Tema 1

Introducción a las Ecuaciones y Sistemas Diferenciales Ordinarios. Métodos elementales de integración

1 Ecuaciones Diferenciales de primer orden

Durante todo el Curso, usaremos la expresión EDO como sinónimo de Ecuación Diferencial Ordinaria.

Definición 1.1 *Una EDO de primer orden es una expresión de la forma*

$$F(x, y, y') = 0, \tag{1.1}$$

siendo F una función dada, definida en un conjunto $\mathcal{O} \subset \mathbb{R}^3$, con valores en $\mathbb{R}$, que depende efectivamente de al menos la tercera variable. A x se le denomina la variable independiente, $y = y(x)$ es una función incógnita dependiente sólamente de la variable x, e y' denota a la derivada primera de y respecto de x.

Observación 1.2 *Con frecuencia se usa la letra t, en vez de x, para designar a la variable independiente en la ecuación* (1.1). *En tal caso, es también corriente utilizar la letra x para designar a la función incógnita, dependiente ahora de la variable t, e incluso usar $\dot{x}$ para denotar a la derivada primera de x respecto de t, con lo que la EDO* (1.1) *se escribe entonces*

$$F(t, x, \dot{x}) = 0. \tag{1.2}$$

Nosotros usaremos preferentemente la notación (1.1), *pero a veces, dependiendo del contexto, haremos uso de* (1.2) *u otras notaciones equivalentes.*

Definición 1.3 *Una solución de* (1.1) *es cualquier función* $\varphi : I \to \mathbb{R}$*, con* $I \subset \mathbb{R}$ *intervalo de interior no vacío, satisfaciendo:*

(i) *Existe la derivada* $\varphi'(x)$ *en todo punto* $x \in I$*, donde si* x *es un extremo de* I*,* $\varphi'(x)$ *denota a la correspondiente derivada lateral,*

(ii) $(x, \varphi(x), \varphi'(x)) \in \mathcal{O}$*, para todo* $x \in I$*,*

(iii) $F(x, \varphi(x), \varphi'(x)) = 0$*, para todo* $x \in I$*.*

Se dice también en tal caso que la pareja (I, φ) *es una solución local de* (1.1)*, o que* φ *es una solución de* (1.1) *en el intervalo* I*.*

La ecuación (1.1) se dice que está en forma implícita. En el caso en que y' aparece despejada en la EDO, se dice que ésta está en forma explícita o normal. Más exactamente:

Definición 1.4 *Diremos que una EDO de primer orden está en forma explícita o normal, si está escrita en la forma*

$$y' = f(x, y), \tag{1.3}$$

con $f : \Omega \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *una función dada. En tal caso, esta ecuación puede ser escrita en la forma* (1.1)*, tomando* $\mathcal{O} = \Omega \times \mathbb{R}$*, con* $F(x, y, y') = y' - f(x, y)$*.*

En este Curso, nos vamos a centrar en el caso de las EDOs en forma normal. La noción de solución para (1.3) no es más que un caso particular de la correspondiente noción para (1.1)

Definición 1.5 *Una solución de* (1.3) *es cualquier función* $\varphi : I \to \mathbb{R}$*, con* $I \subset \mathbb{R}$ *intervalo de interior no vacío, satisfaciendo:*

(i) *Existe la derivada* $\varphi'(x)$ *en todo punto* $x \in I$*, donde si* x *es un extremo de* I*,* $\varphi'(x)$ *denota a la correspondiente derivada lateral,*

(ii) $(x, \varphi(x)) \in \Omega$*, para todo* $x \in I$*,*

(iii) $\varphi'(x) = f(x, \varphi(x))$*, para todo* $x \in I$*.*

Se dice también en tal caso que la pareja (I, φ) *es una solución local de* (1.3)*, o que* φ *es una solución de* (1.3) *en el intervalo* I*.*

Observación 1.6 *En general, consideraremos que* Ω *es un subconjunto abierto de* $\mathbb{R}^2$*, y que* f *es continua. En ese caso, la condición (i) en la definición precedente puede ser sustituida por pedir que* $\varphi \in C^1(I)$*.*

Observación 1.7 *La ecuación* (1.3) *admite una interpretación geométrica sencilla. A cada punto* $(x_0, y_0) \in \Omega$*, la función* f *le asocia el número* $p_0 = f(x_0, y_0)$*. Si pensamos en* p_0 *como el valor de la pendiente de la recta que pasa por* (x_0, y_0)*, obtenemos en* Ω *un campo de direcciones. En este sentido, buscar solución* φ *a* (1.3) *equivale a buscar una curva plana de ecuación en coordenadas cartesianas* $y = \varphi(x)$*, tal que para cada punto* (x_0, y_0) *de la curva, la pendiente de la recta tangente a la curva en dicho punto sea precisamente el valor* $p_0 = f(x_0, y_0)$ *del campo en el citado punto.*

A continuación, discutimos algunos ejemplos de problemas que dan lugar a la aparición de EDOs de primer orden.

Ejemplo 1) Al eliminar un parámetro.

En concreto, supongamos dada una familia uniparamétrica de funciones regulares $y = y(x, C)$, dependientes del parámetro $C \in \mathbb{R}$, y que vienen definidas de manera implícita por la ecuación

$$\Phi(x, y, C) = 0, \tag{1.4}$$

con Φ una función regular dada. En tal caso, derivando respecto de x en (1.4), obtenemos para cada valor de C,

$$\Phi_x(x, y, C) + \Phi_y(x, y, C)y' = 0, \tag{1.5}$$

donde por Φ_x (respectivamente, Φ_y) denotamos a la derivada parcial primera de Φ respecto de x (respectivamente, respecto de y).

Entonces, eliminando C entre (1.4) y (1.5), en principio cabe pensar que se va a obtener una expresión de la forma (1.1).

Por ejemplo, si consideramos la familia de parábolas de ecuación $y = Cx^2$, con $C \in \mathbb{R}$ arbitrario, estamos en el caso $\Phi(x, y, C) = y - Cx^2$, derivando en dicha ecuación respecto de x obtenemos $y' = 2Cx$, y eliminando C entre las dos ecuaciones, obtenemos la EDO satisfecha por la familia dada de parábolas, que en forma normal se escribe

$$y' = \frac{2y}{x}$$

Ejemplo 2) En problemas de tipo geométrico.

Por ejemplo, supongamos dada una familia uniparamétrica de curvas regulares en el plano cartesiano $y = y(x, C)$, dependientes del parámetro $C \in \mathbb{R}$, y que vienen definidas de manera implícita por la ecuación (1.4). Nos planteamos el problema de hallar curvas que corten de manera ortogonal a todas las curvas de la familia dada.

Para abordar este problema, lo que se puede hacer en primer lugar es, mediante el procedimiento descrito en el Ejemplo 1), obtener por eliminación de

C la EDO $F(x, y, y') = 0$ satisfecha por la familia de funciones $y = y(x, C)$. A continuación, se observa que, fijado un valor C_0 de C y un punto $(x_0, y(x_0, C_0))$ sobre la curva correspondiente, si $y = \varphi(x)$ es una curva que corta a $y = y(x, C_0)$ en dicho punto de manera ortogonal, entonces forzosamente $\varphi(x_0) = y(x_0, C_0)$, y la pendiente de la recta tangente a la curva en el punto, que viene dada por $\varphi'(x_0)$, ha de coincidir con la inversa cambiada de signo de la pendiente de la tangente a la curva $y = y(x, C_0)$ en el mismo punto, es decir,

$$\varphi'(x_0) = -\frac{1}{y'(x_0, C_0)}$$

Sustituyendo las relaciones obtenidas en la igualdad $F(x_0, y(x_0, C_0), y'(x_0, C_0)) = 0$, y eliminando el subíndice, llegamos a que

$$F(x, \varphi(x), -\frac{1}{\varphi'(x)}) = 0,$$

o cambiando de notación,

$$F(x, y(x), -\frac{1}{y'(x)}) = 0,$$

es la EDO de la familia buscada.

Por ejemplo, si consideramos la familia de parábolas de ecuación $y = Cx^2$, con $C \in \mathbb{R}$ arbitrario, del ejemplo anterior, resulta que, como la EDO

$$y' = \frac{2y}{x}$$

es la correspondiente a dicha familia, entonces la EDO

$$y' = \frac{-x}{2y}$$

es la correspondiente a las curvas ortogonales a familia de parábolas. En este caso, es muy sencillo obtener, usando los métodos elementales de integración de EDO que se describirán posteriormente, que, como se comprueba fácilmente, la última EDO tiene por soluciones, a todas las funciones definidas de manera implícita por ecuaciones de la forma $y^2 + \frac{x^2}{2} = k$, con k constante positiva arbitraria. Se obtiene por tanto una familia de elipses centradas en el origen.

Ejemplo 3) En problemas de dinámica de poblaciones.

Consideremos una especie aislada en un determinado hábitat, y denotemos por $p(t)$ a la población, es decir al número de individuos, de esa especie presente en el citado hábitat en cada instante t. Un modelo muy simplificado para la evolución de $p(t)$ es suponer que el incremento de población en un corto intervalo de tiempo $(t, t + \Delta t)$ es proporcional al número de individuos presentes en el instante t multiplicado por el tiempo transcurrido, es decir

$$p(t + \Delta t) - p(t) = \alpha p(t)\Delta t,$$

con $\alpha > 0$ constante. En tal caso, dividiendo por Δt y pasando la límite cuando $\Delta t \to 0$, se obtiene el modelo

$$\dot{p}(t) = \alpha p(t), \tag{1.6}$$

que fue propuesto por Malthus en 1798.

Es inmediato comprobar que toda función de la forma $p(t) = Ce^{\alpha t}$, con $C \in \mathbb{R}$ arbitraria, es solución de (1.6). Si conocemos que en un instante t_0 hay $p_0 > 0$ individuos de la especie, entonces la solución correspondiente a (1.6) que satisface esta última condición viene dada por

$$p(t) = p_0 e^{\alpha(t-t_0)},$$

igualdad que en particular describe la evolución futura de $p(t)$ para $t \geq t_0$. Se observa que, por tanto, el modelo de Malthus predice un crecimiento exponencial al infinito de la población, cuando $t \to +\infty$. Ello hace que el modelo sea poco realista, al menos para tiempos grandes. Una hipótesis razonable es suponer que pasado un cierto umbral $\beta > 0$, la población empieza a decrecer, debido por ejemplo a la competencia por el alimento existente. Esta hipótesis conduce a un modelo de la forma

$$\dot{p}(t) = \alpha p(t)(\beta - p(t)), \tag{1.7}$$

que es también estudiado en dinámica de poblaciones. Éste y otros modelos se pueden consultar en [1].

