ECUACIONES DIFERENCIALES ORDINARIAS **Curso 09/10**
Segunda Convocatoria **13 de septiembre de 2010**

1. (a) Enunciar y demostrar el lema de Gronwall.

   (b) Determinar el signo de una función continua u, en el intervalo $[0,1]$, de la que se conoce
   $$u(t) \leq \int_0^t u(s)\,ds \qquad \forall t \in [0,1].$$
   Justificar la respuesta.

2. Se considera el problema de Cauchy
   $$(PC)\begin{cases} y' = t^3y^3 - \dfrac{y}{t} \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$$
   (a) Determinar los dominios maximales de existencia y unicidad de (PC).

   (b) Obtener la solución maximal de (PC) para $t_0 = 1$ e $y_0 = 1$, indicando su intervalo de definición y el comportamiento de sus semitrayectorias.

3. (a) Calcula la solución general del sistema $y' = Ay + b(x)$ con
   $$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad b(x) = \begin{pmatrix} e^x \\ e^x \end{pmatrix}.$$
   (b) Estudiar el número de soluciones del problema de contorno
   $$\begin{cases} y' = Ay + b(x), \quad x \in [0,\pi], \\ By(0) + y(1) = 0. \end{cases}$$
   para $B = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ y obtenerla/s.

4. Resuélvase el siguiente Problema de Cauchy, comprobando previamente la existencia y unicidad local de solución:
   $$\begin{cases} x_1\dfrac{\partial u}{\partial x_1} + 5x_2\dfrac{\partial u}{\partial x_2} = 3u, \\ u_{|S} = (x_1+2)^3 \end{cases}$$
   en un entorno de $(2,2)$ con S la recta de $\mathbb{R}^2$ de ecuación $x_2 = x_1$.

Puntuación: 2'5 puntos cada problema.