CÁLCULO NUMÉRICO II **Curso 2009/2010**

Ejercicios

1. Probar las siguientes desigualdades entre números:

   a) Desigualdad de Young: Si $a, b \geq 0$, y $p, q > 1$ son tales $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, entonces

   $$ab \leq \frac{1}{p}\, a^p + \frac{1}{q}\, b^q$$

   b) Desigualdad de Hölder: Si $a_i, b_i \in \mathbb{R}$ $i = 1, ..., n$ y $p, q > 1$ son tales $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, entonces

   $$\sum_{i=1}^{n} |a_i b_i| \leq \left(\sum_{i=1}^{n} |a_i|^p\right)^{1/p} \cdot \left(\sum_{i=1}^{n} |b_i|^q\right)^{1/q}$$

   (Para $p = q = 2$, recibe el nombre de desigualdad de Cauchy-Schwarz).

   c) Desigualdad de Jensen: Si $0 < r < s$ y $a_i \geq 0$, $\forall i$, entonces

   $$\left(\sum_{i=1}^{n} a_i^s\right)^{1/s} \leq \left(\sum_{i=1}^{n} a_i^r\right)^{1/r}$$

2. Probar que $\|\cdot\|_1$ y $\|\cdot\|_\infty$ y $\|\cdot\|_p$ $\forall\, p \geq 1$ son normas en $\mathbb{C}^n$.

3. Sea V un espacio de dimensión finita. Demostrar que $\lim_{p\to\infty} \|v\|_p = \|v\|_\infty$, $\forall\, v \in V$.

4. Dado el vector $x = (1, 0, -1, 2)^t$. Hallar $\|x\|_1$, $\|x\|_2$, $\|x\|_\infty$.

5. Demostrar que

   a) $\|A\|_1$ es norma matricial.

   b) $\|A\|_\infty$ no es norma matricial (dar un contraejemplo).

   c) ¿Es $\|A\|_p$ norma matricial para cualquier p, $1 < p < \infty$?

6. Probar que $\|I\| \geq 1$ y $\|A^{-1}\| \geq \dfrac{1}{\|A\|}$, para cualquier norma matricial.

7. Determinar las mejores constantes $m > 0$ y $M > 0$ que verifican $m\|v\|_\infty \leq \|v\|_1 \leq M\|v\|_\infty$ $\forall\, v \in \mathbb{C}^n$.

8. Probar que las matrices

   $$A = \begin{pmatrix} \cos\theta & \operatorname{sen}\theta \\ -\operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{i}{\sqrt{2}} \\ \frac{i}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

   son unitarias siendo además A ortogonal.

9. Hallar la matriz adjunta de

   $$A = \begin{pmatrix} 1 & -i \\ 2i & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

10. Determinar los autovalores y autovectores de las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 0 \\ -2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

11. Sea $B \in \mathcal{M}_{4\times 4}$ la matriz simétrica dada por

$$\begin{pmatrix} 8 & -2\sqrt{2} & 2 & 2 \\ -2\sqrt{2} & 6 & -\sqrt{2} & -\sqrt{2} \\ 2 & -\sqrt{2} & 7 & -1 \\ 2 & -\sqrt{2} & -1 & 7 \end{pmatrix}$$

Hallar Q, matriz ortogonal, tal que $Q^T B Q = \Lambda$, siendo Λ una matriz diagonal.

12. Dadas las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

   a) Calcular los valores propios y los vectores propios asociados.
   b) Determinar el radio espectral.
   c) Hallar la norma espectral ($\| \cdot \|_S$)

13. Idem para la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

14. Sea $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -12 & 4 \end{pmatrix}$. Probar que no existe la factorización de teorema de Schur con matrices reales, es decir, que no existen $T, U \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ (T triangular) tales que $U^T A U = T$, $U^T U = I$.

15. Probar que los autovalores de una matriz unitaria tienen módulo uno.

16. Probar que si A es hermítica y definida positiva, existe una única matriz hermítica B (simétrica si A lo es) y definida positiva tal que $A = B^2$.

17. Probar que si A es regular

   a) $0 \notin \mathrm{sp}(A)$
   b) $\mathrm{sp}(A^{-1}) = \{\mu = 1/\lambda, \quad \lambda \in \mathrm{sp}(A)\}$.

18. Sean $A, B \in \mathbb{C}^{n\times n}$ tales que existe U unitaria con $U^* A U = B$.

   a) Demostrar que $sp(A) = sp(B)$.
   b) ¿Qué relación existe entre los autovectores de A y B? Razonar la respuesta.

19. Sea $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ una matriz normal. Probar que A, A^* y A^*A poseen una base ortonormal común de autovectores y hallar la relación entre los autovalores de A, A^* y A^*A.

20. Sea $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ una matriz. Se definen las *componentes hermíticas* de A como las matrices hermíticas H_1 y H_2 dadas por $H_1 = \dfrac{A + A^*}{2}$, $H_2 = i\dfrac{A^* - A}{2}$.

   a) Comprobar que $A = H_1 + iH_2$.
   b) Demostrar que A es normal siempre y cuando sus componentes hermíticas conmuten.
   c) Probar que A es normal siempre y cuando A, H_1, H_2 tienen una base común de autovectores ortonormales y $\lambda_j(A) = \lambda_j(H_1) + i\lambda_j(H_2)$.

21. Demostrar directamente las propiedades de la norma de matriz subordinada. En concreto, si $\|v\|$ es una norma vectorial y definimos para cada $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, $\|A\| = \sup_{v\neq 0} \dfrac{\|Av\|}{\|v\|}$, probar que :

a) $\|A\|$ está bien definida.

b) $\|A\| = \sup_{\|v\|=1} \|Av\| = \sup_{\|v\|\leq 1} \|Av\|$.

c) $\|A\|$ es una norma matricial.

d) $\|A\| = \max_{\|v\|=1} \|Av\| = \max_{\|v\|\leq 1} \|Av\|$.

22. Denotemos por $\|A\|_F = \max_i \sum_j |a_{ij}|$

a) Probar que para cualquier matriz $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ es $\|Av\|_\infty \leq \|A\|_F \|v\|_\infty$, $\forall\, v \in \mathbb{C}^n$.

b) Sean i_0 tal que $\sum_j |a_{i_0 j}| = \|A\|_F$ y $u \in \mathbb{C}^n \setminus \{0\}$ dado por

$$u_j = \begin{cases} \dfrac{\bar{a}_{i_0 j}}{|a_{i_0 j}|} & \text{si } a_{i_0 j} \neq 0, \\ 1 & \text{si } a_{i_0 j} = 0. \end{cases}$$

Probar que $\|Au\|_\infty = \|A\|_F \|u\|_\infty$.

c) Deducir que $\|\cdot\|_F$ es la norma subordinada a $\|\cdot\|_\infty$ (y por tanto que es una norma matricial).

