# EJERCICIOS DE AMPLIACIÓN DE EDP Curso 2012-2013

1. Reducir a forma canónica las EDP siguientes:

   *a*) $u_{xx} + 2u_{xy} + 3u_{yy} + 4u_x + 5u_y + u = e^x$, *b*) $2u_{xx} - 4u_{xy} + 2u_{yy} + 3u = 0$,
   *c*) $u_{xx} + 5u_{xy} + 4u_{yy} + 7u_y = \text{sen } x$, *d*) $u_{xx} + u_{yy} + 2u_x + 8u_y + u = 0$,
   *e*) $u_{xy} + 2u_{yy} + 9u_x + u_y = 2$, *f*) $u_{xx} - y^2 u_{yy} = 4ye^x$.

2. Determinar la región de $\mathbb{R}^2$ en la que las EDP que siguen son hiperbólicas, parabólicas o elípticas y reducirlas, cuando sea posible, a forma canónica:

   *a*) $xu_{xx} + u_{yy} = x^2$, *b*) $u_{xx} + y^2 u_{yy} = y$,
   *c*) $u_{xx} + xyu_{yy} = 0$, *d*) $x^2 u_{xx} - 2xyu_{xy} + y^2 u_{yy} = 0$,
   *e*) $u_{xx} + u_{xy} - xu_{yy} = 0$, *f*) $e^x u_{xx} + e^y u_{yy} = u$,
   *g*) $(\text{sen}^2 x)u_{xx} + (\text{sen } 2x)u_{xy} + (\cos^2 x)u_{yy} = x$, *h*) $u_{xx} - yu_{xy} + xu_x + yu_y + u = 0$.

3. Demuéstrese que si $u$ y $v$ son dos funciones subarmónicas en $\Omega$, entonces la función $\max(u, v)$ también lo es.

4. Probar que si $u$ es armónica en un abierto $\Omega \subset \mathbb{R}^N$, entonces $u^2$ es subarmónica en $\Omega$. Dar un contraejemplo que muestre que lo anterior no es cierto para $u^3$. Probar que si $u$ es armónica y no negativa en $\Omega$, entonces $u^n$ es subarmónica para $n \geq 1$.

5. a) Probar que toda función armónica en $\mathbb{R}^N$ acotada superior o inferiormente es una constante (Teorema de Liouville).

   b) Sea $\Omega = \{x \in \mathbb{R}^N;\ x_N > 0\}$. Demuéstrese que si $u \in C^2(\overline{\Omega})$ es armónica y acotada en $\overline{\Omega}$, y $u = 0$ sobre $\partial\Omega$, entonces forzosamente $u \equiv 0$.

6. Sean $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ un abierto acotado no vacío y $u \in C^2(\Omega) \cap C^0(\overline{\Omega})$ una función que verifica

   $$Lu \equiv -\Delta u + \sum_{k=1}^{N} a_k(x) \frac{\partial u}{\partial x_k} + c(x)u \leq 0 \ \text{ en } \ \Omega,$$

   donde $a_k, c \in C^0(\overline{\Omega})$ y $c \geq 0$ en $\Omega$. Probar que

   $$\max_{\overline{\Omega}} u \leq \max_{\partial\Omega} u^+.$$

   Probar también que si $Lu = 0$ en $\Omega$ y $u = 0$ sobre $\partial\Omega$, entonces $u = 0$ en $\Omega$.

   **Indicación:** Probar en primer lugar el resultado por reducción al absurdo cuando $Lu < 0$ en $\Omega$. A continuación considerar la función $u + \varepsilon v$, donde $\varepsilon > 0$ y $v \equiv \exp(\lambda x_1)$, con $\lambda > 0$ adecuada.

7. Sea $\Omega = \{\, x;\ x \in \mathbb{R}^N,\ |x| > 1 \,\}$. Probar que si $u \in C^2(\Omega) \cap C^0(\overline{\Omega})$, $-\Delta u = 0$ en $\Omega$ y $\lim_{|x|\to\infty} u(x) = 0$, entonces $\max_{\overline{\Omega}} |u| = \max_{\partial\Omega} |u|$.

   **Indicación:** Aplicar el Principio del máximo en una corona esférica adecuada.

8. Probar la forma débil del Principio del Máximo, para la EDP elíptica en dos variables independientes

   $Lu \equiv -au_{xx} - 2bu_{xy} - cu_{yy} + du_x + eu_y = 0$ en $\Omega$, donde $a, b, c, d, e \in C^0(\overline{\Omega})$, $b^2 - ac < 0$ y $a > 0$ en $\overline{\Omega}$.

   **Indicación:** Probar en primer lugar el resultado por reducción al absurdo cuando $Lu < 0$ en $\Omega$. A continuación considerar la función $u + \varepsilon v$, donde $\varepsilon > 0$ y $v \equiv \exp(M((x - x_0)^2 + (y - y_0)^2))$, con $(x_0, y_0)$ y $M > 0$ adecuados.

9. Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ abierto acotado y conexo y $u \in C^2(\Omega) \cap C^0(\overline{\Omega})$ una función que verifica

   $$-\Delta u \leq 0 \ \text{ en } \Omega, \quad u \leq 0 \quad \text{y } u \not\equiv 0 \text{ sobre } \partial\Omega.$$

   Probar que $u(x) < 0$ para toda $x \in \Omega$.

10. Sea $\Omega := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < 1\}$ y

$$u(x,y) = x^3 - 3xy^2.$$

Calcular el valor máximo y mínimo de $u$ en $\overline{\Omega}$.

11. a) Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ abierto acotado y $u_1, u_2 \in C^2(\Omega) \cap C^0(\overline{\Omega})$ tales que

$$\begin{cases} \Delta u_1 = \Delta u_2 & \text{en } \Omega, \\ u_1 \leq u_2 & \text{sobre } \partial\Omega. \end{cases}$$

Probar que $u_1 \leq u_2$ en $\overline{\Omega}$.

b) Sea $\Omega$ el triángulo de vértices $(0,0), (1,0)$ y $(1,1)$. Usando el apartado anterior, demostrar que

$$xy^3 + x^2 + y \leq x^3 y + y^2 + x, \quad \forall (x,y) \in \overline{\Omega}.$$

12. Sean $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ abierto y $u \in L^p(\Omega)$, con $p \in [1,\infty)$, tal que $u \geq 0$ c.p.d. en $\Omega$. Demostrar que existe una sucesión $\{\varphi_n\}_{n\geq 1} \subset \mathcal{D}(\Omega)$ tal que $\varphi_n \to u$ en $L^p(\Omega)$ y $\varphi_n \geq 0$ en $\Omega$ para todo $n$.

13. Sean $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ abierto y $p \in [1,\infty]$. Demostrar que $L^p(\Omega) \subset L^1_{loc}(\Omega)$, y si $u_n \to u$ en $L^p(\Omega)$ entonces $u_n \to u$ en $\mathcal{D}'(\Omega)$.

14. Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ abierto. Dadas una sucesión $\{u_n\} \subset L^1_{loc}(\Omega)$ y $u \in L^1_{loc}(\Omega)$, se dice que $u_n \to u$ en $L^1_{loc}(\Omega)$ si para todo compacto $K \subset \Omega$ la sucesión $u_n 1_K$ converge a $u 1_K$ en $L^1(\Omega)$. Demostrar:

a) Si $u_n \to u$ en $L^1_{loc}(\Omega)$ entonces $u_n \to u$ en $\mathcal{D}'(\Omega)$.

b) Si $\{u_n\} \subset L^1_{loc}(\Omega)$ es tal que $u_n(x) \to u(x)$ c.p.d. en $\Omega$, y existe $v \in L^1_{loc}(\Omega)$ tal que $|u_n(x)| \leq v(x)$ c.p.d. en $\Omega$, entonces $u_n \to u$ en $L^1_{loc}(\Omega)$ y, en consecuencia, $u_n \to u$ en $\mathcal{D}'(\Omega)$.

15. a) Sea

$$f_n(x) = \begin{cases} \dfrac{n}{2} & \text{si } |x| \leq \dfrac{1}{n}, \\ 0 & \text{si } |x| > \dfrac{1}{n}. \end{cases}$$

Demostrar que $f_n \to \delta_0$ en $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$.

b) Sea $\{\rho_n\}_{n\geq 1}$ una sucesión regularizante en $\mathbb{R}^N$. Demostrar que $\rho_n \to \delta_0$ en $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^N)$.

16. Demostrar:

a) $f_n(x) = \dfrac{n}{\pi(n^2x^2+1)} \to \delta_0$ en $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ cuando $n \to +\infty$.

b) $f_n(x) = \dfrac{n}{4\pi} exp(\dfrac{-n|x|^2}{4}) \to \delta_0$ en $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^2)$ cuando $n \to +\infty$.

Se recuerda que $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} exp(-t^2)\, dt = \sqrt{\pi}$.

17. Calcular las derivadas sucesivas en $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ de:

a) $u(x) = sg(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x > 0, \\ -1 & \text{si } x < 0, \end{cases}$

b) $u(x) = |x|$;

c) $u(x) = [x]$ (parte entera de $x$).

18. Las funciones $\dfrac{1}{x}$ y $\dfrac{1}{x^2}$ no son localmente integrables en $\mathbb{R}$. Se definen $\text{vp}(\dfrac{1}{x})$ (valor principal de $\dfrac{1}{x}$) y $\text{Pf}(\dfrac{1}{x^2})$ (parte finita de $\dfrac{1}{x^2}$), respectivamente, por:

$$< \text{vp}(\frac{1}{x}), \varphi >= \lim_{\epsilon\downarrow 0} \int_{|x|\geq\epsilon} \frac{\varphi(x)}{x}\, dx \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$$

y

$$< \text{Pf}(\frac{1}{x^2}), \varphi >= \lim_{\epsilon\downarrow 0} \left( \int_{|x|\geq\epsilon} \frac{\varphi(x)}{x^2}\, dx - \frac{2\varphi(0)}{\epsilon} \right) \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}).$$

Se pide:

a) Demostrar que $\text{vp}(\dfrac{1}{x})$ y $\text{Pf}(\dfrac{1}{x^2})$ están bien definidas y pertenecen a $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$.

b) Calcular la derivada primera de $\text{vp}(\dfrac{1}{x})$.

19. Demostrar que $u(x) = \log|x|$ es un elemento de $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$. Calcular su derivada primera.

20. Sean $\Omega = (-1,1)\times(-1,1) \subset \mathbb{R}^2$ y $g$ la función definida sobre $\Omega$ por

$$g(x_1,x_2) = \begin{cases} x_1x_2 & \text{si } x_1 > 0, \\ x_1 & \text{si } x_1 \leq 0. \end{cases}$$

Se pide calcular las derivadas parciales primeras y segundas de $g$ en el sentido de $\mathcal{D}'(\Omega)$.

21. Sea $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R})$ dada. Denotemos por $T$ la distribución en $\mathbb{R}^2$ definida por $u(t,x) = f(t+x)$. Se pide calcular

$$\frac{\partial^2 T}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \quad \text{en } \mathcal{D}'(\mathbb{R}^2).$$

22. Se definen $Pf(\frac{H(x)}{x})$ (parte finita de $\frac{H(x)}{x}$) y $Pf(\frac{H(x)}{x^2})$ (parte finita de $\frac{H(x)}{x^2}$), respectivamente, por:

$$< Pf(\frac{H(x)}{x}), \varphi >= \lim_{\epsilon \downarrow 0} \left( \int_\epsilon^{+\infty} \frac{\varphi(x)}{x}\, dx + \varphi(0)\log\epsilon \right) \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$$

y

$$< Pf(\frac{H(x)}{x^2}), \varphi >= \lim_{\epsilon \downarrow 0} \left( \int_\epsilon^{+\infty} \frac{\varphi(x)}{x^2}\, dx - \frac{\varphi(0)}{\epsilon} + \varphi'(0)\log\epsilon \right) \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}).$$

Se pide:

a) Demostrar que ambas están bien definidas y pertenecen a $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$.

b) Calcular la derivada primera de $Pf(\frac{H(x)}{x})$.

c) Calcular una primitiva de $Pf(\frac{H(x)}{x})$.

d) Resolver en $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ la ecuación $xT' + T = \delta_0$.

23. a) Probar que si $T = x + c \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ con $c \in \mathbb{R}$, entonces $T' = 1$ en $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$.

b) Obtener una solución general en $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ de la ecuación

$$(x^2+1)T' + 2xT = 1.$$

24. Sea $T = c_1 + c_2H(x) \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ con $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ y $H$ la función de Heaviside. Probar que

$$xT' = 0 \quad \text{en } \mathcal{D}'(\mathbb{R}).$$

25. Hallar una distribución de la forma $T = H(x)f(x)$, con $f \in C^2(\mathbb{R})$, tal que satisfaga en $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ la EDO

$$T'' + 2T' + T = \delta_0 + \delta_0'.$$

26. Calcular $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ que satisfaga las siguientes desigualdades:

a) $xT = vp(\frac{1}{x})$;

b) $(x-a)T = 0$;

c) $(x-a)T = \delta_b$;

d) $(x-a)T = \delta_b'$;

e) $(x-a)(x-b)T = 0$;

f) $x^2T = 1$;

g) $(1+x^2)(1-x^2)^2T = 0$.

27. Sea $f(x,t) = \frac{1}{2}1_{\{t>|x|\}}$. Calcular en $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^2)$ la expresión

$$\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}.$$

28. Sea $K_N$ la función definida en $\mathbb{R}^N$ por $K_N(x) = |x|^{2-N}$ si $N \geq 3$ y $K_2(x) = \log|x|$, con $|x|$ la norma euclídea. Demostrar que $K_N \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^N)$ y calcular $\Delta K_N$ en $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^N)$.

