Cálculo Numérico III Curso 2010/11

Hoja de problemas - Parte I

Problemas del Tema 1

1. Sean $\{x_0, x_1, \ldots, x_n\} \subset \mathbb{R}$ con $x_i \neq x_j$ si $i \neq j$.

   a) Hallar el polinomio de grado $\leq n$ que interpola a la función
   $$f(x) = (x - x_0)(x - x_1)\ldots(x - x_n)$$
   en los puntos $\{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$.

   b) Calcular el polinomio de interpolación de Lagrange de la función $f(x) = x^{n+1}$ en los puntos $\{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ utilizando la fórmula del error de interpolación.

2. *Caso de soporte uniforme (puntos equidistantes) en* $[a, b]$.

   Fijados $h > 0$, $x_0 \in \mathbb{R}$ y $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ consideramos los puntos equidistantes $\{x_0, \ldots, x_n\} \subset [a, b]$ de la forma
   $$\{x_k = x_0 + kh, \quad k = 0, 1, \ldots, n\}.$$

   a) Probar que el polinomio de interpolación de Lagrange p_n en la forma de Lagrange asociado a (x_i, y_i), $i = 0, \ldots, n$ con y_i arbitrarios tiene la forma siguiente:
   $$p_n(x) = \sum_{i=0}^{n} y_i\, l_i\left(\frac{x - x_0}{h}\right), \quad \text{siendo} \quad l_i(t) = \prod_{j=0, j\neq i}^{n} \frac{t - j}{i - j}, \quad t \in [0, n].$$
   Indicación: Realizar el cambio de variable $x \in [x_0, x_n] \mapsto t \in [0, n]$.

   b) Calcular los $l_i(t)$ para $i = 0, 1, 2, 3$.

   c) Hallar el polinomio de interpolación de Lagrange asociado al soporte formado por los puntos $\{x_0, x_1, x_2, x_3\} = \{-2, -1, 0, 1\}$ y a las funciones

   1) $f_1(x) = 0{,}5x^4 + x^3 - 0{,}5x^2$;
   2) $f_2(x) = x(1 - \operatorname{sen} \pi x)$.

3. Calcular el polinomio de interpolación asociado a las siguientes tablas de valores:

   (a)

x	0	1	2
$f(x)$	51	3	1

   (b)

x	0	1	2	7
$f(x)$	51	3	1	201

4. Se considera la función $f(x) = 2^{x-1}$, $x \in \mathbb{R}$.

   a) Calcular el polinomio que interpola a f en los nodos $\{x_0, x_1, x_2, x_3\} = \{0, 1, 2, 3\}$.

   b) Determinar el error relativo que se comete al aproximar $f(3/2)$ mediante $p(3/2)$.

5. Sea $f(x) = \log_4(x)$, $x > 0$. Calcular $p(32)$, siendo p el polinomio de menor grado posible que coincide con f en los puntos siguientes:

   (a) $\{x_0, x_1\} = \{1, 64\}$; (b) $\{x_0, x_1, x_2\} = \{1, 64, 256\}$.

   Calcular en cada caso la diferencia $f(32) - p(32)$.

   Este ejemplo muestra que la precisión en la interpolación por polinomios no se mejora necesariamente aumentando el número de puntos de interpolación.

6. *Cálculo de raíces de una ecuación no lineal mediante interpolación.*

   Se considera la función $f(x) = x + e^x$. Determinar el número de raíces de la ecuación $f(x) = 0$ y localizarlas en intervalos disjuntos. Usando el polinomio de interpolación de f en 4 nodos, aproximar la mayor raíz de $f(x) = 0$ y calcular el error que se comente en dicha aproximación.

7. Supongamos que $f : [0, +\infty) \mapsto \mathbb{R}$ es tal que existen $f^{(m)}$, $m = 0, 1, 2, \ldots$, son continuas y

$$|f^{(m)}(x)| \leq 1 \quad \forall\, x \geq 0.$$

Para cada h fijo, sea p_n el polinomio de interpolación de f en los puntos $\{0, h, 2h \ldots, nh\}$, $n \in \mathbb{N}$.
¿Para qué valores de h se puede asegurar que

$$\lim_{n \to +\infty} p_n(x) = f(x) \quad \forall\, x \geq 0\,?$$

8. Sea $f(x) = e^x$ y p_n el polinomio de interpolación de f en $(n+1)$ nodos cualesquiera del intervalo $[a, b]$. Probar que

$$|f(x) - p_n(x)| \leq \frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!} e^b \quad \forall\, x \in [a, b].$$

¿Qué se puede decir sobre la convergencia de p_n cuando $n \to +\infty$?