23. Denotemos por $\|A\|_C = \max_j \sum_i |a_{ij}|$.

a) Probar que para cualquier matriz $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ es $\|Av\|_1 \leq \|A\|_C \|v\|_1$.

b) Sean j_0 tal que $\sum_i |a_{ij_0}| = \|A\|_C$ y $u \in \mathbb{C}^n \setminus \{0\}$ dado por

$$u_i = \begin{cases} 0 & \text{si } i \neq j_0, \\ 1 & \text{si } i = j_0. \end{cases}$$

Probar que $\|Au\|_1 = \|A\|_C \|u\|_1$.

c) Deducir que $\|\cdot\|_C$ es la norma subordinada a $\|\cdot\|_1$ (y por tanto que es una norma matricial).

24. Sea $\|\cdot\| : \mathbb{C}^n \mapsto \mathbb{R}^+$ una norma vectorial, cuya norma matricial subordinada asociada se denota también por $\|\cdot\|$. Dada una matriz H no singular se define $\|\cdot\|_H : \mathbb{C}^n \mapsto \mathbb{R}^+$ como $\|v\|_H = \|H^{-1}v\|$.

a) Probar que $\|\cdot\|_H$ es una norma sobre $\mathbb{C}^n$.

b) Si $\|\cdot\|_H$ también denota la norma matricial subordinada a la norma vectorial $\|\cdot\|_H$, entonces

$$\|A\|_H = \|H^{-1}AH\|, \qquad \forall\, A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}).$$

25. Dada una matriz A diagonalizable, probar que existe una norma matricial $\|\cdot\|$ (dependiente de A) tal que $\rho(A) = \|A\|$.

Indicación: Utilizar el resultado del problema anterior.

26. La matriz A es unitaria si y sólo si $\|Au\|_2 = \|u\|_2$, es decir, las matrices unitarias son las únicas matrices que conservan la distancia euclídea al origen.

27. Probar que para toda $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ se verifica $\|A\|_{\mathrm{S}} = \|A^*\|_{\mathrm{S}}$

28. Comprobar que si $U \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ es unitaria entonces $\|U\|_{\mathrm{S}} = 1$

29. Probar que la 2-norma de matriz (o norma de Erhard Schmidt) verifica

$$\|A\|_{\mathrm{ES}} \stackrel{\mathrm{def}}{=} \left\{ \sum_{i,j} |a_{ij}|^2 \right\}^{1/2} = (\mathrm{tr}\, A^*A)^{1/2} = (\mathrm{tr}\, AA^*)^{1/2}.$$

Además, probar que la norma matricial de Erhard Schmidt:

a) No es subordinada a ninguna norma de vector para $n \geq 2$.

b) Es invariante por transformaciones unitarias, es decir, para toda U unitaria:

$$\|A\|_{\mathrm{ES}} = \|UA\|_{\mathrm{ES}} = \|AU\|_{\mathrm{ES}} = \|U^*AU\|_{\mathrm{ES}}$$

c) Para cualquier $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ es

$$\|A\|_{\mathrm{S}} \leq \|A\|_{\mathrm{ES}} \leq \sqrt{n}\|A\|_{\mathrm{S}}$$

d) Si bien no es subordinada a ninguna norma vectorial, sí es consistente, es decir cumple

$$\|Av\|_2 \leq \|A\|_{\mathrm{ES}}\|v\|_2, \quad \forall v \in \mathbb{C}^n, \quad \forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}).$$

30. Fijadas dos normas en $\mathbb{C}^n$, $\|\cdot\|$ y $\|\cdot\|'$, definimos $[A] = \sup_{x\neq 0} \dfrac{\|Ax\|}{\|x\|'}$, $\forall\, A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

    a) Probar que $[\cdot]$ está bien definida y es una norma (llamada norma subordinada a $\|\cdot\|$ y $\|\cdot\|'$).

    b) Probar que $\|Ax\| \leq [A]\,\|x\|'$ para cada $x \in \mathbb{C}^n$, $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ y el supremo de la definición es en realidad un máximo.

    c) Para $\|\cdot\| = \|\cdot\|_\infty$ y $\|\cdot\|' = \|\cdot\|_1$, calcular $[A]$.

    d) Probar que, en general, $[\cdot]$ no es una norma matricial.

31. Sean $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ invertible, $\|\cdot\|$ una norma matricial subordinada y $\alpha > 0$ tal que $\|A^{-1}\| \leq \alpha$. Sea $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ tal que $\|B - A\| \leq \beta$, de forma que $\alpha\beta < 1$. Probar que B es invertible y que $\|B^{-1}\| \leq \dfrac{\alpha}{1-\alpha\beta}$.

32. Probar que si A es una matriz unitaria y definida positiva, entonces todos sus autovalores son igual a 1.

33. Probar que la serie $\sum_{k\geq 0} A^k = I + A + A^2 + ...$ es convergente en $\mathcal{M}_n$ siempre y cuando $\rho(A) < 1$. Además, en este caso, $I - A$ es invertible y $(I-A)^{-1} = \sum_{k\geq 0} A^k$ (serie de Neumann).

34. Ejemplo de sistema lineal mal condicionado (la matriz es debida a H. Rutishauser):

$$\begin{pmatrix} 10 & 1 & 4 & 0 \\ 1 & 10 & 5 & -1 \\ 4 & 5 & 10 & 7 \\ 0 & -1 & 7 & 9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 15 \\ 15 \\ 26 \\ 15 \end{pmatrix}, \qquad \text{cuya solución es} \qquad \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Para convencerse de que la matriz del sistema está mal condicionada, consideramos el siguiente sistema perturbado, donde los segundos miembros han sido "ligeramente"modificados:

$$\begin{pmatrix} 10 & 1 & 4 & 0 \\ 1 & 10 & 5 & -1 \\ 4 & 5 & 10 & 7 \\ 0 & -1 & 7 & 9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1+\delta u_1 \\ u_2+\delta u_2 \\ u_3+\delta u_3 \\ u_4+\delta u_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 16 \\ 16 \\ 25 \\ 16 \end{pmatrix}, \qquad \text{cuya solución es} \qquad \begin{pmatrix} 832 \\ 1324 \\ -2407 \\ 2021 \end{pmatrix}$$

La matriz del sistema A es invertible con $\det A = 1$ y

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 105 & 167 & -304 & 255 \\ 167 & 266 & -484 & 406 \\ -304 & -484 & 881 & -739 \\ 255 & 406 & -739 & 620 \end{pmatrix}$$

La explicación de estos despropósitos hay que encontrarla en el espectro de A: los autovalores más pequeño y más grande de A son respectivamente $\lambda_1 = 0\text{'}0005343$ y $\lambda_4 = 19\text{'}1225$, con lo cual el número de condición de A es del orden de ¡10^5!