29. Sea $E(x,t)$ la función definida para cada $(x,t) \in \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}$ por

$$E(x,t) = H(t)(4\pi t)^{-N/2} exp(\frac{-|x|^2}{4t}).$$

Se pide demostrar que $E \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^{N+1})$ y calcular $\dfrac{\partial E}{\partial t} - \Delta_x E$ en $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^{N+1})$.

30. Sea $f(x,t)$ definida en $\mathbb{R}^2$ por $f(x,t) = -H(-x)H(t)e^{at+bx}$. Calcular en $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^2)$:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial t} - a\frac{\partial f}{\partial x} - b\frac{\partial f}{\partial t} + abf.$$

31. Sea $\Omega$ un abierto no vacío cualquiera de $\mathbb{R}^N$ e $i \in \{1, \cdots, N\}$. Se pide:

(a) Probar que

$$\int_\Omega \partial_i \varphi(x)\, dx = 0, \quad \forall\, \varphi \in C^1_c(\Omega).$$

(b) Sea $a \in C^1(\Omega)$, probar que

$$\int_\Omega a(x)\varphi(x)\partial_i\varphi(x)\, dx = -\frac{1}{2}\int_\Omega (\partial_i a(x))\varphi^2(x)\, dx, \quad \forall\, \varphi \in C^1_c(\Omega).$$

(c) Sea $a \in C^1(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$ y tal que $\partial_i a \in L^\infty(\Omega)$, probar que

$$\int_\Omega a(x)u(x)\partial_i u(x)\, dx = -\frac{1}{2}\int_\Omega (\partial_i a(x))u^2(x)\, dx, \quad \forall\, u \in H^1_0(\Omega).$$

32. Sea $u_n$ una sucesión de funciones en $W^{1,p}(\Omega)$ tal que $u_n \to 0$ en $L^p(\Omega)$ cuando $n$ tiene a infinito, y para cada $1 \leq i \leq N$ la sucesión de derivadas parciales $\partial_i u_n$ es de Cauchy en $L^p(\Omega)$.

Demuéstrese que en tal caso $u_n \to 0$ en $W^{1,p}(\Omega)$ cuando $n$ tiende a infinito.

33. Sea $\{u_n\} \subset H^1(\Omega)$ tal que $u_n \to u$ en $L^2(\Omega)$ y $\{\partial_i u_n\}$ está acotada en $L^2(\Omega)$ para todo $1 \leq i \leq N$. Demostrar que entonces $u \in H^1(\Omega)$.

34. Sean $\Omega = (-1,1) \times (0,1) \subset \mathbb{R}^2$ y $u$ la función definida sobre $\Omega$ por

$$u(x_1,x_2) = \begin{cases} \operatorname{sen} x_1 & \text{si } x_1 > 0, \\ x_2 & \text{si } x_1 \leq 0. \end{cases}$$

Se pide:

a) Calcular la derivadas parciales $\partial_1 u$ y $\partial_2 u$ en $\mathcal{D}'(\Omega)$.

b) Determinar de manera razonada si $u$ pertenece a $H^1(\Omega)$.

35. Sean $\Omega = (0,1) \times (-1,1) \subset \mathbb{R}^2$ y $u$ la función definida sobre $\Omega$ por

$$u(x_1,x_2) = \begin{cases} e^{x_1 x_2} & \text{si } x_2 > 0, \\ x_2 + 1 & \text{si } x_2 \leq 0. \end{cases}$$

Se pide:

a) Calcular la derivadas parciales $\partial_1 u$ y $\partial_2 u$ en $\mathcal{D}'(\Omega)$.

b) Determinar de manera razonada si $u$ pertenece a $H^1(\Omega)$.

36. Sean $\Omega = (-1,1) \times (0,1) \subset \mathbb{R}^2$ y $u$ la función definida sobre $\Omega$ por

$$u(x_1,x_2) = \begin{cases} \cos x_1 & \text{si } x_1 > 0, \\ x_1 x_2^2 & \text{si } x_1 \leq 0. \end{cases}$$

Se pide:

a) Calcular la derivadas parciales $\partial_1 u$ y $\partial_2 u$ en $\mathcal{D}'(\Omega)$.

b) Determinar de manera razonada si $u$ pertenece a $H^1(\Omega)$.

37. Sean $\Omega = (-1,1) \times (0,1) \subset \mathbb{R}^2$ y $u$ la función definida sobre $\Omega$ por

$$u(x_1,x_2) = \begin{cases} x_2 \mathrm{sen}(x_1) & \text{si } x_1 \geq 0, \\ x_2 + 1 & \text{si } x_1 < 0. \end{cases}$$

Se pide:

a) Calcular la derivadas parciales $\partial_1 u$ y $\partial_2 u$ en $\mathcal{D}'(\Omega)$.

b) Determinar de manera razonada si $u$ pertenece a $H^1(\Omega)$.

38. Demostrar que si $u \in H^1(\Omega)$ entonces

$$\int_\Omega \varphi \partial_i u \, dx = -\int_\Omega u \partial_i \varphi \, dx \quad \forall \varphi \in C_c^1(\Omega).$$

39. Sean $u \in H^1(\Omega)$ y $\psi \in C_c^1(\Omega)$. Demostrar que $u\psi \in H^1(\Omega)$ con

$$\partial_i(u\psi) = \psi \partial_i u + u \partial_i \psi$$

para todo $1 \leq i \leq N$. Comprobar que, además, $\widetilde{u\psi}$ (la prolongación por cero a $\mathbb{R}^N \setminus \Omega$) pertenece a $H^1(\mathbb{R}^N)$ y se satisface

$$\partial_i \widetilde{u\psi} = \widetilde{\psi \partial_i u} + \widetilde{u \partial_i \psi} \quad 1 \leq i \leq N.$$

Probar que lo mismo ocurre si $\psi \in C^1(\mathbb{R}^N) \cap L^\infty(\mathbb{R}^N)$, $\nabla \psi \in L^\infty(\mathbb{R}^N)^N$, sop $\psi \subset \mathbb{R}^N \setminus \partial\Omega$.

40. Sea $u \in L^2(\Omega)$. Demostrar que $u \in H^1(\Omega)$ si y sólo si existe $C > 0$ tal que

$$\left| \int_\Omega u \partial_i \varphi \, dx \right| \leq C \|\varphi\|_{L^2(\Omega)} \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega) \quad 1 \leq i \leq N.$$

41. Sea $\Omega$ un abierto no vacío y $u \in W^{1,p}(\Omega)$ con $1 \leq p < \infty$. Demostrar que

$$\mathrm{arctg}(u) \in W^{1,p}(\Omega).$$

Calcular sus derivadas parciales primeras.

42. Sea $\Omega$ un abierto no vacío y $u \in W^{1,p}(\Omega)$ con $1 \leq p < \infty$. Probar que

$$\frac{u}{1+u^2} \in W^{1,p}(\Omega).$$

Calcular sus derivadas parciales primeras.