9. Sean $f \in C^4(\mathbb{R})$ tal que $|f^{4)}(x)| \leq M_4$ para todo $x \in \mathbb{R}$ y p_3 el polinomio de interpolación de f en los puntos $x_k = kh$, $k = 0, 1, 2, 3$ con $h > 0$ fijo. Comprobar las siguientes cotas del error de interpolación:

   a) $\displaystyle\max_{x_0 \leq x \leq x_3} |f(x) - p_3(x)| \leq \frac{M_4}{24} h^4.$

   b) $\displaystyle\max_{x_1 \leq x \leq x_2} |f(x) - p_3(x)| \leq \frac{9}{16 \cdot 24} M_4 h^4.$

<u>Indicación:</u> Comprobar que $\displaystyle\max_{x_0 \leq x \leq x_3} |w(x)| = h^4$ y $\displaystyle\max_{x_1 \leq x \leq x_2} |w(x)| = \frac{9}{16} h^4$, $w(x) = x(x-h)(x-2h)(x-3h)$, haciendo un cambio de variable al intervalo $[-3/2, 3/2]$.

10. Sea p_n el polinomio de interpolación de $f(x) = e^x$ en los puntos $\{0, \frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \ldots, \frac{n-1}{n}, 1\}$. Hallar el valor mínimo que debe tener n para poder asegurar que

$$|e^x - p_n(x)| < 10^{-6}, \quad 0 \leq x \leq 1.$$

<u>Indicación:</u> Acotar $|w(x)|$ de la mejor manera posible.

11. Sea p_n el polinomio de interpolación de $f(x) = \ln(x^2)$ en los puntos $\{1, 1 + \frac{1}{2n}, 1 + \frac{2}{2n}, \ldots, 1 + \frac{n-1}{2n}, \frac{3}{2}\}$. Hallar el valor mínimo de n para asegurar que

$$|\ln(x^2) - p_n(x)| < 10^{-7}, \quad 1 \leq x \leq 3/2.$$

<u>Indicación:</u> Acotar $|w(x)|$ de la mejor manera posible.

12. Se considera $f(x) = x^3 - x^2 + 1$, $x \in [-1, 1]$.

   a) Hallar p_2 el polinomio de interpolación de Lagrange de f en los puntos $\{-1, 0, 1\}$ de tres formas distintas.

   b) Probar la siguiente cota del error de interpolación:

   $$|f(x) - p_2(x)| \leq \frac{2}{3\sqrt{3}} \quad \forall\, x \in [-1, 1].$$

   <u>Indicación:</u> Usar la cota óptima de la correspondiente función $|w(x)|$ para un soporte regular de 3 puntos.

   c) Calcular el polinomio de interpolación de Lagrange $\hat{p}_2$ que mejor aproxime la función f en $\{\hat{x}_0, \hat{x}_1, \hat{x}_2\} \subset [-1, 1]$ en el sentido de que el error de interpolación sea mínimo.
   Comprobar que en este caso el error de interpolación es más pequeño que el del apartado b).

13. Sea $f \in C^2([a,b])$. Queremos aproximar la función f por su polinomio de interpolación de Lagrange p_1 en los puntos $\{x_0, x_1\} \subset [0,1]$.

    ¿ Cómo hay que escoger los puntos x_0 y x_1 en $[0,1]$ para que la cota del error de interpolación sea mínima? Calcular dichos puntos x_0 , x_1 .