35. Se considera el sistema lineal

$$(SL) \quad \begin{cases} 7x_1 + 10x_2 = b_1 \\ 5x_1 + 7x_2 = b_2 \end{cases}$$

    a) ¿Está (SL) bien condicionado?

    b) Comprobar la respuesta, comparando las respectivas soluciones de (SL) asociadas a los segundos miembros $b_1 = 1$, $b_2 = 0{,}7$ y $b_1 = 1{,}01$, $b_2 = 0{,}69$.

    c) Realizar un equilibrado por filas del sistema para disminuir en número de condición de la matriz.

36. Se considera la matriz

$$H = \begin{pmatrix} 1 & 1/2 & 1/3 \\ 1/2 & 1/3 & 1/4 \\ 1/3 & 1/4 & 1/5 \end{pmatrix}.$$

Estudiar el condicionamiento (respecto de la matriz) del sistema lineal $Hu = b$.

37. Se trata de condicionamiento del problema de <u>*la inversión de una matriz*</u>: Sea $A \in \mathbb{C}^n$ una matriz invertible.

a) Si $A + \delta A$ es una matriz invertible, probar que $\dfrac{\|(A+\delta A)^{-1} - A^{-1}\|}{\|(A+\delta A)^{-1}\|} \leq \operatorname{cond}(A)\dfrac{\|\delta A\|}{\|A\|}$.

Pruébese que esta desigualdad es óptima.

b) Supongamos que $\|\delta A\| < \frac{1}{\|A^{-1}\|}$. Demostrar la desigualdad $\dfrac{\|(A+\delta A)^{-1} - A^{-1}\|}{\|A^{-1}\|} \leq \operatorname{cond}(A)\dfrac{\|\delta A\|}{\|A\|}(1 + O(\|\delta A\|))$.

38. <u>*Condicionamiento de un problema de autovectores:*</u>

Calcular los autovalores y una base ortonormal de autovectores de la matriz

$$A(\varepsilon) = \begin{pmatrix} 1 + \varepsilon \cos \dfrac{2}{\varepsilon} & -\varepsilon \operatorname{sen} \dfrac{2}{\varepsilon} \\ -\varepsilon \operatorname{sen} \dfrac{2}{\varepsilon} & 1 - \varepsilon \cos \dfrac{2}{\varepsilon} \end{pmatrix}$$

Probar que los autovectores de $A(\varepsilon)$ no tienen límite cuando $\varepsilon \to 0$. ¿Qué se pude decir del condicionamiento de este problema? Justificar la respuesta.

39. Sean A y B dos matrices, (A invertible) tales que $AB = I + E$. Supongamos que la norma $\|E\|$ es suficientemente pequeña. Obtener una cota a priori de $\|A^{-1} - B\|$ en función de $\|B\|$ y de $\|E\|$.

40. Comprobar que si A es una matriz triangular por bloques, entonces se verifica que

$$\det(A) = \prod_{i=1}^{N} \det(A_{ii}).$$

41. Sea A una matriz orden n, simétrica y definida positiva, y sea $D = \alpha I$ una matriz diagonal con $\alpha > 0$. Demostrar que

$$\frac{\rho(A)}{\lambda_n(A) + \alpha} \leq cond_S(A + D) \leq \frac{\rho(A) + \alpha}{\lambda_1(A)}.$$

42. Probar que si A es una matriz hermítica definida positiva, entonces la aplicación

$$\|\cdot\|_A : v \in \mathbb{C}^n \longmapsto \|v\|_A = (v^* A v)^{1/2}$$

es una norma vectorial.

43. El objetivo de este ejercicio es la comprobación (mediante ejemplos) de que, en general, no se puede asegurar nada acerca de la comparación de dos métodos iterativos.

a) Sea

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Demostrar que $\rho(J) < 1 < \rho(\mathcal{L}_1)$.

b) Sea

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Demostrar que $\rho(\mathcal{L}_1) < 1 < \rho(J)$.

Aquí, J es la matriz del método de Jacobi y $\mathcal{L}_1$ es la matriz del método de Gauss-Seidel.

44. Estudiar la convergencia del método de Jacobi y del método Gauss-Seidel por bloques para la matriz del ejercicio anterior escrita en la forma siguiente:

$$A = \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \\ \hline 2 & 2 & 1 \end{array}\right)$$

Comparar los resultados de ambos problemas.

45. Se considera el sistema

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 19 \\ 19 \\ -3 \\ -12 \end{pmatrix}$$

a) Calcular la solución exacta por el método de eliminación de Gauss.

b) Calcular los vectores $u_k = (u_i^k)_{i=1}^4,\ k \leq 10$, obtenidos por los métodos iterativos de Jacobi, Gauss-Seidel y relajación para $\omega = 1'1, 1'2, ..., 1'9$ partiendo del vector inicial $u_0 = 0$.

46. Sea A una matriz de orden n estrictamente diagonal dominante.

a) Demostrar que el método de Jacobi por puntos converge.

b) Demostrar que el método de Gauss-Seidel por puntos converge.

47. Dado el sistema lineal

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1/4 & -1/4 \\ 0 & 1 & -1/4 & -1/4 \\ -1/4 & -1/4 & 1 & 0 \\ -1/4 & -1/4 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ u \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

cuya solución exacta es $(1, 1, 1, 1)^t$.

a) Plantear el método de Jacobi y demostrar que es convergente.

b) Obtener una expresión explícita de la norma euclídea del error en función del número de iteraciones, tomando como punto inicial $(0, 0, 0, 0)^t$.

c) Demostrar que la matriz del sistema es definida positiva y que el método de relajación es convergente para $0 < \omega < 2$.

48. Se considera el sistema lineal real

$$(SL) \qquad \left\{ \begin{array}{l} ax + by = p \qquad \text{con} \quad a, d \neq 0 \\ \\ cx + dy = q \end{array} \right.$$

a) Plantear los métodos de Jacobi y Gauss-Seidel para (SL). Probar que ambos convergen si y sólo si $|bc| < |ad|$.

b) Si además $\dfrac{cb}{ad} \geq 0$, ¿qué se puede decir sobre la convergencia del método de relajación?

c) Supongamos que $a = d = 2$, $b = c = 1$ y $p = q = 3$. En el caso del método de Gauss-Seidel, obtener una expresión explícita de la norma euclídea del error en función de número de iteraciones, tomando como punto inicial $(0, 0)^t$.

49. Sea A una matriz orden n, hermítica y definida positiva. Probar, a partir del Teorema de Householder, que si $\rho(A) < 2 \min_{i=1,\ldots,n} a_{ii}$, entonces el Método de Jacobi asociado al sistema lineal $Au = b$ converge.