43. Denotemos $u^+ = \max(u,0)$ y $u^- = \max(-u,0)$. Demostrar que si $u \in H^1(\Omega)$ entonces $u^+$, $u^-$ y $|u|$ pertenecen a $H^1(\Omega)$, con

$$\nabla u^+ = \nabla u 1_{\{u>0\}} \quad \text{y} \quad \nabla u^- = -\nabla u 1_{\{u<0\}}.$$

**Indicación:** Usar las funciones $G_\epsilon$ definidas por $G_\epsilon(s) = \left[(s^2+\epsilon^2)^{1/2} - \epsilon\right] 1_{\{s>0\}}$.

44. Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ un abierto acotado de clase $C^1$ y sea $p > N$. Supongamos que tenemos una sucesión $u_n \in L^p(\Omega)$ y $u \in L^p(\Omega)$ tal que

$$u_n \to u \text{ en } L^p(\Omega), \quad \partial_i u_n \text{ acotada en } L^p(\Omega) \text{ para todo } i = 1, ..., N.$$

Probar que, al menos para una subsucesión, $u_n \to u$ en $L^\infty(\Omega)$.

45. Sea $1 \leq p < \infty$ y $u \in W^{1,p}(\Omega)$ tal que $u$ es nula fuera de un compacto contenido en $\Omega$. Probar que $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$.

46. Sea $\Omega$ un abierto de $C^1$ y $\partial\Omega$ acotada. Sean $u, v \in H^1(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$. Probar que

$$\gamma_0(uv) = \gamma_0(u)\gamma_0(v).$$

47. Sea $\Omega$ un abierto acotado, conexo y de $C^1$, y sean $b \in L^\infty(\Omega)$, $b \geq 0$ y $c \in L^\infty(\partial\Omega)$, $c \geq 0$ y no simultáneamente nulas. Definimos

$$\mathcal{L}(u,v) := \int_\Omega \sum_{i,j=1}^N a_{ij}(x)\partial_j u \partial_i v + \int_\Omega b(x)uv + \int_{\partial\Omega} c(x)uv, \quad \forall u,v \in H^1(\Omega),$$

con $a_{ij} = a_{ji} \in L^\infty(\Omega)$ definida positiva, esto es, existe $\gamma > 0$ tal que

$$\sum_{i,j=1}^N a_{ij}(x)\xi_i\xi_j \geq \gamma|\xi|^2, \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^N, \text{ e. c. t. } x \in \Omega.$$

Probar que $\mathcal{L}(u,u)$ define un producto escalar en $H^1(\Omega)$ equivalente al ordinario.

48. Deducir del ejercicio anterior que las siguientes normas son equivalentes a la ordinaria en $H^1(\Omega)$

$$\left(\int_\Omega a(x)|\nabla u|^2 + \int_{\partial\Omega} u^2\right)^{1/2}, \qquad \left(\int_\Omega |\nabla u|^2 + \int_{\partial\Omega} c(x)u^2\right)^{1/2},$$

con $a \in L^\infty(\Omega)$, $a \geq \gamma > 0$ y $c \in L^\infty(\partial\Omega)$, $c \geq 0$ y no idénticamente nula.

49. Sea $\Omega$ un abierto acotado y de $C^1$ y conexo, y sea $H_1 := \{u \in H^1(\Omega) : \exists \Gamma \subset \partial\Omega, |\Gamma| > 0, \gamma_0(u)_{\rfloor\Gamma} = 0\}$. Demostrar que en $H_1$ una norma equivalente a la ordinaria es

$$\|u\|^2 := \int_\Omega |\nabla u|^2.$$

50. Sea $\Omega$ un abierto acotado y de $C^1$ y conexo, y sea $H_2 := \{u \in H^1(\Omega) : \int_\Omega u = 0\}$. Demostrar que en $H_2$ una norma equivalente a la ordinaria es

$$\|u\|^2 := \int_\Omega |\nabla u|^2.$$

51. Sean $\Omega = (-1,1) \times (-1,1) \subset \mathbb{R}^2$, $a(\cdot,\cdot)$ la forma bilineal continua definida sobre $H_0^1(\Omega)$ por

$$a(u,v) = \int_\Omega (\partial_1 u \partial_1 v + \partial_2 u \partial_2 v + x_1 v \partial_1 u + uv)\, dx,$$

y $g$ la función definida sobre $\Omega$ por

$$g(x_1,x_2) = \begin{cases} x_1x_2 & \text{si } x_1 > 0 \\ x_1 & \text{si } x_1 \leq 0. \end{cases}$$

Se pide:

a) Demostrar que $a(\cdot,\cdot)$ es coerciva sobre $H_0^1(\Omega)$.

b) Estudiar si $g \in H^2(\Omega)$.

c) Demostrar que existe una y sólo una solución $u$ del problema

$$(P) \begin{cases} u \in g + H_0^1(\Omega), \\ a(u,v) = \displaystyle\int_\Omega x_1 v\, dx \quad \forall v \in H_0^1(\Omega). \end{cases}$$

d) Caracterizar la $u$ solución de $(P)$ como solución débil de un problema de contorno.

52. Sean $\Omega = (-1,1) \times (-1,1) \subset \mathbb{R}^2$, $a(\cdot,\cdot)$ definida sobre $H^1(\Omega)$ por

$$a(u,v) = \int_\Omega (\partial_1 u \partial_1 v + \partial_2 u \partial_2 v + x_1 v \partial_1 u + uv)\, dx,$$

y $g$ la función definida en $\mathbb{R}^2$ por

$$g(x_1,x_2) = \begin{cases} x_1x_2 & \text{si } x_1 > 0 \\ x_1 & \text{si } x_1 \leq 0. \end{cases}$$

Se pide:

(a) Demostrar que $a(\cdot,\cdot)$ es coerciva sobre $H^1(\Omega)$.

(b) Demostrar que existe una y sólo una solución de cada uno de los problemas

$$\begin{cases} \text{Hallar } u \in g + H_0^1(\Omega) \text{ tal que} \\ a(u,v) = \displaystyle\int_\Omega x_1 v\,dx \quad \forall v \in H_0^1(\Omega), \end{cases} \qquad \begin{cases} \text{Hallar } u \in H^1(\Omega) \text{ tal que} \\ a(u,v) = \displaystyle\int_{\partial\Omega} gv\,d\sigma(x) \quad \forall v \in H^1(\Omega), \end{cases}$$

y caracterizar ambas como soluciones débiles de sendos problemas de contorno.

53. Sea $\Omega = (1, M) \times (0,1) \subset \mathbb{R}^2$, con $M > 1$, y $a(\cdot,\cdot)$ definida sobre $H^1(\Omega)$ por

$$a(u,v) = \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v\,dx + \int_\Omega u\partial_2 v\,dx + \int_\Omega (\log|x_1|)v\partial_1 u\,dx - \int_\Omega uv\,dx \quad \forall\, u,\, v \in H^1(\Omega).$$

(a) Demostrar que $2\|u\|_{L^2(\Omega)} \le \|\partial_2 u\|_{L^2(\Omega)}$ para toda $u \in H_0^1(\Omega)$.

