Tema 3

Soluciones maximales del Problema de Cauchy para un SDO

1 El lema de Gronwall

Como hemos visto en el tema anterior, el Teorema de Picard nos garantiza que, dados $\Omega \subset \mathbb{R}^{N+1}$ abierto no vacío, $f : \Omega \to \mathbb{R}^N$ tal que

$$f \in C(\Omega; \mathbb{R}^N) \cap Lip_{loc}(y, \Omega),$$

y $(x_0, y_0) \in \Omega$, existe un $\delta > 0$, tal que si denotamos $I_\delta = [x_0 - \delta, x_0 + \delta]$, existe una y sólo una solución en I_δ del problema de Cauchy

$$(PC) \begin{cases} y' = f(x, y), \\ y(x_0) = y_0. \end{cases}$$

En este tema nos vamos a plantear, bajo las mismas condiciones, el análisis de la existencia y unicidad de solución maximal, es decir, definida en un intervalo lo más grande posible.

Para llevar a cabo esta tarea, nos va a ser de gran utilidad el resultado siguiente:

Teorema 1.1 (**Lema de Gronwall**)

a) *Supongamos dados* $-\infty < x_0 < x_1 < +\infty$, *dos funciones* $u, k \in C([x_0, x_1])$, *y una constante* $h \in \mathbb{R}$, *tales que* $k(x) \geq 0$, *y*

$$u(x) \leq h + \int_{x_0}^{x} k(s)u(s)\, ds, \quad \forall\, x \in [x_0, x_1]. \tag{1.1}$$

En tal caso, también se satisface

$$u(x) \leq h e^{\int_{x_0}^{x} k(s)\, ds}, \quad \forall\, x \in [x_0, x_1]. \tag{1.2}$$

b) *Supongamos dados* $-\infty < x_1 < x_0 < +\infty$, *dos funciones* $u, k \in C([x_1, x_0])$, *y una constante* $h \in \mathbb{R}$, *tales que* $k(x) \geq 0$, *y*

$$u(x) \leq h + \int_x^{x_0} k(s)u(s)\,ds, \quad \forall\, x \in [x_1, x_0]. \tag{1.3}$$

En tal caso, también se satisface

$$u(x) \leq h e^{\int_x^{x_0} k(s)\,ds}, \quad \forall\, x \in [x_1, x_0]. \tag{1.4}$$

Demostración.- Vamos a demostrar b) (como la demostración de a) es análoga, queda como ejercicio).

Denotemos

$$v(x) = \int_x^{x_0} k(s)u(s)\,ds, \quad \forall\, x \in [x_1, x_0].$$

Evidentemente, $v \in C^1([x_1, x_0])$, con

$$v'(x) = -k(x)u(x), \quad \forall\, x \in [x_1, x_0]. \tag{1.5}$$

Multiplicando la desigualdad (1.3) por $k(x) \geq 0$, y teniendo en cuenta (1.5), se obtiene

$$-v'(x) - k(x)v(x) \leq hk(x), \quad \forall\, x \in [x_1, x_0]. \tag{1.6}$$

Si multiplicamos la desigualdad (1.6) por $e^{\int_{x_0}^{x} k(\tau)\,d\tau}$, es inmediato que obtenemos

$$\frac{d}{dx}\left(-v(x)e^{\int_{x_0}^{x} k(\tau)\,d\tau}\right) \leq hk(x)e^{\int_{x_0}^{x} k(\tau)\,d\tau}, \quad \forall\, x \in [x_1, x_0]. \tag{1.7}$$

Ahora, teniendo en cuenta que $v(x_0) = 0$, si integramos en la desigualdad (1.7) entre $x \in [x_1, x_0]$ y x_0, se tiene

$$v(x)e^{\int_{x_0}^{x} k(\tau)\,d\tau} \leq h \int_x^{x_0} k(s)e^{\int_{x_0}^{s} k(\tau)\,d\tau}\,ds, \quad \forall\, x \in [x_1, x_0],$$

y por consiguiente,

$$v(x) \leq h \int_x^{x_0} k(s)e^{(\int_{x_0}^{s} k(\tau)\,d\tau - \int_{x_0}^{x} k(\tau)\,d\tau)}\,ds = h \int_x^{x_0} k(s)e^{\int_x^{s} k(\tau)\,d\tau}\,ds, \tag{1.8}$$

para todo $x \in [x_1, x_0]$.

