ y $u \in H^1(\Omega)$ la solución débil del problema de Neumann*

$$(PN) \qquad \begin{cases} -\Delta u + u = f & en\ \Omega, \\ \partial_{\vec{n}} u = 0 & sobre\ \partial\Omega. \end{cases}$$

Entonces, $u \in H^2(\Omega)$, y de hecho

$$\|u\|_{H^2(\Omega)} \leq C\|f\|_{L^2(\Omega)},$$

con $C > 0$ una constante que sólo depende de Ω.

Además, si Ω es de clase C^{m+2} y $f \in H^m(\Omega)$, con $m \geq 1$ entero, entonces $u \in H^{m+2}(\Omega)$, y existe una constante $C_m > 0$, que sólo depende de m y Ω, tal que

$$\|u\|_{H^{m+2}(\Omega)} \leq C_m\|f\|_{H^m(\Omega)}.$$

En particular, si $m > N/2$ entonces $u \in C^2(\overline{\Omega})$. ■

Observación 11.8. *Los Teoremas 11.5, 11.6 y 11.7 se satisfacen también si $\Omega = \mathbb{R}_+^N$.*

CAPÍTULO 12

Problemas de valores propios. Descomposición espectral

12.1. Algunos resultados de Análisis Funcional

A lo largo de este tema usaremos dos resultados de Análisis Funcional que presentamos a continuación. El primero de ellos es consecuencia del teorema de Hilbert-Schmidt, y cuya demostración se puede encontrar, por ejemplo, en los apuntes de la asignatura EDPyAF.

Teorema 12.1. *Sean V y H dos espacios de Hilbert reales separables de dimensión infinita, tales que:*

a) V es denso en H,

b) $V \hookrightarrow H$ con inyección compacta.

Sea $a(\cdot,\cdot)$ una forma bilineal continua y simétrica sobre V, verificando la condición de coercividad

$$\exists\, \alpha > 0 \quad \text{tal que} \quad a(v,v) \geq \alpha \|v\|_V^2 \quad \forall\, v \in V.$$

Entonces, existe una sucesión creciente de números reales positivos:

$$0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq ... \leq \lambda_n \leq ..., \quad y \quad \lim_{n\to\infty} \lambda_n = +\infty,$$

y existe una base ortonormal de H, $\{e_n\}_{n\geq 1}$, formada por elementos de V, tal que

$$a(e_n, v) = \lambda_n (e_n, v)_H \quad \forall\, v \in V, \quad \forall\, n \geq 1.$$

Además, el conjunto $\{\frac{1}{\sqrt{\lambda_n}} e_n\}_{n\geq 1}$ constituye una base ortonormal de V si sobre este espacio se considera el producto escalar definido por la forma bilineal $a(u,v)$.

Recordemos ahora el teorema:

Teorema 12.2. *(**Teorema de alternativa de Fredholm**) Sea $T \in \mathcal{L}(H)$ un operador compacto en el espacio de Hilbert H. Entonces:*

a) La ecuación

$$u - Tu = F$$

posee una y sólo una solución $u \in H$ para cada $F \in H$ si y sólo si la única solución de la ecuación homogénea

$$u - Tu = 0$$

es $u = 0$.

b) Por otra parte, si la ecuación homogénea $u - Tu = 0$ posee soluciones distintas del cero, entonces, dada $F \in H$, la ecuación

$$u - Tu = F,$$

posee soluciones si y sólo si F es ortogonal a todas las soluciones $v \in H$ de la ecuación homogénea adjunta

$$v - T^*v = 0,$$

y en ese caso el conjunto de las soluciones de $u - Tu = F$ es una variedad afín de espacio soporte el formado por las soluciones de la ecuación homogénea adjunta.

12.2. El espectro del laplaciano con condición de Dirichlet

Vamos a considerar el problema de autovalores siguiente

$$(12.1) \qquad \begin{cases} -\Delta u = \lambda u & \text{en } \Omega, \\ u = 0 & \text{sobre } \partial\Omega, \end{cases}$$

donde $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ es un abierto acotado no vacío y $\lambda \in \mathbb{R}$.