(b) Demostrar que para toda $u \in H_0^1(\Omega)$ se satisface la igualdad

$$\int_\Omega (\log|x_1|)u\partial_1 u\,dx = -\int_\Omega \frac{u^2}{2x_1}\,dx.$$

(c) Siendo $g(x_1, x_2) = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$, probar que existe una y sólo una solución $u$ del problema

$$\text{(PV)} \begin{cases} \text{Hallar } u \in g + H_0^1(\Omega) \text{ tal que} \\ a(u,v) = 0 \quad \forall\, v \in H_0^1(\Omega). \end{cases}$$

54. Sean $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ un abierto acotado y conexo de clase $C^1$, $f \in L^2(\Omega)$ y $\beta > 1$ dados. Se pide:

(a) Demostrar que existe una y sólo una solución $u$ del problema

$$\text{(P)} \begin{cases} u \in H^1(\Omega), \\ \displaystyle\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v\,dx + 2\int_\Omega (\partial_1 u)v\,dx + \beta\int_\Omega uv\,dx + \int_{\partial\Omega} uv\,d\sigma(x) = \int_\Omega fv\,dx \quad \forall\, v \in H^1(\Omega). \end{cases}$$

(b) Caracterizar $u$ como solución débil de un problema de contorno.

55. Sean $\Omega = B(0, \sqrt{2}) \subset \mathbb{R}^2$ y $f \in L^2(\Omega)$ dada. Consideremos fijados $\alpha > 0$ y $\beta > 0$ tales que $3 < 2\alpha\beta$. Se consideran los problemas

$$(1) \begin{cases} u \in H_0^1(\Omega) \\ \alpha \displaystyle\int_\Omega (\partial_1 u\partial_1 v + \partial_2 u\partial_2 v)\,dx + \int_\Omega u\partial_1 v\,dx + \int_\Omega x_2^2 v\partial_1 u\,dx + \beta\int_\Omega uv\,dx = \int_\Omega f\partial_1 v\,dx \quad \forall\, v \in H_0^1(\Omega) \end{cases}$$

y

$$(2) \begin{cases} u \in H^1(\Omega) \\ \alpha \displaystyle\int_\Omega (\partial_1 u\partial_1 v + \partial_2 u\partial_2 v)\,dx + \int_\Omega v(x_2^2\partial_1 u + x_1\partial_2 u)\,dx + \beta\int_\Omega uv\,dx = \int_\Omega fv\,dx \quad \forall\, v \in H^1(\Omega). \end{cases}$$

Se pide:

a) Demostrar que cada uno de los dos problemas precedentes posee una y sólo una solución que se denotarán $u_1$ y $u_2$ respectivamente.

b) Caracterizar $u_1$ y $u_2$ como soluciones débiles de sendos problemas de contorno.

56. Sean $\Omega = B(0,1) \subset \mathbb{R}^2$ y $f \in L^2(\Omega)$ dada. Se consideran los problemas

$$(1) \begin{cases} u \in H_0^1(\Omega) \\ \displaystyle\int_\Omega ((x_1+2)\partial_1 u\partial_1 v + \partial_2 u\partial_2 v)\,dx + \int_\Omega v(\partial_1 u + x_1\partial_2 u)\,dx + \frac{1}{2}\int_\Omega uv\,dx = \int_\Omega f\partial_1 v\,dx \quad \forall\, v \in H_0^1(\Omega) \end{cases}$$

y

$$(2) \begin{cases} u \in H^1(\Omega) \\ \displaystyle\int_\Omega (\partial_1 u\partial_1 v + \partial_2 u\partial_2 v)\,dx + \int_\Omega x_1 v\partial_2 u\,dx + \frac{1}{2}\int_\Omega uv\,dx = \int_\Omega fv\,dx \quad \forall\, v \in H^1(\Omega). \end{cases}$$

Se pide:

a) Demostrar que cada uno de los dos problemas precedentes posee una y sólo una solución que se denotarán $u_1$ y $u_2$ respectivamente.

b) Caracterizar $u_1$ y $u_2$ como soluciones débiles de sendos problemas de contorno.

57. Sean $\Omega = \overset{\circ}{\mathrm{B}}(0, \sqrt{2}) \subset \mathbb{R}^2$ y $f \in L^2(\Omega)$ dada. Se consideran los problemas

$$(1) \begin{cases} u \in H_0^1(\Omega) \\ \displaystyle\int_\Omega ((x_1+2)\partial_1 u \partial_1 v + \partial_2 u \partial_2 v)\, dx + \int_\Omega v(\partial_1 u + x_1 \partial_2 u)\, dx + \int_\Omega uv\, dx = \int_\Omega f \partial_1 v\, dx \quad \forall\, v \in H_0^1(\Omega) \end{cases}$$

y

$$(2) \begin{cases} u \in H^1(\Omega) \\ \displaystyle\int_\Omega (\partial_1 u \partial_1 v + \partial_2 u \partial_2 v)\, dx + \int_\Omega x_1 v \partial_2 u\, dx + \int_\Omega uv\, dx = \int_\Omega fv\, dx \quad \forall\, v \in H^1(\Omega) \end{cases}$$

Se pide:

a) Demostrar que cada uno de los dos problemas precedentes posee una y sólo una solución que se denotarán $u_1$ y $u_2$ respectivamente.

b) Caracterizar $u_1$ y $u_2$ como soluciones débiles de sendos problemas de contorno.

58. Sean $\Omega = \overset{\circ}{\mathrm{B}}(0, 1) \subset \mathbb{R}^2$ y $f \in L^2(\Omega)$ dada. Se consideran los problemas

$$(1) \begin{cases} u \in H_0^1(\Omega) \\ \displaystyle\int_\Omega \big((x_2+2)^2 \partial_1 u \partial_1 v + \partial_2 u \partial_2 v\big)\, dx + \int_\Omega v \partial_1 u\, dx = \int_\Omega f \partial_1 v\, dx \quad \forall\, v \in H_0^1(\Omega) \end{cases}$$

y

$$(2) \begin{cases} u \in H^1(\Omega) \\ \displaystyle\int_\Omega (\partial_1 u \partial_1 v + \partial_2 u \partial_2 v)\, dx + \int_\Omega v \partial_1 u\, dx + \frac{1}{2}\int_\Omega uv\, dx = \int_\Omega fv\, dx \quad \forall\, v \in H^1(\Omega) \end{cases}$$

Se pide:

a) Demostrar que cada uno de los dos problemas precedentes posee una y sólo una solución que se denotarán $u_1$ y $u_2$ respectivamente.

b) Caracterizar $u_1$ y $u_2$ como soluciones débiles de sendos problemas de contorno.

