CÁLCULO NUMÉRICO I (Tema 4)

46 Resolver mediante el método de Gauss los siguientes sistemas de ecuaciones.

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcrcr} & & 2x_2 & & & + & x_4 & = & 0 \\ 2x_1 & + & 2x_2 & + & 3x_3 & + & 2x_4 & = & -2 \\ 4x_1 & - & 3x_2 & & & + & x_4 & = & -7 \\ 6x_1 & + & x_2 & - & 6x_3 & - & 5x_4 & = & 6. \end{array}\right. \qquad \left\{\begin{array}{rcrcrcr} x_1 & + & x_2 & - & x_3 & = & 3 \\ -x_1 & + & x_2 & + & x_3 & = & 2 \\ x_1 & + & 3x_2 & - & x_3 & = & 8 \end{array}\right.$$

47 Dado el sistema

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcr} 2x_1 & + & 4x_2 & - & x_3 & = & -5 \\ x_1 & + & x_2 & - & 3x_3 & = & -9 \\ 4x_1 & + & x_2 & + & 2x_3 & = & 9 \end{array}\right.$$

Resolverlo mediante:

(a) Método de Gauss.

(b) Método de Gauss con pivoteo parcial.

(c) Método de Gauss con pivoteo total.

48 Se considera el sistema de ecuaciones

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcr} 2x_1 & - & 2x_2 & + & 5x_3 & = & 13 \\ 2x_1 & + & 3x_2 & + & 4x_3 & = & 20 \\ 3x_1 & - & x_2 & + & 3x_3 & = & 10. \end{array}\right.$$

(a) Resolverlo mediante el método de Gauss.

(b) Resolverlo por el método de Gauss-Jordan.

49 Mediante el método de Gauss-Jordan, encontrar, si es posible, las inversas de las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 & 2 \\ 2 & -1 & 3 & 1 \\ 3 & -1 & 4 & 3 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 1 & -2 & 1 \\ 5 & -2 & -3 \end{pmatrix}$$

50 Aplicando el método de Gauss, calcular el valor del determinante

$$\begin{vmatrix} 1 & 4 & -2 & 1 \\ -1 & 2 & -1 & 1 \\ 3 & 3 & 0 & 4 \\ 4 & -4 & 2 & 3 \end{vmatrix}$$

51 Encontrar la factorización de Crout de la matriz

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 4 & -6 & 0 \\ -5 & 6 & 1 \end{pmatrix}$$

52 Aplicando el método de Crout, resolver el siguiente sistema de ecuaciones

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcr} 2x_1 & + & 3x_2 & - & x_3 & = & 4 \\ x_1 & - & x_2 & + & 3x_3 & = & -4 \\ & & x_2 & - & x_3 & = & 2 \end{array}\right.$$

53 Se considera el sistema lineal (SL) $Ax = b$, con

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad b = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

(a) Utilizando el teorema de la factorización LU, comprobar que es posible realizar la factorización LU de la matriz A. Resolver el sistema lineal (SL) por el método LU de Doolittle.

(b) Usando los cálculos del apartado anterior obtener la factorización de Crout de la matriz A.

54 Se consideran

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -3 \\ 1 & \alpha & 1 \\ 5 & 2 & -3 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad b = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ 6 \end{pmatrix}.$$

(a) ¿Para qué valores de α es posible aplicar el teorema de la factorización LU?

(b) Para $\alpha = 2$, resolver el sistema lineal $Ax = B$ por el método LU de Doolittle.

(c) Usando los cálculos del apartado anterior obtener la factorización de Crout de la matriz A.

55 Descomponer en el producto de dos matrices triangulares, una inferior y otra superior (LU), aplicando el método de Doolittle, la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

56 Aplicar el método de Doolittle para resolver el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\left\{ \begin{array}{rcrcrcrcl} -x_1 & + & 2x_2 & - & x_3 & & & = & 0 \\ 2x_1 & - & x_2 & & & & & = & 1 \\ & & x_2 & + & 2x_3 & - & x_4 & = & 0 \\ & & & - & x_3 & + & 2x_4 & = & 1 \end{array} \right.$$

57 Sea A la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & -2 & 3 \\ -1 & 4 & 1 \end{pmatrix}.$$

(a) Comprobar (haciendo directamente los cálculos) que la matriz A no admite una factorización LU.