Vemos que en los ejemplos anteriores, las EDO de primer orden que han aparecido poseen infinitas soluciones. Si se quiere singularizar una solución, hace falta imponer una condición adicional. En general, esa condición adicional consiste en imponer que la solución pase por un punto prefijado del plano

Definición 1.8 *Denominaremos Problema de Cauchy o de valores iniciales para la EDO* (1.3) *al problema consistente en, fijado un punto* $(x_0, y_0) \in \Omega$, *hallar una solución local* (I, φ) *de* (1.3) *tal que* $x_0 \in I$ *y* $\varphi(x_0) = y_0$. *En tal caso, se dice que* (I, φ) *es una solución local del Problema de Cauchy*

$$(PC) \begin{cases} y' = f(x, y), \\ y(x_0) = y_0. \end{cases}$$

Como un ejemplo adicional de Problema de Cauchy, consideremos el siguiente:

Ejemplo 4) Nos planteamos el problema consistente en encontrar una curva regular en el plano cartesiano, que pase por el punto $(1,2)$, y tal que la recta normal a la curva en cada punto de la misma pase por el origen de coordenadas.

Para resolver este problema, supongamos que $y=\varphi(x)$ es la ecuación de la curva que se busca. En tal caso, la recta normal a la curva en cada punto $(x_0,\varphi(x_0))$ de la misma tiene por ecuación,

$$y-\varphi(x_0)=-\frac{1}{\varphi'(x_0)}(x-x_0),$$

con lo que, si pedimos que esa recta pase por el origen de coordenadas, se ha de satisfacer

$$-\varphi(x_0)=\frac{x_0}{\varphi'(x_0)},$$

y esto para todo valor de x_0. En consecuencia, eliminando el subíndice de la última igualdad, y sustituyendo $\varphi(x)$ por y, obtenemos que la EDO que ha de satisfacer la curva que buscamos, escrita en forma normal, es:

$$y'=-\frac{x}{y},$$

estamos por tanto ante el Problema de Cauchy

$$(PC)\begin{cases} y'=-\dfrac{x}{y}, \\ y(1)=2. \end{cases}$$

La EDO anterior se puede escribir $yy'=x$, y es fácil de resolver con los métodos que describiremos con posterioridad, obteniéndose que todas las funciones de la forma $y=\sqrt{R^2-x^2}$, o $y=-\sqrt{R^2-x^2}$, con R constante arbitraria, son soluciones de la misma. Si imponemos la condición adicional $y(1)=2$, obtenemos como solución del (PC)

$$\varphi(x)=\sqrt{5-x^2},$$

función definida en el intervalo $I=(-\sqrt{5},\sqrt{5})$. La función $y=\varphi(x)$ viene definida de manera implícita por la igualdad $x^2+y^2=5$, así pues, la curva buscada es la circunferencia de centro el origen y radio $\sqrt{5}$.

2 Sistemas Diferenciales Ordinarios de primer orden

Usaremos la expresión SDO como sinónimo de Sistema Diferencial Ordinario. Consideremos fijado un entero $N\geq 1$.

Definición 2.1 *Un SDO de primer orden y dimensión N en forma normal o explícita es una expresión de la forma*

$$\left\{ \begin{array}{l} y_1' = f_1(x, y_1, ..., y_N), \\ ...., \\ ...., \\ y_N' = f_N(x, y_1, ..., y_N), \end{array} \right. \tag{2.8}$$

siendo f_i, para $1 \leq i \leq N$ entero, N funciones dadas, definidas en un conjunto $\Omega \subset \mathbb{R}^{N+1}$, con valores en $\mathbb{R}$. A x se le denomina la variable independiente, las y_i, para $1 \leq i \leq N$, son funciones incógnitas dependientes sólamente de la variable x, e y_i' denota, para cada i, a la derivada primera de y_i respecto de x.

Observación 2.2 *Hablando con propiedad, la denominación SDO de primer orden, referida a* (2.8)*, debería estar reservada al caso en que $N \geq 2$, pero hemos aceptado también el caso $N = 1$ en nuestra definición, con el fin de que el concepto de SDO de primer orden en forma normal contenga como caso particular al de una EDO de primer orden en forma normal.*

De forma análoga a los conceptos de solución y de Problema de Cauchy para una EDO de primer orden en forma normal, tenemos los correspondientes para un SDO de primer orden en forma normal.

Definición 2.3 *Una solución local de* (2.8) *es cualquier N+1-upla $(I, \varphi_1, ..., \varphi_N)$, con $I \subset \mathbb{R}$ intervalo de interior no vacío, y las φ_i, $1 \leq i \leq N$, N funciones $\varphi_i : I \to \mathbb{R}$, satisfaciendo:*

(i) *Existe la derivada $\varphi_i'(x)$ en todo punto $x \in I$, y para todo $1 \leq i \leq N$, donde si x es un extremo de I, $\varphi_i'(x)$ denota a la correspondiente derivada lateral,*

(ii) $(x, \varphi_1(x), ..., \varphi_N(x)) \in \Omega$, *para todo $x \in I$,*

(iii) $\varphi_i'(x) = f_i(x, \varphi_1(x), ..., \varphi_N(x))$, *para todo $x \in I$, y para todo $1 \leq i \leq N$.*

Se dice también entonces que la N-upla $(\varphi_1, ..., \varphi_N)$ es una solución de (2.8) *en el intervalo I.*

Definición 2.4 *Denominaremos Problema de Cauchy o de valores iniciales para el SDO* (2.8) *al problema consistente en, fijado un punto $(x_0, y_{1_0}, ..., y_{N_0})$ perteneciente a Ω, hallar una solución local $(I, \varphi_1, ..., \varphi_N)$ de* (2.8) *tal que $x_0 \in I$ y $\varphi_i(x_0) = y_{i_0}$, para todo $1 \leq i \leq N$. En tal caso, se dice que $(I, \varphi_1, ..., \varphi_N)$ es una solución local del Problema de Cauchy*

$$(PC)\begin{cases} y_1' = f_1(x, y_1, ..., y_N), \\ ...., \\ ...., \\ y_N' = f_N(x, y_1, ..., y_N), \\ y_1(x_0) = y_{1_0}, ..., y_N(x_0) = y_{N_0}. \end{cases}$$

Observación 2.5 *La formulación del SDO* (2.8)*, así como las definiciones* 2.3 *y* 2.4 *pueden ser efectuadas en una notación compacta que formalmente contenga la situación de una EDO de primer orden como caso particular. Para ello, lo que se hace es introducir la notación vectorial, denotando en particular a los elementos de* $\mathbb{R}^N$ *como vectores columna. Denotemos*

$$y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_N \end{pmatrix}, \quad y' = \begin{pmatrix} y_1' \\ \vdots \\ y_N' \end{pmatrix}, \quad \varphi = \begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \vdots \\ \varphi_N \end{pmatrix}, \quad \varphi' = \begin{pmatrix} \varphi_1' \\ \vdots \\ \varphi_N' \end{pmatrix}, \tag{2.9}$$

$$f(x, y) = \begin{pmatrix} f_1(x, y_1, ..., y_N) \\ \vdots \\ f_N(x, y_1, ..., y_N) \end{pmatrix}, \quad y_0 = \begin{pmatrix} y_{0_1} \\ \vdots \\ y_{0_N} \end{pmatrix}. \tag{2.10}$$

De esta forma, el SDO (2.8) *puede ser escrito como*

$$y' = f(x, y), \tag{2.11}$$

con $f : \Omega \to \mathbb{R}^N$ *dada. Una solución local de* (2.11) *es entonces una pareja* (I, φ) *tal que* $I \subset \mathbb{R}$ *es un intervalo de interior no vacío, y* $\varphi : I \to \mathbb{R}^N$ *es una función que satisface:*

(i) *Existe la derivada (componente a componente)* $\varphi'(x)$ *en todo punto* $x \in I$*, donde si* x *es un extremo de* I*,* $\varphi'(x)$ *denota a la correspondiente derivada lateral,*

(ii) $(x, \varphi(x)) \in \Omega$*, para todo* $x \in I$*,*

(iii) $\varphi'(x) = f(x, \varphi(x))$*, para todo* $x \in I$*.*

De igual manera, se puede formular el Problema de Cauchy para (2.11)

$$(PC)\begin{cases} y' = f(x, y), \\ y(x_0) = y_0, \end{cases}$$

como el problema consistente en, fijado un punto $(x_0, y_0) \in \Omega$*, hallar una solución local* (I, φ) *de* (2.11) *tal que* $x_0 \in I$ *y* $\varphi(x_0) = y_0$*. En tal caso, se dice que* (I, φ) *es una solución local del Problema de Cauchy.*

Obsérvese la completa analogía existente entre estas notaciones y las correspondientes al caso de una EDO de primer orden en forma normal.

Los SDOs aparecen en las aplicaciones a la Física, Biología, Economía, etc. Citemos como un ejemplo el denominado sistema de Lotka-Volterra,

$$\begin{cases} \dot{p_1} = \alpha p_1 - \beta p_1 p_2, \\ \dot{p_2} = -\gamma p_2 + \delta p_1 p_2, \end{cases} \tag{2.12}$$

donde α, β, γ y δ son constantes positivas dadas, y p_1 y p_2 son dos funciones incógnitas dependientes sólamente de la variable tiempo t.

Un sistema de Lotka-Volterra como (2.12), se denomina también un sistema de tipo presa-depredador. En efecto, en (2.12) la variable $p_1(t)$ puede ser interpretada como la cantidad de individuos de una especie, las presas, presentes en el instante t en un determinado hábitat, y la variable $p_2(t)$ puede ser interpretada como la cantidad de individuos de otra especie, los depredadores, presentes en el instante t en el mismo hábitat. Se supone que los depredadores se alimentan de las presas, mientras que éstas no se alimentan de los depredadores. Con estas suposiciones, el modelo (2.12), en su primera ecuación, está expresando que, en ausencia de depredadores, las presas crecen a un ritmo constante, mientras que la presencia de los primeros hace disminuir el número de presas en proporción directa al de depredadores presentes. De igual manera, la segunda ecuación en (2.12) indica que, en ausencia de presas, los depredadores decrecen a un ritmo constante, mientras que la presencia de las presas hace aumentar el número de depredadores en proporción directa al de aquellas presentes.

3 Métodos elementales de resolución de EDOs de primer orden

En esta sección vamos a exponer métodos para resolver algunos casos sencillos de EDOs de primer orden. Las notas que siguen están tomadas en gran medida de [3] (ver también [4]).

En el caso de una EDO de primer orden, diremos que hemos resuelto la ecuación si somos capaces de hallar una familia infinita de funciones $\varphi(x, C)$, dependiente de x y de una constante arbitraria $C \in \mathbb{R}$, tal que para cada valor fijado de C la función correspondiente sea solución de la EDO. En tal caso, diremos que la expresión $y = \varphi(x, C)$ es la solución general de la EDO. De manera más general, diremos que hemos resuelto la ecuación si somos capaces de hallar una función regular $\Phi(x, y, C)$, dependiente de x, y, y una constante arbitraria $C \in \mathbb{R}$, tal que para cada valor fijado de C la igualdad $\Phi(x, y, C) = 0$ defina de manera implícita una o varias funciones $\varphi(x, C)$ soluciones de la correspondiente EDO. En tal caso, diremos que la expresión $\Phi(x, y, C) = 0$ es la integral general de la ecuación.