50. Sea A una matriz triangular inferior, con $a_{ii} \neq 0$, para todo $i = 1, \ldots, n$. Entonces

a) Probar que el Método de Jacobi por puntos converge en un número finito de pasos (a lo más, tantos pasos como la dimensión de A).

b) Probar que el Método de Gauss-Seidel por puntos converge en un paso.

c) Probar que el Método de Relajación por puntos, para $w \neq 1$, no converge en un número finito de pasos. Indicación: en este apartado, usar que un Método converge en un número finito de pasos si y sólo si $\rho(B) = 0$.

51. Se considera el sistema lineal

$$(SL) \qquad \left(\begin{array}{c|cc} r & \beta & \beta \\ \hline \beta & r & 0 \\ \beta & 0 & r \end{array}\right) \left(\begin{array}{c} x \\ \hline y \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c} f \\ \hline g \end{array}\right)$$

con $r, \beta > 0$ y $f \in \mathbb{R}, g \in \mathbb{R}^2$.

a) Obtener un intervalo de valores de $r, \beta \in (0, +\infty)$ para los cuales los métodos de Jacobi y Gauss-Seidel por bloques (con la estructura de (SL)) están bien planteados y converjan.

b) Supongamos que $r = 5$, $\beta = 1$, $f = 1$ y $g = (0, 0)^t$. Obtener una expresión explícita de la norma infinito del error en función del número de iteraciones, para el método de Gauss-Seidel por bloques, tomando como inicialización $x^{(0)} = 0$, $y^{(0)} = (0, 1)^t$. Hallar el número de iteraciones necesarias para obtener un error menor que 10^{-4}.

52. Se considera el sistema lineal

$$(SL) \qquad \left(\begin{array}{cc|cc} \alpha & 0 & \beta & 0 \\ 0 & \alpha & 0 & \beta \\ \hline \beta & 0 & \alpha & 0 \\ 0 & \beta & 0 & \alpha \end{array}\right) \left(\begin{array}{c} x \\ \hline y \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c} f \\ \hline g \end{array}\right)$$

con $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ y $f, g \in \mathbb{C}^2$.

a) Obtener los valores de $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ para los cuales los métodos de Jacobi y Gauss-Seidel por bloques (con la estructura de (SL)) están bien planteados. Escribir ambos métodos en la forma

$$\begin{cases} x^{(0)},\ y^{(0)} \in \mathbb{C}^2 \qquad \text{dados,} \\ \left(\begin{array}{c} x^{(k+1)} \\ \hline y^{(k+1)} \end{array}\right) = B \left(\begin{array}{c} x^{(k)} \\ \hline y^{(k)} \end{array}\right) + \left(\begin{array}{c} \hat{f} \\ \hline \hat{g} \end{array}\right) \end{cases}$$

con $x^{(k)},\ y^{(k)} \in \mathbb{C}^2$, $\forall\, k \geq 1$; sin invertir ninguna matriz.

b) Probar que el método de Jacobi por bloques converge siempre y cuando $|\beta| < |\alpha|$.
¿ Es suficiente esta condición para que el método de Gauss-Seidel por bloques converja ? Razonar la respuesta.

c) Supongamos que $\alpha = 2$, $\beta = 1$, $f = (3, 3)^t$ y $g = (0, 0)^t$. Obtener la solución de (SL) utilizando el método de Gauss.

d) Para el caso del apartado (c), obtener una expresión explícita de la norma euclidea del error en función del número de iteraciones, para el método de Jacobi por bloques, tomando como inicialización $x^{(0)} = (1, 1)^t$, $y^{(0)} = (0, 0)^t$.

53. Sea $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{C})$ hermítica y definida positiva y $B \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{C})$ tal que el núcleo $N(B^*) = \{0\}$ (es decir, $\forall\, z \in \mathbb{C}^m \backslash \{0\}\ B^* z \neq 0$)

a) Demostrar que las matrices A^{-1} y $BA^{-1}B^*$ son hermíticas y definidas positivas

b) Sea la matriz por bloques $R = \left(\begin{array}{c|c} A & B^* \\ \hline B & \Theta_{m\times m} \end{array}\right)$. Demostrar que R es regular. ¿ Es R definida positiva ? Razonar la respuesta.

c) Dados $\alpha \neq 0$, $f \in \mathbb{C}^n$ y $g \in \mathbb{C}^m$, se considera el método iterativo

$$\begin{cases} x^{(0)} \in \mathbb{C}^n,\ y^{(0)} \in \mathbb{C}^m \qquad \text{dados,} \\ \text{Conocidos}\, x^{(k)} \in \mathbb{C}^n,\ y^{(k)} \in \mathbb{C}^m, \text{ hallar}\, x^{(k+1)} \in \mathbb{C}^n,\ y^{(k+1)} \in \mathbb{C}^m, \text{ tal que} \\ \left(\begin{array}{c|c} A & \Theta_{n\times m} \\ \hline B & \alpha I_{m\times m} \end{array}\right) \left(\begin{array}{c} x^{(k+1)} \\ \hline y^{(k+1)} \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|c} \Theta_{n\times n} & -B^* \\ \hline \Theta_{m\times n} & \alpha I_{m\times m} \end{array}\right) \left(\begin{array}{c} x^{(k)} \\ \hline y^{(k)} \end{array}\right) + \left(\begin{array}{c} f \\ \hline g \end{array}\right) \quad \forall\, k \geq 0. \end{cases}$$

Describir un procedimiento, lo más simple posible, para realizar los cálculos de una etapa k

d) Demostrar que el método iterativo del apartado anterior es convergente si y sólo si $\alpha < -\frac{1}{2}\lambda_{\max}(BA^{-1}B^*)$. En tal caso, el vector límite $(x \,|\, y)^t$ será la solución de un sistema lineal que se determinará.

54. Se considera el sistema $Au = b$ con $A \in \mathbf{R}^{n\times n}$ triangular superior tal que $t_{ii} = -1$, para todo $i = 1, \dots, n$. Sea el método iterativo asociado:

$$\left\{ \begin{array}{c} u_0 \in \mathbf{R}^n \\ u_{k+1} = \alpha u_k + Au_k + \alpha b \qquad \forall\, k \geq 0 \end{array} \right.$$

para $\alpha \in \mathbb{R}$. Probar que el método es convergente si y solo si $0 < \alpha < 2$.

55. Sea A una matriz estrictamente diagonal dominante. Consideremos el método iterativo asociado a la descomposición de la matriz $A = (D - \frac{1}{2}E) - (\frac{1}{2}E + F)$:

$$\left\{ \begin{array}{cc} u^0 \in \mathbf{R}^n & \text{(inicialización)} \\ u^{k+1} = (D - \frac{1}{2}E)^{-1}[(\frac{1}{2}E + F)u^k + b] & \forall\, k \geq 0 \quad (\text{etapa } k+1), \end{array} \right.$$

siendo $D, -E, -F$ las matrices diagonal, subdiagonal y superdiagonal de A respectivamente.
Probar que $|\lambda_i(B)| < 1$, para todo $\lambda_i \in sp(B)$, con B la matriz del método. Deducir que el método anterior es convergente.

