Tema 1

Introducción al Cálculo Numérico

1.1. Definiciones. Métodos constructivos y no constructivos

El Cálculo Numérico o Análisis Numérico es la rama del Análisis Matemático que estudia los métodos constructivos para la resolución de problemas matemáticos.

Un método constructivo es cualquier procedimiento que permite obtener en un número finito de pasos, bien sea de manera exacta (métodos directos) bien de forma aproximada (métodos iterados), una solución de un determinado problema matemático. En contraposición con esta noción, se denomina método no constructivo a todo aquel procedimiento que permita afirmar la existencia de la o las soluciones de un determinado problema matemático, sin que establezca la forma de obtenerlas, exacta o aproximadamente, de manera efectiva.

Un ejemplo de método no constructivo, tal vez el primero de la Historia, lo constituye la demostración que hizo Euclides de que existen infinitos números naturales primos. Supongamos que a_1,...,a_n son n números primos, distintos entre sí, si probamos que existe otro número primo distinto de cualquiera de estos n números primos, habremos demostrado el resultado. Para ello, consideremos $N = 1 + \prod_{k=1}^{n} a_k$. Si N es primo, ya tenemos un número primo estrictamente mayor que cualquiera de los n dados. Si N no es primo, entonces forzosamente tiene un factor primo distinto de los n dados.

Observamos que en el ejemplo precedente, no hemos indicado la forma en que dados los n números primos, a_1,...,a_n, podemos encontrar otro, ya que si N no es primo (un ejemplo de este caso: $2 \times 3 \times 5 \times 7 \times 11 \times 13 + 1 = 30031 = 59 \times 509$), no hemos dicho cómo descomponerlo en factores primos.

Para aplicar en un mismo ejemplo los dos tipos de métodos, constructivos y no constructivos, consideremos el problema elemental siguiente. Sean a, b, c tres números reales tales que $a \neq 0$ y $b^2 - 4ac > 0$. Se pide justificar que en tal caso, la ecuación de segundo grado $ax^2+bx+c=0$, tiene exactamente dos soluciones reales distintas.

Una manera, en este caso no constructiva, de demostrar lo anterior, es usar el teorema de Bolzano. Recordemos:

Teorema 1.1 *Sean $[\alpha,\beta]\subset\mathbb{R}$ un intervalo cerrado y $f:[\alpha,\beta]\to\mathbb{R}$ una función continua tal que $f(\alpha)$ y $f(\beta)$ tienen signos distintos, es decir, $f(\alpha)f(\beta)<0$. Entonces, existe al menos un punto $x\in(\alpha,\beta)$ tal que $f(x)=0$.*

Supongamos sin pérdida de generalidad que $a=1$ (en caso contrario se divide por a la ecuación $ax^2+bx+c=0$). Consideremos la función continua $f(x)=x^2+bx+c$. Es inmediato ver que $f'(x)=2x+b$ se anula en el punto $x=-b/2$, siendo $f'(x)<0$ en el intervalo $(-\infty,-b/2)$, y $f'(x)>0$ en el intervalo $(-b/2,+\infty)$. En consecuencia, $f(x)$ es estrictamente decreciente en $(-\infty,-b/2)$, y estrictamente creciente en el intervalo $(-b/2,+\infty)$.

Por otra parte,

$$f(\frac{-b}{2})=\frac{b^2}{4}-\frac{b^2}{2}+c=-\frac{b^2}{4}+c=\frac{-b^2+4c}{4}<0,$$

y

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=\lim_{x\to+\infty}[x(x+b)+c]=+\infty.$$

En consecuencia existe un $\beta_1>-b/2$ tal que $f(\beta_1)>0$, y por tanto, por el teorema de Bolzano, existe un $x_1\in(-b/2,+\infty)$ tal que $f(x_1)=0$. Además, teniendo en cuenta que f es estrictamente creciente en el intervalo $(-b/2,+\infty)$, podemos afirmar que x_1 es la única solución de la ecuación $x^2+bx+c=0$ en dicho intervalo.