Pasamos a exponer seguidamente una colección de casos en que es posible resolver una EDO.

1.- EDO de la forma $y' = f(x)$.

En este caso, f no depende de y, y si por ejemplo $f \in C^0(I)$, con I intervalo de $\mathbb{R}$ de interior no vacío, la resolución es inmediata. Basta tomar como solución general $y = F(x) + C$, siendo F una primitiva de f.

2.- EDO de primer orden de variables separables.

Éste es el caso en que la EDO puede ser escrita en la forma

$$y' = \frac{a(x)}{b(y)}, \tag{3.13}$$

con $a(x)$ función continua dependiente sólo de la variable x, y $b(y)$ función continua dependiente sólo de la variable y.

En este caso, la EDO también puede ser escrita en la forma

$$b(y)y' = a(x), \tag{3.14}$$

de la que se dice que está escrita con las variables separadas. Sean $A(x)$ una primitiva de $a(x)$, $B(y)$ una primitiva de $b(y)$, y $\varphi(x)$ una función derivable. En tal caso,

$$\frac{d}{dx}B(\varphi(x)) = b(\varphi(x))\varphi'(x),$$

con lo que, si $\varphi(x)$ es solución de (3.14), entonces

$$\frac{d}{dx}B(\varphi(x)) = \frac{d}{dx}A(x),$$

y en consecuencia

$$B(\varphi(x)) = A(x) + C,$$

con $C \in \mathbb{R}$ arbitraria.

Por tanto, la expresión

$$B(y) = A(x) + C, \tag{3.15}$$

es la integral general de (3.13).

En la práctica, para llegar a la integral general se puede proceder como sigue. La EDO (3.14) se puede escribir formalmente

$$b(y)dy = a(x)dx,$$

y en consecuencia, integrando los dos miembros de esta última igualdad, se obtiene (3.15).

Así, si consideramos por ejemplo el Problema de Cauchy

$$(PC)\begin{cases} y' = 1 + y^2, \\ y(0) = 0, \end{cases}$$

observamos que la EDO que aparece en dicho problema puede ser escrita de manera formal

$$\frac{dy}{1+y^2} = dx,$$

con lo que integrando los dos miembros de esta igualdad, obtenemos como integral general,

$$\operatorname{arctg} y = x + C, \quad C \in \mathbb{R},$$

de la que, despejando y, obtenemos la expresión de la solución general de la citada EDO,

$$y = \operatorname{tg}(x + C)$$

Ahora, imponiendo la condición $y(0) = 0$, y teniendo en cuenta que el intervalo de definición de la solución del Problema de Cauchy planteado ha de contener al cero, resulta finalmente que dicha solución viene dada por $y = \operatorname{tg} x$, con intervalo de definición $I = (-\pi/2, \pi/2)$.

3.- EDO lineal de primer orden.

Éste es el caso en que la EDO es de la forma

$$a_0(x)y' + a_1(x)y + a_2(x) = 0, \tag{3.16}$$

con $a_i(x) \in C(I)$, $i = 0, 1, 2$, funciones dadas, siendo $I \subset \mathbb{R}$ intervalo de interior no vacío, y donde suponemos que $a_0(x) \neq 0$ para todo $x \in I$.

En este caso, denotando

$$a(x) = -\frac{a_1(x)}{a_0(x)}, \quad b(x) = -\frac{a_2(x)}{a_0(x)},$$

la ecuación (3.16) también puede ser escrita en la forma

$$y' = a(x)y + b(x), \tag{3.17}$$

con $a(x)$ y $b(x)$ funciones dadas en $C(I)$.

A partir de ahora nos centramos en esta última formulación de la ecuación lineal.

Definición 3.1 *Si $b \equiv 0$, se dice que* (3.17) *es una EDO lineal de primer orden homogénea. En el caso en que $b \not\equiv 0$, se dice que la ecuación* (3.17) *es una EDO lineal de primer orden no homogénea. En este último caso, se dice que*

$$y' = a(x)y, \tag{3.18}$$

es la ecuación homogénea asociada a (3.17).

Denotemos,

$$V_0 = \{\varphi \in C^1(I);\ \varphi \text{ es solución de (3.18) en } I\},$$

y de manera más general,

$$V_b = \{\varphi \in C^1(I);\ \varphi \text{ es solución de (3.17) en } I\}.$$

Como primer resultado, tenemos

Proposición 3.2 *El conjunto V_0 es un subespacio vectorial de $C^1(I)$ de dimensión 1.*

Demostración.- Denotemos por $A(x)$ a una primitiva de $a(x)$. Sea $\varphi \in C^1(I)$ una función dada. Es inmediato comprobar que φ pertenece a V_0 si y sólo si,

$$\varphi'(x)e^{-A(x)} - a(x)\varphi'(x)e^{-A(x)} = 0, \quad \forall\, x \in I,$$

es decir, si y sólo si,

$$\frac{d}{dx}\left(\varphi(x)e^{-A(x)}\right) = 0, \quad \forall\, x \in I,$$

lo cuál es equivalente a afirmar que existe una constante $C \in \mathbb{R}$ tal que

$$\varphi(x)e^{-A(x)} = C, \quad \forall\, x \in I.$$

En resumen, φ pertenece a V_0 si y sólo si es de la forma $\varphi(x) = Ce^{A(x)}$, con $C \in \mathbb{R}$ arbitraria. Así pues V_0 coincide con el subespacio vectorial generado por la función $e^{A(x)}$,

$$V_0 = \langle e^{A(x)} \rangle.$$

Observación 3.3 *De la proposición precedente, se tiene en particular que toda combinación lineal de soluciones de* (3.18) *en I, es también solución de* (3.18) *en I.*

En la Proposición 3.2 *hemos encontrado de hecho la solución general de la EDO homogénea* (3.18). *Si la denotamos por $\varphi_h(x, C)$, hemos obtenido que*

$$\varphi_h(x, C) = Ce^{A(x)},$$

con $A(x)$ una primitiva de $a(x)$.

El mismo resultado puede ser obtenido observando que (3.18) *es una EDO de variables separables, que se puede escribir formalmente*

$$\frac{dy}{y} = a(x)dx,$$

y por tanto, calculando primitivas de cada uno de los dos miembros de la igualdad, tenemos

$$\log|y| = A(x) + k,$$

es decir,

$$|y| = e^k e^{A(x)},$$

con $k \in \mathbb{R}$ *arbitrario, expresión que, denotando* $e^k = C$*, es la misma que la obtenida precedentemente para* $\varphi_h(x, C)$*.*

Una vez hemos visto como hallar V_0, nos planteamos la cuestión de determinar V_b cuando $b \not\equiv 0$.

En primer lugar, es inmediato comprobar que se satisfacen la dos propiedades siguientes:

a) Si $\widehat{\varphi}$ y $\widehat{\psi}$ pertenecen a V_b, es decir, son soluciones de (3.17) en I, entonces $\widehat{\varphi} - \widehat{\psi}$ pertenece a V_0, es decir, es solución de (3.18) en I.

b) Si $\widehat{\varphi}$ pertenece a V_b, es decir, es solución de (3.17) en I, y φ pertenece a V_0, es decir, es solución de (3.18) en I, entonces $\widehat{\varphi} + \varphi$ pertenece a V_b, es decir, es solución de (3.17) en I.

Como consecuencia de a) y b), es inmediato obtener que si $\widehat{\varphi}_p$ es una solución particular de (3.17) en I, entonces

$$V_b = \{\widehat{\varphi}_p + \varphi;\ \varphi \in V_0\}, \tag{3.19}$$

es decir, V_b coincide con la variedad afín $\widehat{\varphi}_p + V_0$.

La igualdad (3.19) se expresa también diciendo que la solución general de (3.17) es igual a la suma de una solución particular de dicha ecuación, más la solución general de (3.18).

El problema es por tanto cómo calcular una solución particular de (3.17). Vamos a ver que, de hecho, en la búsqueda de dicha solución particular encontraremos nuevamente la igualdad (3.19), es decir, hallaremos la solución general de (3.17).

Una primera forma de hallar una solución particular de (3.17), y como ya hemos dicho encontrar de hecho la solución general, es proceder como para la demostración de la Proposición 3.2.

En efecto, sea $A(x)$ una primitiva de $a(x)$, y sea $\widehat{\varphi} \in C^1(I)$ una función dada. Es inmediato comprobar que $\widehat{\varphi}$ es solución de (3.17) si y sólo si,

$$\widehat{\varphi}'(x)e^{-A(x)} - a(x)\widehat{\varphi}'(x)e^{-A(x)} = b(x)e^{-A(x)}, \quad \forall\, x \in I,$$

es decir, si y sólo si,

$$\frac{d}{dx}\left(\widehat{\varphi}(x)e^{-A(x)}\right) = b(x)e^{-A(x)}, \quad \forall\, x \in I. \tag{3.20}$$

Si denotamos por $D(x)$ a una primitiva de la función $b(x)e^{-A(x)}$, es inmediato que (3.20) es equivalente a afirmar que existe una constante $C \in \mathbb{R}$ tal que

$$\widehat{\varphi}(x)e^{-A(x)} = D(x) + C, \quad \forall\, x \in I,$$

es decir

$$\widehat{\varphi}(x) = D(x)e^{A(x)} + Ce^{A(x)}, \quad \forall\, x \in I, \tag{3.21}$$

que es la expresión de la solución general de (3.17), siendo la función

$$\widehat{\varphi}(x) = D(x)e^{A(x)},$$

una solución particular de la misma. Se observa que (3.21) implica en particular a la igualdad (3.19).

Otra manera de reencontrar (3.21) se basa en el denominado método de Lagrange de variación de la constante. La idea del citado método consiste en, una vez que se ha hallado $\varphi_h(x, C) = Ce^{A(x)}$ como solución general de la EDO homogénea, buscar $\widehat{\varphi}(x)$, solución de (3.17), de la forma

$$\widehat{\varphi}(x) = C(x)e^{A(x)}, \tag{3.22}$$

con $C(x)$ función derivable de la variable x por determinar. Para hallar $C(x)$, se exige que $\widehat{\varphi}(x)$ satisfaga (3.17), lo que conduce a

$$C'(x)e^{A(x)} + a(x)C(x)e^{A(x)} = a(x)C(x)e^{A(x)} + b(x), \quad \forall\, x \in I,$$

es decir,

$$C'(x)e^{A(x)} = b(x), \quad \forall\, x \in I,$$

lo cuál conduce a

$$C(x) = k + D(x), \quad \forall\, x \in I,$$

con $k \in \mathbb{R}$ arbitrario, y por tanto, llevando esta expresión de $C(x)$ a (3.22), obtenemos nuevamente (3.21).