(b) Comprobar que permutando filas en A se puede obtener una matriz que sí admite una factorización LU.

58 Demostrar que toda matriz de la forma $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ a & b \end{pmatrix}$ tiene una factorización LU de Crout. ¿Existe también una factorización LU de Doolittle?

59 Efectuar la factorización LU de la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 5 \end{pmatrix}$$

60 Determinar la factorización LU, con L una matriz triangular inferior con 2 en su diagonal principal, de la matriz

$$\begin{pmatrix} 6 & 10 & 0 \\ 12 & 26 & 4 \\ 0 & 9 & 12 \end{pmatrix}$$

61 Estudiar los valores de α y β para que las siguientes matrices

$$A = \begin{pmatrix} \alpha & 1 \\ \beta & -3 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 7 & 2 & 0 \\ 3 & 5 & -1 \\ 0 & 5 & -6 \end{pmatrix}, \qquad C = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 4 & 2 \\ 0 & 2 & \alpha \end{pmatrix}$$

(a) sean de diagonal estrictamente dominante, (b) sean definidas positivas.

62 Consideremos la matriz A y el vector b, dados por

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & 1+\alpha^2 & -1 & 2\alpha \\ 1 & -1 & 5 & 2 \\ 0 & 2\alpha & 2 & 6 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad b = \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \\ 8 \\ 2/\alpha \end{pmatrix} \quad \text{con} \quad \alpha \neq 0 \,\text{un parámetro.}$$

(a) Resolver el sistema $Au = b$ por el Método de Gauss, obteniendo la solución en función del parámetro α.

(b) ¿Para qué valores de α es posible la factorización LU de Doolittle de la matriz A? ¿Y la factorización de Cholesky?

(c) Para los valores de α obtenidos en el apartado (b) y utilizando el apartado (a), obtener la factorización LU de Doolittle de la matriz A.

63 Se consideran

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -2 & 1 \\ -2 & 10 & 5/2 \\ 1 & 5/2 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad b = \begin{pmatrix} 2 \\ 8 \\ 7/2 \end{pmatrix}.$$

(a) Aplicando el método de Gauss, calcular el determinante de A.

(b) Probar que se puede escribir $A = BB^t$, con $B = (b_{ij})$ triangular inferior. Suponiendo que $b_{ii} > 0$ para todo i, resolver el sistema $Ax = b$ mediante el método de Cholesky.

(c) Usando los cálculos del apartado anterior obtener la factorización LU de Doolittle de la matriz A a partir de la factorización de Cholesky.

64 Sean la matriz A y el vector b, dados por

$$A = \begin{pmatrix} a & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 4/a & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & a & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 4/a & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & a \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad b = \begin{pmatrix} 3/2 \\ -1 \\ -3 \\ 11/2 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{con} \quad a \neq 0.$$

(a) ¿Para qué valores de a es posible la factorización LU de la matriz A? ¿Y la factorización de Cholesky?

(b) ¿Para qué valores de a la matriz A es de diagonal estrictamente dominante?

(c) Obtener la factorización LU de Crout de la matriz A. A partir de ella obtener la factorización LU de Doolittle de A.

(d) En el caso particular $a = 1$, resolver el sistema $Au = b$ por el Método de Gauss con estrategia de pivote parcial.

65 Sean la matriz A y el vector b, dados por

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -2 \\ -2 & \alpha & 6 \\ -1 & 5 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad b = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

(a) Resolver el sistema $Au = b$ por el Método de Gauss.

(b) Usando los cálculos realizados en el apartado (a), ¿para qué valores de α es posible la factorización LU de la matriz A? ¿ Y la factorización de Cholesky?

(c) En el caso $\alpha = 1$ y realizando previamente, si es necesario, permutaciones de filas, obtener la factorización LU de Doolittle de la matriz A o de su permutada.

66 Consideremos la matriz de $\mathbb{R}^{4\times 4}$

$$A = \begin{pmatrix} a & 1 & 0 & 0 \\ 1 & a & 1 & 0 \\ 0 & 1 & a & 1 \\ 0 & 0 & 1 & a \end{pmatrix}$$

(a) Demostrar que la matriz A es definida positiva para $a \geq 2$.