Definición 12.3. *Se dice que $\lambda \in \mathbb{R}$ es un autovalor del problema de Dirichlet (12.1) si (12.1) posee una solución débil no nula. Se dice en tal caso que la solución u es una autofunción asociada al autovalor λ.*

Al conjunto de todos los autovalores se le denomina el espectro.

Observación 12.4. *Obsérvese que si u es autofunción entonces también lo es ku para toda $k \in \mathbb{R}$, $k \neq 0$.*

El primer resultado que vamos a obtener estudia el espectro del problema (12.1).

Teorema 12.5. *Si $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ es un abierto acotado no vacío, el espectro de (12.1) está constituido por una sucesión creciente $\{\lambda_n\}_{n\geq 1}$ de números reales positivos, tal que*

$$0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq ... \leq \lambda_n \leq ..., \quad y \quad \lim_{n\to\infty} \lambda_n = +\infty.$$

Además, existe una base ortonormal $\{e_n\}_{n\geq 1}$ de $L^2(\Omega)$, formada por autofunciones asociadas a los autovalores λ_n. Por último $\{\frac{e_n}{\sqrt{\lambda_n}}\}_{n\geq 1}$ constituye una base ortonormal del espacio $H_0^1(\Omega)$ dotado del producto escalar $(u,v)_{H_0^1(\Omega)} = (\nabla u, \nabla v)_{L^2(\Omega)^N}$.

En consecuencia, para toda $f \in L^2(\Omega)$, la solución débil del problema de Dirichlet

$$(12.2) \qquad \begin{cases} -\Delta u = f & \text{en } \Omega, \\ u = 0 & \text{sobre } \partial\Omega, \end{cases}$$

viene dada por

$$u = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_n} (f, e_n)_{L^2(\Omega)} e_n,$$

siendo la serie convergente en $H_0^1(\Omega)$.

Demostración.- La demostración es una aplicación del Teorema 12.1. En efecto, basta tomar $H = L^2(\Omega)$ y $V = H_0^1(\Omega)$, que gracias al Teorema de Rellich-Kondrachov sigue que V se inyecta de forma compacta el H.

Por otro lado, sea $a : H_0^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega) \mapsto \mathbb{R}$ definida por

$$a(u,v) = \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v\,.$$

Basta ahora aplicar el Teorema 12.1. Veamos ahora la última parte del Teorema. En primer lugar, gracias a que $\{e_n\}$ forma una base ortonormal en $L^2(\Omega)$, u puede ser escrito como (ver [2])

$$u = \sum_{n=1}^{\infty}(u, e_n)_{L^2(\Omega)}e_n.$$

Ahora bien, usando que u es solución de (12.2) tenemos que

$$(f, e_n)_{L^2(\Omega)} = \int_\Omega f e_n = \int_\Omega \nabla e_n \cdot \nabla u = \lambda_n \int_\Omega e_n u = \lambda_n (u, e_n)_{L^2(\Omega)},$$

de donde sigue el resultado. ■

El siguiente resultado nos garantiza que las autofunciones tienen más regularidad que la establecida en los Teoremas 12.5.

Proposición 12.6. *Sea e_n una autofunción asociada al autovalor λ_n cuya existencia garantiza el Teorema 12.5. Entonces*

$$e_n \in C^\infty(\Omega) \quad \textit{para todo } n \geq 1.$$

Demostración.- En efecto, dado cualquier abierto $\Omega' \subset\subset \Omega$, existe $\theta \in \mathcal{D}(\Omega)$ tal que $\theta \equiv 1$ en Ω'. Teniendo en cuenta que en particular $e_n \in H^1(\Omega)$, y que

$$-\Delta e_n + e_n = (\lambda_n + 1)e_n \quad \text{en } \mathcal{D}'(\Omega),$$

del Teorema 11.2 se deduce inmediatamente que $e_n \in H^3(\Omega')$.

