Departamento de Ecuaciones Diferenciales y Análisis Numérico

CÁLCULO NUMÉRICO I (Ejercicios Temas 1 y 2)

1 ¿Cuáles de los siguientes algoritmos son finitos?

(a) Cálculo del producto de dos números enteros.
(b) Cálculo de la división de dos números enteros.
(c) Cálculo de la raíz cuadrada de un número natural.
(d) Descomposición en producto de factores primos de un número natural.
(e) Cálculo del máximo común divisor de dos números naturales.

2 Obtener el término general de las siguientes sucesiones definidas por recurrencia:

(a) $x_n = 5x_{n-1} - 6x_{n-2}$, $\quad x_0,\, x_1 \in \mathbb{R}$, (Solución: $x_n = (3^n - 2^n)x_1 + (3 \times 2^n - 2 \times 3^n)x_0$);
(b) $x_n = -3x_{n-1} + 4x_{n-2}$, $\quad x_0,\, x_1 \in \mathbb{R}$, (Solución: $x_n = \dfrac{1}{5}\left[(1 + (-1)^{n-1} \times 4^n)x_1 + (4 - (-1)^{n-1} \times 4^n)x_0\right]$);

3 Dado $x \in \mathbb{R}^+$, el siguiente esquema, conocido como procedimiento o algoritmo de Herón,

$$(H) \quad \begin{cases} y_0 = a > 0 \\ y_{n+1} = \dfrac{1}{2}(y_n + \dfrac{x}{y_n}),\ n \geq 0 \end{cases}$$

se emplea para aproximar el valor de $y = \sqrt{x}$.

(a) Probar que (H) está bien definido, es decir que $y_n \neq 0$ para todo $n \geq 0$.
(b) Demostrar la convergencia del algoritmo de Herón (probando que la sucesión generada por (H) es convergente).
(c) Emplear este algoritmo en los siguientes casos particulares:
  i. $x = 2$, $a = 1.4$ $\quad (\sqrt{2} = 1.41421356...)$
  ii. $x = 5$, $a = 2$ $\quad (\sqrt{5} = 2.23606797...)$

4 Dado $x \in \mathbb{R}^+$, consideremos el siguiente algoritmo para aproximar el inverso de x *sin hacer divisiones*:

$$\begin{cases} y_0 = a > 0 \\ y_{n+1} = y_n(2 - xy_n),\ n \geq 0 \end{cases}$$

Demostrar que bajo ciertas condiciones sobre el valor inicial a, la sucesión $(y_n)_{n\geq 0}$ converge a $1/x$.

Indicación: Comprobar que a partir de la primera iteración la sucesión y_n está acotada superiormente por $1/x$. Estudiar la monotonía de la sucesión (depende del signo de y_n). Considerar dos casos posibles: $a \in (0, 2/x)$ y $a \geq 2/x$.

5 Probar que el sistema

$$\begin{cases} x - y = 1 \\ x - 1.10y = 0 \end{cases}$$

está mal condicionado, resolviéndolo y comparándolo con el sistema

$$\begin{cases} x - y = 1 \\ x - 0.99y = 0. \end{cases}$$

6 Obtener el error absoluto (E_a) y relativo (E_r) que se comete al aproximar el número real x por el número $\bar{x}$ en los siguientes casos:

(a) $x = 4.32$, $\quad \bar{x} = 4.3$, (Solución: $E_a = 0.02$, $E_r = 0.004\widehat{629}$);
(b) $x = 0.000432$, $\quad \bar{x} = 0.00043$, (Solución: $E_a = 0.000002$, $E_r = 0.004\widehat{629}$);
(c) $x = 432$, $\quad \bar{x} = 430$, (Solución: $E_a = 2$, $E_r = 0.004\widehat{629}$).

7 Calcular todos los números $\bar{x}$ que constituyen una aproximación de 6.897 con un error absoluto menor que 5 centésimas. Repetir el ejercicio para el error relativo. (Solución: $6.847 < \bar{x} < 6.947$, $6.55215 < \bar{x} < 7.24185$).