Finalmente,

$$\lim_{x\to-\infty}f(x)=\lim_{x\to-\infty}[x(x+b)+c]=+\infty,$$

y en consecuencia, existe un $\beta_2<-b/2$ tal que $f(\beta_2)>0$, con lo que, razonando como en el caso anterior, podemos concluir la existencia de un único punto $x_2\in(-\infty,-b/2)$ que es solución de la ecuación $x^2+bx+c=0$ en este intervalo.

Así pues, hemos demostrado, de manera no constructiva, en el caso $a\neq0$, $b^2-4ac>0$, la existencia de dos únicas soluciones reales de la ecuación $ax^2+bx+c=0$.

Otra forma, bien conocida, de resolver el problema precedente consiste en dividir la ecuación por a, y a continuación sumar y restar $b^2/4a^2$, con lo que la ecuación se tranforma en la ecuación

$$x^2+\frac{b}{a}x+\frac{b^2}{4a^2}-\frac{b^2}{4a^2}+\frac{c}{a}=0,$$

es decir,

$$\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2}{4a^2}+\frac{c}{a}=0,$$

o lo que es lo mismo,

$$\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2=\frac{b^2-4ac}{4a^2},$$

con lo que se obtiene

$$x+\frac{b}{2a}=\pm\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a},$$

y por consiguiente

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}, \tag{1.1}$$

con lo cual hemos demostrado, esta vez de manera constructiva, la existencia de dos soluciones distintas de la ecuación de segundo grado dada.

La fórmula (1.1) constituye lo que se denomina un algoritmo para la resolución de la ecuación de segundo grado. De manera general, un algoritmo es un conjunto de instrucciones para efectuar operaciones matemáticas diseñadas para obtener de manera exacta o aproximada la solución de un problema. Si el procedimiento exige un número finito de pasos, se dice que el algoritmo es finito; en caso contrario, se dice que el algoritmo es infinito.

Ejemplos de algoritmos son los siguientes:

a) Los bien conocidos de las operaciones algebraicas.

b) El de la obtención de la raíz cuadrada de un número positivo. Este es un ejemplo de un algoritmo, en general, infinito. Así, por ejemplo, la determinación de las cifras decimales de $\sqrt{2}$ es un algoritmo constructivo infinito (se recuerda que $\sqrt{2}$ es irracional).

c) Otros algoritmos finitos son el que se aplica para conocer si un número natural es o no primo, o el algoritmo de Euclides para determinar el m.c.d. de dos números naturales.

1.2. Reseña histórica

Con anterioridad al siglo XIX, la mayor parte de los trabajos en Matemáticas consistían en la búsqueda de soluciones de problemas concretos. De esta forma, se obtuvieron éxitos espectaculares, como la predicción de eclipses de sol y de luna, la aparición de cometas en el firmamento, etc...; dichos resultados se lograban calculando de manera aproximada las soluciones de problemas matemáticos que eran modelos de los correspondientes fenómenos.

La figura culminante de este modo de proceder es L. Euler (1707-1783). Sus obras completas, más de setenta volúmenes, están llenas de algoritmos y fórmulas, siendo de destacar el uso frecuente que hace de los desarrollos en serie.

En el siglo XIX, decrece la fe en la utilidad numérica de los algoritmos, debido por una parte a que se abre un periodo de construcción lógica en que la preocupación esencial es fundamentar los progresos realizados, por otra parte porque la complejidad de los problemas a tratar hace inviables los métodos constructivos, y también porque los métodos constructivos que se logran desarrollar son inaplicables por la cantidad de operaciones que exige su puesta en práctica.

De todas maneras, en los siglos XVIII y XIX se abordan problemas como la resolución de ecuaciones no lineales (método de Newton), la resolución de sistemas de ecuaciones lineales (método de Gauss), y se elaboran algunas técnicas de aproximación de funciones (Tchebycheff). A principios del siglo XX se desarrollaron los primeros métodos para la resolución aproximada de ecuaciones diferenciales ordinarias.