14. Sea $f \in C^{n+1}([a,b])$. Demostrar que los puntos de interpolación

$$x_k = \frac{a+b}{2} + \frac{b-a}{2} \cos \frac{(2k+1)\pi}{2(n+1)}, \quad k = 0, 1, \ldots, n$$

    minimizan la norma infinito en $[a,b]$ del polinomio soporte que actúa en el error de interpolación de Lagrange de la función f en $[a,b]$ y que

$$|f(x) - p_n(x)| \leq \frac{(b-a)^{n+1}}{2^{2n+1}(n+1)!} \max_{x\in[a,b]} |f^{n+1)}(x)| \quad \forall\, x \in [a,b].$$

15. *Forma de Lagrange del polinomio de interpolación de Hermite.*

    Sean $\{x_0, x_1, \ldots, x_n\} \subset \mathbb{R}$ con $x_i \neq x_j$ si $i \neq j$ y $f \in C^1(\mathbb{R})$. El objetivo de este ejercicio es deducir la forma de Lagrange del polinomio de interpolación de Hermite de la función f y de su derivada f' en los puntos $\{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$. Para ello, se pide:

    a) Determinar las constantes c y d de modo que el polinomio

$$A_k(x) = (c + d(x - x_k))L_k^2(x), \quad k = 0, \ldots, n$$

    verifique

$$A_k(x_i) = \delta_{ki}\,, \quad A_k'(x_i) = 0, \quad \forall\, i, \quad k = 0, \ldots, n,$$

    donde $L_k = \prod_{j=0}^{n} \frac{x-x_j}{x_k-x_j}$ son las funciones de *base de Lagrange.*

    b) Determinar las constantes a y b de modo que el polinomio

$$B_k(x) = (a + b(x - x_k))L_k^2(x), \quad k = 0, \ldots, n$$

    verifique

$$B_k(x_i) = 0 \quad \forall\, i, \quad B_k'(x_i) = \delta_{ki}\,, \quad k = 0, \ldots, n.$$

    c) Sea

$$p(x) = \sum_{k=0}^{n} f(x_k)A_k(x) + \sum_{k=0}^{n} f'(x_k)B_k(x).$$

    Demostrar que p es el único polinomio de grado $\leq 2n+1$ tal que

$$p(x_i) = f(x_i), \quad p'(x_i) = f'(x_i), \quad i = 0, \ldots, n.$$

16. Calcular el polinomio de interpolación y una expresión del error asociado a los valores que siguen:

(a)

x	1	2
$f(x)$	2	6
$f'(x)$	3	7

(b)

x	0	1
$f(x)$	-1	-3
$f'(x)$	-3	0

17. (a) Dada una función $f \in C^1([-1,1])$. Demostrar que el siguiente problema de interpolación tiene una única solución:

$$\text{Hallar } p_2 \in \mathbb{P}_2[x] \text{ tal que } p_2'(-1) = f'(-1),\ p_2(0) = f(0),\ p_2'(1) = f'(1).$$

(b) Probar que si $f \in C^3([-1,1])$, entonces para todo $x \in [-1,1]$, existe $\xi_x \in (-1,1)$ tal que

$$f'(x) - p_2'(x) = \frac{f'''(\xi_x)}{2}(x^2-1).$$

Deducir que

$$|f(x) - p_2(x)| \leq \frac{1}{2}||f'''||_\infty |x(1-x^2/3)| \quad \forall\, x \in [-1,1],$$

siendo $||f'''||_\infty = \max_{-1\leq x\leq 1} |f'''(x)|$.

18. *Interpolación de Lagrange cuadrática a trozos.*

Sean $f \in C^0([a,b])$ y $\{a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_n = b\}$ un soporte contenido en $[a,b]$. Pongamos $h = \max_{1\leq i\leq n}(x_i - x_{i-1})$ e introducimos el siguiente espacio:

$$V_h = \{w_h \in C^0([a,b]) \,:\, w_h|_{[x_{i-1},x_i]} \in \mathbb{P}_2\,, \quad 1 \leq i \leq n\}.$$

En el soporte dado fijemos unos puntos $\xi_i \in (x_{i-1}, x_i)$, $i = 1,\ldots,n$.

