ECUACIONES DIFERENCIALES ORDINARIAS
Curso 2005/06

Examen de Junio

Problema 1. Se considera la EDO

$$y' + \frac{1}{x}y = x^3y^3 + \alpha|y|.$$

Se pide
a) Determinar razonadamente los dominios maximales de existencia y unicidad de la ecuación anterior
b) Para $\alpha = 0$, hallar las soluciones maximales y los intervalos maximales de las soluciones de los problemas de Cauchy correspondientes a la ecuación anterior con datos iniciales $y(1) = 1$ e $y(1) = 0$.

RESPUESTA

a) Para $x \neq 0$, $\quad y' = f(x,y) = -\frac{1}{x}y + x^3y^3 + \alpha|y| = f_1(x,y) + f_2(x,y)$.
$f_1(x,y) = -\frac{1}{x}y + x^3y^3$ es continua y con derivada parcial respecto a y continua para $x \neq 0$.Luego $f_1$es continua y localmente Lipschitziana respecto de y en $x \neq 0$

$f_2(x,y) = \alpha|y|$ es continua y $|f_2(x,y) - f_2(x,z)| = |\alpha||y| - |z|| \leq |\alpha||y - z|$. Luego f_2 es continua y Lipschitziana respecto de y en todo R^2.De lo anterior tenemos que $f = f_1 + f_2$ es continua y localmente Lipschitziana respecto de y en $x \neq 0$.

Los dominios maximales pedidos son pues $\Omega_1 = \{R^2 \cap x > 0\}$ y $\Omega_2 = \{R^2 \cap x < 0\}$

b)Para $\alpha = 0$ la EDO es de Bernoulli.Para $y \neq 0$ tenemos $y^{-3}y' + \frac{1}{x}y^{-2} = x^3$, el cambio $z = y^{-2}$ la transforma en la ecuación lineal $z' - \frac{2}{x}z = -2x^3$ que resuelta da $z = Cx^2 + x^4$, deshaciendo el cambio $y^2 = \frac{1}{Cx^2+x^4}$. A esta solución general hay que aadirle la solución evidente $y = 0$ Imponiendo la condición inicial $y(1) = 1$ tenemos $C = 2$ con lo que

$$y = \frac{1}{x\sqrt{2 - x^2}}$$

.(El sigmo mas de la raiz es el compatible con la condición inicial)
El intervalo maximal de definición de la solución es $I = (0, +\sqrt{2})$.

Para la condición inicial $y(1) = 0$ la única solución es $y = 0$ con intervalo de definición $I = (0, +\infty)$.

Problema 2.
Enunciar el lema de Gronwall.

Sea φ la solución maximal del problema del problema de Cauchy

$$\begin{cases} y' = yseny \\ y(0) = 1, \end{cases}$$

definida en el intervalo maximal (α, β).
b) Demostrar que para todo $x \in [0, \beta)$ se tiene

$$|\varphi(x)| \leq e^x.$$

c) Demostrar razonadamente que se tiene $\beta = +\infty$.

RESPUESTA

b) $\varphi = 1 + \int_0^x \varphi(t) sen\varphi(t)$ con lo que $|\varphi(x)| \leq 1 + \int_0^x |\varphi(t)|$ Aplicando el lema de Gronwall

$$|\varphi(x)| \leq e^x \quad \forall x \in [0, \beta]$$

c)$f(x, y) = yseny$ es continua y $Lip_loc(y)$ en todo $R^2.I_+(\varphi) = (0, \beta)$dónde ó $\beta = +\infty$ ó φ no está acotada. Pero $|\varphi(x)| \leq e^\beta$ si $\beta < +\infty$.Luego $\beta = +\infty$

Problema 3.
a) Hallar la solución general de la EDO

$$y' = Ay + b(x)$$

con

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}, \qquad b(x) = \begin{pmatrix} e^x \\ e^x \end{pmatrix}.$$

b) Dada

$$B = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Hallar los valores de $\alpha \in \mathbb{R}$ para los que el problema de contorno

$$\begin{cases} y' = Ay + b(x) \\ By(0) + y(1) = 0 \end{cases}$$

posee solución única.

¿ Existe solución del problema de contorno anterior si $\alpha = -\dfrac{e^2}{1+2e}$? En caso positivo, hallarla

RESPUESTA

Comenzamos calculando una matriz fundamental del sistema $y' = Ay$ para lo cual necesitamos obtener la forma canónica de la matriz A.