Ahora bien, evidentemente,

$$k(s)e^{\int_x^{s} k(\tau)\,d\tau} = \frac{d}{ds}\left(e^{\int_x^{s} k(\tau)\,d\tau}\right),$$

y por tanto,

$$\int_x^{x_0} k(s)e^{\int_x^{s} k(\tau)\,d\tau}\,ds = e^{\int_x^{x_0} k(\tau)\,d\tau} - 1, \quad \forall\, x \in [x_1, x_0].$$

Llevando esta última igualdad a (1.8), y teniendo en cuenta la definición de $v(x)$, obtenemos

$$\int_x^{x_0} k(s)u(s)\,ds \leq h\left(e^{\int_x^{x_0} k(\tau)\,d\tau} - 1\right), \quad \forall\, x \in [x_1, x_0],$$

con lo que, de (1.3) se tiene de manera inmediata (1.4). ■

Observación 1.2 *Obsérvese que en el lema de Gronwall se obtiene, partiendo de una estimación sobre u en la que aparece dicha función en los dos miembros de la desigualdad, otra estimación sobre u en que ésta no aparece en el miembro derecho.*

Reseñemos por otra parte que si $h = 0$, *entonces tanto* (1.2) *como* (1.4) *se traducen en*

$$u(x) \leq 0, \quad \forall\, x \in [x_0, x_1].$$

Obsérvese también que si k es constante, entonces (1.2) *y* (1.4) *se escriben, respectivamente,*

$$u(x) \leq he^{k(x-x_0)}, \quad \forall\, x \in [x_0, x_1],$$
$$u(x) \leq he^{k(x_0-x)}, \quad \forall\, x \in [x_1, x_0].$$

Observación 1.3 *El lema de Gronwall se puede generalizar sin gran dificultad al caso en que h no es constante. Así por ejemplo, en el caso a), si* h, k, u, *pertenecen a* $C([x_0, x_1])$, *y se satisface que* $k(x) \geq 0$ *y*

$$u(x) \leq h(x) + \int_{x_0}^{x} k(s)u(s)\,ds, \quad \forall\, x \in [x_0, x_1],$$

entonces, razonando de manera similar al caso en que h es constante, se puede obtener que también se satisface

$$u(x) \leq h(x) + \int_{x_0}^{x} h(s)k(s)e^{\int_s^x k(\tau)\,d\tau}\,ds, \quad \forall\, x \in [x_0, x_1].$$

2 Unicidad global de solución

Como una aplicación sencilla del lema de Gronwall, obtenemos el siguiente resultado de unicidad global para el Problema de Cauchy para un SDO de primer orden en forma normal.

Teorema 2.1 (**de unicidad global**) *Sean* $\Omega \subset \mathbb{R}^{N+1}$ *un abierto no vacío,* $f : \Omega \to \mathbb{R}^N$ *tal que* $f \in C(\Omega; \mathbb{R}^N) \cap Lip_{loc}(y, \Omega)$, *y consideremos fijado un punto* $(x_0, y_0) \in \Omega$.

En estas condiciones, si (I_1, φ_1) *e* (I_2, φ_2) *son dos soluciones locales del problema de Cauchy*

$$(PC)\begin{cases} y' = f(x, y), \\ y(x_0) = y_0, \end{cases}$$

entonces

$$\varphi_1(x) = \varphi_2(x), \quad \forall\, x \in I_1 \cap I_2.$$

Demostración.- Recordemos que, por definición de solución de (PC), el punto x_0 pertenece a $I_1 \cap I_2$, y

$$\varphi_1(x_0) = \varphi_2(x_0) = y_0.$$

Sea ahora $x_1 \neq x_0$ otro punto perteneciente a $I_1 \cap I_2$, y supongamos, por fijar ideas, que $x_1 < x_0$. En tal caso, el intervalo $[x_1, x_0]$ está contenido en $I_1 \cap I_2$, y en consecuencia,

$$\varphi_j(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(s, \varphi_j(s))\, ds, \quad \forall\, x \in [x_1, x_0], \quad \forall j = 1, 2. \tag{2.9}$$

Denotemos

$$K = \{(s, \varphi_1(s));\ s \in [x_1, x_0]\} \cup \{(s, \varphi_2(s));\ s \in [x_1, x_0]\}.$$