Consideramos el siguiente problema de interpolación:

$$(P) \quad \begin{cases} \text{Hallar } v_h \in V_h \text{ tal que} & \\ v_h(x_i) = f(x_i), & 0 \leq i \leq n, \\ v_h(\xi_i) = f(\xi_i), & 1 \leq i \leq n. \end{cases}$$

a) Probar que (P) tiene una única solución.

b) Además, si $f \in C^3([a,b])$, probar que entonces se verifica

(i)

$$\max_{x\in[a,b]} |f(x) - v_h(x)| \leq \frac{M_3}{24}h^3 \quad \text{con } M_3 = \max_{x\in[a,b]} |f'''(x)|;$$

(ii)

$$\max_{x\in[a,b]} |f(x) - v_h(x)| \leq \frac{M_3}{72\sqrt{3}}h^3 \quad \text{cuando se elige } \xi_i \text{ el punto medio entre } x_{i-1} \text{ y } x_i.$$

19. *Interpolación de Lagrange cúbica a trozos.*

Generalizar el problema anterior al caso en que se fijan $\xi_i < \eta_i$ en (x_{i-1}, x_i), $1 \leq i \leq n$ y probar que tiene una única solución.

Además, si $f \in C^4([a,b])$ deducir que $\max_{x\in[a,b]} |f(x) - v_h(x)| \leq \frac{M_4}{96}h^4$, $M_4 = \max_{x\in[a,b]} |f^{4)}(x)|$ y siendo la cota de $\frac{M_4}{1944}h^4$ cuando se elige ξ_i y η_i tal que los puntos $\{x_{i-1}, \xi_i, \eta_i, x_i\}$ sean equidistantes.

20. *Interpolación de Hermite a trozos*

Sean $f \in C^1([a,b])$ y $\{a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_n = b\}$ una partición del intervalo $[a,b]$. Introducimos el siguiente espacio:

$$V_h = \{w_h \in C^1([a,b]) \,:\, w_h|_{[x_{i-1},x_i]} \in \mathbb{P}_3[x]\,, \quad 1 \leq i \leq n\}.$$

Consideramos el siguiente problema de interpolación:

$$(P) \quad \begin{cases} \text{Hallar } v_h \in V_h \text{ tal que} & \\ v_h(x_i) = f(x_i), & 0 \leq i \leq n, \\ v_h'(x_i) = f'(x_i), & 0 \leq i \leq n. \end{cases}$$

a) Demostrar que (P) tiene una única solución.

b) Además, si $f \in C^4([a,b])$, probar que existe una constante $C > 0$ tal que

$$\max_{x\in[a,b]} |f(x) - v_h(x)| \leq C\, h^4 \max_{x\in[a,b]} |f^{4)}(x)|. \quad \text{(cota óptima: } C = 1/(4!4^2) = 1/384)$$

21. Sea $f(x) = x - 9^{-x}$. Construir el *spline* cúbico natural (con condiciones de frontera libre) asociado al soporte $\{x_0, x_1, x_2\} = \{0, 1/2, 1\}$.

    Calcular una cota del error de interpolación.

22. Determinar si la función

$$S(x) = \begin{cases} -1 + 2x + \dfrac{1}{2}x^2 - \dfrac{1}{2}x^3, & x \in [-2, 0], \\ -1 + 2x + \dfrac{1}{2}x^2 - \dfrac{1}{6}x^3, & x \in [0, 1]. \end{cases}$$

es el *spline* cúbico natural para la siguiente tabla de valores:

x	-2	0	1
$f(x)$	1	-1	2

23. Sean $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.

    a) Determinar los valores de λ y μ para que

$$S(x) = \begin{cases} \lambda x(x^2+1), & x \in [0,1], \\ -\lambda x^3 + \mu x^2 - 5\lambda x + 1, & x \in [1,2] \end{cases}$$

    sea una función *spline* cúbica.

    b) Con los valores de λ y μ obtenidos en el apartado anterior averiguar si S puede ser una función *spline* cúbica de interpolación de la función

$$f(x) = x^2, \quad 0 \leq x \leq 2$$

    en los puntos $\{0, 1, 2\}$.