El avance decisivo en el campo de los métodos numéricos se produce con el desarrollo de las calculadoras electrónicas. La aparición del ordenador supuso un cambio radical en la forma de abordar muchos problemas, y se pasó a la formalización de métodos conocidos más o menos empíricamente. El Cálculo Numérico se convirtió en Análisis Numérico, una rama de las Matemáticas con entidad propia desde los años 50 del siglo pasado.

1.3. Ejemplos de problemas del Cálculo Numérico

Como ejemplos de problemas del Cálculo Numérico, citemos los siguientes:

i) La resolución exacta o aproximada de grandes sistemas de ecuaciones lineales.

Se trata de la resolución de sistemas de ecuaciones de la forma

$$\left\{\begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1N}x_N = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2N}x_N = b_2, \\ ...., \\ ...., \\ a_{M1}x_1 + a_{M2}x_2 + ... + a_{MN}x_N = b_M, \end{array}\right. \tag{3.2}$$

siendo a_{ij} y b_i, para $1 \leq i \leq M$, $1 \leq j \leq N$, números reales dados, y $x_j \in \mathbb{R}$, $1 \leq j \leq N$, las N incógnitas.

La formulación del sistema lineal (3.2) se puede hacer de forma más compacta. Para ello, se introduce la notación vectorial, denotando en particular a los elementos de $\mathbb{R}^N$ y $\mathbb{R}^M$ como vectores columna, es decir, como matrices $N \times 1$ y $M \times 1$ respectivamente. Denotemos

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_N \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_M \end{pmatrix}, \tag{3.3}$$

y sea A la matriz $M \times N$ de término general a_{ij}, es decir,

$$A = (a_{ij})_{1 \leq i \leq M, 1 \leq j \leq N}$$

De esta forma, el sistema lineal (3.2) se escribe

$$Ax = b \tag{3.4}$$

Este tipo de sistemas se presentan con gran frecuencia en las aplicaciones (por ejemplo en el estudio de circuitos eléctricos, ver [1]), siendo en general $M \leq N$, es decir, el número de incógnitas suele ser igual o superior al de ecuaciones.

En este Curso abordaremos algunos métodos básicos de resolución exacta de sistemas como (3.2) en el caso en que $M = N$, es decir, hay igual número de incógnitas que de ecuaciones. En este caso, la matriz A es cuadrada, y si, por simplificar, suponemos que su determinante $|A|$ es distinto de cero, entonces para cada $b \in \mathbb{R}^N$ dado existe una y sólo una solución, que se puede hallar, por ejemplo, por la fórmula de Cramer. Desde el punto de vista teórico, en este caso de $M = N$ y $|A| \neq 0$, el problema (3.2) queda resuelto. Pero, salvo cuando N es pequeño, la fórmula de Cramer es impracticable desde el punto de vista numérico.

En efecto, denotemos por k_N al número de operaciones algebraicas que hace falta hacer para calcular el determinante de una matriz $N \times N$ de números reales. Evidentemente,

$$k_2 = 3,$$

y por otra parte, para todo $N > 2$, si $A = (a_{ij})_{1 \leq i,j \leq N}$, sabemos que

$$|A| = a_{11}|A'_{11}| - a_{12}|A'_{12}| + ... + (-1)^{N+1} a_{1N}|A'_{1N}|,$$

siendo A'_{1j} la matriz $(N-1) \times (N-1)$ obtenida eliminando de A la primera fila y la columna j-ésima. Por ello, es sencillo ver que

$$k_N = (k_{N-1} + 1)N + N - 1 = Nk_{N-1} + 2N - 1.$$

Con estas fórmulas, se puede comprobar que, por ejemplo, $k_{10} = 9864099$, es decir el número de operaciones necesarias para calcular el determinante de una matriz 10×10

es, en principio, de casi diez millones. Por otra parte, si queremos resolver un sistema lineal de N ecuaciones y N incógnitas aplicando la regla de Cramer, el número C_N de operaciones necesarias vendrá dada por el cálculo de $N+1$ determinantes de matrices $N \times N$, y N divisiones, es decir,

$$C_N = (N+1)k_N + N,$$

con lo que, en particular $C_{10} = 108505099$, es decir, el numéro de operaciones necesarias para resolver un sistema de diez ecuaciones y diez incógnitas aplicando la regla de Cramer, resulta ser superior a los cien millones.