Así pues obtenemos que $e_n \in H^3(\Omega')$ para todo $\Omega' \subset\subset \Omega$. Pero entonces, razonando como antes, obtenemos que $e_n \in H^5(\Omega')$ para todo $\Omega' \subset\subset \Omega$, y continuando indefinidamente, llegamos a la conclusión de que $e_n \in H^k(\Omega')$ para todo $\Omega' \subset\subset \Omega$, y para todo $k \geq 1$. Pero esto, teniendo en cuenta los teoremas de inyección de Sobolev, implica que e_n es de clase C^∞ en toda bola cerrada contenida en Ω, y por tanto $e_n \in C^\infty(\Omega)$. ■

El siguiente propósito es caracterizar los autovalores λ_n del problema (12.1). Para ello definamos el *cociente de Rayleigh*, definido para cada $u \in H_0^1(\Omega)$, con $u \neq 0$, por

$$R(u) = \frac{\|\nabla u\|^2_{L^2(\Omega)^N}}{\|u\|^2_{L^2(\Omega)}} = \frac{\displaystyle\int_\Omega |\nabla u|^2}{\displaystyle\int_\Omega u^2}.$$

Proposición 12.7. *a) Si λ_n es un autovalor y e_n es una autofunción asociada a dicho autovalor, entonces $\lambda_n = R(e_n)$.*

b) Se tiene que

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= \min_{u \in H_0^1(\Omega),\, u\neq 0} R(u), \\ \lambda_n &= \max_{u \in span\{e_1,\ldots,e_n\},\, u \neq 0} R(u). \end{aligned} \tag{12.3}$$

Demostración.- El primer apartado es evidente. Por otra parte, si $u \in H_0^1(\Omega)$ se tiene que

$$u = \sum_{n=1}^{\infty}(u, e_n)_{L^2(\Omega)}e_n,$$

siendo la serie convergente en $H_0^1(\Omega)$, con lo que

$$\|\nabla u\|^2_{L^2(\Omega)^N} = \sum_{n=1}^{\infty} |(u, e_n)_{L^2(\Omega)}|^2 \|\nabla e_n\|^2_{L^2(\Omega)^N} = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n |(u, e_n)_{L^2(\Omega)}|^2 \geq \lambda_1 \sum_{n=1}^{\infty} |(u, e_n)_{L^2(\Omega)}|^2 = \lambda_1 \|u\|^2_{L^2(\Omega)},$$

y por tanto

$$\lambda_1 \leq R(u), \quad \forall u \in H_0^1(\Omega),$$

con lo que gracias al primer apartado, sigue la primera igualdad de (12.3).

Sea ahora $u \in \text{span}\{e_1, ..., e_n\}$ y por tanto

$$u = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k e_k.$$

Entonces,

$$R(u) = \frac{\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \lambda_k \alpha_k^2}{\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \alpha_k^2} \leq \lambda_n,$$

de donde de nuevo usando el primer apartado sigue la segunda igualdad de (12.3). ■

De la carectización anterior se pueden obtener diferentes propiedades de los autovalores, presentamos sólo una de ellas.

Corolario 12.8. *Sea $\Omega' \subset \Omega$ y denotemos por $\lambda_1(\Omega')$ y $\lambda_1(\Omega)$ los primeros autovalores de (12.1) en Ω' y Ω respectivamente. Entonces,*

$$\lambda_1(\Omega) \leq \lambda_1(\Omega').$$

Demostración.- Sea $u \in H_0^1(\Omega')$, entonces si la prolongamos por cero fuera de Ω', la prolongación pertenece a $H_0^1(\Omega)$, con lo que $H_0^1(\Omega') \subset H_0^1(\Omega)$. Basta ahora aplicar la Proposición 12.7, en concreto la primera igualdad de (12.3). ■

Observación 12.9. *a) Existen otras caracterizaciones de los autovalores similares a las de la Proposición 12.7. No son difíciles de demostrar las siguientes (ver [7]):*

$$\lambda_n = \min_{u \in \{e_1,...,e_n\}^\perp,\, u \neq 0} R(u),$$
$$\lambda_n = \min_{W \subset H_0^1(\Omega), dim W = n} \max_{u \in W} R(u),$$

donde por $\{e_1, ..., e_n\}^\perp$ denotamos al subespacio vectorial de todas las funciones de $H_0^1(\Omega)$ que sean ortogonales en $L^2(\Omega)$ a las n primeras autofunciones e_1,...,e_n. Obsérvese que la segunda caracterización no depende de las autofunciones, y por tanto de ellas es fácil deducir otras propiedades entre los autovalores.