56. a) Se considera el sistema $Au = b$ con $A \in \mathbf{R}^{n\times n}$ simétrica y definida positiva, y el método iterativo asociado:

$$\left\{ \begin{array}{cc} u^0 \in \mathbf{R}^n & \text{(inicialización)} \\ u^{k+1} = u^k + \tau(b - Au^k) & \forall\, k \geq 0 \quad (\text{etapa } k+1) \end{array} \right.$$

para cada $\tau > 0$. Probar que el método es convergente si y solo si $0 < \tau < 2/\rho(A)$.

b) Dado el sistema

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Demostrar que la matriz del sistema es definida positiva y, para el método iterativo anterior, obtener una cota (óptima) explícita del error (en norma euclídea) en n iteraciones, para $\tau = 1/4$ y $u^0 = (0, 0, 0)^t$.

57. Resolver por el método del gradiente y por el método del gradiente conjugado el sistema lineal

$$\begin{pmatrix} 4 & -1 & 0 \\ -1 & 4 & -1 \\ 0 & -1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ 2 \end{pmatrix}$$

58. Sea el sistema lineal

$$\begin{pmatrix} 2 & -2 & -1 \\ -2 & 10 & 0 \\ -1 & 0 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ -12 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Tomando como vector inicial $x^{(0)} = (0, 0, 0)^T$, obtener tres iteraciones de cada uno de los siguientes métodos: Jacobi, Gauss-Seidel, Gradiente Conjugado.

59. Sea $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ y $W = \{1, \dots, n\}$. Designemos por C_i, $i \in W$ los círculos Gerschgorin por filas, es decir:

$$C_i = \{z \in \mathbb{C} \,/\, |z - a_{ii}| \leq \sum_{j\neq i} |a_{ij}|\}, \qquad i \in W.$$

a) *Teorema de Brauer*. Supongamos que existe un índice $i \in W$ tal que $C_i \cap C_j = \emptyset$, $\forall j \neq i$. Demostrar que en el círculo C_i hay un único autovalor de A.

b) *Generalización del teorema de Brauer*. Sean

$$D_1 = \bigcup_{i=1}^{k} C_i, \qquad D_2 = \bigcup_{i=k+1}^{n} C_i \quad \text{tales que } D_1 \cap D_2 = \emptyset.$$

Probar que en D_1 hay k autovalores de A y en D_2 hay $n - k$ autovalores de A.

60. Sea $B \in C^{n\times n}$ diagonalizable, descompuesta de la forma:

$$B = D + E, \quad \text{donde} \quad \left\{ \begin{array}{ll} D = \operatorname{diag}(b_{ii}) & \text{(parte diagonal)} \\ E = B - D & \text{(parte extradiagonal)} \end{array} \right.$$

Demostrar que $\operatorname{sp}(B) \subset \{z \in \mathbb{C} : |z - b_{ii}| \leq ||E||\}$ para cualquier norma matricial tal que $||\operatorname{diag}(d_i)|| = \operatorname{máx}_i |d_i|$.
Interpretar esto como un resultado de localización de autovalores y comentar sus similitudes y diferencias con el resultado de localización usando los círculos de Gerschgorin.

61. Sea $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$. Se definen los números siguientes:

$$P_i = \sum_{j\neq i} |a_{ij}|, \quad Q_i = \sum_{j\neq i} |a_{ji}|, \quad R_i = P_i^{\alpha} Q_i^{1-\alpha}, \;\; 0 \leq \alpha \leq 1.$$

a) *Primer teorema de Ostrowski.* Supongamos que $|a_{ii}| > R_i$, $\forall i : 1 \leq i \leq n$. Probar que $\det A \neq 0$.

b) Aplicación: Deducir que los autovalores de A se encuentran en la unión de los círculos de Ostrowski $C_i = \{z \in \mathbb{C} \,/\, |z - a_{ii}| \leq R_i\}$

c) Deducir las siguientes cotas para los autovalores de A:

$$|\lambda| \leq n \max_{i,j} |a_{ij}| \qquad \text{cota de Hisch-Bromwich}$$

$$|\lambda| \leq \min_{\substack{c_i\neq 0\\ i=1,\ldots,n}} \max_{1\leq i\leq n} \frac{\sum_{j=1}^{n} |a_{ij}||c_j|}{|c_i|} \qquad \text{cota de Perron}$$

62. Probar que la matriz $\begin{pmatrix} 9 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 8 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 7 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ tiene al menos dos autovalores reales.

63. Sea la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 1 & & & \\ 1 & 4 & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & 1 & 4 & 1 \\ & & & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

a) Probar que existe A^{-1}. Hallar cotas de $\rho(A)$ y de $\rho(A^{-1})$. Escribiendo A en la forma $A = \alpha(I + B)$, hallar una cota de $\|A^{-1}\|_F$.

b) Utilizando resultados de localización, determinar un intervalo donde se encuentran los autovalores de la matriz A. Idem de A^{-1}.

64. Dada la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

y las aplicaciones lineales $\Phi_i : \mathbb{R}^4 \mapsto \mathbb{R}$, $\Phi_i(x) = x_i$, $i = 1, 2, 3, 4$:

a) Utilizar el Método de la Potencia para aproximar el autovalor de mayor módulo comenzando en $x^{(0)} = (1, 1, 1, 1)^T$. Repetir los cálculos utilizando el cociente se Rayleigh.

b) Aproximar el autovector de menor módulo aplicando el Método de la Potencia a la matriz $B = 6A^{-1}$, comenzando en $x^{(0)} = (1, 0, 0, 0)^T$.

c) Obtener el resto de los autovalores usando la traza y el determinante de A.

65. Aplicar el Método de la Potencia a la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 6 & 5 & -5 \\ 2 & 6 & -2 \\ 2 & 5 & -1 \end{pmatrix}$$

para obtener uno de sus autovalores y un autovector asociado, con $x^{(0)} = (-1, 1, 1)^T$, $\Phi(x) = x_2$, normalizando los vectores con $\|\cdot\|_\infty$.

66. Determinar los autovalores de la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

mediante el método de Givens, con un error menor que 0,01.

67. Separar en intervalos disjuntos los autovalores de la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

y aproximar uno de ellos con un error menor que 0,01.

68. Se considera el sistema de ecuaciones no lineales

$$f(x,y) = 0$$

$$g(x,y) = 0$$

Probar que, en general, no existen funciones $h(x,y)$, $k(x,y)$ de manera que el proceso iterativo asociado al sistema no lineal

$$x = x + h(x,y)f(x,y)$$

$$y = y + k(x,y)g(x,y)$$

sea de segundo orden.