En el tema 3 de este Curso estudiaremos algunos métodos de resolución de sistemas de ecuaciones lineales que reducen radicalmente el número de operaciones necesarias respecto del obtenido con anterioridad.

ii) El cálculo aproximado de los autovalores y autovectores de una matriz cuadrada.

Otro problema de gran importancia que se presenta con frecuencia consiste en el cálculo de los autovalores y autovectores de una matriz cuadrada dada. De nuevo, salvo si el orden de la matriz es bajo, se hace imprescindible el desarrollo de métodos apróximados de cálculo de los citados autovalores y autovectores.

Este problema, aparte de su interés en Física, posee muchas aplicaciones de tipo teórico. Así por ejemplo, si A es una matriz de coeficientes reales, y suponemos por fijar ideas que A es simétrica $N \times N$, entonces es conocido que A puede ser escrita en la forma $A = PDP^{-1}$, siendo P una matriz $N \times N$ de determinante no nulo, y D una matriz $N \times N$ diagonal, es decir con todos los elementos que no pertenezcan a la diagonal nulos, y con los elementos de la diagonal siendo los autovalores de A, cada uno contado tantas veces como indique su multiplicidad. En el caso en que se ha podido obtener una tal descomposición de la matriz A, entonces las potencias sucesivas de la misma pueden ser calculadas fácilmente, teniendo en cuenta que

$$A^n = (PDP^{-1})^n = (PDP^{-1})(PDP^{-1})..^{n \text{ veces}}..(PDP^{-1}) = PD^nP^{-1},$$

y que el cálculo de D^n es inmediato por ser D diagonal.

Expresiones de este tipo son útiles por ejemplo para hallar el término general de una sucesión numérica definida mediante una fórmula de recurrencia lineal. Para ilustrar esta última afirmación, considérese la sucesión $\{x_n\}_{n \geq 0} \subset \mathbb{R}$ definida por el algoritmo

$$\begin{cases} x_0, x_1 \in \mathbb{R} \text{ dados}, \\ x_n = ax_{n-1} + bx_{n-2}, \quad n \geq 2, \end{cases}$$

con a y b números reales dados.

En tal caso, denotando $y_n = x_n$, $z_n = x_{n-1}$ para todo $n \geq 1$, obtenemos

$$x_n = ax_{n-1} + bx_{n-2} \Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} y_n = ay_{n-1} + bz_{n-1}, \\ z_n = y_{n-1} \end{array} \right.$$

$$\Longleftrightarrow \begin{pmatrix} y_n \\ z_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_{n-1} \\ z_{n-1} \end{pmatrix}$$

Denotando

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

tenemos por tanto,

$$\begin{pmatrix} y_n \\ z_n \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} y_{n-1} \\ z_{n-1} \end{pmatrix} = A^2 \begin{pmatrix} y_{n-2} \\ z_{n-2} \end{pmatrix} = ... = A^{n-1} \begin{pmatrix} y_1 \\ z_1 \end{pmatrix},$$

es decir,

$$\begin{pmatrix} x_n \\ x_{n-1} \end{pmatrix} = A^{n-1} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_0 \end{pmatrix},$$

para todo $n \geq 1$.

Como un sencillo ejercicio de aplicación de las consideraciones precedentes, se propone al alumno que demuestre que el término general de la sucesión de Fibonacci

$$\left\{ \begin{array}{l} x_0 = 1, x_1 = 1, \\ x_n = x_{n-1} + x_{n-2}, \quad n \geq 2, \end{array} \right.$$

viene dado por

$$x_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left[\left(\frac{3+\sqrt{5}}{2} \right) \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^{n-1} + \left(\frac{-3+\sqrt{5}}{2} \right) \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^{n-1} \right],$$

para todo $n \geq 1$.

iii) La resolución aproximada de ecuaciones y sistemas de ecuaciones no lineales.

