CÁLCULO NUMÉRICO I (Tema 3)

73 En un experimento, la cantidad de calor desprendida en relación con el tiempo, fue la siguiente:
A las 2 horas del comienzo, 3 kilocalorías (Kcal), a las 4 horas 1 Kcal y a las 6 horas 2 Kcal.

a) Calcular el polinomio que interpola estos datos, aplicando el método de Lagrange.

b) Calcular el polinomio que interpola estos datos, aplicando el método de Newton.

c) Calcular una estimación de la cantidad de calor que se desprenderá a las 3 y a las 10 horas del comienzo del experimento. ¿Qué resultado es más fiable? ¿Por qué?

74 La temperatura de cierto proceso natural es función del tiempo. Con intervalos iguales de tiempo se ha tomado la temperatura, obteniéndose la siguiente tabla:

tiempo	2	4	6	8	10
temperatura	5	1	2	4	3

Hallar una curva que aproxime la función y pase por estos puntos.

75 Empíricamente se han obtenido los siguientes valores de $y = f(x)$:

x	0	2	4	6
y	0	1	4	2

Hallar el polinomio de interpolación que se ajuste a estos datos. Si a la tabla anterior se añade una nueva observación:

x	8
y	1

obtener el nuevo polinomio de interpolación correspondiente a todos los datos. Hallar el valor que, aproximadamente, debería corresponder a $x = 7$ mediante ambos polinomios ¿Cúal de los dos valores obtenidos crees que se debería tomar como mejor aproximación de $f(7)$? ¿Por qué?

76 Se dispone de la siguiente tabla:

x	0.4	0.5	0.7	0.8
$\log x$	-0.916291	-0.693147	-0.356675	-0.223144

Estimar el valor de log(0.6) utilizando el polinomio de interpolación, dando una cota del error cometido.

77 Hallar el polinomio de menor grado posible que en los puntos de abscisas 1, 3, 4 y 7 tome los valores 0, 1, 2 y 4. Si añadimos el par (8, 5) ¿cómo podemos calcular el nuevo polinomio de interpolación?

78 Hallar un valor aproximado de $\sqrt{3}$ utilizando el polinomio de interpolación de la función $f(x) = 3^x$ en los puntos $x_0 = -2$, $x_1 = -1$, $x_2 = 0$ y $x_3 = 1$. Dar una estimación del error cometido.

79 Los datos correspondientes al censo de una población (en miles de habitantes) se recogen en la siguiente tabla:

Año	1950	1960	1970	1980	1990	2000
Población	123.5	131.2	150.7	179.3	203.2	226.5

Estimar la población que había en 1965 ¿Se podría estimar la población correspondiente al año 2010?

80 Sean $\{x_0, x_1, \cdots, x_n\} \subset \mathbb{R}$, $n+1$ puntos distintos y $f(x) = x^{n+1}$. Calcular el polinomio de interpolación de f en los puntos $\{x_0, x_1, \cdots, x_n\}$ utilizando la fórmula del error y determinar el término independiente de dicho polinomio.

81 Sean $a > 0$, $\{-x_n, -x_{n-1}, \cdots, x_1, 0, x_1, \cdots, x_{n-1}, x_n\} \subset [-a, a]$ y P_{2n} el polinomio de interpolación de una función $f : [-a, a] \to \mathbb{R}$ en los puntos anteriores. Demostrar los siguientes resultados:

a) Si f es una función par (respectivamente, impar) entonces P_{2n} es par (respectivamente, impar).

b) Si f es una función par existe Q_n polinomio de grado menor o igual que n tal que $P_{2n}(x) = Q_n(x^2)$ ¿Quién es Q_n? ¿Qué utilidad tiene esta expresión?

82 Considerando la función $f(x) = \dfrac{1}{x}$, demostrar que

$$f[x_0, x_1, \cdots, x_n] = (-1)^n \prod_{i=0}^{n} \frac{1}{x_i}.$$

83 Obtener un valor aproximado de arctan(0.6) utilizando las fórmulas de Simpson y del punto medio, y la fórmula del trapecio compuesta en 4 subintervalos. Dar una estimación del error cometido en cada caso.