24. *Spline cuadrático (dos intervalos en la partición).*

    Sea $f \in C^2([a,b])$ y sean $\{a = x_0 < x_1 < x_2 = b\}$ nodos dados. Sea la función S dada por

$$S(x) = \begin{cases} S_0(x) = a_0 + b_0(x - x_0) + c_0(x - x_0)^2, & x \in [x_0, x_1], \\ S_1(x) = a_1 + b_1(x - x_1) + c_1(x - x_1)^2, & x \in [x_1, x_2] \end{cases}$$

    con a_i , b_i , c_i , $i = 0, 1$ a determinar.

    a) Demostrar que las siguientes condiciones determinan de manera única el *spline* cuadrático S:

$$\begin{array}{lll} S(x_0) = f(x_0), & S(x_1) = f(x_1), & S(x_2) = f(x_2), \\ S_0'(x_1) = S_1'(x_1), & & \\ S_0''(x_1) = S_1''(x_1). & & \end{array}$$

    ¿Se verifica que $S \in C^2([a,b])$?

    b) Usando los cálculos realizados en el apartado anterior, probar que si en vez de $S_0''(x_1) = S_1''(x_1)$ imponemos $S'(x_0) = f'(x_0)$ o bien $S'(x_2) = f'(x_2)$, podemos también determinar de manera única las constantes a_i , b_i , c_i , $i = 0, 1$. ¿Se verifica en este caso que $S \in C^2([a,b])$?

c) Consideramos ahora tres intervalos en la partición de $[a,b]$, es decir sean $\{a = x_0 < x_1 < x_2 < x_3 = b\}$ nodos dados. ¿Podemos asegurar, en general, la existencia y unicidad de un *spline* cuadrático que sea de clase C^2 en $[a,b]$?

Indicación: Estudiar el número de condiciones y los grados de libertad disponibles.

25. *Spline cuadrático (n intervalos en la partición).*

Sea $\{a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_n = b\}$ una partición del intervalo $[a,b]$. Definir un *spline* cuadrático S que interpole los datos $(x_i, f(x_i))$, $i = 0, \ldots n$ y probar que dicho *spline* es único si $S'(x_0) = 0$.

¿Se verifica que $S \in C^2([a,b])$?

Problemas del Tema 2

26. Se consideran $C^0([a,b])$ el espacio de las funciones continuas sobre el intervalo $[a,b]$ y $(\cdot,\cdot)_2$ el producto escalar en $C^0([a,b])$ definido por $(u,v)_2 = \displaystyle\int_a^b u(x)v(x)\,dx$, $\forall\, u,v \in C^0([a,b])$.

Probar que $H = (C^0([a,b]), (\cdot,\cdot)_2)$ es un espacio prehilbertiano y no es un espacio de Hilbert.

27. *Propiedades de la matriz Grammiana*

Sean H un espacio prehilbertiano sobre $\mathbb{R}$, $(\cdot,\cdot)$ un producto escalar en H y $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n \in H$.

a) Probar que la matriz $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_{n\times n}$ con $a_{ij} = (\varphi_i, \varphi_j)$, $1 \le i,j \le n$ es simétrica y semidefinida positiva.

b) Si los $\{\varphi_i\}_{i=1}^n \subset H$ son linealmente independientes, probar que la matriz A del apartado anterior es definida positiva.

28. *Matriz de Hilbert*

Se considera la matriz de Hilbert $\mathcal{H} \in \mathcal{M}_{n\times n}$ definida por

$$\mathcal{H} = (h_{ij}) \quad \text{con} \quad h_{ij} = \frac{1}{i+j-1}\,, \quad 1 \le i,j \le n.$$

Demostrar que $\mathcal{H}$ es definida positiva.

Indicación: Usar el resultado del ejercicio 27 tomando como espacio prehilbertiano $H = C^0([0,1])$ con $(\varphi_i, \varphi_j) = \displaystyle\int_0^1 \varphi_i(x)\varphi_j(x)\,dx$ siendo $\varphi_i = x^{i-1}$, $i = 1, \ldots, n$.

29. Sean el espacio prehilbertiano $H = (C^0([0,1], (\cdot,\cdot)_2)$ con $(u,v)_2 = \displaystyle\int_0^1 u(x)v(x)\,dx$, $\forall\, u,v \in C^0([0,1])$ y $\mathbb{P}_n[x] =< 1, x, x^2, \ldots, x^n >$.

Dada $f \in H$, formular el problema de mejor aproximación por mínimos cuadrados en $\mathbb{P}_n[x]$ y escribir las ecuaciones normales para determinar dicha aproximación, explicitando la matriz del sistema.