Se tiene

$$det(A - \lambda I) = \lambda^2 - 2\lambda + 1$$

y por tanto A tiene el 1 como autovalor doble. Esto significa que la forma canónica es

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{o} \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Pero como

$$Ran(A-I) = 1, \quad Ran\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - I\right) = 0, \quad Ran\left(\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - I\right) = 1,$$

deducimos que la forma canónica de la matriz es

$$J = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Para construir una matriz de paso, tomamos $P_2 \in N((A-I)^2) \setminus N(A-I)$, por ejemplo (obsérvese que $(A-I)^2 = 0$)

$$P_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

y

$$P_1 = (A-I)P_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Por tanto, definiendo

$$P = \begin{pmatrix} P_1 & P_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix},$$

se tiene la descomposición $A = PJP^{-1}$.

Por teoría, una matriz fundamental del sistema $y' = Ay$ vendrá dada por $F(x) = e^{Ax}P = Pe^{Jx}$, es decir

$$F(x) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^x & xe^x \\ 0 & e^x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^x & xe^x \\ e^x & (x+1)e^x \end{pmatrix}.$$

Comentar que en este caso había otra forma de resolver el sistema $y' = Ay$ o

$$\begin{cases} y_1' = y_2 \\ y_2' = -y_1 + 2y_2 \end{cases}$$

Para ello obsérvese que derivando la primera ecuación y teniendo en cuenta la segunda se tiene

$$y_1'' = y_2' = -y_1 + 2y_2$$

con lo que usando otra vez la primera ecuación llegamos a que y_1 verifica la siguiente EDO homogénea de segundo orden con coeficientes constantes

$$y_1'' - 2y_1' + y_1 = 0.$$

El polinomio característico de la ecuación es como antes

$$\lambda^2 - 2\lambda + 1 = 0$$

de raíces $\lambda = 1$ doble. Por teoría se tiene entonces que y_1 es de la forma

$$y_1 = C_1 e^x + C_2 x e^x$$

y derivando

$$y_2 = y_1' = C_1 e^x + C_2 (x+1) e^x.$$

Es decir

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = F(x) \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix},$$

siendo F la misma matriz que antes.

Ahora tenemos que resolver el sistema no homogéneo $y' = Ay + b(x)$ para ello usamos que la solución general se puede obtener como suma de una solución particular más las solución general del homogéneo. Vamos a buscar una solución particular por el método de variación de constantes, es decir buscamos una solución φ de la forma

$$\varphi(x) = F(x) \begin{pmatrix} C_1(x) \\ C_2(x) \end{pmatrix},$$

donde por teoría las fuciones C_1, C_2 son solución del sistema

$$F(x)\left(\begin{array}{c} C_1'(x) \\ C_2'(x) \end{array}\right) = b(x),$$

lo que se escribe como

$$\left\{\begin{array}{l} C_1'e^x + C_2'xe^x = e^x \\ C_1'e^x + C_2'(x+1)e^x = e^x. \end{array}\right.$$

Restando a la segunda ecuación la primera y dividiendo por e^x, tenemos $C_2' = 0$. Como estamos buscando una solución particular, nos basta con tomar C_2 cualquier función que satisfaga esta condición, por ejemplo $C_2 = 0$. Sustituyendo entonces en la primera ecuación y dividiendo por e^x tenemos $C_1' = 1$. Una solución de la cual viene dada por $C_1 = x$. Tomamos entonces por solución particular

$$\varphi(x) = F(x)\left(\begin{array}{c} x \\ 0 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c} xe^x \\ xe^x \end{array}\right).$$

La solución general del sistema $y' = Ay + b(x)$ viene dada por tanto por

$$\left(\begin{array}{c} y_1 \\ y_2 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{cc} e^x & xe^x \\ e^x & (x+1)e^x \end{array}\right)\left(\begin{array}{c} C_1 \\ C_2 \end{array}\right) + \left(\begin{array}{c} xe^x \\ xe^x \end{array}\right).$$

b) Sabemos por teoría que el sistema tiene solución única si y sólo si el sistema homogéneo

$$\left\{\begin{array}{l} y' = Ay \\ \\ By(0) + y(1) = 0 \end{array}\right.$$

tiene solución única. Por el apartado a) las soluciones de la ecuación $y' = Ay$ son de la forma

$$y = F(x)\left(\begin{array}{c} C_1 \\ C_2 \end{array}\right).$$

Por tanto cualquier solución del sistema de contorno homogéneo tendrá que ser de la forma anterior y verificando

$$By(0) + y(1) = (BF(0) + F(1))\left(\begin{array}{c} C_1 \\ C_2 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c} 0 \\ 0 \end{array}\right).$$