(b) Si $a \geq 2$, realizar los cálculos para determinar la factorización de Cholesky $A = LL^T$, siendo

$$L = \begin{pmatrix} \alpha_1 & 0 & 0 & 0 \\ \beta_2 & \alpha_2 & 0 & 0 \\ 0 & \beta_3 & \alpha_3 & 0 \\ 0 & 0 & \beta_4 & \alpha_4 \end{pmatrix}$$

67 Consideramos la matriz A y el vector z, dados por

$$A = \begin{pmatrix} a & 0 & -1 & 0 \\ 0 & a & 0 & -1 \\ -1 & 0 & b & 0 \\ 0 & -1 & 0 & b \end{pmatrix} \quad \text{con} \quad a, b > 0 \qquad \text{y} \qquad z = \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ 3 \\ \alpha \end{pmatrix} \quad \text{con} \quad \alpha \in \mathbb{R}.$$

(a) Dar una condición suficiente sobre los valores de a y b para que:

(i) A sea simétrica, (ii) A sea definida positiva, (iii) A sea de diagonal estrictamente dominante.

(b) Obtener la factorización de Cholesky de la matriz A en el caso $a = 4$ y $b = 5/2$.

(c) Resolver el sistema lineal $Au = z$ para cada $\alpha \in \mathbb{R}$, siendo A la matriz del apartado anterior.

68 Obtener las factorizaciones de Doolittle, Crout y Cholesky de la siguiente matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 60 & 30 & 20 \\ 30 & 20 & 15 \\ 20 & 15 & 12 \end{pmatrix}$$

69 Resolver aplicando el método de Cholesky, los siguientes sistemas:

$$\left\{ \begin{array}{rcrcrcr} x_1 & - & x_2 & + & x_3 & = & 1 \\ -x_1 & + & 5x_2 & + & x_3 & = & 1 \\ x_1 & + & x_2 & + & 3x_3 & = & 0 \end{array} \right. \qquad \left\{ \begin{array}{rcrcrcrcr} x_1 & + & 2x_2 & - & x_3 & & & = & 2 \\ 2x_1 & + & 5x_2 & + & x_3 & + & x_4 & = & 6 \\ -x_1 & + & x_2 & + & 14x_3 & + & 5x_4 & = & 6 \\ & & x_2 & + & 5x_3 & + & 3x_4 & = & 2 \end{array} \right.$$

70 Sean la matriz A y el vector b, dados por

$$A = \begin{pmatrix} a & 0 & b & 0 \\ 0 & a & 0 & b \\ b & 0 & a & 0 \\ 0 & b & 0 & a \end{pmatrix} \quad \text{con} \quad a, b \in \mathbb{R} \qquad \text{y} \qquad b = \begin{pmatrix} -1/3 \\ -2 \\ 5/6 \\ -1/4 \end{pmatrix}.$$

(a) ¿Para qué valores de a y b es posible realizar la factorización LU de la matriz A? ¿Y la de Cholesky?

(b) Sean $a = 4/9$ y $b = -1/3$.

i. Obtener la factorización LU de Crout de la matriz A. A partir de ella, obtener la factorización de Cholesky de A.

ii. Resolver el sistema lineal $Au = b$ a partir de la factorización LU de Crout.

71 Sean A y b dados por

$$A = \begin{pmatrix} 2+\alpha & -1 & -\alpha \\ -1 & 3 & 1 \\ -\alpha & 1 & 4\alpha \end{pmatrix}, \quad \alpha \in \mathbb{R}; \qquad b = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

(a) Determinar para qué valores de α la matriz A admite factorización de Cholesky.

(b) Para $\alpha = 1$ y utilizando el método de Cholesky, resolver el sistema $Ax = b$.

72 Consideremos las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & 5 & -1 & 4 \\ 1 & -1 & 5 & 2 \\ 0 & 4 & 2 & 6 \end{pmatrix}, \qquad b = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Se pide:
(a) Calcular el determinante de A utilizando el método de Gauss.
(b) Obtener la factorización de Doolittle de la matriz A, y a partir de ésta la factorización de Crout de A.
(c) Demostrar que A admite factorización de Cholesky.
(d) Hallar la factorización de Cholesky de A a partir de la de Doolittle calculada en el apartado (b).
(e) Resolver el sistema $Au = b$, usando para ello una de las factorizaciones anteriores.