Evidentemente, K es compacto y está contenido en Ω. Denotemos por $L_K > 0$ a una constante de Lipschitz respecto de y para f en K. De (2.9), se obtiene fácilmente, para cada $x \in [x_1, x_0]$,

$$|\varphi_1(x) - \varphi_2(x)| = \left| \int_{x_0}^{x} (f(s, \varphi_1(s)) - f(s, \varphi_2(s))\, ds \right|$$
$$\leq \int_{x}^{x_0} |f(s, \varphi_1(s)) - f(s, \varphi_2(s)|\, ds \leq L_K \int_{x}^{x_0} |\varphi_1(s) - \varphi_2(s)|\, ds,$$

y en consecuencia, aplicando el lema de Gronwall con $h = 0$, $k = L_K$, y $u(x) = |\varphi_1(x) - \varphi_2(x)|$, obtenemos

$$|\varphi_1(x) - \varphi_2(x)| \leq 0, \quad \forall\, x \in [x_1, x_0],$$

y en particular

$$|\varphi_1(x_1) - \varphi_2(x_1)| = 0.$$

Idéntica conclusión se obtiene, razonando de manera similar, si $x_1 \neq x_0$ es ahora un punto perteneciente a $I_1 \cap I_2$, tal que $x_1 > x_0$. ∎

3 Prolongación de soluciones. Existencia y unicidad de solución maximal

Supongamos dados $\Omega \subset \mathbb{R}^{N+1}$ abierto no vacío, $f : \Omega \to \mathbb{R}^N$ tal que

$$f \in C(\Omega; \mathbb{R}^N) \cap Lip_{loc}(y, \Omega),$$

y consideremos el Problema de Cauchy

$$(PC) \begin{cases} y' = f(x, y), \\ y(x_0) = y_0. \end{cases}$$

Para cada punto $(x_0, y_0) \in \Omega$, denotaremos

$$S(x_0, y_0) = \{(I, \varphi);\ \varphi \text{ es solución de } (PC) \text{ en el intervalo } I\}$$

Teniendo en cuenta el Teorema de Picard, sabemos que, bajo las condiciones precedentes,

$$S(x_0, y_0) \neq \emptyset.$$

Definición 3.1 *Sean $(x_0, y_0) \in \Omega$, e $(I, \varphi) \in S(x_0, y_0)$, fijados.*

a) *Diremos que (I, φ) es prolongable por la derecha, si existe una solución $(J, \psi) \in S(x_0, y_0)$, tal que* $\sup I$ *pertenece al interior del intervalo J, e $I \subset J$.*

b) *Diremos que (I, φ) es prolongable por la izquierda, si existe una solución $(J, \psi) \in S(x_0, y_0)$, tal que* $\inf I$ *pertenece al interior del intervalo J, e $I \subset J$.*

c) *Diremos que (I, φ) es prolongable, si es prolongable por la derecha o por la izquierda (o ambas cosas a la vez).*

d) *Diremos que (I, φ) es una solución maximal, o una solución global, del problema (PC), si no es prolongable.*

Observación 3.2 *Si $(I, \varphi) \in S(x_0, y_0)$ es prolongable por la derecha, y $(J, \psi) \in S(x_0, y_0)$ es tal que* $\sup I$ *pertenece al interior del intervalo J, e $I \subset J$, es claro que, como consecuencia del teorema de unicidad global, φ y ψ son iguales en I, siendo por tanto ψ una prolongación de φ por el extremo derecho del intervalo I. Cabe hacer una observación similar si (I, φ) es prolongable por la izquierda.*

Demostramos ahora la existencia y unicidad de solución maximal del Problema de Cauchy.

Teorema 3.3 (**de existencia y unicidad de solución global**) *Sean Ω un abierto no vacío de $\mathbb{R}^{N+1}$, y $f : \Omega \to \mathbb{R}^N$ tal que $f \in C(\Omega; \mathbb{R}^N) \cap Lip_{loc}(y, \Omega)$.*

En estas condiciones, para cada $(x_0, y_0) \in \Omega$ dado, existe una y sólo una solución maximal o global del Problema de Cauchy

$$(PC) \begin{cases} y' = f(x, y), \\ y(x_0) = y_0, \end{cases}$$

que denotaremos $(I(x_0, y_0), \varphi(\cdot; x_0, y_0))$.