b) El primer autovalor λ_1 tiene otras propiedades interesantes. Por ejemplo, se puede demostrar que si $v \in H_0^1(\Omega)$ y $R(v) = \lambda_1$, entonces v es una autofunción asociada a λ_1. Además, si Ω es conexo, entonces λ_1 es un autovalor simple, es decir, $\lambda_1 < \lambda_2$, siendo el espacio de autofunciones asociadas a λ_1 de dimensión 1, y por otra parte e_1 no cambia de signo en Ω, con lo que se puede suponer que $e_1(x) > 0$ para todo $x \in \Omega$ (ver [7] para todas estas últimas afirmaciones).

c) La noción de autovalores para el operador $-\Delta$ en Ω con condición de Dirichlet, así como el Teorema 12.5, pueden ser generalizados sin dificultad al caso de un operador elíptico autoadjunto de la forma

$$Au = -\sum_{i,j=1}^{N} \partial_j(a_{ij}\partial_i u) + cu,$$

siendo $a_{ij} = a_{ji} \in L^\infty(\Omega)$, $c \in L^\infty(\Omega)$, *y tales que existe* $\alpha > 0$ *satisfaciendo*

$$\sum_{i,j=1}^{N} a_{ij}(x)\xi_i\xi_j \geq \alpha|\xi|^2 \quad \forall\, \xi \in \mathbb{R}^N, \quad \text{c.p.d. en } \Omega.$$

Evidentemente, en este caso, la sucesión de autovalores que se obtiene satisface $-\|c\|_{L^\infty(\Omega)} \leq \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq ... \leq \lambda_n \to +\infty$. *(Ver ejercicios.)*

12.3. El espectro del laplaciano con otras condiciones de contorno: el caso de Robin

Consideremos ahora otras condiciones de contorno, por ejemplo consideremos el caso de Robin, es decir el problema de autovalores siguiente

$$\left\{\begin{array}{ll} -\Delta u + u = \lambda u & \text{en } \Omega, \\ \partial_{\vec{n}} u + \sigma(x) u = 0 & \text{sobre } \partial\Omega, \end{array}\right. \tag{12.4}$$

donde $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ es un abierto acotado no vacío, $\sigma \in L^\infty(\partial\Omega)$, $\sigma \geq 0$ y $\lambda \in \mathbb{R}$. Obsérvese que (12.4) incluye el caso de Neumann con $\sigma \equiv 0$.

Definición 12.10. *Se dice que* $\lambda \in \mathbb{R}$ *es un autovalor del problema de Robin (12.4), si (12.4) posee una solución débil no nula. Se dice en tal caso que la solución* u *es una autofunción asociada al autovalor* λ.

Al conjunto de todos los autovalores se le denomina el espectro.

Con razonamientos completamente análogos a los usados en la sección anterior podemos estudiar con detalle (12.4). En el siguiente teorema mostramos dichos resultados:

Teorema 12.11. *Si* $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ *es un abierto acotado no vacío, el espectro de (12.4) está constituido por una sucesión creciente* $\{\lambda_n\}_{n\geq 1}$ *de números reales positivos, tal que*

$$0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq ... \leq \lambda_n \leq ..., \quad y \quad \lim_{n\to\infty} \lambda_n = +\infty.$$

Además, existe una base ortonormal $\{e_n\}_{n\geq 1}$ *de* $L^2(\Omega)$, *formada por autofunciones asociadas a los autovalores* λ_n. *Por último* $\{\frac{e_n}{\sqrt{\lambda_n}}\}_{n\geq 1}$ *constituye una base ortonormal del espacio* $H^1(\Omega)$ *dotado del producto escalar*

$$(u, v)_{H^1(\Omega)} = (\nabla u, \nabla v)_{L^2(\Omega)^N} + (u, v)_{L^2(\Omega)} + \int_{\partial\Omega} \sigma u v.$$

En consecuencia, para toda $f \in L^2(\Omega)$, *la solución débil del problema de Robin*

$$\left\{\begin{array}{ll} -\Delta u + u = f & \textit{en } \Omega, \\ \partial_{\vec{n}} u + \sigma(x) u = 0 & \textit{sobre } \partial\Omega, \end{array}\right. \tag{12.5}$$

viene dada por

$$u = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_n} (f, e_n)_{L^2(\Omega)} e_n,$$

siendo la serie convergente en $H^1(\Omega)$.