69. Hallar la función matricial $H : \Omega \subset \mathbb{R}^n \to \mathcal{M}_{n\times n}$, ($\Omega$ abierto) de manera que el proceso iterativo asociado a $g(x) = x + H(x)f(x)$ sea de segundo orden. Comprobar que el proceso así obtenido coincide con el método de Newton.

70. Resolver por el método de Newton el sistema

$$\left\{ \begin{array}{rcl} x^2 + y^2 & = & 5 \\ xy & = & 2 \end{array} \right.$$

71. Se considera el sistema de ecuaciones no lineales

$$\left\{ \begin{array}{l} e^x - y = 0 \\ \\ xy - e^x = 0. \end{array} \right.$$

a) Estudiar gráficamente el número de soluciones de este sistema.

b) Aplicar el método de Newton para encontrar una solución aproximada. Calcular la primera iteración comenzando con $x_0 = 0{,}95$, $y_0 = 2{,}7$.

72. Se considera el sistema

$$\left\{ \begin{array}{rcl} x^3 - 5x^2 + 4x - y^2 & = & 0 \\ x + \log x - y & = & 0 \end{array} \right.$$

a) Determinar gráficamente el número de soluciones que tiene.

b) Calcular las tres primeras iteraciones del Método de Newton modificado (Variante de Whittaker) comenzando en $x_0 = 6$, $y_0 = 8$ que aproxima una de las soluciones.

(Febrero 2000)

73. Dado el sistema no lineal

$$\left\{ \begin{array}{rcl} x & = & x^2 + y^2 \\ y & = & x + y^2 \end{array} \right.$$

a) ¿Puedes asegurar la convergencia local hacia $(0,0)$ del Método de Aproximaciones Sucesivas (MAS)? Razonar la respuesta.

Se considera el método iterativo

$$\left\{ \begin{array}{rcl} x_{k+1} & = & x_k^2 + y_k^2 \\ y_{k+1} & = & x_{k+1} + y_k^2. \end{array} \right.$$

Escribirlo como un (MAS) y demostrar:

b) La convergencia local al menos cuadrática hacia el punto $(0,0)$.

c) La convergencia global hacia $(0,0)$ en $D = \{(x,y) : \ |x| \leq 1/10, \ |y| \leq 1/10\}$. ¿En cuántas iteraciones puedes asegurar un error en norma infinito menor que 10^{-3} comenzando a iterar en $(x_0, y_0) \in D$?.

(Febrero 2003)

74. Dado el sistema no lineal

$$F(x) = 0$$

donde $F = (f_1, f_2, ..., f_N)^t$ y $x = (x_1, x_2, ..., x_N)^t$

a) Enunciar el Método de Newton y escribir la $(n+1)$-ésima iteración en la forma

$$Ax^{n+1} = b,$$

donde $b = (b_1(x_1^n, ..., x_N^n), b_2(x_1^n, ..., x_N^n), ..., b_N(x_1^n, ..., x_N^n))^t$, $x^{n+1} = (x_1^{n+1}, x_2^{n+1}, ..., x_N^{n+1})^t$ y $A \in \mathcal{M}_N(\mathbb{R})$, para cada n fijo.

b) Plantear el sistema que se obtiene de aplicar el apartado anterior para la primera iteración $(n+1=1)$ al sistema

$$\left\{ \begin{array}{l} 3\,x_1 + x_1\,x_2\,x_3 - 4 = 0 \\ x_1 + 4\,x_2 + x_3 + 4 = 0 \\ (x_1 + x_2)\,x_2 + (1 + 2\,x_3)\,x_3 - 1 = 0 \end{array} \right.$$

c) El resultado del apartado anterior para $x_0 = (0,0,0)^t$ es

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1^1 \\ x_2^1 \\ x_3^1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Se desea resolver por el Método de Relajación por puntos dicho sistema. Deducir el rango de valores w para los que el método es convergente.

(Septiembre 2000)

75. Se considera el sistema no lineal en $\mathbb{R}^2$

$$\left\{ \begin{array}{c} y^2 + 2y + x^2 - 8 = 0 \\ y + 1 - 4x^3 = 0 \end{array} \right.$$

a) Estúdiese el sistema para determinar el número de soluciones que tiene e indicar regiones del plano donde haya sólo una. Probar que existe una raíz $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2)$, con $\alpha_i > 0$, $i = 1, 2$.

b) Probar que el Método de Newton no está bien definido comenzando en cualquier punto del eje de ordenadas $(0, a)$. Probar que el método es localmente convergente para la raíz indicada en el apartado anterior.

c) Probar que el Método de Whittaker está bien definido, comenzando en un punto del eje de abcisas $(a, 0)$, con $a > 0$. Escribir dicho método y hallar la primera iteración, comenzando en el punto $(1, 0)$.

(Febrero 2007)

Problemas propuestos en exámenes

1. Se considera el sistema lineal $Ax = b$, siendo

$$A = \left(\begin{array}{c|cc|c} 1 & 0 & 0 & \alpha \\ \hline 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ \hline \beta & 0 & 0 & 1 \end{array}\right), \qquad \alpha^2+\beta^2 \neq 0, \qquad b = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

   a) Plantear el método de Jacobi por bloques y determinar bajo qué condiciones converge cualquiera que sea el vector inicial u_0.

   b) ¿Para qué valores de α y de β es la norma espectral de la matriz de Jacobi menor que 1?. Para esos valores, obtener una cota de la norma euclídea del error relativo en la k-ésima iteración en función del vector inicial $u_0 = (0,0,0,0)^t$ y de la primera iteración u_1.

   c) Para $\alpha = \beta = 1/2$, plantear el método de Gauss-Seidel por puntos. Estudiar su convergencia.

   (Febrero 2000).

2. Se considera la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 8 & 0 & 4 & 5 \\ 0 & 4 & -2 & -1 \\ 2 & -2 & 5 & 0 \\ 5 & -1 & 0 & 7 \end{pmatrix}.$$

   a) Localizar los autovalores por medio de los círculos de Gerschgorin por filas y por columnas. ¿Puede deducirse si A es regular o no?.

   b) Localizar los autovalores utilizando los círculos de Ostrowski. Determinar los círculos que se obtienen para $\alpha = 1/4, \quad \alpha = 1/2, \quad \alpha = 3/4$. ¿Puede deducirse ya si A es regular o no?.

   c) Hallar el valor de α para que la suma de los radios de los círculos de Ostrowski sea mínima.