Como tenemos un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas, el sistema tiene solución única si y sólo si el determinante de la matriz de los coeficientes es no nulo. Usando entonces

$$det(BF(0) + F(1)) = det\left(\begin{array}{cc} \alpha + e & e \\ 1 + 2e & e \end{array}\right) = \alpha(1 + 2e) + e^2,$$

se tiene que el problema de contorno tiene solución única si y sólo si

$$\alpha \neq -\frac{e^2}{1+2e}.$$

c) Usamos ahora que por el apartado a) las soluciones del sistema $y' = Ay + b(x)$ son de la forma

$$y = F(x) \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} xe^x \\ xe^x \end{pmatrix}.$$

Por tanto, si y es solución del problema de contorno será de esta forma y verificará $By(0) + y(1) = 0$, lo que lleva a

$$(BF(0) + F(1)) \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -e \\ -e \end{pmatrix}.$$

usando $\alpha = -\dfrac{e^2}{1+2e}$, tenemos

$$BF(0) + F(1) = \begin{pmatrix} \dfrac{e^2+e}{1+2e} & e \\ 1+e & 1+2e \end{pmatrix}.$$

Como el rango de la matriz de los coeficientes es 1 y el de la matriz ampliada es 2, no existe solución.

Problema 4.

a) Enuncia el teorema de existencia y unicidad local para el problema de Cauchy correspondiente a una EDP casilineal de primer orden.

Se considera el problema de Cauchy

$$\begin{cases} (1+x_1)\dfrac{\partial u}{\partial x_1} - \dfrac{\partial u}{\partial x_2} = x_2 u, \\ u_{|S} = x_1, \quad \text{en un entorno de } (0,0), \end{cases}$$

con

$$S = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : \ x_2 = 0\}.$$

b) Demostrar la existencia y unicidad de solución local.

c) Hallar la solución del problema anterior.

RESPUESTA

b) Las funciones $f_1(x) = 1 + x_1$, $f_2(x) = -1$, $u_0(x) = x_1$, $F(x) = x_2$ son de clase C^1 (de hecho C^∞) en $\mathbb{R}^2$ y la función $g(x, u) = x_2 u$ también es de clase C^1 (de hecho C^∞) en $\mathbb{R}^3$. El punto $(0, 0)$ pertenece a S y se tiene

$$\nabla F(0,0) \cdot f(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} = -1 \neq 0.$$

Tenemos por tanto (usar el resultado que se pide en el apartado a)) que el problema tiene una única solución local.

c) Usamos el método de las características, para ello dado $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ buscamos una solución $(y_1(s), y_2(s), v(s))$ solución del sistema característico

$$\begin{cases} y_1' = f_1(y) \\ y_2' = f_2(y) \\ v' = g(y, v), \end{cases}$$

o equivalentemente

$$\begin{cases} y_1' = 1 + y_1 \\ y_2' = -1 \\ v' = y_2 v. \end{cases}$$

Además buscamos esta solución de forma que exista $t \in \mathbb{R}$ con

$$y_1(t) = x_1, \quad y_2(t) = x_2, \quad F(y(0)) = y_2(0) = 0, \quad v(0) = u_0(y(0)) = y_1(0).$$

Resolviendo esta ecuaciones, sabemos por teoría que la función u verifica $u(x) = v(t)$.

La ecuación de variables separables (o lineal de primer orden) $y_1' = 1 + y_1$ nos lleva a que y_1 es de la forma

$$y_1(s) = -1 + C_1 e^s,$$

mientras que la ecuación $y_2' = -1$ lleva a

$$y_2(s) = -s + C_2,$$

que sustituido en $v' = y_2 v$ lleva a la ecuación de variables separadas

$$\frac{v'}{v} = -s + C_2.$$

Integrando en esta ecuación se tiene

$$ln\, v(s) = -\frac{s^2}{2} + C_2 s + C_3$$

o cambiando la constante C_3 a

$$v(s) = C_3 e^{-\frac{s^2}{2} + C_2 s}.$$

Imponemos ahora las demás condiciones. De $y_2(0) = 0$ se deduce $C_2 = 0$ y por tanto la ecuación $y_2(t) = x_2$ da $t = -x_2$. La ecuación $x_1 = y_1(t) = -1 + C_1 e^t$ lleva entonces a $C_1 = (1 + x_1)e^{x_2}$. Por otra parte, la ecuación $v(0) = y_1(0)$ da $C_3 = -1 + C_1 = -1 + (1 + x_1)e^{x_2}$. Se tiene por tanto

$$u(x) = v(t) = (-1 + (1 + x_1)e^{x_2})\, e^{-\frac{x_2^2}{2}} = (1 + x_1)e^{-\frac{x_2^2}{2} + x_2} - e^{-\frac{x_2^2}{2}}.$$

PUNTUACIÓN: Problemas 1 y 3, 3 puntos cada uno. Problemas 2 y 4, 2 puntos cada uno.