Un problema que se presenta con gran frecuencia en las aplicaciones (ver [1] para un ejemplo en el problema de tiro oblicuo) consiste en, dada una función $f(x)$ real definida en un intervalo I de $\mathbb{R}$, hallar aquellos valores $x \in I$ tales que $f(x) = 0$. Si f no es de la forma $f(x) = ax + b$, por ejemplo si f es un polinomio de grado mayor que uno, entonces decimos que la ecuación $f(x) = 0$ es no lineal. En general, la resolución exacta de una tal ecuación no es posible, siendo necesario la elaboración de algoritmos para el cálculo aproximado de la o las soluciones. Problemas de este tipo serán tratados en el tema 2 de este Curso.

Más generalmente, se pueden considerar sistemas de ecuaciones no lineales de la forma

$$\left\{\begin{array}{l} f_1(x_1, x_2, ..., x_N) = 0, \\ f_2(x_1, x_2, ..., x_N) = 0, \\ ...., \\ ...., \\ f_M(x_1, x_2, ..., x_N) = 0, \end{array}\right. \tag{3.5}$$

siendo f_i, para $1 \leq i \leq M$, funciones reales dadas, de las variables independientes (las N incógnitas) $x_j \in \mathbb{R}$, $1 \leq j \leq N$.

iv) Los problemas de integración numérica.

Sea $f(x)$ una función real definida y continua en el intervalo cerrado $[a, b]$. La regla de Barrow permite calcular la integral definida $\int_a^b f(x)\,dx$, si conocemos una primitiva $F(x)$ de $f(x)$ en $[a, b]$, es decir, si $F'(x) = f(x)$ para todo $x \in [a, b]$, entonces

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a).$$

Ahora bien, un resultado debido Liouville afirma que, en general, el cálculo de una primitiva de una función continua en términos de combinaciones finitas de funciones elementales conocidas es algo imposible (tal es el caso por ejemplo para las funciones e^{x^2} y $(\operatorname{sen} x)/x$). Cuando tal cosa sucede, a efectos prácticos la regla de Barrow no es aplicable para el cálculo efectivo de la integral definida, siendo por ello necesario desarrollar métodos numéricos de cálculo aproximado de la misma.

A este respecto, obsérvese que el uso de tales métodos numéricos permite a veces calcular de manera aproximada el valor de una función en un punto. Así por ejemplo, como $\displaystyle\int_1^2 \frac{1}{x}\,dx = \log 2$, si conocemos un procedimiento de cálculo aproximado de la integral, el mismo nos permite hallar de manera aproximada el valor de $\log 2$.

v) La interpolación de funciones:
Dada una cantidad finita de datos (pares de valores), que pueden provenir por ejemplo de la experimentación, se plantea la necesidad de obtener una función "que pase

por" (interpole a) dichos pares de valores, para representar y manipular.

Un objetivo importante del Cálculo Nu´mérico es encontrar métodos efectivos para interpolar datos. Dentro de lo distintos tipos de interpolación, en este curso veremos una introducción a la interpolación mediante polinomios. En concreto veremos algunos métodos numéricos para resolver el siguiente problema:

Dados una serie de datos (x_i, y_i) con $i = 0, \ldots, n$ (con x_i distintos entre si), nos planteamos construir $p(x)$ polinomio de grado $\leq n$ que interpola dichos valores, es decir, tal que $p(x_i) = y_i$ para todo $i = 0, \ldots, n$.

vi) La resolución aproximada de ecuaciones diferenciales.