Por último, $e_n \in C^\infty(\Omega)$.

Demostración.- Basta tomar $H = L^2(\Omega)$, $V = H^1(\Omega)$ y $a : H^1(\Omega) \times H^1(\Omega) \mapsto \mathbb{R}$ definida por

$$a(u,v) = \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v + \int_\Omega uv + \int_{\partial\Omega} \sigma uv\,,$$

y aplicar nuevamente el Teorema 12.1. ■

Para obtener la caracterización de los autovalores, necesitamos definir el siguiente *cociente de Rayleigh*, definido para $u \in H^1(\Omega)$, $u \neq 0$, por

$$R(u) = \frac{\displaystyle\int_\Omega |\nabla u|^2 + \int_\Omega u^2 + \int_{\partial\Omega} \sigma(x) u^2}{\displaystyle\int_\Omega u^2}.$$

La demostración es análoga a la de la Proposición 12.7 y por tanto la omitimos.

Proposición 12.12. *a) Si λ_n es un autovalor y e_n es una autofunción asociada a dicho autovalor, entonces $\lambda_n = R(e_n)$.*

b) Se tiene que

$$\lambda_1 = \min_{u \in H^1(\Omega),\, u\neq 0} R(u),$$
$$\lambda_n = \max_{u \in span\{e_1,\ldots,e_n\},\, u \neq 0} R(u).$$

Observación 12.13. *Similares resultados pueden ser obtenidos para un problema de autovalores con condiciones de contorno mixtas, esto es para el problema siguiente*

$$\text{(12.6)} \qquad \begin{cases} -\Delta u = \lambda u & \text{en } \Omega, \\ u = 0 & \text{sobre } \Gamma_0, \\ \partial_{\vec{n}} u = 0 & \text{sobre } \Gamma_1, \end{cases}$$

donde $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ es un abierto acotado no vacío y $\partial\Omega = \Gamma_0 \cup \Gamma_1$ con $|\Gamma_0| \neq \emptyset$.

12.4. Teoremas de alternativa

Como consecuencia del estudio del espectro del operador laplaciano con condiciones de Dirichlet y del Teorema de alternativa de Fredholm, se obtiene el siguiente resultado para el problema de Dirichlet para el laplaciano.

Teorema 12.14. *Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ un abierto acotado no vacío y consideremos el problema de Dirichlet*

$$\text{(12.7)} \qquad \begin{cases} -\Delta u = \lambda u + f & \text{en } \Omega, \\ u = 0 & \text{sobre } \partial\Omega, \end{cases}$$

siendo $\lambda \in \mathbb{R}$. Denotemos por λ_j, $j \in \mathbb{N}$, los autovalores del laplaciano con condiciones Dirichlet.

(a) *Si λ no es un autovalor del laplaciano en Ω con condición de Dirichlet, esto es $\lambda \neq \lambda_j$ para toda $j \in \mathbb{N}$, entonces para cada $f \in L^2(\Omega)$ el problema (12.7) posee una y sólo una solución débil.*

(b) *Si λ es un autovalor del laplaciano en Ω con condición de Dirichlet, digamos $\lambda = \lambda_j$ para algún $j \in \mathbb{N}$, entonces, dada $f \in L^2(\Omega)$, el problema (12.7) posee soluciones débiles si y sólo si f es ortogonal en $L^2(\Omega)$ el espacio de todas las autofunciones asociadas al autovalor λ_j, es decir,*

$$\int_\Omega fv = 0 \quad \text{para toda autofunción } v \text{ asociada a } \lambda_j,$$

y en tal caso el conjunto de todas las soluciones de (12.7) está formado por la suma de una solución particular más el subespacio de autofunciones asociado a λ_j.

Demostración.- Consideremos el operador $S : L^2(\Omega) \mapsto L^2(\Omega)$, $f \mapsto u_f$, con $u_f = S(f)$ solución débil del problema

$$\begin{cases} -\Delta u = f & \text{en } \Omega, \\ u = 0 & \text{sobre } \partial\Omega. \end{cases} \tag{12.8}$$

Veamos que S es lineal, compacto y autoadjunto.