30. *Pseudosolución de un sistema lineal.*

Sean $A \in \mathbb{R}^{M\times N}$ una matriz rectangular de dimensión $M \times N$ y $b \in \mathbb{R}^M$ un vector dados. Denotemos por $\|\cdot\|_2$ la norma euclídea de $\mathbb{R}^M$. Se dice que $\bar{x}$ es *pseudosolución* del sistema lineal

$$Ax = b$$

si $\bar{x} \in \mathbb{R}^N$ es solución del problema

$$\text{(P)} \qquad \|b - A\bar{x}\|_2 \le \|b - Ax\|_2 \quad \forall\, x \in \mathbb{R}^N.$$

Probar que (P) siempre admite solución $\bar{x}$ que se caracteriza por ser solución del sistema lineal

$$A^t A\bar{x} = A^t b.$$

Dar condiciones necesarias y suficientes de unicidad de pseudosolución.

Indicación: Considerar (P) como un problema de mejor aproximación a b en $\mathbb{R}^M$.

31. Sean $H = (C^0([-1,1], (\cdot,\cdot)_2)$ con $(u,v)_2 = \displaystyle\int_{-1}^{1} u(x)v(x)\,dx$, $\forall\, u, v \in C^0([-1,1])$ y $\mathbb{P}_2[x] =< 1, x, x^2 >$.

    a) Usando el proceso de ortonormalización de Gram-Schmidt construir una base ortonormal de $\mathbb{P}_2[x]$.

    b) Sea $f(x) = x^3$, $x \in [-1,1]$. Usando la base ortonormal construida en el apartado anterior, determinar la mejor aproximación a f en $\mathbb{P}_2[x]$ en el sentido de mínimos cuadrados para la norma asociada al producto escalar $(\cdot,\cdot)_2$.

32. Calcular la mejor aproximación de la función $f(x) = x^2$, $x \in [0,1]$ sobre $\mathbb{P}_1[x]$:

    a) En el sentido de mínimos cuadrados para la norma de $L^2(0,1)$ de dos formas distintas.

    b) En el sentido de la norma uniforme ($||f||_\infty = \max\limits_{x\in[a,b]} |f(x)|$, $\forall\, f \in C^0([a,b])$).

33. Determinar el polinomio de grado menor o igual que dos que mejor aproxime la función $f(x) = \operatorname{sen} \pi x$ en el intervalo $[0,1]$ en el sentido de mínimos cuadrados para la norma de $L^2(0,1)$. Hacerlo de dos formas distintas.

34. Sean $H = (C^0([a,b]), (\cdot,\cdot)_2)$ con $(u,v)_2 = \displaystyle\int_{a}^{b} u(x)v(x)\,dx$, $\forall\, u, v \in C^0([a,b])$ y $E_n = \langle 1, e^x, e^{2x}, \ldots, e^{nx}\rangle$.

    a) Dada $f \in C^0([a,b])$, probar que existe una única solución del problema de mejor aproximación:

    $$\begin{cases} \text{Hallar } h \in E_n \text{ tal que} \\ \|f-h\|_2 \le \|f-g\|_2 \quad \forall\, g \in E_n\,. \end{cases}$$

    Caracterizar dicha solución a partir de las ecuaciones normales.

    b) Para $f(x) = e^{2x}$ calcular la mejor aproximación sobre E_1 en el intervalo $[0,1]$ de dos formas distintas.

35. *Mejor aproximación mediante los polinomios de Chebychev*

    El objetivo de este ejercicio es analizar el problema de mejor aproximación de una función dada $f \in C^0([-1,1])$ mediante polinomios de Chebychev.

    Definimos la forma:

    $$\begin{array}{rcl} (\cdot,\cdot)_w : \quad C^0([-1,1]) \times C^0([-1,1]) & \mapsto & \mathbb{R} \\ (g,h)_w & \mapsto & \displaystyle\int_{-1}^{1} w(x)g(x)h(x)\,dx \quad \text{con } w(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \textit{ función de peso} \end{array}$$

    a) Probar que $(C^0([-1,1]), (\cdot,\cdot)_w)$[1] es un espacio prehilbertiano.

    b) Sean $T_n(x) = \cos(n \arccos x)$, $n \ge 0$. Probar que $\{T_n\}_{n\ge 0}$ forman un sistema ortogonal respecto al producto escalar $(\cdot,\cdot)_w$.