Además, el intervalo $I(x_0, y_0)$ de definición de la solución global es abierto.

Demostración.- La hacemos en tres etapas.

(a) El intervalo de definición de toda solución maximal es abierto.

En efecto, si $(I, \varphi) \in S(x_0, y_0)$, y si por fijar ideas $\sup I = \beta \in I$, entonces en particular $(\beta, \varphi(\beta)) \in \Omega$, y podemos considerar el Problema de Cauchy

$$(PC)_\beta \begin{cases} y' = f(x, y), \\ y(\beta) = \varphi(\beta), \end{cases}$$

que, por el teorema de Picard, sabemos que posee una solución $\overline{\varphi}$ en un intervalo de la forma $[\beta - \delta, \beta + \delta]$, para algún $\delta > 0$. Obsérvese también que $(I, \varphi) \in S(\beta, \varphi(\beta))$.

Consideremos el intervalo J dado por

$$J = I \cup [\beta - \delta, \beta + \delta],$$

que evidentemente contiene a I, y es tal que β pertenece a su interior.

Tomemos ahora la función $\psi : J \to \mathbb{R}^N$ dada por

$$\psi(x) = \begin{cases} \varphi(x), & \text{si } x \in I, \\ \overline{\varphi}(x), & \text{si } x \in [\beta - \delta, \beta + \delta]. \end{cases}$$

Es inmediato que la función ψ está bien definida, ya que tanto (I, φ) como $([\beta - \delta, \beta + \delta], \psi)$ pertenecen a $S(\beta, \varphi(\beta))$, y por tanto,

$$\varphi(x) = \overline{\varphi}(x), \quad \forall\, x \in I \cap [\beta - \delta, \beta + \delta].$$

Además, por esta igualdad, es inmediato comprobar que la pareja (J, ψ) así construida pertenece a $S(x_0, y_0)$, y por consiguiente (I, φ) es prolongable por la derecha.

Razonando de manera similar, se llega a que si $\inf I$ pertenece a I, entonces (I, φ) es prolongable por la izquierda.

En consecuencia, si (I, φ) no es prolongable, es decir es una solución maximal de (PC), entonces ni $\sup I$ ni $\inf I$ pertenecen a I, y por tanto I es abierto.

(b) Unicidad de solución global.

Sean (I_1, φ_1) e (I_2, φ_2) pertenecientes a $S(x_0, y_0)$, dos soluciones maximales. En tal caso, I_1 e I_2 son intervalos abiertos, $x_0 \in I_1 \cap I_2$, y por tanto $I_1 \cup I_2$ es un intervalo abierto. Sea $\widehat{\varphi} : I_1 \cup I_2 \to \mathbb{R}^N$, definida por

$$\widehat{\varphi}(x) = \begin{cases} \varphi_1(x) & \text{si } x \in I_1, \\ \varphi_2(x) & \text{si } x \in I_2. \end{cases}$$

Por la unicidad global, φ_1 y φ_2 coinciden sobre $I_1 \cap I_2$, y en consecuencia, $\widehat{\varphi}$ está bien definida, y es sencillo comprobar que $(I_1 \cup I_2, \widehat{\varphi}) \in S(x_0, y_0)$. Entonces, por ser φ_1 maximal, $I_1 \cup I_2 \subset I_1$, es decir, $I_1 \cup I_2 = I_1$. También, por ser φ_2 maximal, $I_1 \cup I_2 \subset I_2$, es decir, $I_1 \cup I_2 = I_2$. Así pues, $I_1 = I_2$, y por tanto, por la unicidad global, $(I_1, \varphi_1) = (I_2, \varphi_2)$.

(c) Existencia de solución global.

Sea $(x_0, y_0) \in \Omega$ un punto fijado. Definamos

$$I(x_0, y_0) = \{x \in \mathbb{R};\ \text{existe } (I, \varphi) \in S(x_0, y_0), \text{ tal que } I \text{ es abierto y } x \in I\}.$$

Se observa en primer lugar, que, por el teorema de Picard, $x_0 \in I(x_0, y_0)$, y por tanto también $I(x_0, y_0)$ es un intervalo abierto. Si consideramos la función $\widetilde{\varphi} : I(x_0, y_0) \to \mathbb{R}^N$, definida por

$$\widetilde{\varphi}(x) = \varphi(x), \text{ si } x \in I, \text{ siendo } (I, \varphi) \in S(x_0, y_0), \text{ tal que } I \text{ es abierto},$$

es inmediato comprobar que, por el teorema de unicidad global, $\widetilde{\varphi}$ está bien definida, y es sencillo ver que $(I(x_0, y_0), \widetilde{\varphi}) \in S(x_0, y_0)$, y es maximal por su misma definición. ■