8 Determinar el número de raíces de la ecuación $f(x) = x + e^x = 0$.

9 Separar las raíces de las siguientes ecuaciones:

(a) $x^3 - 6x + 2 = 0$

(b) $x^4 - 4x - 1 = 0$

10 Sea ξ una solución exacta y $\bar{x}$ una aproximada de la ecuación $f(x) = 0$, situadas ambas en el intervalo $[\alpha, \beta]$ donde la función f es derivable y verifica que $|f'(x)| \geq m$, $\forall\, x \in [\alpha, \beta]$, para cierta constante positiva m.

(a) Con ayuda del teorema del valor medio, demostrar la siguiente desigualdad:

$$|\bar{x} - \xi| \leq \frac{|f(\bar{x})|}{m}$$

(b) Utilizando la estimación anterior, acotar el error absoluto al aproximar por $\bar{x} = 1.22$ la raíz positiva χ de la ecuación $x^4 - 4x - 1 = 0$ del ejercicio anterior.

11 Demostrar que si f es una función continua de $[a, b]$ en $[a, b]$, entonces f debe tener un punto fijo. ¿Es cierto el resultado para funciones continuas de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$?

12 Dar ejemplos de funciones que no tienen puntos fijos pero que sí poseen las siguientes características:

(a) $f : [0, 1] \mapsto [0, 1]$;

(b) $f : (0, 1) \mapsto (0, 1)$ y es continua;

(c) $f : (0, 1) \mapsto (0, 1)$, es continua y es sobreyectiva;

(d) $f : E \mapsto E$ y es continua, con $E = [0, 1] \cup [2, 3]$;

(e) $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ y es continua.

13 Encontrar el orden de convergencia de las siguientes sucesiones:

(a) $x_n = \left(\dfrac{1}{n}\right)^{\frac{1}{2}}$

(b) $\{y_n\}_{n\geq 0}$ definida por

$$\left\{ \begin{array}{l} y_0 = a > 0 \\ y_{n+1} = \dfrac{1}{2}\left(y_n + \dfrac{x}{y_n}\right), \quad n \geq 0 \end{array} \right. \qquad \text{con } x \geq 0 \text{ dado.}$$

(c) $x_n = \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^{\frac{1}{2}}$.

14 Consideremos la ecuación $f(x) = 0$, con $f : [0, 1] \mapsto \mathbb{R}$ una función continua. Supongamos que admite una única solución $\alpha \in [0, 1]$, y que además α es *irracional*. Denotemos por $I_n = [a_n, b_n]$, $n \geq 0$ los intervalos sucesivos que genera el método de bisección cuando se aplica a la función f. Sean $c_n = \dfrac{a_n + b_n}{2}$, $n \geq 0$, y $\alpha = \lim\limits_{n\to\infty} c_n$.

(a) Dar un ejemplo (o mostrar que no existe ninguno) en el que $a_0 < a_1 < a_2 < \ldots$

(b) ¿Es siempre cierto que en el método de bisección $|c_0 - \alpha| \geq |c_1 - \alpha| \geq |c_2 - \alpha| \geq \ldots$?

(c) Obtener una cota del error absoluto $|c_n - \alpha|$ en función de $b_0 - a_0$ y de n. Utilizando esta cota, determinar el número de iteraciones n necesarios para garantizar que $|c_n - \alpha| < \varepsilon$ para un ε dado.

(d) Hacer lo mismo para el error relativo.

15 Supongamos que el método de bisección se aplica en el intervalo $[a, b] = [50, 63]$. ¿Cuántos pasos deben darse para calcular una raíz con un error relativo menor o igual que 10^{-12}?

16 Se aplica el método de bisección para aproximar una raíz *positiva* de $x^2 - 4x\mathrm{sen}\, x + (2\mathrm{sen}\, x)^2 = 0$. Utilizando la cota del error absoluto del ejercicio **??**, apartado (c), calcular una aproximación que sea exacta hasta la primera cifra decimal.

17 Consideremos el método de bisección con $[a, b] = [1.5, 3.5]$ como intervalo inicial.

(a) ¿Cuál es la longitud del intervalo en el paso n–ésimo?

(b) ¿Cuál es la máxima distancia posible entre la raíz α y el punto medio c_n de ese intervalo?