59. Sean $\Omega = B(0, 1)$ la bola abierta unidad para la norma euclidiana de $\mathbb{R}^3$, $\Gamma_+ = \partial\Omega \cap \mathbb{R}^3_+$, y $g \in L^2(\partial\Omega)$ dados. Denotemos $\Gamma_- = \partial\Omega \setminus \Gamma_+$, y $V = \{v \in H^1(\Omega) :\ v_{|\Gamma_+} = 0\}$. Se pide:

(a) Demostrar que existe una y sólo una solución $u$ del problema

$$(\mathrm{P}) \begin{cases} u \in V, \\ \displaystyle\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v\, dx + \int_\Omega (x \cdot \nabla u) v\, dx + \int_\Omega uv\, dx = \int_{\Gamma_-} gv\, d\sigma(x) \quad \forall\, v \in V. \end{cases}$$

(b) Caracterizar $u$ como solución débil de un problema de contorno.

60. Sean $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ un abierto acotado de clase $C^1$, $f(x) \in L^2(\Omega)$ y $g \in L^2(\partial\Omega)$ dados. Se pide:

(a) Usando la desigualdad de Poincaré en $H^1(\Omega)$, demostrar que si se denota por $V$ al conjunto

$$V = \{u \in H^1(\Omega) :\ \int_\Omega u\, dx = 0\},$$

entonces $V$ es un subespacio vectorial cerrado de $H^1(\Omega)$, cuyo ortogonal en dicho espacio es el conjunto formado por las funciones constantes.

(b) Si $f$ y $g$ satisfacen la relación de compatibilidad

$$\int_\Omega f\, dx + \int_{\partial\Omega} g\, d\sigma(x) = 0,$$

entonces el problema de Neumann

$$\begin{cases} -\Delta u = f & \text{en } \Omega, \\ \partial_{\vec{n}} u = g & \text{sobre } \partial\Omega, \end{cases}$$

posee infinitas soluciones, siendo la diferencia de dos cualesquiera de ellas una constante.

61. Sea $\Omega = (-1, 1) \times \mathbb{R}^2 \subset \mathbb{R}^3$. Dado $\beta \in \mathbb{R}$, se considera la forma bilineal continua sobre $H^1(\Omega)$ definida por

$$a(u, v) = (1 + 2\sqrt{2}) \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v\, dx + \int_\Omega (x_1 + 3)^{1/2} u \partial_1 v\, dx + \beta \int_\Omega uv\, dx \quad \forall\, u, v \in H^1(\Omega).$$

Se pide:

(a) Demostrar que $\|u\|_{L^2(\Omega)} \leq \|\partial_1 u\|_{L^2(\Omega)}$ para toda $u \in H_0^1(\Omega)$.

(b) Demostrar que si $\beta > (1+2\sqrt{2})^{-1}$, la forma bilineal es coerciva en $H^1(\Omega)$.

(c) Comprobar que si $\beta > -1/2$, entonces se puede garantizar la existencia y unicidad de solución $u$ al problema

$$\text{(PV)} \begin{cases} \text{Hallar } u \in H_0^1(\Omega) \text{ tal que} \\ a(u,v) = \displaystyle\int_\Omega fv\,dx \quad \forall\, v \in H_0^1(\Omega). \end{cases}$$

62. Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ un abierto acotado, conexo y de clase $C^1$. Supongamos que $\partial\Omega = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$ con $|\Gamma_2| > 0$ y sea $g \in L^2(\partial\Omega)$. Se considera el siguiente problema

$$(P) \qquad \begin{cases} -\Delta u = 0 & \text{en } \Omega, \\ \partial_{\vec{n}} u + 3u = g(x) & \text{sobre } \Gamma_1, \\ u = 0 & \text{sobre } \Gamma_2. \end{cases}$$

(a) Definir solución débil para el problema (P).

(b) Probar que existe una única solución de (P).

63. Sean $\Omega = B(0,\sqrt{3}) \subset \mathbb{R}^3$, $f \in L^2(\Omega)$ y $\beta \in \mathbb{R}$. Se considera el siguiente problema

$$(P) \qquad \begin{cases} -\Delta u + x_1\partial_1 u + x_2^2\partial_2 u + \beta u = f & \text{en } \Omega, \\ \partial_{\vec{n}} u = 0 & \text{sobre } \partial\Omega. \end{cases}$$

(a) Definir solución débil para el problema (P).

(b) Probar que si $\beta > 3$ entonces existe una única solución de (P).

64. Sean $\Omega = B(0,R) \subset \mathbb{R}^N$, $f \in L^2(\Omega)$ y $\beta \in \mathbb{R}$. Se considera el siguiente problema

$$(P) \qquad \begin{cases} -\Delta u + (x \cdot \nabla u) + \beta u = f & \text{en } \Omega, \\ u = 0 & \text{sobre } \partial\Omega. \end{cases}$$

(a) Definir solución débil para el problema (P).

(b) Probar que si $\beta > R^2/4$ entonces existe una única solución de (P).

65. Sean $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ un abierto de clase $C^1$ contenido en la bola de centro el origen y radio 2 para la norma euclidiana. Sean $f \in L^2(\Omega)$ y $c \in L^\infty(\Omega)$ tal que $c(x) \geq 5/2$ c.p.d. en $\Omega$.

Consideremos el problema

$$\begin{cases} -\Delta u + x \cdot \nabla u + cu = f & \text{en } \Omega, \\ u = 0 & \text{sobre } \Gamma_0, \\ \partial_{\vec{n}} u = 0 & \text{sobre } \partial\Omega \setminus \Gamma_0, \end{cases} \tag{1}$$

donde $\Gamma_0$ es un subconjunto de $\partial\Omega$ de medida superficial no nula.

Se pide:

(a) Definir el concepto de solución débil de (1).

(b) Teniendo en cuenta que $2ab \leq a^2/2 + 2b^2$ para todo par $a, b \in \mathbb{R}$, demostrar que (1) posee una y sólo una solución débil $u$.

(c) Obtener una estimación de la norma de $u$ en $H^1(\Omega)$ en función de la norma de $f$ en $L^2(\Omega)$.

66. Sean $\Omega = B(0,\sqrt{2}) \subset \mathbb{R}^N$, $f \in L^2(\Omega)$ y $0 < \beta < \sqrt{2}$ dados. Se pide:

(a) Demostrar que existe una y sólo una solución $u$ del problema

$$\text{(P)} \begin{cases} u \in H^1(\Omega), \\ \displaystyle\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v\,dx + \beta \int_\Omega x_1(\partial_1 u)v\,dx + \int_\Omega uv\,dx + \int_{\partial\Omega} uv\,d\sigma(x) = \int_\Omega fv\,dx \quad \forall\, v \in H^1(\Omega). \end{cases}$$

(b) Caracterizar $u$ como solución débil de un problema de contorno.

(c) Probar que $u \in H^2(\Omega)$.

