ECUACIONES DIFERENCIALES ORDINARIAS, Curso 06/07
Segunda Prueba Intermedia. GRUPO A (08/06/2007)

1. Sea $N \in \mathbb{N}$ y consideremos el SDO lineal $y' = A(t)y$, con $A \in C^0(I; \mathcal{L}(\mathbb{R}^N))$ e $I \subset \mathbb{R}$ un intervalo no degenerado. Denotemos mediante V_0 el conjunto de soluciones en I del SDO. Prueba entonces que V_0 es un subespacio vectorial de $C^1(I; \mathbb{R}^N)$ y que tiene dimensión N.

2. Se considera el SDO lineal

$$y' = Ay + b(t) \quad \text{con } A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad b(t) = \begin{pmatrix} \operatorname{sen} t \\ \operatorname{sen} t \\ 0 \end{pmatrix}.$$

   (a) Calcula una matriz fundamental asociada al sistema homogéneo $y' = Ay$.

   (b) Calcula la solución general del sistema no homogéneo $y' = Ay + b(t)$.

3. Sea S el plano de $\mathbb{R}^3$ de ecuación $x_1 = 1$ y consideremos el Problema de Cauchy:

$$\begin{cases} x_1 \dfrac{\partial u}{\partial x_1} + x_2 \dfrac{\partial u}{\partial x_2} + x_3 \dfrac{\partial u}{\partial x_3} = x_1^2 + u, \\ u|_S = 2x_2 + x_3 + 1, \quad \text{en un entorno de } a = (1, 0, 0). \end{cases}$$

   (a) Demuestra que este problema posee una única solución local u.

   (b) Calcula dicha solución local mediante el método de las características.

4. Determina los valores de α, h_1 y h_2 para los que el problema de contorno

$$\begin{cases} y'' - 2y' + y = e^{2t}, \\ \alpha y(0) + y(1) = h_1, \\ y'(1) - y(1) = h_2, \end{cases}$$

   posee solución.

Puntuación: Problemas 1 y 4: **2 puntos**; Problemas 2 y 3: **3 puntos**.