18 Mostrar que las siguientes funciones son contractivas (satisfacen condiciones de Lipschitz con $L < 1$):

(a) $f(x) = 5 - \dfrac{1}{4}\cos 3x, \quad 0 \leq x \leq \dfrac{2\pi}{3}$;

(b) $f(x) = 2 + \dfrac{1}{2}|x|, \quad -1 \leq x \leq 1$;

(c) $f(x) = x^{-1}, \quad 2 \leq x \leq 3$.

19 (a) Demostrar que cualquier función que satisface una condición de Lipschitz en un intervalo I es continua en todo punto de I.

(b) Construir un ejemplo que muestre que no toda función continua satisface una condición de Lipschitz.

20 Sea $g : [a, b] \mapsto [a, b]$ una aplicación contractiva y sea α el punto fijo de g. Supongamos que para $a \leq x \leq b$ se tiene $|g(x) - x| \leq \varepsilon$. Demostrar que $|x - \alpha| \leq \varepsilon(1 - L)^{-1}$, donde $L \in [0, 1)$ es la constante de contractividad de g. ¿Es cierto que en este caso $|x - \alpha| < \varepsilon$?

21 Se considera la siguiente sucesión definida por recurrencia,

$$x_0 = 2, \qquad x_{k+1} = \sqrt{x_k} \quad \forall\, k \geq 0.$$

(a) Demostrar que está bien definida y es convergente hacia 1. Para ello, probar previamente que se trata de una sucesión acotada inferiormente por 1 y decreciente.

(b) Deducir que $\{x_k\}$ tiene convergencia lineal (exactamente).

(c) ¿Cuántas iteraciones harán falta para asegurar una aproximación con un error menor que 10^{-4}? Realizarlas.

22 Ídem, para la sucesión

$$x_0 = 2, \qquad x_{k+1} = \frac{x_k^2 + 1}{2x_k} \quad \forall\, k \geq 0,$$

teniendo en cuenta ahora que la convergencia es cuadrática.

23 Se considera la ecuación de punto fijo (EPF) $x = g(x)$, con $g(x) = \sqrt{2 + x}$. Escribir el método de las aproximaciones sucesivas (MAS) asociado a esta (EPF), tomando como punto inicial $x_0 = \sqrt{2}$. Probar que la sucesión resultante es convergente y determinar su límite.

24 Se considera la ecuación de punto fijo (EPF) $x = g(x)$, con $g(x) = \dfrac{1}{2 + x}$. Escribir la sucesión que genera el (MAS) asociado a esta (EPF), tomando como punto inicial $x_0 = 1/2$. Probar que el intervalo $[0, 1]$ es de convergencia global y determinar el límite de esta sucesión.

25 Determinar el valor de las siguientes expresiones:

(a) $a = \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \ldots}}}$. **Indicación:** Usar el ejercicio **??**.

(b) $b = \dfrac{1}{2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \ldots}}}$. **Indicación:** Usar el ejercicio **??**.

26 Se considera la ecuación de punto fijo

$$\text{(EPF)} \quad x = g(x), \quad \text{con} \quad g(x) = \ln(x^2 + 3) + 2.$$

(a) Determinar el número de soluciones de (EPF) y separarlas.

(b) Escribir el método de las aproximaciones sucesivas asociado a (EPF). Determinar un intervalo de convergencia global de dicho método hacia una raíz.

(c) Para el intervalo del apartado anterior, hallar el número de iteraciones necesarias para obtener un error menor que 10^{-3} en la aproximación de la raíz.

27 Sea $g : [a, b] \mapsto [a, b]$ una función contractiva y derivable en $[a, b]$, con $g'(x) < 0$, $\forall x \in [a, b]$. Sea $\{x_n\}$ la sucesión generada por el método de las aproximaciones sucesivas para aproximar el único punto fijo α de g. Demostrar que si $x_0 < \alpha$, entonces

$$x_0 < x_2 < x_4 < \ldots < \alpha < \ldots < x_5 < x_3 < x_1\,.$$

28 Consideremos la ecuación de punto fijo $x = g(x)$, con $g(x)$ dada por

$$g(x) = \frac{x^3 + 30x}{ax^2 + b}\,.$$

(a) En el caso $a = 4$, $b = 0$, comprobar que $\sqrt{10}$ es la solución positiva de la ecuación de punto fijo y estudiar la convergencia global del (MAS) en el intervalo $[3, 3.5]$.