Como ejemplo de aplicación de las consideraciones precedentes, consideremos la EDO

$$y' + y\cos x = \operatorname{sen} x \cos x \tag{3.23}$$

La ecuación homogénea asociada es

$$y' + y\cos x = 0,$$

que es inmediato ver que tiene por solución general $y_h(x, C) = Ce^{-\operatorname{sen} x}$, con $C \in \mathbb{R}$ constante arbitraria. Utilizando el método de variación de constante, buscamos solución de (3.23) de la forma

$$y = C(x)e^{-\operatorname{sen} x}$$

Para determinar $C(x)$, exigimos que y satisfaga (3.23), y obtenemos

$$C'(x)e^{-\operatorname{sen} x} - C(x)e^{-\operatorname{sen} x}\cos x + C(x)e^{-\operatorname{sen} x}\cos x = \operatorname{sen} x \cos x,$$

es decir,

$$C'(x) = e^{\operatorname{sen} x}\operatorname{sen} x \cos x,$$

con lo que

$$C(x) = \int e^{\operatorname{sen} x}\operatorname{sen} x \cos x \, dx + k,$$

con $k \in \mathbb{R}$ constante arbitraria.

Ahora bien, integrando por partes, se obtiene fácilmente que

$$\int e^{\operatorname{sen} x}\operatorname{sen} x \cos x \, dx = e^{\operatorname{sen} x}(\operatorname{sen} x - 1),$$

y en consecuencia,

$$C(x) = e^{\operatorname{sen} x}(\operatorname{sen} x - 1) + k,$$

con lo que obtenemos como solución general de (3.23)

$$y(x) = ke^{-\operatorname{sen} x} + \operatorname{sen} x - 1, \quad k \in \mathbb{R}.$$

El mismo resultado se puede obtener multiplicando la EDO (3.23) por $e^{\operatorname{sen} x}$ e integrando.

4.- EDO de Bernoulli.

Una EDO de Bernoulli es de la forma

$$y' = a(x)y + b(x)y^{\alpha}, \quad \alpha \neq 0, 1, \tag{3.24}$$

con $a(x)$ y $b(x)$ funciones dadas en $C(I)$.

Para resolver (3.24), se pueden utilizar dos métodos.

Un primer método consiste en efectuar el cambio de función incógnita

$$z = y^{1-\alpha}.$$

Con ese cambio,

$$z' = (1-\alpha)y^{-\alpha}y',$$

con lo que, multiplicando (3.24) por $(1-\alpha)y^{-\alpha}$, se obtiene

$$z' = (1-\alpha)a(x)z + (1-\alpha)b(x),$$

EDO lineal que sabemos ya cómo resolver.

Otro método para resolver (3.24) consiste en buscar solución de la forma

$$y(x) = u(x)v(x).$$

Sustituyendo en la EDO, se obtiene

$$u'v + uv' = a(x)uv + b(x)u^\alpha v^\alpha. \tag{3.25}$$

Entonces, tomando como u una solución de la EDO lineal homogénea

$$u' = a(x)u,$$

por ejemplo $u(x) = e^{A(x)}$, con $A(x)$ primitiva de $a(x)$, y sustituyendo dicha u en (3.25), se obtiene

$$v' = b(x)u^{\alpha-1}v^\alpha,$$

ecuación que, al ser conocida u, es de variables separables en la función incógnita v.

En cualquiera de los dos métodos, hay que tener en cuenta, cuando $\alpha > 0$, que $y = 0$ es también solución de (3.24).

Como un ejemplo, consideremos la EDO

$$y' + \frac{1}{x}y = \frac{\log x}{x}y^2 \tag{3.26}$$

Efectuando el cambio $y = uv$, obtenemos

$$u'v + uv' + \frac{1}{x}uv = \frac{\log x}{x}u^2v^2$$

Tomando u solución de $u' + \dfrac{1}{x}u = 0$, por ejemplo

$$u = \frac{1}{x},$$

y sustituyendo en la EDO anterior, se obtiene

$$v' = \frac{\log x}{x^2}v^2,$$

EDO de variables separables, que conduce a

$$\int \frac{dv}{v^2} = \int \frac{\log x}{x^2}\,dx + C,$$

con $C \in \mathbb{R}$ constante arbitraria. Integrando por partes, es fácil obtener

$$\int \frac{\log x}{x^2}\,dx = -\frac{\log x}{x} - \frac{1}{x},$$

y en consecuencia,

$$-\frac{1}{v} = -\frac{\log x}{x} - \frac{1}{x} + k$$

Llevando las expresiones obtenidas para u y v a la igualdad $y = uv$, obtenemos

$$y = \frac{1}{\log x + 1 - Cx}, \tag{3.27}$$

expresión de la solución general de (3.26), a la cuál hay que añadir la solución $y = 0$.

Como ya hemos dicho, teniendo en cuenta que en este caso $\alpha = 2$, se puede obtener la misma expresión de la solución general de (3.26), mediante el cambio $z = y^{-1}$, que permite escribir la ecuación como

$$z' - \frac{1}{x} z = -\frac{\log x}{x},$$

EDO lineal que se puede resolver fácilmente. Para ello multiplicamos por $1/x$, obteniendo

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{z}{x}\right) = -\frac{\log x}{x^2},$$

es decir,

$$\frac{z}{x} = -\int \frac{\log x}{x^2}\, dx + k,$$

con $k \in \mathbb{R}$ constante arbitraria. Sustituyendo el valor de la integral, que ya hemos hallado, obtenemos

$$z = \log x + 1 + kx,$$

con lo que, como $y = 1/z$, cambiando $k = -C$, obtenemos de nuevo la expresión (3.27).

5.- EDO homogénea.

Una EDO de la forma $y' = f(x, y)$ se dice homogénea si

$$f(\lambda x, \lambda y) = f(x, y), \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}.$$

De manera general, una función $f(x, y)$ se dice homogénea de grado n si $f(\lambda x, \lambda y) = \lambda^n f(x, y)$, para todo $\lambda \in \mathbb{R}$. En consecuencia, una EDO de la forma $y' = f(x, y)$ se dice homogénea si $f(x, y)$ lo es de grado 0.

Si la EDO es homogénea, se puede hacer el cambio

$$y(x) = xu(x),$$

con lo que se obtiene

$$xu' + u = f(x, xu) = f(1, u),$$

y por tanto
$$xu' = g(u),$$
con $g(u) = f(1,u) - u$, EDO que es de variables separables.

Así, por ejemplo, si consideramos la ecuación
$$y' = \frac{y + \sqrt{x^2 - y^2}}{x}, \tag{3.28}$$
es inmediato comprobar que es homogénea. Haciendo el cambio $y = xu$, obtenemos
$$u + xu' = \frac{xu + \sqrt{x^2 - x^2u^2}}{x} = u \pm \sqrt{1 - u^2},$$
es decir,
$$\frac{du}{\sqrt{1-u^2}} = \pm\frac{dx}{x},$$
con lo que integrando, se tiene
$$\text{arcsen}(u) = \pm \log|Cx|,$$
con $C \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$ constante arbitraria. Con lo que resulta, $y = \pm x\,\text{sen}(\log|Cx|)$, o lo que es lo mismo, teniendo en cuenta el carácter arbitrario de C,
$$y = x\,\text{sen}(\log|Cx|).$$
A esta expresión de la solución general de (3.28), hay que añadir dos soluciones particulares que se han perdido al dividir por $\sqrt{1-u^2}$, y que se corresponden con $u = \pm 1$,
$$y = x, \quad \text{e} \quad y = -x.$$

Mencionemos también, dentro de este caso, un tipo de ecuaciones que son fácilmente reducibles a homogéneas, y que son las EDOs de la forma
$$y' = g\left(\frac{ax + by + r}{cx + dy + s}\right), \tag{3.29}$$
donde a, b, c, d, r, s son números reales dados, y $g = g(t)$ es una función de una sola variable.

Si las rectas de ecuaciones $ax + by + r = 0$ y $cx + dy + s = 0$ son paralelas, es decir, si
$$\det\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = 0,$$

entonces existe $\mu \in \mathbb{R}$ tal que $a = \mu c$, y $b = \mu d$, con lo que (3.29) se escribe

$$y' = g\left(\frac{\mu(cx+dy)+r}{cx+dy+s}\right), \tag{3.30}$$

e introduciendo el cambio de incógnita $z = cx + dy$, se obtiene de (3.30)

$$z' = c + dg\left(\frac{\mu z + r}{z+s}\right),$$

ecuación que es de variables separables, y que una vez resuelta, permite obtener y a partir de z.

Si las rectas de ecuaciones $ax + by + r = 0$ y $cx + dy + s = 0$ no son paralelas, es decir, si

$$\det\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \neq 0,$$

entonces existe un punto $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ tal que

$$\begin{cases} ax_0 + by_0 + r = 0, \\ cx_0 + dy_0 + s = 0. \end{cases}$$

Trasladando el origen a dicho punto, es decir, introduciendo el cambio de variables

$$\begin{cases} X = x - x_0, \\ Y = y - y_0, \end{cases}$$

y teniendo en cuenta que en tal caso

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{dY}{dx} = \frac{dY}{dX}\frac{dX}{dx} = \frac{dY}{dX},$$

es inmediato que la EDO (3.30) se transforma en

$$\frac{dY}{dX} = g\left(\frac{aX+bY}{cX+dY}\right),$$

ecuación que es homogénea, y ya sabemos resolver mediante el cambio $Y = Xu$.

Así, por ejemplo, si consideramos la EDO

$$y' = \frac{x+y+1}{x-y-1}, \tag{3.31}$$

como las rectas $x + y + 1 = 0$, y $x - y - 1 = 0$, tienen por punto de corte $(x_0, y_0) = (0, -1)$, haciendo el cambio

$$\begin{cases} X = x, \\ Y = y + 1, \end{cases}$$

obtenemos de (3.31)

$$\frac{dY}{dX} = \frac{X+Y}{X-Y} \tag{3.32}$$

Ahora, para resolver (3.32), hacemos el cambio $Y(X) = Xu(X)$, y obtenemos

$$u + X\frac{du}{dX} = \frac{X+Xu}{X-Xu} = \frac{1+u}{1-u},$$

es decir,

$$X\frac{du}{dX} = \frac{1+u}{1-u} - u = \frac{1+u^2}{1-u},$$

con lo que

$$\frac{(1-u)du}{1+u^2} = \frac{dX}{X},$$

y por tanto, integrando, obtenemos

$$\operatorname{arctg} u - \frac{1}{2}\log(1+u^2) = \log|CX|,$$

con $C \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ constante arbitraria. Esta última expresión se puede escribir de manera algo más abreviada

$$\operatorname{arctg} u = \log\left|CX\sqrt{1+u^2}\right|. \tag{3.33}$$

Deshaciendo los cambios de variables, obtenemos de (3.33), como integral general de (3.31),

$$\operatorname{arctg}\left(\frac{y+1}{x}\right) - \log|C\sqrt{x^2+(y+1)^2}| = 0.$$

6.- EDO exacta.

Consideremos una EDO de primer orden en forma explícita de la forma

$$y' = -\frac{M(x,y)}{N(x,y)}$$

con M y N funciones continuas definidas en un abierto $\Omega \subset \mathbb{R}^2$, y $N(x,y) \neq 0$, para todo $(x,y) \in \Omega$.

