ECUACIONES DIFERENCIALES ORDINARIAS, Curso 09/10
PRIMERA CONVOCATORIA (02/07/2010)

1. *a*) Se considera el problema de Cauchy

$$(PC) \quad \begin{cases} y' = f(t,y), \\ y(t_0) = y_0, \end{cases}$$

con $\Omega \subset \mathbb{R}^{N+1}$ un abierto, $f \in C^0(\Omega; \mathbb{R}^N) \cap Lip_{loc}(y; \Omega)$ y $(t_0, y_0) \in \Omega$. Supongamos que φ es solución de (PC) en el intervalo intervalo no degenerado I con $t_0 \in I$. Demuestra que φ es prolongable por la derecha si y sólo si la semitrayectoria τ_φ^+ está acotada y $\mathrm{dist}\,(\tau_\varphi^+, \partial\Omega) > 0$.

   b) Sea $N \in \mathbb{N}$ y consideremos el SDO lineal $y' = A(t)y$, con $A \in C^0(I; \mathcal{L}(\mathbb{R}^N))$ e $I \subset \mathbb{R}$ un intervalo no degenerado. Denotemos mediante V_0 el conjunto de soluciones en I del SDO. Prueba entonces que V_0 es un subespacio vectorial de $C^1(I; \mathbb{R}^N)$ y que tiene dimensión N.

2. Determina razonadamente los dominios maximales de existencia y unicidad para el problema de Cauchy

$$\text{(PC)} \quad \begin{cases} y' = -\dfrac{2ty+1}{2y+t^2} \\ y(t_0) = y_0. \end{cases}$$

Calcula la solución maximal de (PC) correspondiente al dato inicial $(t_0, y_0) = (0, \sqrt{3}/2)$, indicando su intervalo de definición y el comportamiento de sus semitrayectorias.

3. Se considera el siguiente Problema de Cauchy

$$(PC) \begin{cases} y' = (y - (2t-1))(y - (2t+5)) + 2 \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

   a) Probar que el dominio maximal de existencia y unicidad es $\mathbb{R}^2$.
   b) Probar que las rectas $y = 2t - 1$ e $y = 2t + 5$ son soluciones de la ecuación diferencial.
   c) Concluir, sin necesidad de resolverlo, que la solución de (PC) tiene como intervalo maximal de definición todo la recta, es decir, $I(0,1) = \mathbb{R}$.

4. Dado el sistema SDO lineal homogéneo $y' = Ay$ con $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$,

   a) calcula una matriz fundamental asociada a dicho sistema SDO.
   b) Como aplicación, resuelve el Problema de Cauchy

$$\begin{cases} y' = Ay, \\ y(0) = (1,2,3)^t. \end{cases}$$

   c) Dado el problema

$$\begin{cases} y' = Ay + b, \quad b = (0,-2,0)^t \\ y(0) = (1,2,3)^t. \end{cases}$$

   dar la expresión de su solución (indicar sin hacer las operaciones correspondientes) y el intervalo maximal de definición correspondiente.

5. Sea S el plano de $\mathbb{R}^3$ de ecuación $x_2 = 0$ y consideremos el Problema de Cauchy:

$$\begin{cases} x_1^2 \dfrac{\partial u}{\partial x_1} + x_3 \dfrac{\partial u}{\partial x_2} + x_3 \dfrac{\partial u}{\partial x_3} = -u - x_2^2 + 1 + x_3^2, \\ u|_S = 1, \quad \text{en un entorno de } a = (0,0,1). \end{cases}$$

Demuestra que este problema posee una única solución local u. Calcula dicha solución local mediante el método de las características.

- *Primer parcial*: Teoría (a) y problemas 2 y 3. **Puntuación:** Teoría: **3 puntos**; problema 2, **4,5 puntos** y problema 3, **2,5 puntos**. **Tiempo:** 2h.

- *Segundo parcial*: Teoría (b) y problemas 3 y 4. **Puntuación:** Teoría: **3 puntos**; problemas **3,5 puntos** cada uno. **Tiempo:** 2h.

- *Toda la asignatura*: Primer parcial: Teoría (a) ó (b) y todos los problemas. **Puntuación:** Teoría: **2 puntos** cada una; problema 2, **2,5 puntos**; problema 3, **1,5 puntos**; problemas 4 y 5, **2 puntos** cada uno. **Tiempo:** 4h.