(b) En las condiciones del apartado anterior, sea $\{x_n\}_{n\geq 0}$ la sucesión generada por el (MAS), tomando $x_0 = 3$. Acotar el error $|x_n - \sqrt{10}|$ en función de n y $|x_1 - x_0|$. Con ayuda de esta estimación determinar el número de iteraciones necesarias para aproximar $\sqrt{10}$ con un error menor que 10^{-3}.

(c) Determinar aquellos valores de a y b para los que el (MAS) tenga convergencia (local) al menos cuadrática. **Indicación:** Utilizar el teorema del orden de convergencia para el (MAS).

29 Kepler describió las leyes que rigen el movimiento de los planetas alrededor del Sol. Los planetas giran en una órbita elíptica, uno de cuyos focos lo ocupa el sol (la primera ley). El vector posición de cualquier planeta respecto del Sol, barre áreas iguales de la elipse en tiempos iguales (la segunda ley = la ley de las áreas). La ley de las áreas puede interpretarse como sigue: cuando el planeta está más alejado del Sol su velocidad es menor que cuando está más cercano al Sol. La formulación matemática de esta ley es la siguiente ecuación de Kepler:

$$M = E + e \operatorname{sen} E,$$

donde M y e, con $0 \leq e < 1$ son datos y E es la *incógnita*.

(a) Probar que dicha ecuación tiene una única solución α en el intervalo $[M - \pi, M + \pi]$.

(b) Para $M = 0.8$ y $e = 0.2$, escribir el (MAS) asociado a esta ecuación, comenzando con $x_0 = M$. Probar que el (MAS) es globalmente convergente en el intervalo $[M - \pi, M + \pi]$. Aproximar la solución α por el valor x_{10} que proporciona dicho método.

(c) Estimar el error que cometemos en el apartado anterior.

30 Se considera la ecuación $x^n - (5 - x)(x + 1) = 0$. Escribirla en forma de una (EPF) $x = g(x)$ para una función g adecuada. Utilizando el *teorema del punto fijo de la aplicación contractiva*, probar que dicha ecuación tiene una única raíz en $[0, 4]$, $\forall\, n \geq 2$, con n natural.

Indicación: Estudiar la monotonía de g y de g'.

31 Se considera la ecuación no lineal

$$\text{(EH)} \quad f(x) = 0, \quad \text{con} \quad f(x) = x + \ln(x + 1) - 2$$

(a) Determinar el número de soluciones de (EH) y separarlas.

(b) Escribir el método de Newton (MN) asociado a (EH) y probar la convergencia global en el intervalo $[1, 2]$.

(c) Sea $\{x_k\}_{k\geq 0}$ la sucesión generada por el (MN) y α la raíz de (EH). Estimar el error $|x_{k+1} - \alpha|$ en función de $|x_{k+1} - x_k|$, dando la expresión explícita de la constante.

32 Se considera el polinomio

$$p(x) = x^3 - x^2 - x - 1.$$

(a) Probar que existe una única raíz real α de la ecuación $p(x) = 0$ y localizarla.

(b) Determinar un intervalo de convergencia global del método de Newton (MN) asociado a esta ecuación.

(c) Aproximar α mediante (MN) (haciendo iteraciones).

33 Demostrar que la ecuación $2^x - x - 3 = 0$ posee exactamente dos soluciones α_1 y α_2, separandolas en intervalos disjuntos. Aplicar el método de Newton para aproximar α_1 y α_2, seleccionando previamente un punto inicial adecuado para que la sucesión resultante converja o bien a α_1, o bien a α_2.

34 Se considera la ecuación homogénea

$$\text{(EH)} \qquad e^x x - 1 = 0.$$

(a) Determinar el número de soluciones y separarlas.

(b) Escribir el Método de Newton asociado a (EH). Encontrar un intervalo de convergencia global de este método hacia la mayor raíz de (EH).

(c) Calcular una aproximación de dicha raíz con un error menor que $1/2$.