Es claro que S es lineal veamos ahora que es compacto. Sea $\{f_n\}_{n\geq 1} \in L^2(\Omega)$ una sucesión acotada $\|f_n\|_{L^2(\Omega)} \leq C$ para alguna constante $C > 0$. Denotemos $u_n = S(f_n)$ la solución de (12.8), entonces

$$\|u_n\|_{H_0^1(\Omega)} \leq C\|f_n\|_{L^2(\Omega)} \leq C',$$

para constantes C y C'. Teniendo en cuenta el Teorema Rellich-Kondrachov, es fácil comprobar que u_n es relativamente compacto en $L^2(\Omega)$, y por tanto $S \in \mathcal{L}(L^2(\Omega))$ es compacto.

Veamos ahora que S es autoadjunto. Sean $f, g \in L^2(\Omega)$, $u = S(f)$ y $v = S(g)$. Entonces

$$(S(f), g)_{L^2(\Omega)} = \int_\Omega S(f) g dx = \int_\Omega u(-\Delta v) dx = \int_\Omega (-\Delta u) v dx = (f, S(g))_{L^2(\Omega)}.$$

Es inmediato que u es solución débil de (12.7) si y sólo si $u = S(\lambda u + f)$, si y sólo si es solución de

$$(I - \lambda S)u = S(f).$$

Sea $\lambda \neq 0$. Es fácil probar que (λ, u) es autovalor-autofunción del laplaciano en Ω con condición de Dirichlet si y sólo si $u - \lambda S u = 0$.

Resulta ahora fácil obtener las conclusiones del teorema por aplicación del Teorema de alternativa de Fredholm al operador $T = \lambda S$. En efecto, si $\lambda = \lambda_j$ entonces la ecuación homogénea $u - Tu = 0$ tiene sólo la solución trivial, y por tanto existe una única solución de (12.7).

Por otra parte, si $\lambda = \lambda_j$ para algún $j \in \mathbb{N}$ la ecuación $u - Tu = 0$ tiene soluciones no triviales. En este caso, hay solución si, y sólo si, para cada v autofunción asociada a λ_j se tiene que

$$0 = \int_\Omega S(f) v = \frac{1}{\lambda_j} \int_\Omega u(-\Delta v) = \frac{1}{\lambda_j} \int_\Omega v(-\Delta u) = \frac{1}{\lambda_j} \int_\Omega v f,$$

o equivalentemente

$$0 = \int_\Omega v f.$$

Por último, si $\lambda = 0$ el problema (12.7) tiene una única solución. ∎

Observación 12.15. *Similares resultados pueden ser obtenidos para problemas con condiciones de contorno Robin, Neumann y mixtas.*

Bibliografía

[1] Adams R. A. *Sobolev Spaces*, Academic Press, New York, 1975.

[2] Brézis H. *Analyse fonctionelle. Théorie et applications*, Masson, París, 1983.

[3] Casas E. *Introducción a las Ecuaciones en Derivadas Parciales*, Servicio de Publicaciones de la Universidad de Cantabria, Santander, 1992.

[4] Dieudonné J. *Fundamentos de Análisis Moderno*, Reverté, Barcelona, 1970.

[5] Gilbarg D. & Trudinger N.S. *Elliptic partial differential equations of second order,* Springer-Verlag, 1983.

[6] John F. *Partial differential equations,* Springer-Verlag, 1982.

[7] Kesavan S. *Topics in Functional Analysis and Applications*, John Wiley & Sons, New York, 1989.

[8] Lions J.L. & Magenes E. *Problémes aux limites non homogènes*, Dunod, París, 1968.

[9] Neças J. *Les méthodes directes en théorie des équations elliptiques*, Ed. Masson, 1967.

[10] Peral Alonso I. *Primer Curso de Ecuaciones en Derivadas Parciales,* Addison Wesley/Universidad Autónoma de Madrid, 1995.

[11] Renardy M. & Rogers R. C. *An introduction to Partial Differential Equations*, Springer-Verlag, Berlín-Heidelberg-New York, 1993

[12] Schwartz L. *Métodos matemáticos de la Física*, Selecciones Científicas, 1969.

[13] Schwartz L. *Théorie des Distributions*, Hermann, París, 1973.

[14] Vo-Khac Khoan *Distributions. Analyse de Fourier et Opérateurs aux Derivées Partielles*, Librairie Vuibert, París, 1972.