   Nota Teorema de los círculos de Ostrowski: Dada $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, se definen

$$P_i = \sum_{j\neq i} |a_{ij}|, \quad Q_i = \sum_{j\neq i} |a_{ji}|, \quad R_i = P_i^\alpha Q_i^{1-\alpha}, \ \ 0 \le \alpha \le 1.$$

   Entonces,

$$\text{sp }(A) \subset \cup_{i=1}^n C_i, \quad \text{siendo} \quad C_i = \{z \in \mathbb{C} : \mid z - a_{ii} \mid \le R_i\}, \quad i = 1, ...n$$

   (Febrero 2000)

3. Se considera la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 0 \\ -1 & 2 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

   a) Obtener su norma espectral.

   b) Localizar los autovalores según los círculos de Gerschgorin. Indicar si proporciona mejor localización tomar los círculos por filas o por columnas.

   c) Utilizar la norma espectral para mejorar la localización obtenida en el apartado anterior.

   (Septiembre 2000)

4. Se considera la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 3/2 & 1 & 5/2 \\ -1 & -1/2 & -1/2 \\ 0 & 0 & 1/2 \end{pmatrix}.$$

a) Calcular
$$\lim_{k\to+\infty} A^k.$$
b) Calcular
$$\lim_{k\to\infty} \|A^k\|_s^{1/k},$$
siendo $\|\cdot\|_s$ la norma espectral.

(Diciembre 2000)

5. Sea $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ una matriz hermítica, definida positiva que podemos descomponer como $A = D - (E + F)$, con la notación habitual y sea $b \in \mathbb{R}^n$. Para resolver el sistema lineal $Au = b$, consideramos el siguiente método iterativo con $w \in \mathbb{R}$ y u_0 arbitrario:
$$[I + w(D - E)]u_{k+1} = (I + wF)u_k + wb \qquad k \geq 0.$$
   a) Probar que el método es convergente si $w > 0$ o bien, si $wa_{ii} < -2$ para $i = 1, 2, ...n$.
   b) Escribir las ecuaciones que permiten obtener las componentes de u_{k+1} en función de las componentes calculadas hasta ese momento.
   c) Dada
$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix},$$
   se considera el método anterior para $w = 2$ y $w = -1$. ¿Cuál converge más rápidamente?.

(Diciembre 2000)

6. *a*) Determinar el número de soluciones del siguiente sistema de ecuaciones:
$$\left\{ \begin{array}{l} x^2 + y^2 - 10y + 8 = 0 \\ 12x^2y + y - 18x + 3 = 0 \end{array} \right. ,$$
   b) Obtener las dos primeras iteraciones por el Método de Newton, tomando $(x_0, y_0)^t = (0, 0)$.

(Diciembre 2000)

7. *a*) Probar que si $a, b, c \in \mathbb{R}$ y $0 \leq \alpha \leq 1$, se verifica:
      1)
$$|a|^\alpha |b|^{1-\alpha} \leq \alpha|a| + (1-\alpha)|b|$$
      2)
$$|a| + |b|^\alpha |c|^{1-\alpha} \leq (|a| + |b|)^\alpha (|a| + |c|)^{1-\alpha}$$
   b) Sea $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Se definen
$$P_i = \sum_{j\neq i} |a_{ij}|, \quad Q_i = \sum_{j\neq i} |a_{ji}|$$
      1) Probar que $\rho(A) \leq \max\limits_{1\leq i\leq n} \{|a_{ii}| + P_i^\alpha Q_i^{1-\alpha}\}$
      2) Justificar que $\rho(A) \leq \max\limits_{1\leq i\leq n} \{(|a_{ii}| + P_i)^\alpha (|a_{ii}| + Q_i)^{1-\alpha}\}$
      3) Justificar que $\rho(A) \leq \max\limits_{1\leq i\leq n} \{|a_{ii}| + \alpha P_i + (1-\alpha)Q_i\}$.
      Para $\alpha = 1/2$, este resultado se llama Teorema de Parker.
   c) Dada la matriz
$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -3 \\ 4 & 2 & 2 \\ -6 & 4 & -4 \end{pmatrix},$$
   determinar el valor de α para el que la última de las cotas anteriores es óptima y hallar dicho valor.

Nota: Recordar:

- Desigualdad de Young: Si $x, y \geq 0$, y $p, q > 1$ son tales $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, entonces
$$xy \leq \frac{1}{p}\, x^p + \frac{1}{q}\, y^q$$

- Desigualdad de Holder: Si $x_i, y_i \in \mathbb{R}$ $i = 1, ..., n$ y $p, q > 1$ son tales $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, entonces

$$\sum_{i=1}^{n} |x_i y_i| \leq (\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p)^{1/p} \cdot (\sum_{i=1}^{n} |y_i|^q)^{1/q}$$

- Los autovalores de A se encuentran en la unión de los círculos de Ostrowski

$$C_i = \{z \in \mathbb{C} \,/\, |z - a_{ii}| \leq P_i^{\alpha} Q_i^{1-\alpha}\} \qquad i = 1, 2, ..., n.$$

(Febrero 2001)

8. Sea A una matriz hermítica, definida positiva. Sea B la única matriz hermítica, definida positiva tal que $A = B^2$. Probar que

$$\mathrm{cond}_s(B) \leq \mathrm{cond}_s(A).$$

   Para ello, comprobar previamente que:

   a) Si $\mathrm{sp}(A) = \{\lambda_1, \lambda_2, ...\lambda_n\}$, entonces $\mathrm{sp}(B) = \{\sqrt{\lambda_1}, \sqrt{\lambda_2}, ...\sqrt{\lambda_n}\}$.

   b) $\mathrm{cond}_s(B) = \sqrt{\mathrm{cond}_s(A)}$

   (Febrero 2001)

9. Se considera el sistema lineal $Au = b$, siendo $b \in \mathbb{R}^3$ y

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -2 & 0 \\ -2 & 4 & -2 \\ 0 & -2 & 4 \end{pmatrix},$$

   a) ¿Es A definida positiva?

   b) Estudiar la convergencia de los Métodos de Jacobi, Gauss-Seidel y Relajación.

   c) Plantear el Método de Gauss-Seidel por puntos.

   d) Obtener una expresión explícita de la norma infinito del error en la etapa k, tomando como punto inicial $u_0 = (0, 0, 0, 0)^t$ para dicho método.