35 Sea $c > 0$. Para calcular (aproximadamente) $\sqrt{c}$, se aplica el método de Newton a la función $f(x) = x^2 - c$, resultando

$$x_{n+1} = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{c}{x_n}\right), \quad n \geq 0, \qquad x_0 \quad \text{dado.}$$

Probar que se verifica

$$\frac{x_n - \sqrt{c}}{x_n + \sqrt{c}} = \left(\frac{x_0 - \sqrt{c}}{x_0 + \sqrt{c}}\right)^{2^n}, \quad n \geq 0$$

Utilizando esta igualdad, deducir que cuando $n \to \infty$ la sucesión $\{x_n\}_{n\geq 0}$ converge a $\sqrt{c}$ (exactamente) cuadráticamente para cualquier $x_0 > 0$ inicial.

36 Sea $c \in \mathbb{R}$. Queremos calcular el inverso (c^{-1}) de c, *sin hacer ninguna división*. Para ello consideramos la función $f(x) = \dfrac{1}{x} - c$ (obsérvese que $x = c^{-1}$ es la raíz de la ecuación $f(x) = 0$). Escribir el método de Newton (MN) y probar que si $x_0 = 1$, entonces la sucesión x_n que genera este método es de la forma:

$$x_n = \frac{1 - (1-c)^{2^n}}{c}.$$

Deducir que la sucesión x_n así generada converge para $0 < c < 2$, y que la convergencia es exactamente cuadrática.

37 Sean $c > 0$, $m > 1$. Para hallar $\sqrt[m]{c}$, se aplica el método de Newton a la función $f(x) = x^m - c$.

(a) Obtener la expresión del método y probar que la sucesión generada está bien definida si $x_0 > 0$.

(b) Probar la convergencia si $x_0 > 0$.

38 Se considera la función $f(x) = x^4 - 3x^2 + 75x - 10000$. Demostrar que la ecuación $f(x) = 0$ sólo tiene dos soluciones reales (una positiva y otra negativa). Determinar un intervalo de convergancia global del método de Newton hacia la raíz *negativa* de $f(x) = 0$. Calcular una apxoximación para esta raíz con un error menor o igual que 10^{-3}, seleccionando previamente un punto adecuado para inicializar el método de Newton.

39 En este ejercicio compararemos el (MAS) y el (MN). Sabemos que la ecuación homogénea (EH) $x^3 - 4x^2 + 10x - 10 = 0$ tiene una solución α que se encuentra en $[1, 2]$. Escribimos esta ecuación en forma de una (EPF) como sigue:

$$\text{(EPF)} \quad x = g(x) \quad \text{con} \quad g(x) = \frac{1}{10}(-x^3 + 4x^2 + 10).$$

(a) Demostrar que la sucesión x_k que genera el (MAS) asociado a esta (EPF) es globalmente convergente en $[1, 2]$ hacia α.

(b) Obtener una cota del error $|x_k - \alpha|$ en función del número de iteraciones k, de x_0 y de x_1. Tomando $x_0 = 1.5$, calcular el número de iteraciones que hacen falta para asegurar un error menor o igual que 10^{-4} en la aproximación.

(c) Consideramos ahora (EH). Escribir el método de Newton y probar que el intervalo $[\frac{4}{3}, 2]$ es de convergencia global para dicho método.

(d) Elegir adecuadamente el punto x_0 para inicializar el (MN) y calcular las 3 primeras iteraciones.

(e) Comparar numéricamente los algoritmos.

40 Se considera la ecuación de punto fijo $x = g(x)$ con $g(x) = x = 3 - \dfrac{2}{x}$, escrita también de manera equivalente como ecuación homogénea $f(x) = 0$, siendo $f(x) = x^2 - 3x + 2$, cuyas soluciones son $\alpha_1 = 1$ y $\alpha_2 = 2$.

(a) Probar que una de las dos soluciones es un punto repulsivo para la ecuación $x = g(x)$.

(b) Demostrar la convergencia global del (MN) en el intervalo $J = [0, 1.25]$. Comprobar que la convergencia en dicho intervalo es exactamente cuadrática.

(c) Sea $\{x_k\}_{k\geq 0}$ la sucesión generada por el (MN) tomando $x_0 = 0$. Estimar el error $|x_{k+1} - 1|$ en función de $|x_{k+1} - x_k|$, explicitando el valor de la constante. Utilizando esta estimación, obtener una aproximación con un error menor que 0.2.