1.4. Tipos de errores

Un aspecto importante, aunque no uno de los objetivos fundamentales del Cálculo Numérico, es el estudio de los errores, es decir, la valoración de la precisión de los resultados de un cálculo concreto. Dicha precisión viene en general limitada por tres tipos de errores:

a) **Errores en la toma de los datos**

Esta fuente de errores está fuera del control del Cálculo Numérico. Podrán disminuir hasta cierto punto mejorando las mediciones, los métodos estadísticos, etc..., que proporcionen los datos. Este tipo de errores se conocen también con el nombre de ruidos.

b) **Errores de aproximación**

Se producen porque, aunque se realicen las operaciones de forma exacta, la solución de un problema se aproxima por una familia de problemas dependientes de un parámetro $h \to 0$ (o $N \to +\infty$). Así por ejemplo, si para calcular $e = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}$, se toma como valor aproximado $e_N = \sum_{k=0}^{N} \frac{1}{k!}$, se comete un error que viene dado por

$$e - e_N = \sum_{k=N+1}^{\infty} \frac{1}{k!}$$

Este tipo de errores recibe también otros nombres, como error de convergencia, error de truncamiento, error de discretización, etc..., dependiendo del problema de que se trate.

c) **Errores de redondeo**

Los ordenadores tienen una precisión limitada, generalmente entre ocho y dieciseis cifras significativas. De modo que cualquier número real que se maneje debe ser aproximado por uno de la máquina, cometiéndose en consecuencia con esta aproximación un error que se denomina error local de redondeo

Así por ejemplo, la multiplicación exacta de dos números de seis cifras, tiene doce cifras. Una calculadora que maneje 8 cifras significativas no comete en este caso errores en los datos, pero sí los comete al efectuar el producto.

Otro ejemplo lo proporciona el caso de un número irracional o racional periódico. En este caso, el número debe ser aproximado al introducirlo en la máquina, cometiéndose un error inicial de redondeo.

Ligados a estos tipos de errores hay tres conceptos importantes: convergencia, consistencia y estabilidad. Pasamos a describir estos conceptos, que ponen de manifiesto propiedades básicas que debe cumplir cualquier algoritmo numérico.

La propiedad de convergencia está ligada al error de aproximación, y consiste en que la solución del problema aproximado debe converger en algún sentido, cuando $h \to 0$ (o $N \to +\infty$), a la solución del problema (P) de partida.

La consistencia también está ligada al error de aproximación, y consiste en que la solución del problema (P) debe verificar la ecuación que define asintóticamente la de (P_h) si $h \to 0$ (ver [1], páginas 43-44).

La propiedad de estabilidad se relaciona con los errores de aproximación y de redondeo. Hay tres tipos de estabilidad:

- **La estabilidad del problema**:

  Significa que pequeños cambios en los datos producen pequeños cambios en la solución exacta del problema (P) de partida. De los problemas que no verifican esta propiedad, se dice que están mal condicionados (ill-conditioned).

  Un ejemplo de problema mal condicionado lo constituye el siguiente (Wilkinson). Consideremos la ecuación

$$(x+1)(x+2)....(x+19)(x+20) = 0,$$

  que evidentemente tiene por soluciones $\alpha_1 = -1$, $\alpha_2 = -2, ..., \alpha_{19} = -19$, $\alpha_{20} = -20$.

  La ecuación anterior también puede ser escrita

$$x^{20} + 210x^{19} + a_{18}x^{18} + ... + a_1 x + a_0 = 0,$$

  y se puede ver que si se cambia el coeficiente 210 que multiplica a x^{19}, por $210+2^{-23}$ ($2^{-23} \simeq 12 \times 10^{-8} = 0{,}00000012$), entonces las raíces mayores de la nueva ecuación varían tan sólo ligeramente respecto de las α_k correspondientes, pero, por ejemplo, la raíz α_{20} se convierte en $-20'8$, y las raíces α_{16} y α_{17} se convierten en un par de raíces imaginarias conjugadas: $-16'7 \pm 2'8i$. Un ejemplo más simple será visto en problemas.

- **La estabilidad del algoritmo**:

  Este tipo de estabilidad consiste en que, supuestas operaciones exactas, pequeños cambios en los datos deben producir cambios también pequeños en la solución que proporciona el algoritmo.

