**ECUACIONES DIFERENCIALES ORDINARIAS, Curso 08/09**
**SEGUNDA CONVOCATORIA ORDINARIA (7/09/2009)**

1. Enuncia y demuestra el Teorema de Picard de existencia de solución local para un Problema de Cauchy.

2. (a) Determina razonadamente los dominios maximales de existencia y unicidad para el problema de Cauchy
$$\text{(PC)} \quad \begin{cases} y' = \dfrac{-2ty}{y-2t^2} \\ y(t_0) = y_0. \end{cases}$$
   (b) Calcula la solución maximal de (PC) correspondiente al dato inicial $(t_0, y_0) = (0, 1)$, indicando su intervalo de definición y el comportamiento de sus semitrayectorias.

3. Se considera la EDO $y' = f(t, y)$ con $f(t, y) = t^2 \cos y + t$. Se pide:
   (a) Probar que el problema de Cauchy (PC) $\begin{cases} y' = f(t,y) \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$ tiene una única solución maximal para cada $(t_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$.
   (b) Si $\varphi$ es la solución maximal de (PC) correspondiente al dato inicial $y(0) = 0$ y $(\alpha, \beta) = I(0, 0)$ es el intervalo de definición de esta solución maximal, probar que se satisfacen las desigualdades siguientes:
$$\begin{cases} -\dfrac{t^3}{3} + \dfrac{t^2}{2} \leq \varphi(t) \leq \dfrac{t^3}{3} + \dfrac{t^2}{2}, & \forall t \in [0, \beta), \\ \dfrac{t^3}{3} + \dfrac{t^2}{2} \leq \varphi(t) \leq -\dfrac{t^3}{3} + \dfrac{t^2}{2}, & \forall t \in (\alpha, 0]. \end{cases}$$
   (c) Decir cómo son $\alpha$ y $\beta$ y justificar el resultado.

4. Para $A \in C^0([a, b]; \mathcal{L}(\mathbb{R}^N))$ ($a, b \in \mathbb{R}$ con $a < b$), se considera una matriz fundamental $F \in C^0([a, b]; \mathcal{L}(\mathbb{R}^N))$ del SDO $y' = A(x)y$. Dados $b \in C^0([a, b]; \mathbb{R}^N)$, $B, C \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^N)$ y $h \in \mathbb{R}^N$, demuestra que el problema de contorno $\begin{cases} y' = A(x)y + b(x) \\ By(a) + Cy(b) = h \end{cases}$, admite solución si y sólo si
$$\text{Rango}\,(BF(a) + CF(b)) = \text{Rango}\left( BF(a) + CF(b) \,\Big|\, h - CF(b) \int_a^b F(s)^{-1} b(s)\, ds \right).$$

5. Dado el sistema lineal $y' = Ay + b(t)$ con $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ y $b(t) = \begin{pmatrix} e^t \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, se pide:
   (a) Calcular una matriz fundamental para $y' = Ay$.
   (b) Obtener la solución general del sistema no homogéneo inicial.

6. Demuestra la existencia y unicidad de solución local del problema
$$\begin{cases} x_1 \dfrac{\partial u}{\partial x_1} - x_2 \dfrac{\partial u}{\partial x_2} + x_2 \dfrac{\partial u}{\partial x_3} = (x_1 + 3) x_2^2, \\ u_{|S} = 0 \quad \text{en un entorno de } a = (1, 0, 0), \end{cases}$$
   con $S = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : \; x_1 = 1\}$. Calcula dicha solución local mediante el método de las características.

**Puntuación:** Preguntas 1 y 4: **1 punto**. Preguntas 2, 3, 5 y 6: **2 puntos**.