41 Se considera la ecuación homogénea

$$(EH) \qquad e^x - 3\,x = 0.$$

(a) Demostrar que (EH) posee exactamente dos soluciones $\alpha_1 < \alpha_2$ y separarlas.

(b) Se escribe (EH) en forma de dos ecuaciones de punto fijo equivalentes

$$(EPF)_1 \quad x = g_1(x) \quad \text{con } g_1(x) = \frac{e^x}{3}, \qquad (EPF)_2 \quad x = g_2(x) \quad \text{con } g_2(x) = \log 3x.$$

(c) Comprobar si $(EPF)_1$ y $(EPF)_2$ definen métodos de aproximaciones sucesivas convergentes localmente a las soluciones de la ecuación. **Indicación:** Utilizar el teorema de convergencia local del (MAS).

(d) Escribir el método de Newton para aproximar las soluciones de (EH). Determinar un intervalo de convergencia global de (MN) hacia la mayor raíz α_2. Calcular una apoximación de α_2 con un error menor que 0.001.

42 Se considera la función

$$f(x) = \frac{x^2}{x+1} - 1.$$

(a) Determinar el número de soluciones de la ecuación no lineal homogénea (EH) $f(x) = 0$ y separarlas.

(b) Escribir el método de Newton (MN) asociado a (EH) en el intervalo $[\frac{1}{2}, 2]$. Estudiar la convergencia global del (MN) en dicho intervalo.

(c) Hallar el número de iteraciones necesarias para obtener un error menor que 2^{-3} en la raíz de (EH) en el intervalo $[\frac{1}{2}, 2]$.

(d) Probar que NO se tiene la convergencia global del (MN) en el intervalo $[0, 2]$.

(e) Dada la ecuación de punto fijo

$$(EPF) \quad x = g(x), \quad \text{siendo } g(x) = \sqrt{x+1},$$

probar que si $x_0 = 0$ hay convergencia de la sucesión del correspondiente (MAS) asociado a la (EPF).

43 Sea $x > 0$. Se considera la ecuación de punto fijo (EPF) $x = g(x)$ con $g(x) = \dfrac{4}{x^2} + 2$.

(a) Determinar el número de soluciones de la ecuación $x = g(x)$ y separarlas en intervalos de extremos enteros consecutivos.

(b) Encontrar un intervalo $[a, b]$ en el cual podamos asegurar que el método de aproximaciones sucesivas (MAS) asociado converja globalmente a la raíz más pequeña. Escribir la expresión general del (MAS) en dicho caso.

(c) Para el intervalo del apartado anterior, hallar el número de iteraciones necesarias para obtener un error menor que 10^{-3} en la aproximación de la raíz.

(d) Deducir los valores de a y b para que la ecuación $x = \widehat{g}(x) = \dfrac{ax+b}{x^2} + 2$, $x > 0$ tenga a $\alpha = 1$ como solución y la sucesión generada por el (MAS) asociado a dicha ecuación tenga orden de convergencia al menos cuadrático.

Se considera la ecuación de punto fijo

$$(EPF) \qquad x = 3 - \frac{2}{x} + \frac{2}{x^2},$$

de la que sabemos que tiene una única solución α en el intervalo $(2, 3)$. Se pide:

44 (a) Demostrar que el (MAS) aplicado a (EPF) es globalmente convergente en el intervalo $[2, 3]$.

(b) Demostrar de manera razonada, que aplicando el (MAS) para la resolución de (EPF) a partir de cualquier punto $x_0 \in [2, 3]$, el error $|x_3 - \alpha|$ que se comete en la tercera iteración es menor que 0.5×10^{-3}.

45 Se considera la ecuación

$$(EH) \qquad x - 1 + \log(x^2 + 1) = 0.$$

Se pide:

(a) Demostrar que (EH) posee una única solución $\alpha \in \mathbb{R}$.

(b) Comprobar que el intervalo $[0, 1]$ es de convergencia global para el Método de Newton aplicado a la ecuación (EH).

(c) Escribir (MN) aplicado a (EH) en el intervalo $[0, 1]$, y obtener una cota a priori de $|x_3 - \alpha|$ en función de $|x_1 - x_0|$.

(d) Comparar las cotas a priori que se obtienen para $|x_3 - \alpha|$, si se toma $x_0 = 1$, y si se toma $x_0 = 0.5$.