  Por ejemplo, si se considera que una sucesión de números viene dada por el algoritmo

$$\begin{cases} x_0 = A, \; x_1 = B, \\ x_n = 10{,}1 x_{n-1} - x_{n-2}, \quad \forall\, n \geq 2, \end{cases}$$

  no es difícil comprobar que la sucesión viene dada por

$$x_n = \frac{-0{,}1A + B}{9{,}9} 10^n + \frac{10A - B}{9{,}9} 0{,}1^n$$

  En consecuencia, la elección $A = 10$, $B = 1$, proporciona la sucesión $x_n = 10^{-n+1}$, que evidentemente converge a 0 si $n \to \infty$. Sin embargo, si se toma $A = 10$, $B = 1 + \varepsilon$, la correspondiente sucesión, por pequeño que sea ε, es divergente. Por tanto, este algoritmo no es estable.

- **La estabilidad numérica**:

  Esta propiedad significa que el algoritmo es inmune al efecto acumulativo de los errores de redondeo (esto es, si lo errores de redondeo son todos pequeños, el error acumulado al operar con el algoritmo es también pequeño). Es este un concepto cualitativo, de manera que un mismo algoritmo puede ser numéricamente estable en un problema e inestable en otro.

  Por ejemplo, si se considera el algoritmo

$$\begin{cases} x_0 = 1, \quad x_1 = \dfrac{1}{3}, \\ x_n = \dfrac{1}{3}\left(13 x_{n-1} - 4 x_{n-2}\right), \quad \forall\, n \geq 2, \end{cases}$$

  y se calculan con esta fórmula los dieciseis primeros términos de la sucesión, usando para ello seis decimales, se obtiene

$$\begin{array}{llll} x_0 = 1 & x_1 = 0{,}333333 & x_2 = 0{,}111111 & x_3 = 0{,}037037 \\ x_4 = 0{,}012346 & x_5 = 0{,}004117 & x_6 = 0{,}001379 & x_7 = 0{,}000486 \\ x_8 = 0{,}000267 & x_9 = 0{,}000509 & x_{10} = 0{,}001850 & x_{11} = 0{,}007338 \\ x_{12} = 0{,}029331 & x_{13} = 0{,}117317 & x_{14} = 0{,}469266 & x_{15} = 1{,}877063 \end{array}$$

Sin embargo, es fácil comprobar que la sucesión x_n viene también definida por

$$x_n = \left(\frac{1}{3}\right)^n,$$

y si usamos esta última expresión obtenemos

$$\begin{array}{cccc}
x_0 = 1 & x_1 = 0{,}333333 & x_2 = 0{,}111111 & x_3 = 0{,}037037 \\
x_4 = 0{,}012346 & x_5 = 0{,}004115 & x_6 = 0{,}001372 & x_7 = 0{,}000457 \\
x_8 = 0{,}000152 & x_9 = 0{,}000051 & x_{10} = 0{,}000017 & x_{11} = 0{,}000006 \\
x_{12} = 0{,}000002 & x_{13} = 0{,}000001 & x_{14} = 0{,}000000 & x_{15} = 0{,}000000
\end{array}$$

En consecuencia, está claro que el primer algoritmo propuesto es inestable numéricamente para el cálculo de la sucesión $\left(\frac{1}{3}\right)^n$.

En relación con la teoría de errores, dos conceptos de interés son los siguientes:

Definición 1.1 *Si x es un número real, y se aproxima por otro número real $\overline{x}$, se denomina error absoluto a la cantidad $|x-\overline{x}|$. Si $x \neq 0$, se denomina error relativo a la cantidad* $\dfrac{|x-\overline{x}|}{|x|}$.

Observemos para terminar con esta sección, que hay casos en que lo importante es el error absoluto (aterrizaje de un satélite, caida de un misil, incisión de un cirujano,...), mientras que otras veces lo que importa es el error relativo (descuentos...).

1.5. Convergencia y estabilidad

Una vez que se ha formulado un algoritmo para resolver un problema (P), es de gran importancia conocer bajo qué condiciones dicho algoritmo conduce a la solución de (P).

Una situación típica es aquélla en que el algoritmo define una sucesión de elementos (por ejemplo números reales), y se desea saber cuándo es convergente esta sucesión, en algún sentido a precisar, y si converge a la solución del problema de partida. Que ese algoritmo funcione bien en un buen número de casos particulares, no es satisfactorio desde el punto de vista del Análisis Numérico; es preciso establecer un resultado (un teorema) de convergencia, que precise bajo qué condiciones se produce convergencia del algoritmo a la solución de (P).