Dicha ecuación puede ser escrita, de manera equivalente como

$$M(x,y) + N(x,y)y' = 0. \tag{3.34}$$

Se dice que la EDO (3.34) es exacta si existe una función $\Phi \in C^1(\Omega)$ tal que

$$\Phi_x(x,y) = M(x,y), \quad \text{y} \quad \Phi_y(x,y) = N(x,y), \quad \forall\,(x,y) \in \Omega. \tag{3.35}$$

Si (3.34) es exacta, e $y(x)$ es una solución de esta ecuación en un intervalo I, entonces

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}\Phi(x,y(x)) &= \Phi_x(x,y(x)) + \Phi_y(x,y(x))y'(x)\\ &= M(x,y) + N(x,y)y'(x) = 0, \quad \forall\, x \in I,\end{aligned}$$

y por tanto la expresión $\Phi(x,y(x))$ se mantiene constante en todo I. Es decir, la expresión

$$\Phi(x,y) = C,$$

es la integral general de (3.34).

Las dos cuestiones que se plantean son, en primer lugar, cómo reconocer si (3.34) es exacta, y en segundo lugar, en el supuesto de que (3.34) es exacta, cómo hallar $\Phi(x,y)$ satisfaciendo (3.35).

Supongamos que M y N son funciones en $C^1(\Omega)$. En tal caso, es inmediato deducir de la igualdad de las derivadas Φ_{xy} y Φ_{yx}, que una condición necesaria para la existencia de Φ es que se satifaga la relación

$$M_y(x,y) = N_x(x,y), \quad \forall\, (x,y) \in \Omega. \tag{3.36}$$

De hecho, y con la condición de regularidad de M y N antes supuesta, si además Ω es un abierto simplemente conexo, entonces la condición (3.36) es también suficiente para la existencia de $\Phi(x,y)$ satisfaciendo (3.35). Nosotros nos vamos a contentar con comprobar esta última afirmación en el caso en que Ω es un "rectángulo" de la forma

$$\Omega = (a,b) \times (c,d), \quad -\infty \le a < b \le +\infty, \quad -\infty \le c < d \le +\infty. \tag{3.37}$$

En tal caso, la existencia de Φ puede ser demostrada mediante integración por caminos paralelos a los ejes de coordenadas. En concreto, supongamos Ω definido por (3.37), M y N en $C^1(\Omega)$ satisfaciendo (3.36). Fijemos un punto $(x_0,y_0) \in \Omega$, y definamos

$$\Phi(x,y) = \int_{x_0}^{x} M(s,y_0)\,ds + \int_{y_0}^{y} N(x,s)\,ds, \quad \forall\, (x,y) \in \Omega. \tag{3.38}$$

Es inmediato que Φ está bien definida y pertenece a $C^2(\Omega)$. Además, es inmediato que $\Phi_y(x,y) = N(x,y)$ en todo punto $(x,y) \in \Omega$. Finalmente, derivando respecto de x en (3.38), y teniendo en cuenta (3.36),

$$\begin{aligned}\Phi_x(x,y) &= M(x,y_0) + \int_{y_0}^{y} N_x(x,s)\,ds\\ &= M(x,y_0) + \int_{y_0}^{y} M_s(x,s)\,ds\\ &= M(x,y_0) + M(x,y) - M(x,y_0) = M(x,y),\end{aligned}$$

en todo punto $(x, y) \in \Omega$. En consecuencia, la función definida por (3.38) satisface (3.35).

Obsérvese que (3.38) nos da una fórmula para hallar $\Phi(x, y)$, y que dicha función satisface $\Phi(x_0, y_0) = 0$. En consecuencia, bajo las hipótesis anteriores, la solución del problema de Cauchy

$$(PC) \begin{cases} M(x, y) + N(x, y)y' = 0, \\ y(x_0) = y_0, \end{cases}$$

viene dada de manera implícita por

$$\Phi(x, y) = 0,$$

con Φ definida por (3.38).

En la práctica, para hallar Φ, supuesta satisfecha la condición (3.36), se puede proceder como sigue. En primer lugar, como queremos que se satisfaga $\Phi_x(x, y) = M(x, y)$, tomaremos

$$\Phi(x, y) = \int M(x, y)\, dx + \varphi(y),$$

con $\varphi(y)$ función de la variable y por determinar. Para hallar dicha función, imponemos la condición $\Phi_y(x, y) = N(x, y)$, obteniendo

$$\frac{\partial}{\partial y} \int M(x, y)\, dx + \varphi'(y) = N(x, y),$$

ecuación de la que hallar $\varphi(y)$.

Naturalmente, para hallar Φ, también se puede intentar proceder como precedentemente, pero intercambiando los papeles de x e y, es decir, imponiendo primero la condición $\Phi_y(x, y) = N(x, y)$, y depués la condición $\Phi_x(x, y) = M(x, y)$.

Como un ejemplo, consideremos la EDO

$$y' = -\frac{x^3 + xy^2}{x^2 y + y^3} \tag{3.39}$$

Obsérvese que dicha ecuación es homogénea, pero también es exacta, ya que

$$M(x, y) = x^3 + xy^2, \quad \text{y} \quad N(x, y) = x^2 y + y^3,$$

con lo que $M_y(x, y) = 2xy$, y $N_x(x, y) = 2xy$.

Para hallar $\Phi(x, y)$, imponemos $\Phi_x(x, y) = x^3 + xy^2$, lo que nos lleva a

$$\Phi(x, y) = \int (x^3 + xy^2)\, dx + \varphi(y) = \frac{x^4}{4} + \frac{x^2 y^2}{2} + \varphi(y).$$

Para determinar $\varphi(y)$, imponemos ahora $\Phi_y(x,y) = x^2y+y^3$, y obtenemos

$$x^2y + \varphi'(y) = x^2y + y^3,$$

es decir, $\varphi'(y) = y^3$, con lo que nos sirve la función

$$\varphi(y) = \frac{y^4}{4}$$

En consecuencia, obtenemos en este caso

$$\Phi(x,y) = \frac{x^4}{4} + \frac{x^2y^2}{2} + \frac{y^4}{4} = \frac{1}{4}(x^2+y^2)^2.$$

Con ello, la integral general de (3.39) viene dada por $\Phi(x,y) = C$, o simplificando,

$$x^2 + y^2 = C^2,$$

con $C \in \mathbb{R}$ constante arbitraria.

7.- EDO reducible a exacta: factor integrante

Consideremos una EDO de primer orden de la forma

$$M(x,y) + N(x,y)y' = 0, \tag{3.40}$$

con M y N funciones de $C^1(\Omega)$, siendo $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ un abierto simplemente conexo, y supongamos que (3.40) no es exacta.

Se dice que $\mu = \mu(x,y)$ es un factor integrante en Ω de la EDO anterior, si $\mu \in C^1(\Omega)$, $\mu(x,y) \neq 0$ en todo punto $(x,y) \in \Omega$, y la EDO

$$\mu(x,y)M(x,y) + \mu(x,y)N(x,y)y' = 0, \tag{3.41}$$

es exacta.

Obsérvese que, gracias a la condición $\mu(x,y) \neq 0$, (3.40) y (3.41) poseen las mismas soluciones. En consecuencia, si conocemos un factor integrante $\mu(x,y)$, y hallamos $\Phi(x,y)$ tal que

$$\Phi_x(x,y) = \mu(x,y)M(x,y), \quad \text{y} \quad \Phi_y(x,y) = \mu(x,y)N(x,y),$$

entonces $\Phi(x,y) = C$ es la integral general de (3.40). Por ello, si existe un factor integrante para (3.40), diremos que ésta es una EDO reducible a exacta.

De las consideraciones del caso de una EDO exacta, sabemos que la condición necesaria y suficiente para que exista un factor integrante $\mu(x,y)$, es que se satisfaga

$$(\mu(x,y)M(x,y))_y = (\mu(x,y)N(x,y))_x, \quad \forall\,(x,y) \in \Omega, \tag{3.42}$$

es decir,

$$N(x,y)\mu_x(x,y) - M(x,y)\mu_y(x,y) + (N_x(x,y) - M_y(x,y))\mu(x,y) = 0,$$

para todo $(x,y) \in \Omega$, que es una Ecuación en Derivadas Parciales en la incógnita $\mu(x,y)$.

Así pues, para la búsqueda de un factor integrante, hay que encontrar $\mu \in C^1(\Omega)$ satisfaciendo (3.42). Este problema, en determinados casos particulares, puede ser llevado al de resolver una EDO.

Por ejemplo, si consideramos la EDO lineal

$$y' = a(x)y + b(x),$$

en este caso podemos tomar $M(x,y) = a(x)y + b(x)$, y $N(x,y) = -1$. Supongamos que nos planteamos encontrar un factor integrante que dependa sólamente de x, es decir, $\mu = \mu(x)$. Entonces, la ecuación (3.42) se escribe

$$(a(x)\mu(x)y + b(x)\mu(x))_y = (-\mu(x))_x,$$

es decir,

$$a(x)\mu(x) = -\mu'(x),$$

ecuación que, en particular, admite como solución

$$\mu(x) = e^{-A(x)},$$

con $A(x)$ una primitiva de $a(x)$. Es decir, la exponencial que utilizamos en su momento para resolver la EDO lineal de primer orden no era sino un factor integrante de dicha ecuación.

Consideramos ahora un ejemplo más complicado que el precedente. En concreto, supongamos que nos planteamos resolver la EDO

$$x(1-y) + (y + x^2)y' = 0, \tag{3.43}$$

mediante la búsqueda de un factor integrante de la forma $\mu = \mu(x^2 + y^2)$. Es decir, buscamos en primer lugar una función $\mu = \mu(t)$, de una sóla variable t, de tal manera que se satisfaga la ecuación

$$(x(1-y)\mu(x^2+y^2))_y = ((y+x^2)\mu(x^2+y^2))_x, \tag{3.44}$$

para a continuación resolver (3.43).

Si denotamos por $\dot{\mu}(t)$ a la derivada de $\mu(t)$ respecto de t, de (3.44) obtenemos

$$-x\mu(x^2+y^2)+2xy(1-y)\dot{\mu}(x^2+y^2) = 2x\mu(x^2+y^2)+2x(y+x^2)\dot{\mu}(x^2+y^2),$$

es decir,

$$(2xy(1-y)-2x(y+x^2))\dot{\mu}(x^2+y^2)=3x\mu(x^2+y^2),$$

con lo que, simplificando, dividiendo por x y denotando $x^2+y^2=t$, obtenemos

$$-2\dot{\mu}(t)=3\mu(t),$$

como EDO que ha de satisfacer $\mu(t)$. Evidentemente, como solución a esta última EDO se tiene $\mu(t)=t^{-3/2}$, y por consiguiente un factor integrante para (3.43) es

$$\mu(x,y)=(x^2+y^2)^{-3/2}.$$

Ahora, para resolver (3.43), hemos de hallar una función $\Phi(x,y)$ tal que

$$\Phi_x(x,y)=x(1-y)(x^2+y^2)^{-3/2}, \quad \text{y} \quad \Phi_y(x,y)=(y+x^2)(x^2+y^2)^{-3/2}.$$

Integrando la primera de las ecuaciones, obtenemos

$$\Phi(x,y)=-(1-y)(x^2+y^2)^{-1/2}+\varphi(y),$$

con lo que de la segunda ecuación se tiene

$$(x^2+y^2)^{-1/2}+(1-y)y(x^2+y^2)^{-3/2}+\varphi'(y)=(y+x^2)(x^2+y^2)^{-3/2},$$

ecuación que simplificada nos lleva a

$$\varphi'(y)=0.$$

Por consiguiente, podemos tomar $\varphi(y)=0$, y escribir

$$(1-y)(x^2+y^2)^{-1/2}=C,$$

con $C\in\mathbb{R}$ arbitraria, como integral general de (3.43).