67. Sea $\Omega \subset B(0,R) \subset \mathbb{R}^N$ un abierto conexo, de clase $C^1$, $R>0$ y con $\partial\Omega = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$, $|\Gamma_1|>0$, $f \in L^2(\Omega)$ y $\beta \in \mathbb{R}$ dados. Se pide:

a) Definir el concepto de solución débil del siguiente problema

$$(\mathrm{P}) \left\{ \begin{array}{ll} -\Delta u + x_1^2 \partial_1 u + \beta u = f & \text{en } \Omega, \\ u = 0 & \text{sobre } \Gamma_1, \\ \partial_{\vec{n}} u + 3u = 0 & \text{sobre } \Gamma_2. \end{array} \right.$$

b)Demostrar que existe una y sólo una solución $u$ de (P) si $\beta > R^4/4$.

68. Sea $\Omega$ un abierto acotado, conexo y clase $C^1$. Sean $u \in H^1(\Omega)$ y $f \in L^2(\Omega)$ tales que

$$\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla \varphi + \int_\Omega u\varphi = \int_\Omega f\varphi, \quad \forall \varphi \in H_0^1(\Omega).$$

Probar que

$$\min\left\{ \inf_{\partial\Omega} u, \inf_{\Omega} f \right\} \le u(x) \le \max\left\{ \sup_{\partial\Omega} u, \sup_{\Omega} f \right\}.$$

69. Sea $\Omega$ un abierto acotado, conexo y clase $C^1$. Si $u \in H_0^1(\Omega)$ es solución débil de

$$\left\{ \begin{array}{ll} -\Delta u = 0 & \text{en } \Omega, \\ u = 0 & \text{sobre } \partial\Omega. \end{array} \right.$$

entonces $u \equiv 0$.

70. Sea $\Omega$ un abierto acotado, conexo y clase $C^1$ y supongamos que $u \in H^1(\Omega)$ satisface

$$\left\{ \begin{array}{ll} -\Delta u + u \le 0 & \text{en } \Omega, \\ \partial_{\vec{n}} u \le 0 & \text{sobre } \partial\Omega. \end{array} \right.$$

Probar que $u \le 0$ en $\Omega$.

71. Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ es un abierto acotado, conexo de clase $C^1$ y $c \in L^\infty(\Omega)$, $b \in L^\infty(\partial\Omega)$, $c \ge 0$ en $\Omega$ y $b \ge 0$ sobre $\partial\Omega$ y no simultáneamente nulas. Sea $u \in H^1(\Omega)$ tal que

$$\left\{ \begin{array}{ll} -\Delta u + c(x)u \ge 0 & \text{en } \Omega, \\ \partial_{\vec{n}} u + b(x)u \ge 0 & \text{sobre } \partial\Omega. \end{array} \right.$$

Probar que $u \ge 0$ c.p.d. en $\Omega$.

72. Sea $\Omega$ un abierto acotado, conexo y clase $C^1$. Probar que, si existe, es única la solución débil del problema

$$\left\{ \begin{array}{ll} -\Delta u = \lambda u & \text{en } \Omega, \\ u = g & \text{sobre } \partial\Omega, \end{array} \right.$$

si $\lambda \ne \lambda_i$, para todo $i$, siendo $\lambda_i$ autovalor del Laplaciano.

73. Sean $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ un abierto acotado y conexo de clase $C^1$, y sea $u \in H_0^1(\Omega)$ solución débil de

$$\left\{ \begin{array}{ll} -\Delta u = \lambda u & \text{en } \Omega, \\ u = 0 & \text{sobre } \partial\Omega. \end{array} \right.$$

Probar que si $\lambda \ne \lambda_1$, no existe solución positiva del problema anterior, siendo $\lambda_1$ el primer autovalor del laplaciano con condiciones de contorno Dirichlet.

74. Sean $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ un abierto acotado de clase $C^1$ y denotemos por $\lambda_n$ y $e_n$ los autovalores y autofunciones del operador $-\Delta$ para el problema de Dirichlet. Probar:

(a) Si $e_1$ es autofunción asociada a $\lambda_1$, también lo es $|e_1|$.

(b) Si $e_n$ es una autofunción y no cambia de signo, entonces $e_n$ es autofunción correspondiente al autovalor $\lambda_1$.

(c) Sea $w \ne 0$, $w \in H_0^1(\Omega)$ tal que $R(w) = \lambda_1$. Entonces, $w$ es una autofunción asociada a $\lambda_1$.

(d) Si $w$ es una autofunción asociada a $\lambda_1$, $w$ no cambia de signo.

(e) $\lambda_1$ es simple.

(f) La autofunción asociada a $\lambda_1$, $w_1$, puede ser elegida positiva. Es más, $w_1(x) > 0$ para $x \in \Omega$.

75. Sean $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ un abierto acotado de clase $C^1$, y $c(x) \in L^\infty(\Omega)$ dados. Se pide:

(a) Demostrar que existe una sucesión no decreciente de números reales $-\|c\|_{L^\infty(\Omega)} \leq \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq ... \leq \lambda_n \leq ....$, con $\lim_{n\to+\infty} \lambda_n = +\infty$, y existe una base de Hilbert $\{e_n\}_{n\geq 1}$ de $L^2(\Omega)$ tal que para cada $n \geq 1$ la función $e_n$ es solución débil del problema

$$\begin{cases} -\Delta e_n + c(x)e_n = \lambda_n e_n & \text{en } \Omega, \\ \partial_{\vec{n}} e_n = 0 & \text{sobre } \partial\Omega. \end{cases}$$

(b) Demostrar que si $c \in C^\infty(\overline{\Omega})$, entonces $e_n \in C^\infty(\Omega)$ para cada $n \geq 1$.

(c) Suponiendo ahora que $c(x) \geq c_0 > 0$ c.p.d. en $\Omega$, y $f \in L^2(\Omega)$, demostrar que la solución débil del problema

$$\begin{cases} -\Delta u + c(x)u = f & \text{en } \Omega, \\ \partial_{\vec{n}} u = 0 & \text{sobre } \partial\Omega, \end{cases}$$

viene dada por

$$u = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_n}(f, e_n)_{L^2(\Omega)} e_n,$$

siendo la serie convergente en $H^1(\Omega)$.

76. Sean $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ un abierto acotado de clase $C^1$, y $c(x) \in L^\infty(\Omega)$ dados. Demostrar que existe una sucesión creciente de números reales $-\|c\|_{L^\infty(\Omega)} \leq \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq ... \leq \lambda_n \leq ....$, con $\lim_{n\to+\infty} \lambda_n = +\infty$, y existe una base ortonormal $\{e_n\}_{n\geq 1}$ de $L^2(\Omega)$ tal que para cada $n \geq 1$ la función $e_n$ es solución débil del problema

$$\begin{cases} -\Delta e_n + c(x)e_n = \lambda_n e_n & \text{en } \Omega, \\ e_n = 0 & \text{sobre } \partial\Omega. \end{cases}$$

77. Sean $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ un abierto acotado y conexo de clase $C^1$, $\Gamma_0 \subset \partial\Omega$ tal que $\sigma(\Gamma_0) > 0$, y $c(x) \in L^\infty(\Omega)$ dados. Se pide:

(a) Demostrar que existe una sucesión creciente de números reales $-\|c\|_{L^\infty(\Omega)} < \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq ... \leq \lambda_n \leq ....$, con $\lim_{n\to+\infty} \lambda_n = +\infty$, y existe una base ortonormal $\{e_n\}_{n\geq 1}$ de $L^2(\Omega)$ tal que para cada $n \geq 1$ la función $e_n$ es solución débil del problema

$$\begin{cases} -\Delta e_n + c(x)e_n = \lambda_n e_n & \text{en } \Omega, \\ e_n = 0 & \text{sobre } \Gamma_0, \\ \partial_{\vec{n}} e_n = 0 & \text{sobre } \partial\Omega \setminus \Gamma_0. \end{cases}$$

(b) Demostrar que si $c \in C^\infty(\overline{\Omega})$, entonces $e_n \in C^\infty(\Omega)$ para cada $n \geq 1$.