84 Hallar un valor aproximado de log(7) utilizando las fórmulas de Simpson y del trapecio. Dar una estimación del error cometido en cada caso.

85 Calcular un valor aproximado de arc sen(0.5) utilizando las fórmulas del punto medio y del trapecio. Dar una estimación del error cometido en cada caso.

86 Calcular un valor aproximado de la integral $\displaystyle\int_0^2 \sqrt{1+x^2}\,dx$ aplicando las fórmulas de los trapecios, del punto medio y de Simpson. Comparar con el valor exacto.

87 Obtener un valor aproximado de la integral $\displaystyle\int_0^1 e^{-x^2}\,dx$ aplicando las fórmulas vistas en teoría. Dar, en cada caso, una estimación del error cometido.

88 Determinar el polinomio de interpolación de la función $f(x) = \cos(\pi x)$ en los puntos $x_0 = 0$, $x_1 = 1/3$, $x_2 = 2/3$ y $x_3 = 1$. Utilizar dicho polinomio para calcular un valor aproximado de la integral

$$\int_0^1 \cos(\pi x)\,dx.$$

Comparar con el valor exacto.

89 De una función f sabemos que $f(2) = 0.25$, $f(2.5) = 1.32$ y $f(3) = 2.40$. Calcular un valor aproximado de $\displaystyle\int_2^3 f(x)\,dx$, usando

a) Interpolación polinómica.

b) La fórmula del punto medio.

c) La fórmula de los trapecios compuesta para dos subintervalos.

d) La fórmula de Simpson.

Razona en cuál de los cuatro casos es mejor la aproximación.

90 Se considera la fórmula de integración numérica

$$\int_0^1 f(x)\,dx \simeq A\,(f(x_0) + f(x_1)).$$

Hallar el valor de A, x_0 y x_1 para que la fórmula sea exacta para polinomios del mayor grado posible ¿Cuál es éste?

91 Se considera la fórmula de integración numérica

$$\int_1^3 f(x)\,dx \simeq A\,f(0) + B\,f(2) + C\,f(4).$$

Determinar el valor de A, B y C para que la fórmula sea exacta para polinomios del mayor grado posible ¿Cuál es éste?

92 Suponiendo que los puntos $\{x_0, x_1, \cdots, x_{n-1}, x_n\} \subset [-a, a]$, con n par, están distribuidos simétricamente respecto del origen y que la fórmula de integración

$$\int_{-a}^{a} f(x)\,dx \simeq \sum_{i=0}^{n} c_i\,f(x_i), \quad \text{con } c_i \in \mathbb{R};$$

es exacta para los polinomios de grado menor o igual que n, demostrar que también es exacta para polinomios de grado $n+1$.

93 Aplicar la regla del punto medio compuesta y de los trapecios compuesta, a la integral

$$\int_1^x \frac{1}{t}\, dt,$$

para obtener una aproximación de logaritmo neperiano de 2, determinando, en cada caso, el número m de subintervalos necesario para que el error cometido en esa aproximación sea inferior a 10^{-3}.

94 Hallar el valor de la aproximación que se obtiene al calcular

$$\int_{-4}^4 |x - 2|^3 (1 - \operatorname{sen}(\pi x))\, dx,$$

mediante la regla del punto medio compuesta para cuatro subintervalos.

95 De una función f se conocen los siguientes valores: $f(-2) = -10, f(-1) = 0, f(0) = 2$ y $f(1) = 2$.

a) Hallar el polinomio que interpola a f en dichos nodos.

b) ¿Cuál sería el nuevo polinomio si conociéramos además que $f(2) = 6$?

c) Usar dichos polinomios para aproximar el valor de $\int_{-2}^2 f(x)\, \mathrm{d}x$ y comparar con el valor que se obtendría aplicando la fórmula de Simpson y la fórmula del trapecio compuesta en 3 subintervalos.

96 Para la función $f(x) = x - 1 - \log(2x)$, aproximar el valor de $\displaystyle\int_1^3 f(x)\, dx$ aplicando la fórmula de Simpson y la fórmula del punto medio compuesta en 3 subintervalos ¿Qué valor es más preciso? ¿Por qué?