8.- EDO de Riccati.

Se denomina ecuación diferencial de Riccati a la EDO

$$y'=a(x)y+b(x)y^2+c(x), \tag{3.45}$$

con $a,b,c\in C(I)$, y $c\not\equiv 0$. Obsérvese que si $c\equiv 0$, entonces (3.45) es una ecuación de Bernoulli, que ya sabemos cómo resolver.

Es conocido que, en general, la EDO (3.45) no se puede resolver mediante cuadraturas (resultado debido a Liouville, ver [2]). Sin embargo, si se conoce una solución particular y_p de (3.45), entonces sí que es posible resolverla. En efecto, en tal caso, efectuando el cambio de función incógnita

$$y=y_p+\frac{1}{u}, \tag{3.46}$$

obtenemos de (3.45),

$$y_p' - \frac{u'}{u^2} = a(x)y_p + \frac{a(x)}{u} + b(x)y_p^2 + \frac{b(x)}{u^2} + \frac{2b(x)}{u} + c(x),$$

con lo que, teniendo en cuenta que y_p satisface (3.45), tenemos

$$-\frac{u'}{u^2} = \frac{a(x)}{u} + \frac{b(x)}{u^2} + \frac{2b(x)}{u} \tag{3.47}$$

Multiplicando en (3.47) por $-u^2$, se obtiene

$$u' = -(a(x) + 2b(x))u + b(x),$$

EDO lineal de primer orden que ya sabemos cómo resolver.

Como un ejemplo, consideremos el problema de Cauchy

$$(PC)\begin{cases} y' = (1-2x)y - y^2 + 2x, \\ y(0) = 0. \end{cases}$$

Es inmediato comprobar que $y = 1$ es solución de la EDO que aparece en (PC). Por consiguiente, hacemos el cambio

$$y = 1 + \frac{1}{u},$$

y sustituyendo en la EDO, obtenemos

$$-\frac{u'}{u^2} = 1 - 2x + \frac{(1-2x)}{u} - 1 - \frac{1}{u^2} - \frac{2}{u} + 2x,$$

con lo que, simplificando y multiplicando por $-u^2$, se obtiene

$$u' = (2x+1)u + 1, \tag{3.48}$$

ecuación que ha de satisfacer u junto con la condición $u(0) = -1$.

Para resolver (3.48), multiplicamos por $e^{-(x^2+x)}$, y obtenemos

$$\frac{d}{dx}(e^{-(x^2+x)}u) = e^{-(x^2+x)},$$

con lo que, integrando esta última ecuación desde 0 hasta x, y teniendo en cuenta que $u(0) = -1$, se tiene

$$e^{-(x^2+x)}u(x) + 1 = \int_0^x e^{-(s^2+s)}\,ds,$$

y por tanto, deshaciendo el cambio, obtenemos

$$y(x) = 1 + \frac{e^{-(x^2+x)}}{-1 + \displaystyle\int_0^x e^{-(s^2+s)}\,ds}$$

como solución de (PC).

4 Ecuaciones Diferenciales de orden superior

Nos restringimos al caso de EDOs en forma normal. Consideremos fijado un entero $n > 1$.

Definición 4.1 *Una EDO de orden n en forma explícita o normal es una expresión de la forma*

$$y^{(n)} = g(x, y, y', ..., y^{(n-1)}), \tag{4.49}$$

siendo g una función dada, definida en un conjunto $\mathcal{O} \subset \mathbb{R}^{n+1}$, con valores en $\mathbb{R}$. A x se le denomina la variable independiente, y es una función incógnita dependiente sólamente de la variable x, y' denota a la derivada primera de y respecto de x, y para $k \geq 2$, $y^{(k)}$ denota a la derivada k-ésima de y con respecto a x.

Observación 4.2 *Nosotros, como es la costumbre, usaremos la notación y'' para denotar a derivada segunda $y^{(2)}$. De esta forma, en el caso de una EDO de segundo orden en forma normal, se escribe*

$$y'' = g(x, y, y').$$

Al igual que en el caso de primer orden, con frecuencia se usa la letra t, en vez de x, para designar a la variable independiente en la EDO de orden superior, y en tal caso, se suele utilizar la letra x para designar a la función incógnita, dependiente ahora de la variable t, $\dot{x}$ para denotar a la derivada primera de x respecto de t, y $\ddot{x}$ para denotar a la derivada segunda de x respecto de t, con lo que, por ejemplo, la EDO de segundo orden se escribe entonces

$$\ddot{x} = g(t, x, \dot{x}). \tag{4.50}$$

De manera análoga a la definición 1.5, se introduce la noción de solución de (4.49).

Definición 4.3 *Una solución de* (4.49) *es cualquier función $\varphi : I \to \mathbb{R}$, con $I \subset \mathbb{R}$ intervalo de interior no vacío, satisfaciendo:*

(i) *Existe la derivada n-ésima $\varphi^{(n)}(x)$ en todo punto $x \in I$, donde si x es un extremo de I, $\varphi^{(n)}(x)$ denota a la correspondiente derivada lateral,*

(ii) $(x, \varphi(x), \varphi'(x), ..., \varphi^{(n-1)}(x)) \in \mathcal{O}$, *para todo $x \in I$,*

(iii) $\varphi^{(n)}(x) = g(x, \varphi(x), \varphi'(x), ..., \varphi^{(n-1)}(x))$, *para todo $x \in I$.*

Se dice también en tal caso que la pareja (I, φ) es una solución local de (4.49), *o que φ es una solución de* (4.49) *en el intervalo I.*

En general, cabe esperar que una EDO de orden n posea una infinidad de soluciones, dependiente de n constantes arbitrarias. Así, por ejemplo, es inmediato comprobar que para la EDO $y^{(3)} = 24x$, todas las funciones de la forma $\varphi(x) = x^4 + C_1x^2 + C_2x + C_3$, con C_1, C_2 y C_3 constantes reales arbitrarias, son soluciones en $I = \mathbb{R}$ de la EDO. Por consiguiente, si se quiere singularizar una solución de una EDO como (4.49), hace falta imponer n condiciones adicionales.

Las EDOs de orden superior a uno, y sobre todo las de segundo orden, aparecen por ejemplo en problemas de la Física. Como un ejemplo, consideremos el siguiente:

La EDO del péndulo simple.

Consideremos una masa m suspendida en el extremo de una barra muy delgada de longitud L. Suponemos que la barra está fijada por el otro extremo, y en posición de reposo vertical al suelo, a un punto O situado a una altura $H > L$ del mismo. Supongamos que, en el instante $t_0 = 0$, desplazamos la barra de su posición de reposo un ángulo $\theta_0 \in (0, \pi/2)$, e inmediatamente, estando la barra en reposo, la soltamos. Se desea predecir la evolución de la posición y velocidad de la masa m conforme pasa el tiempo. Para ello, hacemos las suposiciones simplificadoras que siguen:

- El rozamiento del aire y la fricción de la barra en el punto O son despreciables.
- La masa m puede ser considerada como un punto.
- La barra es rígida y de masa despreciable
- El movimiento de la barra se produce en un plano, y solo bajo la acción de la fuerza de gravedad, cuya aceleración g suponemos constante.

Para resolver el problema basta con conocer la función $\theta(t)$ que nos da el ángulo con vértice en O que en cada instante t forma la barra con la vertical al suelo. En efecto, tomando coordenadas cartesianas con origen en O y ordenada la vertical al suelo, las coordenadas de posición de la masa m vendrán dadas en cada instante t por

$$x(t) = L \operatorname{sen} \theta(t), \quad y(t) = -L \cos \theta(t).$$

Para determinar la función $\theta(t)$, observemos que por las condiciones impuestas al problema, la energía total $E(t)$ del sistema ha de ser constante, siendo $E(t)$ la suma de la energía cinética $E_c(t)$ más la energía potencial $E_p(t)$. En este caso,

$$E_c(t) = \frac{1}{2} m v(t)^2,$$

con

$$v^2(t) = \dot{x}^2(t) + \dot{y}^2(t) = L^2 \dot{\theta}^2(t),$$

y

$$E_p(t) = mg(H - L\cos\theta(t)),$$

con lo que

$$E(t) = \frac{1}{2}mL^2\dot{\theta}^2(t) + mg(H - L\cos\theta(t)),$$

y por tanto, derivando esta última expresión, y teniendo en cuenta la conservación de $E(t)$, obtenemos, tras dividir por $mL^2\dot{\theta}(t)$, la EDO que describe el comportamiento del péndulo,

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{L}\operatorname{sen}\theta = 0. \tag{4.51}$$

Dicha ecuación debe ser complementada, tal y como hemos planteado el problema, con las condiciones adicionales

$$\theta(0) = \theta_0, \quad \dot{\theta}(0) = 0,$$

que junto la EDO (4.51) constituyen un Problema de Cauchy.

Exponemos ahora algunas consideraciones elementales sobre resolución de la EDO de segundo orden

$$y'' = g(x, y, y'). \tag{4.52}$$

Estas consideraciones son fácilmente generalizables al caso de EDOs de orden superior a dos.

Diremos que hemos resuelto la ecuación (4.52), si somos capaces de hallar una familia infinita de funciones $\varphi(x, C_1, C_2)$, dependiente de x y de dos constantes arbitrarias $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$, tal que para cada valor fijado del par (C_1, C_2), la función correspondiente sea solución de la EDO. En tal caso, diremos que la expresión $y = \varphi(x, C_1, C_2)$ es la solución general de (4.52). De manera más general, diremos que hemos resuelto la ecuación si somos capaces de hallar una función regular $\Phi(x, y, C_1, C_2)$, dependiente de x, y, y dos constantes arbitrarias $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$, tal que para cada valor fijado del par (C_1, C_2) la igualdad $\Phi(x, y, C_1, C_2) = 0$ defina de manera implícita una o varias funciones $\varphi(x, C_1, C_2)$ soluciones de la correspondiente EDO. En tal caso, diremos que la expresión $\Phi(x, y, C_1, C_2) = 0$ es la integral general de la ecuación (4.52).