[1]El propósito de una *función de peso* consiste en asignar diferentes grados de importancia a las aproximaciones en diferentes partes del intervalo. En este caso, la función de peso w pone menos énfasis cerca del centro del intervalo $(-1,1)$ y más énfasis cuando $|x|$ está cerca de uno.

c) Sea $V_N =< T_0, T_1, \dots, T_N >$ el subespacio de $C^0([-1,1])$ generado por los $\{T_n\}_{n=0}^N$, $N \in \mathbb{N}$. Plantear el problema de mejor aproximación sobre V_N en el sentido de mínimos cuadrados para la norma asociada al producto escalar $(\cdot,\cdot)_w$. Justificar que este problema tiene una única solución, caracterizarla y calcularla.

36. *Mejor aproximación mediante polinomios trigonométricos*

Sea $H = (C^0([-\pi,\pi]), (\cdot,\cdot)_2)$ con $(u,v)_2 = \displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} u(x)v(x)\,dx$, $\forall\, u,v \in C^0([-\pi,\pi])$. Consideramos el subespacio vectorial $V_n = \langle \frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos x, \frac{1}{\sqrt{\pi}}\operatorname{sen} x, \frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos 2x, \frac{1}{\sqrt{\pi}}\operatorname{sen} 2x, \dots, \frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos nx, \frac{1}{\sqrt{\pi}}\operatorname{sen} nx\rangle$.

a) Probar que $\{\frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos x, \frac{1}{\sqrt{\pi}}\operatorname{sen} x, \frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos 2x, \frac{1}{\sqrt{\pi}}\operatorname{sen} 2x, \dots, \frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos nx, \frac{1}{\sqrt{\pi}}\operatorname{sen} nx\}$ es un sistema ortonormal respecto al producto escalar $(\cdot,\cdot)_2$.

b) Dada $f \in C^0([-\pi,\pi])$, formular el problema de mejor aproximación de f en V_n en el sentido de mínimos cuadrados para la norma asociada al producto escalar $(\cdot,\cdot)_2$. Probar que este problema tiene una única solución y caracterizarla a partir de las ecuaciones normales.

37. Sea el espacio prehilbertiano $H = (C^0([0,1]), (\cdot,\cdot)_2)$ con $(u,v)_2 = \displaystyle\int_0^1 u(x)v(x)\,dx$, $\forall\, u,v \in C^0([0,1])$ y $||\cdot||_2$ la norma asociada al producto escalar $(\cdot,\cdot)_2$. Consideramos una partición $\{0 = x_0 < x_1 < \cdots < x_N = 1\}$ del intervalo $[0,1]$ y el espacio V_h de *splines lineales* asociado a esta partición:

$$V_h = \{v_h \in C^0([0,1]) \,:\, v_h|_{[x_{i-1},x_i]} \in \mathbb{P}_1[x], \quad i = 1,2,\cdots,N\}, \quad \text{siendo } h = \max_{1\le i\le N}(x_i - x_{i-1}).$$

Dada $f \in C^0([0,1])$, planteamos el siguiente problema de determinar la mejor aproximación $\Pi_h f$ de la función f en V_h:

$$(\mathrm{P}) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{Hallar } \Pi_h f \in V_h \text{ tal que} \\ ||f - \Pi_h f||_2 \le \|f - v_h\|_2 \quad \forall\, v_h \in V_h\,. \end{array} \right.$$

a) Probar que V_h es un subespacio vectorial de dimensión $N+1$ y determinar una base de V_h.
<u>Indicación:</u> Observar que toda función $v_h \in V_h$ está unívocamente determinada por sus valores en los nodos, es decir por $v_h(x_i)$ para todo $i = 0,\dots,N$.

b) Probar que (P) admite una única solución. Caracterizarla como solución de un sistema lineal cuadrado de orden $N+1$.

c) Supongamos que $f \in C^2([0,1])$. Probar la siguiente estimación:

$$||f - \Pi_h f||_2 \le h^2\, \|f''\|_2\,.$$

<u>Indicación:</u> Usar estimaciones entre f y su spline lineal asociado $S_h f$.

d) Deducir que si $f \in C^0([0,1])$, entonces se tiene que

$$\lim_{h\to 0} \|f - \Pi_h f\|_2 = 0.$$

<u>Indicación:</u> Usar el hecho de que $\mathbb{P}[x]$ es denso en $C^0([0,1])$ (en norma $||\cdot||_2$), cuya demostración es consecuencia del teorema de Weierstrass.

