ECUACIONES DIFERENCIALES ORDINARIAS, Curso 06/07
Primera Prueba Intermedia. GRUPO A (20/04/2007)

1. (a) Enuncia el Lema de Gronwall.

   (b) Se considera el problema de Cauchy
$$(PC) \quad \begin{cases} y' = f(t,y), \\ y(t_0) = y_0, \end{cases}$$
   con $\Omega \subset \mathbb{R}^{N+1}$ un abierto, $f \in C^0(\Omega; \mathbb{R}^N) \cap Lip_{loc}(y;\Omega)$ y $(t_0, y_0) \in \Omega$. Sean (I_1, φ_1) e (I_2, φ_2) dos soluciones locales de (PC). Prueba que $\varphi_1(t) = \varphi_2(t)$, para cada $t \in I_1 \cap I_2$.

   (c) Sean $(t_0, y_0), (t_0, y_1) \in \Omega$ tales que $y_0 \neq y_1$ y denotemos $\varphi_0(\cdot) = \varphi(\cdot; t_0, y_0)$ y $\varphi_1(\cdot) = \varphi(\cdot; t_0, y_1)$. Demuestra que para todo $t \in I(t_0, y_0) \cap I(t_0, y_1)$ se tiene que $\varphi_0(t) \neq \varphi_1(t)$.

2. Se considera el problema de Cauchy
$$(PC) \quad \begin{cases} y' = f(t,y) \\ y(t_0) = y_0 \end{cases} \qquad \text{con} \quad f(t,y) = \frac{2 + 2y - 3t^2y^2}{2t^3y - 2t}.$$

   (a) Determina razonadamente los dominios maximales de existencia y unicidad para la EDO $y' = f(t,y)$.

   (b) Calcula la solución maximal de (PC) correspondiente al dato inicial $(t_0, y_0) = \left(2, \frac{1}{2}\right)$ indicando su intervalo de definición $I\left(2, \frac{1}{2}\right)$. Justifica el valor de los extremos del intervalo.

3. Se considera la EDO $y' = f(t,y)$ con $f(t,y) = \dfrac{2 + \text{sen } (y^2 \ln t)}{t\,(1 + t(\cos\, y)^2)}$. Se pide:

   (a) Calcular los dominios maximales de existencia y unicidad para la EDO anterior.

   (b) Denotemos $\varphi(\cdot) = \varphi(\cdot; 1, 0)$ (solución maximal de $y' = f(t,y)$ correspondiente al dato inicial $y(1) = 0$) e $I(1,0) = (\alpha, \beta)$ (intervalo de definición de la solución maximal). Demuestra:
$$\begin{cases} 3\ln t \leq \varphi(t) \leq \ln\left(\dfrac{2t}{t+1}\right), & \forall t \in (\alpha, 1], \\ \ln\left(\dfrac{2t}{t+1}\right) \leq \varphi(t) \leq 3\ln t, & \forall t \in [1, \beta). \end{cases}$$

   (c) A la vista del apartado anterior, calcula $I(1,0)$.

Puntuación: 1. **3 puntos**, 2. y 3. **3'5 puntos**.