(c) Suponiendo ahora que $c(x) \geq 0$ c.p.d. en $\Omega$, y $f \in L^2(\Omega)$, demostrar que la solución débil del problema

$$\begin{cases} -\Delta u + c(x)u = f & \text{en } \Omega, \\ u = 0 & \text{sobre } \Gamma_0, \\ \partial_{\vec{n}} u = 0 & \text{sobre } \partial\Omega \setminus \Gamma_0, \end{cases}$$

viene dada por

$$u = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_n}(f, e_n)_{L^2(\Omega)} e_n,$$

siendo la serie convergente en $H_0^1(\Omega)$.

78. Sean $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ un abierto acotado y conexo de clase $C^1$, $c(x) \in L^\infty(\Omega)$, y $\alpha \in L^\infty(\Omega)$ tal que $\alpha \not\equiv 0$ y $\alpha(x) \geq 0$ c.p.d. en $\Omega$. Se pide:

(a) Demostrar que existe una sucesión creciente de números reales $-\|c\|_{L^\infty(\Omega)} \leq \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq ... \leq \lambda_n \leq ....$, con $\lim_{n\to+\infty} \lambda_n = +\infty$, y existe una base ortonormal $\{e_n\}_{n\geq 1}$ de $L^2(\Omega)$ tal que para cada $n \geq 1$ la función $e_n$ es solución débil del problema

$$\begin{cases} -\Delta e_n + c(x)e_n = \lambda_n e_n & \text{en } \Omega, \\ \alpha e_n + \partial_{\vec{n}} e_n = 0 & \text{sobre } \partial\Omega. \end{cases}$$

(b) Suponiendo que $f \in L^2(\Omega)$, demostrar que la solución débil del problema

$$\begin{cases} -\Delta u + c(x)u = f & \text{en } \Omega, \\ \alpha u + \partial_{\vec{n}} u = 0 & \text{sobre } \partial\Omega \end{cases}$$

viene dada por

$$u = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_n} (f, e_n)_{L^2(\Omega)} e_n,$$

siendo la serie convergente en $H^1(\Omega)$.

79. Sean $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ un abierto, acotado, conexo, de clase $C^1$, $f(x) \in L^2(\Omega)$ dados y consideremos el problema de Neumann

$$\begin{cases} -\Delta u = f & \text{en } \Omega, \\ \partial_{\vec{n}} u = 0 & \text{sobre } \partial\Omega. \end{cases}$$

Probar que una condición necesaria y suficiente para que exista solución es

$$\int_\Omega f \, dx = 0.$$

Además, en caso de existencia de solución, el problema posee infinitas soluciones, siendo la diferencia de dos cualesquiera de ellas una constante.

80. Definamos $S : L^2(\Omega) \mapsto L^2(\Omega)$, $f \mapsto u = S(f)$ siendo $u$ la única solución de

$$\begin{cases} -\Delta u + u = f & \text{en } \Omega, \\ \partial_{\vec{n}} u = 0 & \text{sobre } \partial\Omega. \end{cases}$$

Supongamos conocido que $S$ está bien definida, es lineal, compacta y autoadjunta.

Probar que si 1 no es autovalor de

$$\begin{cases} -\Delta u = \lambda u & \text{en } \Omega, \\ \partial_{\vec{n}} u = 0 & \text{sobre } \partial\Omega, \end{cases}$$

entonces para $f \in L^2(\Omega)$ el problema

$$\begin{cases} -\Delta u - u = f & \text{en } \Omega, \\ \partial_{\vec{n}} u = 0 & \text{sobre } \partial\Omega, \end{cases}$$

tiene una única solución en $H^1(\Omega)$. Probar además que $u \in H^3(\Omega)$.

81. Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ un abierto acotado no vacío, con $\partial\Omega = \Gamma_0 \cup \Gamma_1$, $|\Gamma_0| \neq 0$ y consideremos el problema

$$\begin{cases} -\Delta u = \lambda u + f & \text{en } \Omega, \\ u = 0 & \text{sobre } \Gamma_0, \\ \partial_{\vec{n}} u = 0 & \text{sobre } \Gamma_1, \end{cases} \tag{2}$$

siendo $\lambda \in \mathbb{R}$ y $f \in L^2(\Omega)$. Denotemos por $\lambda_j$, $j \in \mathbf{N}$, los autovalores del problema siguiente

$$\begin{cases} -\Delta u = \lambda u & \text{en } \Omega, \\ u = 0 & \text{sobre } \Gamma_0, \\ \partial_{\vec{n}} u = 0 & \text{sobre } \Gamma_1. \end{cases}$$

Probar:

(a) Si $\lambda \neq \lambda_j$ para toda $j \in \mathbf{N}$, entonces para cada $f \in L^2(\Omega)$ el problema (2) posee una y sólo una solución débil.

(b) Si $\lambda = \lambda_j$ para algún $j \in \mathbf{N}$, entonces, dada $f \in L^2(\Omega)$, el problema (2) posee soluciones débiles si y sólo si $f$ es ortogonal en $L^2(\Omega)$ el espacio de todas las autofunciones asociadas al autovalor $\lambda_j$, es decir,

$$\int_\Omega fv = 0 \quad \text{para toda autofunción } v \text{ asociada a } \lambda_j,$$

y en tal caso el conjunto de todas las soluciones de (2) está formado por la suma de una solución particular más el subespacio de autofunciones asociado a $\lambda_j$.

82. Sea $\Omega$ un abierto, acotado, conexo, de clase $C^1$ y $f \in L^2(\Omega)$. Consideremos el problema

$$\left\{\begin{array}{ll} -\Delta u - 3u = f & \text{en } \Omega, \\ \partial_{\vec{n}} u + u = 0 & \text{sobre } \partial\Omega. \end{array}\right. \tag{3}$$

Supongamos que 3 es un autovalor de

$$\left\{\begin{array}{ll} -\Delta u = \lambda u & \text{en } \Omega, \\ \partial_{\vec{n}} u + u = 0 & \text{sobre } \partial\Omega. \end{array}\right.$$

Dar una condición suficiente para que exista solución de (3). ¿Es única?