38. *Recta de regresión (aproximación discreta)*

Supongamos conocidos los pares de valores $\{(x_i,y_i)\}$, $i = 1,\dots,m$. El objetivo de este ejercicio es determinar la recta $p(x) = a_1 + a_2 x$ que mejor aproxime dichos puntos en el sentido de *mínimos cuadrados* para la norma inducida por el semi-producto escalar $(u,v)_m = \sum_{j=1}^m u(x_j)v(x_j)$, $\forall\, u,v \in C^0(\mathbb{R})$.

a) Plantear el problema de mejor aproximación por mínimos cuadrados.

b) Escribir las ecuaciones normales y resolverlas para determinar las constantes a_1 y a_2 .

c) Usando los resultados obtenidos, determinar la recta que mejor aproxime los siguientes valores en el sentido de mínimos cuadrados:

x_i	2	4	6	8
y_i	2	11	28	40

(Solución: $a_1 = -12,5$ y $a_2 = 6,55$).

39. Escribir el *sistema no lineal* para determinar una recta que mejor aproxime los valores de la tabla del ejercicio anterior para la semi-norma definida por

$$||u|| \equiv \left(\sum_{i=1}^{4} (u(x_i))^4 \right)^{1/2} .$$

Indicación: Usar resultados básicos de minimización de funciones de dos variables.

40. Sean $\{a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b\}$ una partición del intervalo $[a, b]$ y $h = \max\limits_{1 \le i \le N} (x_i - x_{i-1})$ el diámetro de la partición. Sea $H = (C^1([a, b]), (\cdot, \cdot)_d)$ con $(\cdot, \cdot)_d$ el semi-producto escalar definido por

$$(u, v)_d = \sum_{k=0}^{N} u(x_k)v(x_k) + \sum_{k=0}^{N} u'(x_k)v'(x_k) \quad \forall\, u, v \in C^1([a, b]).$$

Denotemos por $|| \cdot ||_d$ la semi-norma asociada a $(\cdot, \cdot)_d$, es decir

$$\|v\|_d = \left[\sum_{k=0}^{N} |v(x_k)|^2 + \sum_{k=0}^{N} |v'(x_k)|^2 \right]^{1/2} \qquad \forall\, v \in C^1([a, b]).$$

Consideramos el espacio

$$V_h = \{v_h \in C^1([a, b]) \,:\, v_h|_{[x_{i-1}, x_i]} \in \mathbb{P}_3[x], \quad i = 1, 2, \cdots, N\}.$$

a) Probar que V_h es un subespacio vectorial de $C^1([a, b])$ de dimensión $2(N + 1)$ y determinar una base de V_h .

Indicación: Observar que toda función $v_h \in V_h$ está unívocamente determinada por $v_h(x_i)$ y $v_h'(x_i)$ para todo $i = 0, \ldots, N$.

b) Dada $f \in C^1([a, b])$, consideramos el problema de mejor aproximación

$$\text{(P) Hallar } u_h \in V_h \text{ tal que } \|f - u_h\|_d^2 \le \|f - v_h\|_d^2 \quad \forall\, v_h \in V_h .$$

Probar que (P) admite una única solución y caracterizarla como solución de un sistema lineal de dimensión $2(N + 1)$.

Deducir que la solución de (P) coincide con la interpolación de Hermite a trozos.

41. Hallar la *mejor aproximación polinómica uniforme* por polinomios de grado 0 y 1:

a) Para $f(x) = e^x$ en el intervalo $[0, 1]$.

b) Para $f(x) = x^2$ en el intervalo $[-1, 2]$ y también en el intervalo $[-2, 2]$.