Exponemos ahora algunos casos sencillo en que es posible resolver (4.52), o al menos reducirla a una EDO de primer orden.

a).- EDO de la forma $y'' = g(x)$.

En este caso, g no depende de y ni de y', y si por ejemplo $g \in C^0(I)$, con I intervalo de $\mathbb{R}$ de interior no vacío, la resolución es inmediata. Basta tomar como solución general

$$y = \int G(x) + C_1 x + C_2,$$

siendo G una primitiva de g.

b).- EDO de la forma $y'' = g(x, y')$.

Si g no depende de y, se puede reducir el orden de la EDO haciendo el cambio $z = y'$. De esta forma, obtenemos la ecuación de primer orden $z' = g(x, z)$, que si sabemos resolver nos permite hallar y integrando después z.

Por ejemplo, si consideramos la EDO

$$y'' = 2x(a + y')^2, \tag{4.53}$$

con $a \in \mathbb{R}$ constante dada, haciendo el cambio $z = y'$ obtenemos

$$z' = 2x(a + z)^2,$$

ecuación que tiene por solución general

$$z = -\frac{1}{x^2 + C_1} - a,$$

con $C_1 \in \mathbb{R}$ constante arbitraria. A esta solución general hay que añadir

$$z = -a,$$

que es también solución.

Resolviendo ahora $y' = z$, obtenemos

$$y = -ax + C_2 - \frac{1}{\sqrt{C_1}} \operatorname{arctg}\left(\frac{x}{\sqrt{C_1}}\right),$$

con C_1, C_2 constantes arbitrarias, como solución general de (4.53), junto con la familia de funciones

$$y = -ax + C_2,$$

que formalmente se obtienen de la expresión de la solución general tomando $C_1 = +\infty$.

c).- EDO de la forma $y'' = g(y, y')$.

Si g no depende de x, se puede reducir el orden de la EDO haciendo el cambio

$$y'(x) = p(y(x)),$$

con $p(y)$ función por determinar. De esta forma, teniendo en cuenta que

$$y'' = \frac{dp}{dy}(y(x))y'(x) = \frac{dp}{dy}(y(x)p(y(x)),$$

obtenemos la ecuación

$$\frac{dp}{dy}p = g(y,p),$$

EDO de primer orden en la incógnita $p(y)$, que si sabemos resolver nos permite hallar y integrando después $p(y)$.

Por ejemplo, si consideramos la EDO

$$y'' + (y')^2 = 2e^{-y}, \tag{4.54}$$

haciendo el cambio $y'(x) = p(y(x))$, obtenemos

$$\frac{dp}{dy}p + p^2 = 2e^{-y},$$

o dividiendo por p,

$$\frac{dp}{dy} = -p + e^{-y}p^{-1},$$

que es una EDO de Bernoulli. Esta última ecuación puede ser fácilmente resuelta, obteniéndose como solución general

$$p = \pm e^{-y}\sqrt{4e^y + C_1},$$

con $C_1 \in \mathbb{R}$ constante arbitraria. Para obtener ahora la solución general de (4.54), hemos de resolver

$$y' = \pm e^{-y}\sqrt{4e^y + C_1},$$

es decir,

$$\frac{e^y}{\sqrt{4e^y + C_1}}dy = \pm dx,$$

que, integrando, proporciona

$$\frac{1}{2}\sqrt{4e^y + C_1} = \pm(x + C_2).$$

Elevando al cuadrado, despejando y, y cambiando $-C_1/4$ por C_1, obtenemos

$$y = \log|(x + C_2)^2 + C_1|,$$

como solución general de (4.54).

d).- EDO lineal de segundo orden.

Las consideraciones que siguen serán tratadas con más generalidad en el Tema 5.

Se denomina EDO lineal de segundo orden a una ecuación de la forma

$$a_0(x)y'' + a_1(x)y' + a_2(x)y = b(x), \tag{4.55}$$

con $a_i(x) \in C(I)$, $i = 0, 1, 2$, y $b(x) \in C(I)$, funciones dadas, siendo $I \subset \mathbb{R}$ intervalo de interior no vacío, y donde suponemos que $a_0(x) \neq 0$ para todo $x \in I$. A las funciones $a_i(x)$ se las denominan los coeficientes de (4.55), y a $b(x)$ el término independiente de la EDO.

Definición 4.4 *Si* $b \equiv 0$, *se dice que* (4.55) *es una EDO lineal de segundo orden homogénea. En el caso en que* $b \not\equiv 0$, *se dice que la ecuación* (4.55) *es una EDO lineal de segundo orden no homogénea. En este último caso, se dice que*

$$a_0(x)y'' + a_1(x)y' + a_2(x)y = 0, \tag{4.56}$$

es la ecuación homogénea asociada a (4.55).

Denotemos,

$$V_0^2 = \{\varphi \in C^2(I);\ \varphi \text{ es solución de (4.56) en } I\},$$

y de manera más general,

$$V_b^2 = \{\varphi \in C^2(I);\ \varphi \text{ es solución de (4.55) en } I\}.$$

Nos centramos en primer lugar en el caso de una EDO homogénea. Es inmediato comprobar que toda combinación lineal de soluciones de (4.56) en I es también solución de (4.56) en I, es decir, V_0^2 es un subespacio vectorial de $C^2(I)$. De hecho, en el Tema 5 demostraremos el siguiente resultado que, por ahora, admitimos sin demostración.

Proposición 4.5 *El conjunto* V_0^2 *es un subespacio vectorial de* $C^2(I)$ *de dimensión 2.*

Así pues, para resolver (4.56) basta con hallar dos soluciones φ_1 y φ_2 en V_0^2 que sean linealmente independientes. En tal caso, se dice que el par $\{\varphi_1, \varphi_2\}$, que constituye una base de V_0^2, es un sistema fundamental de soluciones de (4.56), y la solución general $y_h(x, C_1, C_2)$ de esta ecuación viene dada por

$$y_h(x, C_1, C_2) = C_1\varphi_1(x) + C_2\varphi_2(x), \quad \forall\, x \in I,$$

siendo $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$ constantes arbitrarias.

A diferencia de para el caso de una EDO lineal de primer orden, no existe una fórmula general que permita obtener un sistema fundamental de soluciones de (4.56), no obstante, existen algunos casos importantes en que ello es posible, y que exponemos a continuación.

d1).- Caso en que se conoce una solución particular no nula.
Si conocemos una solución $y_p(x)$ de (4.56) en I, tal que $y_p \not\equiv 0$, entonces, haciendo el cambio

$$y(x) = y_p(x)u(x),$$

y teniendo en cuenta que

$$y' = y_p'u + y_pu', \qquad y'' = y_p''u + 2y_p'u' + y_pu'',$$

y que y_p satisface (4.56), se obtiene como ecuación para u

$$a_0(x)y_p(x)u'' + (a_1(x)y_p(x) + 2a_0(x)y_p'(x))u' = 0,$$

EDO que se puede reducir de orden con el cambio $z = u'$.
Por ejemplo, consideremos la ecuación

$$xy'' + 2y' + xy = 0, \tag{4.57}$$

en $I = (0, +\infty)$, de la cuál suponemos conocido de antemano que

$$y_p = \frac{\operatorname{sen} x}{x},$$

es una solución particular.
Haciendo el cambio

$$y = \frac{\operatorname{sen} x}{x}u,$$

obtenemos de (4.57)

$$(\operatorname{sen} x)u'' + \left(\frac{2\operatorname{sen} x}{x} + \frac{2x\cos x - 2\operatorname{sen} x}{x}\right)u' = 0,$$

con lo que poniendo $z = u'$, y simplificando, tenemos

$$(\operatorname{sen} x)z' + 2(\cos x)z = 0,$$

de donde fácilmente se obtiene

$$\log|z| = -2\log|\operatorname{sen} x| + C,$$

con lo que

$$u' = z = \frac{C_1}{\operatorname{sen}^2 x},$$

e integrando,

$$u = -C_1 \operatorname{cotg} x + C_2,$$

y por tanto, la solución general de (4.57) viene dada por

$$y(x) = -C_1\frac{\cos x}{x} + C_2\frac{\operatorname{sen} x}{x},$$

es decir, $\left\{\frac{\operatorname{sen} x}{x}, \frac{\cos x}{x}\right\}$ constituye un sistema fundamental de soluciones de la citada EDO.

d2).- EDO lineal homogénea de segundo orden de coeficientes constantes.

Se dice que (4.55) es una EDO lineal de segundo orden de coeficientes constantes si los a_i son constantes, es decir $a_i(x) \equiv a_i \in \mathbb{R}$, $i = 0, 1, 2$.

En el caso en que la ecuación es homogénea, es fácil hallar un sistema fundamental de soluciones.

En efecto, consideremos la EDO

$$a_0 y'' + a_1 y' + a_2 y = 0, \tag{4.58}$$

con $a_i \in \mathbb{R}$, $i = 0, 1, 2$.

Se denomina polinomio característico asociado a la ecuación (4.58), al polinomio

$$p(\lambda) = a_0 \lambda^2 + a_1 \lambda + a_2$$

Sean λ_1 y λ_2 las dos raices del polinomio característico, es decir, las soluciones de

$$p(\lambda) = 0.$$

Se pueden presentar tres casos:

i) Las dos raices son reales y distintas.
En tal caso, si definimos

$$\varphi_k(x) = e^{\lambda_k x}, \quad k = 1, 2, \tag{4.59}$$

las dos funciones son linealmente independientes, y es inmediato comprobar que

$$a_0 \varphi_k''(x) + a_1 \varphi_k'(x) + a_2 \varphi_k(x) = p(\lambda_k) e^{\lambda_k x} = 0,$$

con lo que $\{e^{\lambda_1 x}, e^{\lambda_2 x}\}$ es un sistema fundamental de soluciones de (4.58), es decir, la solución general de dicha EDO viene dada por

$$y_h(x, C_1, C_2) = C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 e^{\lambda_2 x}, \quad \forall\, x \in \mathbb{R}.$$

ii) Las dos raices son reales e iguales.
En este caso, las dos funciones definidas por (4.59) coinciden. Desde luego, la función $\varphi_1(x) = e^{\lambda_1 x}$, es una solución de (4.58), y el problema es cómo hallar otra solución linealmente independiente de ésta.
Para ello, basta tomar

$$\varphi_2(x) = x e^{\lambda_1 x},$$

función que evidentemente es linealmente independiente de $\varphi_1(x)$. Pero además, teniendo en cuenta que λ_1 es raiz doble de $p(\lambda)$, podemos afirmar que

$$\frac{dp}{d\lambda}(\lambda_1) = 2a_0\lambda_1 + a_1 = 0.$$

Pero,

$$\varphi_2'(x) = x\lambda_1 e^{\lambda_1 x} + e^{\lambda_1 x}, \quad \text{y} \quad \varphi_2''(x) = x\lambda_1^2 e^{\lambda_1 x} + 2\lambda_1 e^{\lambda_1 x},$$

con lo que

$$a_0\varphi_2''(x)+a_1\varphi_2'(x)+a_2\varphi_2(x) = p(\lambda_1)xe^{\lambda_1 x}+(2a_0\lambda_1+a_1)e^{\lambda_1 x} = 0,$$