En relación con el problema de la convergencia, otras cuestiones que se suelen plantear son la velocidad de convergencia del algoritmo, o la acotación del error que se comete cuando uno detiene de manera artificial el algoritmo al cabo de un número finito de pasos.

Otra propiedad importante de un algoritmo es que debe ser numéricamente estable. Ello significa que el efecto acumulativo de los pequeños errores de redondeo que se vayan cometiendo al calcular los términos del algoritmo, es también pequeño. Sobre esta propiedad, y otros requerimientos importantes que hay que hacerle a todo algoritmo de resolución numérica, volveremos de manera más detallada en la sección 1.4 de este tema.

1.6. Procedimiento general de resolución

De manera casi general, desde el punto de vista del Análisis Numérico el estudio teórico de la resolución de un problema (P) consta de las siguientes etapas.

a) **Estudio teórico de** (P):

existencia y unicidad de la solución de (P), caracterización de la misma, propiedades cualitativas, etc.

b) **Discretización de** (P):

construcción de problemas aproximados de (P), que en general se denotan (P_h), con $h > 0$ número real destinado a decrecer a cero (o (P_N), con $N \geq 1$ número entero destinado a crecer a $+\infty$), que se puedan resolver en una etapa posterior. Supuesto que se puedan resolver los problemas aproximados, las soluciones de estos últimos deben converger, cuando $h \to 0$ (o $N \to +\infty$), y en algún sentido adecuado que se determinará en esta etapa, a la solución de (P).

c) **Estudio teórico de** (P_h):

dicho estudio consta, en general, de dos aspectos esenciales:

- de manera similar a la etapa a), estudio de la existencia y unicidad de la solución de los problemas aproximados (P_h) (o (P_N)), caracterización de la misma, propiedades cualitativas, etc.
- análisis de las propiedades que tiene la aproximación cuando $h \to 0$ (o $N \to +\infty$). A este respecto ya citamos la estabilidad numérica. Hay otros conceptos posibles de estabilidad, y la noción de consistencia, que se detallarán en el tema 2, cuya verificación es esencial.

d) **Resolución numérica de** (P_h):

hay que buscar un algoritmo eficiente de cálculo de la solución discreta, es decir, de la solución de (P_h) (o de (P_N)) y estudiar su convergencia y estabilidad mediante ejemplos test. Esto último se hace, bien porque no se haya podido completar el estudio teórico en las etapas anteriores, bien como verificación de que el algoritmo no introduce nuevas inestabilidades.

Una vez se han completado las cuatro etapas precedentes, desde el punto de vista de las aplicaciones prácticas, ha de procederse a la implementación efectiva en el ordenador de los algoritmos previamente construidos.

Bibliografía

[1] J. M. Viaño: *Lecciones de Métodos Numéricos: introducción general y análisis de errores*, Tórculo, Santiago de Compostela, 1995.

[2] A. Aubanell, A. Benseny & A. Delshams, *Útiles básicos de Cálculo Numérico*, Labor, Barcelona 1993.

[3] D. Kincaid & W. Cheney, *Análisis Numérico*, Addison-Wesley Iberoamericana, Wilmington, 1994.

Como referencias complementarias destacamos:

[4] K.E. Atkinson, *An introduction to Numerical Analysis*, Wiley, New York 1978.

[5] F. García & A. Nevot, *Métodos Numéricos*, Universidad Pontificia de Comillas, Madrid, 1997.

[6] P. Henrici, *Elementos de Análisis Numérico*, Trillas, México, 1972.

[7] J. A. Infante y J. M. Rey, *Métodos Numéricos: Teoría, problemas y prácticas con MATLAB* , Ediciones Pirámide, Madrid, 1999.

[8] A. Ralston & P. Rabinowitz, *A First Course in Numerical Analysis*, (second edition), MacGraw-Hill, New York, 1978.

[9] Numerical Analysis in the 20th Century, *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 2000 y 2001.