ECUACIONES DIFERENCIALES ORDINARIAS, Curso 08/09
PRIMERA CONVOCATORIA ORDINARIA (22/06/2009)

1. Enuncia y demuestra el Teorema de Banach del punto fijo.

2. (a) Determina razonadamente los dominios maximales de existencia y unicidad para el problema de Cauchy
$$\text{(PC)} \quad \begin{cases} y' = \dfrac{2}{3t}y + \dfrac{t^2}{3y^2} \\ y(t_0) = y_0. \end{cases}$$
   (b) Demuestra que la solución maximal de (PC) correspondiente al dato inicial $(t_0, y_0) = (1, 1)$ es creciente en su intervalo de definición. Calcula dicha solución, indicando su intervalo de definición y el comportamiento de sus semitrayectorias.

3. Se considera la EDO $y' = f(t, y)$ con $f(t, y) = (t + 1)[\operatorname{sen}^2(1/ty) + 1]$. Se pide:
   (a) Probar que el problema de Cauchy (PC) $\begin{cases} y' = f(t,y) \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$ tiene una única solución maximal para cada $(t_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ con $t_0, y_0 > 0$.
   (b) Si φ es la solución maximal de (PC) correspondiente al dato inicial $y(1) = 1$ y $(\alpha, \beta) = I(1, 1)$ es el intervalo de definición de esta solución maximal, entonces prueba que φ es estrictamente creciente en (α, β) y satisface la desigualdad
$$\begin{cases} \dfrac{1}{2}(t+1)^2 - 1 \leq \varphi(t) \leq (t+1)^2 - 3, & \forall t \in [1, \beta), \\ (t+1)^2 - 3 \leq \varphi(t) \leq \dfrac{1}{2}(t+1)^2 - 1, & \forall t \in (\alpha, 1]. \end{cases}$$
   (c) ¿Cuánto vale el extremo β? Razona la respuesta. Demuestra que $\alpha \in (-1 + \sqrt{2}, -1 + \sqrt{3})$.

4. Para $A \in C^0([a, b]; \mathcal{L}(\mathbb{R}^N))$ ($a, b \in \mathbb{R}$ con $a < b$), se considera una matriz fundamental $F \in C^0([a, b]; \mathcal{L}(\mathbb{R}^N))$ del SDO $y' = Ay$. Dados $b \in C^0([a, b]; \mathbb{R}^N)$, $B, C \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^N)$ y $h \in \mathbb{R}^N$, demuestra que el problema de contorno $\begin{cases} y' = A(x)y + b(x) \\ By(a) + Cy(b) = h \end{cases}$, admite solución si y sólo si
$$\operatorname{Rango}(BF(a) + CF(b)) = \operatorname{Rango}\left(BF(a) + CF(b) \,\middle|\, h - CF(b)\int_a^b F(s)^{-1}b(s)\,ds \right).$$

5. (a) Calcula la solución general del sistema $y' = Ay + b(x)$ con $A = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$ y $b(x) = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \end{pmatrix}$.
   (b) Calcula, si es posible, la o las soluciones del problema de contorno
$$\begin{cases} y' = Ay + b(x), & x \in [0, \pi], \\ y(0) + y(\pi) = 0. \end{cases}$$

6. Demuestra la existencia y unicidad de solución local del problema
$$\begin{cases} (x_1^2 + 1)\dfrac{\partial u}{\partial x_1} - x_1 x_2 \dfrac{\partial u}{\partial x_2} = \dfrac{u}{x_1}, \\ u_{|S} = x_2 \quad \text{en un entorno de } a = (1, 0), \end{cases}$$
con $S = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : \ x_1 = 1\}$. Calcula dicha solución local mediante el método de las características.

Puntuación: Preguntas 1 y 4: **1 punto**. Preguntas 2, 3, 5 y 6: **2 puntos**.