y por tanto $\varphi_2(x) = xe^{\lambda_1 x}$, es solución (4.58).
En resumen, cuando $\lambda_1 = \lambda_2$, $\{e^{\lambda_1 x}, xe^{\lambda_1 x}\}$ es un sistema fundamental de soluciones de (4.58), es decir, la solución general de dicha EDO viene dada por

$$y_h(x, C_1, C_2) = (C_1 + C_2 x)e^{\lambda_1 x}, \quad \forall\, x \in \mathbb{R}.$$

iii) Si las dos raices son complejas conjugadas.
En tal caso,

$$\lambda_1 = \alpha + \beta i, \quad \lambda_2 = \alpha - \beta i,$$

con $\alpha \in \mathbb{R}$, y $\beta \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.
Razonando como en el caso i), se comprueba que las funciones $\varphi_1(x) = e^{\lambda_1 x}$ y $\varphi_2(x) = e^{\lambda_2 x}$ son soluciones de (4.58), pero toman valores complejos. Para solventar este problema, y limitarnos al caso de funciones con valores reales, se toman como soluciones de (4.58), las funciones parte real y parte imaginaria de $\varphi_1(x)$, es decir,

$$\psi_1(x) = e^{\alpha x}\cos(\beta x), \quad \psi_2(x) = e^{\alpha x}\operatorname{sen}(\beta x),$$

que son linealmente independientes.
En resumen, en este caso, $\{e^{\alpha x}\cos(\beta x), e^{\alpha x}\operatorname{sen}(\beta x)\}$ es un sistema fundamental de soluciones de (4.58), es decir, la solución general de dicha EDO viene dada por

$$y_h(x, C_1, C_2) = e^{\alpha x}(C_1 \cos x + C_2 \operatorname{sen} x), \quad \forall\, x \in \mathbb{R}.$$

d3).- EDO de Euler de segundo orden.

La EDO de Euler de segundo orden es una ecuación de la forma

$$a_0 x^2 y'' + a_1 x y' + a_2 y = 0, \tag{4.60}$$

con $a_i \in \mathbb{R}$, $i = 0, 1, 2$, dados.

Para resolver (4.60) en $I = (0, +\infty)$, se puede efectuar el cambio de variable independiente

$$t = \log x, \tag{4.61}$$

que convierte la ecuación en una lineal homogénea de coeficientes constantes.

En efecto, si denotamos por $\dot{y}$ a la derivada primera de y respecto de t, e $\ddot{y}$ a la derivada segunda de y respecto de t, teniendo en cuenta que

$$y' = \dot{y}\frac{1}{x}, \quad \text{e} \quad y'' = \ddot{y}\frac{1}{x^2} - \dot{y}\frac{1}{x^2},$$

sustituyendo en (4.60), y simplificando, obtenemos

$$a_0\ddot{y} + (a_1 - a_0)\dot{y} + a_2 y = 0,$$

EDO de coeficientes costantes que, una vez resuelta, y tras cambiar t por $\log x$, nos proporciona la solución general de (4.60) en $I = (0, +\infty)$. Para resolver la misma ecuación en $(-\infty, 0)$, basta hacer el cambio $t = \log(-x)$, y proceder de manera similar.

Otra manera de actuar para resolver (4.60), consiste en buscar soluciones de la forma $y = x^\lambda$, con λ por determinar. En este caso, derivando y sustituyendo en la ecuación, se obtiene

$$a_0\lambda(\lambda - 1)x^\lambda + a_1\lambda x^\lambda + a_2 x^\lambda = 0,$$

con lo que si λ es solución de la ecuación

$$a_0\lambda(\lambda - 1) + a_1\lambda + a_2 = 0, \tag{4.62}$$

entonces $y = x^\lambda$ es solución de (4.60). En consecuencia, si las dos soluciones de (4.62) son reales y distintas se obtiene así un sistema fundamental de soluciones de (4.60). El análisis de lo que hay que hacer si (4.62) posee solución real doble o soluciones complejas conjugadas, se deja como ejercicio.

Una vez hemos visto varios casos en que sabemos cómo hallar V_0^2, nos planteamos la cuestión de, conociendo V_0^2, o lo que es lo mismo, un sistema fundamental $\{\varphi_1(x), \varphi_2(x)\}$ de soluciones de (4.56), determinar V_b^2, cuando $b \not\equiv 0$, es decir hallar la solución general de (4.55).

En primer lugar, como en el caso de las EDO lineales de primer orden, es inmediato comprobar que se satisfacen la dos propiedades siguientes:

a) Si $\widehat{\varphi}$ y $\widehat{\psi}$ pertenecen a V_b^2, es decir, son soluciones de (4.55) en I, entonces $\widehat{\varphi} - \widehat{\psi}$ pertenece a V_0^2, es decir, es solución de (4.56) en I.

b) Si $\widehat{\varphi}$ pertenece a V_b^2, es decir, es solución de (4.55) en I, y φ pertenece a V_0^2, es decir, es solución de (4.56) en I, entonces $\widehat{\varphi}+\varphi$ pertenece a V_b^2, es decir, es solución de (4.55) en I.

Como consecuencia de a) y b), es inmediato obtener que si $\widehat{\varphi}_p$ es una solución particular de (4.55) en I, entonces

$$V_b^2 = \{\widehat{\varphi}_p + \varphi;\ \varphi \in V_0^2\}, \tag{4.63}$$

es decir, V_b^2 coincide con la variedad afín $\widehat{\varphi}_p + V_0^2$.

La igualdad (4.63) se expresa también diciendo que la solución general de (4.55) es igual a la suma de una solución particular de dicha ecuación, más la solución general de (4.56).

El problema es por tanto cómo calcular una solución particular de (4.55). Vamos a ver que, al menos en teoría, ello es posible si se conoce un sistema fundamental $\{\varphi_1(x), \varphi_2(x)\}$ de soluciones de la ecuación homogénea (4.56).

Para ello, se puede usar el denominado método de Lagrange de variación de las constantes, cuya idea, al igual que en el caso de las EDO de primer orden, consiste en, sabiendo que

$$y_h(x, C_1, C_2) = C_1\varphi_1(x) + C_2\varphi_2(x),$$

es solución general de la EDO homogénea, buscar $\widehat{\varphi}(x)$, solución de (4.55), de la forma

$$\widehat{\varphi}(x) = C_1(x)\varphi_1(x) + C_2(x)\varphi_2(x), \tag{4.64}$$

con $C_k(x)$, $k = 1, 2$, funciones derivables de la variable x por determinar. Para hallar las $C_k(x)$, se exige que sean soluciones del SDO

$$\begin{cases} C_1'(x)\varphi_1(x) + C_2'(x)\varphi_2(x) = 0, \\ C_1'(x)\varphi_1'(x) + C_2'(x)\varphi_2'(x) = \dfrac{b(x)}{a_0(x)} \end{cases} \tag{4.65}$$

Que (4.65) posee soluciones $(C_1(x), C_2(x)) \in C^1(I) \times C^1(I)$, será demostrado en el Tema 5, y lo admitimos por ahora.

Tomando $\widehat{\varphi}(x)$ de la forma (4.64), con las $C_k(x)$ satisfaciendo (4.65), se tiene

$$\begin{aligned} \widehat{\varphi}'(x) &= C_1(x)\varphi_1'(x) + C_2(x)\varphi_2'(x) + C_1'(x)\varphi_1(x) + C_2'(x)\varphi_2(x) \\ &= C_1(x)\varphi_1'(x) + C_2(x)\varphi_2'(x), \quad \forall\, x \in I, \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} \widehat{\varphi}''(x) &= C_1(x)\varphi_1''(x) + C_2(x)\varphi_2''(x) + C_1'(x)\varphi_1'(x) + C_2'(x)\varphi_2'(x) \\ &= C_1(x)\varphi_1''(x) + C_2(x)\varphi_2''(x) + \frac{b(x)}{a_0(x)}, \quad \forall\, x \in I, \end{aligned}$$

de donde

$$\begin{aligned} &a_0(x)\widehat{\varphi}''(x) + a_1(x)\widehat{\varphi}'(x) + a_2(x)\widehat{\varphi}(x) \\ &= C_1(x)\left[a_0(x)\varphi_1''(x) + a_1(x)\varphi_1'(x) + a_2(x)\varphi_1(x)\right] \\ &+C_2(x)\left[a_0(x)\varphi_2''(x) + a_1(x)\varphi_2'(x) + a_2(x)\varphi_2(x)\right] + b(x) = b(x), \end{aligned}$$

para todo $x \in I$, con lo que $\widehat{\varphi}(x)$ es una solución particular de (4.55).

Observación 4.6 *En el caso en que la ecuación lineal* (4.55) *es de coeficientes constantes, si la función $b(x)$ es de la forma*

$$e^{\alpha x}(P_n(x)\cos(\beta x) + Q_m(x)\operatorname{sen}(\beta x)),$$

con $P_n(x)$ y $Q_m(x)$ polinomios de grado n y m respectivamente, y $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ dados, se puede encontrar solución particular $y_p(x)$ de (4.55)*, buscándola de la forma*

$$y_p(x) = x^s e^{\alpha x}(\widetilde{P}_r(x)\cos(\beta x) + \widetilde{Q}_r(x)\operatorname{sen}(\beta x)),$$

con $\widetilde{P}_r(x)$ y $\widetilde{Q}_r(x)$ polinomios de grado $r = \text{máx}(n,m)$, con los coeficientes por determinar, y s igual al orden de multiplicidad de $\alpha + i\beta$ como raiz del polinomio característico de la ecuación homogénea asociada a (4.55) *(en particular, $s = 0$ si $\alpha + i\beta$ no es raiz del polinomio característico).*

Observación 4.7 *Si*

$$b(x) = \sum_{j=1}^{m} b_j(x),$$

y conocemos para cada $1 \leq j \leq m$ una solución particular $\widehat{\varphi}^j(x)$ de la EDO (4.55) *en el caso en que el término independiente es $b_j(x)$, entonces es inmediato comprobar que la función*

$$\widehat{\varphi}(x) = \sum_{j=1}^{m} \widehat{\varphi}^j(x),$$

es una solución particular de la EDO (4.55) *en el caso en que el término independiente es $b(x)$. Esta afirmación se conoce como principio de superposición, y es útil en algunos casos para hallar soluciones particulares de* (4.55)

Referencias

[1] M. Braun: *Differential Equations and their Applications*, Springer-Verlag, New York, 1978.

[2] A. Dou: *Ecuaciones Diferenciales Ordinarias*, Editorial Dossat, Madrid, 1969.

[3] A. Kiseliov, M. Krasnov & G. Makarenko: *Problemas de Ecuaciones Diferenciales Ordinarias*, Editorial Mir, Mosc, 1979.

[4] S. Novo, R. Obaya & J. Rojo: *Ecuaciones y sistemas diferenciales*, MacGraw & Hill, Madrid, 1995.