   (Febrero 2001)

10. *a*) Sean $A, B \in \mathcal{M}_n$, B invertible. Probar que

$$\|AB\| \geq \frac{\|A\|}{\|B^{-1}\|}$$

   b) Dadas $A, B \in \mathcal{M}_n$ hermíticas y definidas positivas, cuyos autovalores verifican $\lambda_1(A) \leq ... \leq \lambda_n(A)$ y $\lambda_1(B) \leq ... \leq \lambda_n(B)$, probar utilizando el Teorema de Courant-Fisher, que

$$\lambda_n(A + B) \leq \lambda_n(A) + \lambda_n(B)$$

$$\lambda_1(A + B) \geq \lambda_1(A) + \lambda_1(B)$$

   c) Probar que si $A, B \in \mathcal{M}_n$, A es invertible y $B \neq A^{-1}$, entonces para cualquier norma matricial subordinada se verifica

$$\frac{\|AB - I\|}{\|BA - I\|} \leq \mathrm{cond}(A)$$

   d) Dadas $A, B \in \mathcal{M}_n$ hermíticas y definidas positivas, probar que

$$\mathrm{cond}_s(A + B) \leq \max\{\mathrm{cond}_s(A), \mathrm{cond}_s(B)\}$$

   (Septiembre 2001)

11. Se considera el sistema lineal $Au = b$, siendo $b \in \mathbb{R}^4$ y

$$A = \begin{pmatrix} \alpha & 0 & \beta & \beta \\ 0 & \alpha & \beta & \beta \\ \beta & \beta & \alpha & 0 \\ \beta & \beta & 0 & \alpha \end{pmatrix} \qquad \alpha, \beta \neq 0,$$

a) Dar una condición sobre α y β para que el método de Gauss-Seidel por puntos converja.

b) Si escribimos la matriz A en la forma siguiente:

$$A = \left(\begin{array}{ccc|c} \alpha & 0 & \beta & \beta \\ 0 & \alpha & \beta & \beta \\ \beta & \beta & \alpha & 0 \\ \hline \beta & \beta & 0 & \alpha \end{array}\right),$$

dar una condición sobre α y β para que el método de Gauss-Seidel por bloques converja.

(Septiembre 2001)

12. Sabiendo que el sistema

$$\begin{cases} x + \cos(x+y) = 1 \\ y + \operatorname{sen}(x+y) = 1, \end{cases}$$

posee una única solución, obtener las dos primeras iteraciones por el método de Whittaker, tomando $(x_0, y_0)^t = (0,0)$. (Septiembre 2001)

13. Supongamos que, para cierta norma matricial subordinada y cierto $\alpha > 0$, tenemos que $||I + \alpha B|| = \frac{1}{2}$. Probar que entonces B es invertible y que

$$||B^{-1}|| \leq 2\alpha.$$

(Curso 2004/2005)

14. Sea A una matriz simétrica de orden n y estrictamente diagonal dominante. Supongamos que todos los elementos de la diagonal de A cumplen que $a_{ii} > 0$.

a) Probar que, dado $\lambda \in sp(A)$, existe $i \in \{1, \ldots, n\}$ tal que

$$0 < \lambda < 2a_{ii}.$$

b) Deducir que A es definida positiva y que

$$\rho(A^{-1}) > \frac{1}{2 \max\limits_{1 \leq i \leq n} a_{ii}}.$$

(Curso 2004/2005)

15. Se considera el sistema lineal $Ax = b$, siendo

$$A = \left(\begin{array}{cc|cc} 3 & \alpha & 0 & 0 \\ \beta & 4 & \alpha & 0 \\ \hline 0 & \beta & 3 & \alpha \\ 0 & 0 & \beta & 4 \end{array}\right), \qquad \alpha, \beta > 0, \qquad b = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

a) Plantear el método de Gauss-Seidel por puntos. Usando el radio espectral de la matriz de este método, obtener para qué valores de α y de β es el método convergente.

b) Suponiendo que $\alpha = \beta$, probar que A es definida positiva si $\alpha < 3/2$. Deducir que el método de Jacobi por bloques, con bloques con la estructura del enunciado, es convergente.

c) Supongamos que $\alpha = \beta = 2$. Obtener una expresión explícita de la norma euclídea del error en función del número de iteraciones, para el método de Gauss-Seidel por puntos, tomando como inicialización $x^{(0)} = (-1, 1, -1, 0)^t$.

(Curso 2004/2005)

16. Se considera el sistema de ecuaciones no lineal:

$$(1) \quad \begin{cases} x - y - \ln(x+2) = 0, \\ \dfrac{x^2}{9} + \dfrac{y^2}{4} = 1. \end{cases}$$

a) Determinar gráficamente el número de soluciones que tiene. Comprobar que una de las soluciones, que denotamos por (α_1, α_2), tiene sus dos componentes positivas.

b) Comprobar que hay convergencia local del Método de Newton hacia la raíz (α_1, α_2).

c) Plantear el Método de Newton para el sistema (1) y obtener las dos primeras iteraciones, partiendo de $(x_0, y_0) = (2, 1)$.

(Curso 2004/2005)

17. Sean A una matriz simétrica y $\alpha \in \mathbb{R}$. Probar, a partir del Teorema de Schur, que

$$\lambda_i(A + \alpha I) = \lambda_i(A) + \alpha.$$

(Curso 2004/2005)

18. Se considera el sistema lineal $Ax = b$, siendo $b \in \mathbb{R}^4$ dado y

$$A = \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & -\alpha & -\alpha \\ 0 & 1 & -\alpha & -\alpha \\ \hline -\beta & -\beta & 1 & 0 \\ -\beta & -\beta & 0 & 1 \end{array} \right), \qquad \alpha, \beta \neq 0.$$

a) Plantear los métodos de Jacobi y Gauss-Seidel para la descomposición por bloques del sistema considerado.

b) Probar que si $|\alpha\beta| < 1/4$ el método de Gauss-Seidel para la descomposición por bloques del sistema considerado, es convergente. Usando directamente los resultados de teoría, deducir que para estos valores de α y β, el método de Jacobi por puntos converge.

c) Supongamos que $\alpha = \beta = 1/3$. Probar que, para la descomposición por bloques del sistema considerado, el método de relajación por bloques es convergente para $\omega \in (0, 2)$.

(Curso 2004/2005)

19. a) Determinar gráficamente el número de soluciones del sistema no lineal de ecuaciones:

$$(1) \qquad \begin{cases} x^2 - 4x + y^2 = 0, \\ y - \ln\left(\dfrac{x}{2}\right) = 0, \end{cases}$$

comprobando que una de las soluciones, que denotamos por $r = (r_1, r_2)$, está en el primer cuadrante.

b) Plantear el Método de Newton para el sistema (1) y comprobar que hay convergencia local del Método de Newton hacia la raíz r.

c) Obtener las dos primeras iteraciones del Método de Newton para aproximar r, partiendo de $(x_0, y_0) = (4, 1)$.

(Curso 2004/2005)

20. Se consideran las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1-i & 0 \\ 1+i & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \qquad \text{y} \qquad C = \begin{pmatrix} 2\alpha & 0 & \beta \\ 0 & 2\alpha & 0 \\ \beta & 0 & 2\alpha \end{pmatrix},$$

con $\alpha > 0$.

a) Para $\beta = 1$, hallar, sin necesidad de calcular el determinante, condiciones para los valores de α en las que podamos asegurar que la matriz $C + A$ sea regular.

b) Para $\beta = 0$, hallar un intervalo para el que podamos asegurar que la matriz $C + A = 2\alpha I + A$ sea hermítica y definida positiva.

(Curso 2004/2005)