Definición 3.4 *Supongamos satisfechas las condiciones del Teorema de existencia y unicidad de solución global. Para cada* $(x_0, y_0) \in \Omega$, *denotemos por* $(I(x_0, y_0), \varphi(\cdot; x_0, y_0))$ *a la solución maximal del problema* (PC). *Se definen el conjunto*

$$\Theta = \{(x, x_0, y_0) \in \mathbb{R}^{N+2};\ (x_0, y_0) \in \Omega,\ x \in I(x_0, y_0)\},$$

y la función

$$\varphi : (x, x_0, y_0) \in \Theta \mapsto \varphi(x, ; x_0, y_0) \in \mathbb{R}^N.$$

A la función $\varphi : \Theta \to \mathbb{R}^N$ *así definida se la denomina la solución (maximal) del problema* (PC) *expresada en función de los datos iniciales.*

Observación 3.5 *En el Tema 5, demostraremos que, bajo las condiciones del Teorema de existencia y unicidad de solución global, el conjunto* Θ *definido precedentemente es un subconjunto abierto de* $\mathbb{R}^{N+2}$, *y la función* $\varphi : \Theta \to \mathbb{R}^N$, *solución (maximal) del problema* (PC) *expresada en función de los datos iniciales, es continua, es decir,* $\varphi \in C(\Theta; \mathbb{R}^N)$.

4 Caracterización de soluciones prolongables y maximales

Supongamos en todo el resto del Tema que se satisfacen las condiciones del Teorema de existencia y unicidad de solución global.

Ya sabemos de las consideraciones precedentes, que dados $(x_0, y_0) \in \Omega$, e $(I, \varphi) \in S(x_0, y_0)$, si I no es abierto, entonces (I, φ) es prolongable. Ahora vamos a investigar qué sucede si I es un intervalo abierto.

Definición 4.1 *Sean* $(x_0, y_0) \in \Omega$, *e* $(I, \varphi) \in S(x_0, y_0)$, *tal que* $I = (\alpha, \beta)$ *es abierto.*

a) *Se denomina semitrayectoria derecha (o positiva) de* (I, φ), *al conjunto*

$$\tau_\varphi^+ = \{(x, \varphi(x);\ x \in I,\ x \geq x_0\}.$$

b) *Se denomina semitrayectoria izquierda (o negativa) de* (I, φ), *al conjunto*

$$\tau_\varphi^- = \{(x, \varphi(x);\ x \in I,\ x \leq x_0\}.$$

c) *Se denomina trayectoria de* (I, φ), *al conjunto*

$$\tau_\varphi = \tau_\varphi^+ \cup \tau_\varphi^- = \{(x, \varphi(x);\ x \in I\}.$$

Podemos demostrar el siguiente resultado:

Teorema 4.2 *Sean* $(x_0, y_0) \in \Omega$, *e* $(I, \varphi) \in S(x_0, y_0)$, *tal que* $I = (\alpha, \beta)$ *es abierto. Las dos afirmaciones siguientes son equivalentes:*

a) *La solución* (I, φ) *es prolongable por la derecha.*

b) *La semitrayectoria derecha* τ_φ^+ *está acotada, siendo* $d(\tau_\varphi^+, \partial\Omega) > 0$.

Demostración.-

1.− a) implica b).

Si (I, φ) es prolongable por la derecha, entonces existe una solución $(J, \psi) \in S(x_0, y_0)$, tal que $\sup I$ pertenece al interior del intervalo J, e $I \subset J$.

En tal caso,

$$\tau_\varphi^+ \subset \{(x, \psi(x));\ x \in [x_0, \beta]\} \subset \tau_\psi^+ \subset \Omega,$$

y en consecuencia, $\overline{\tau_\varphi^+}$ es un compacto contenido en Ω, con lo que en particular, τ_φ^+ está acotada y $d(\tau_\varphi^+, \partial\Omega) > 0$.

2.− b) implica a).

Si τ_φ^+ está acotada y $d(\tau_\varphi^+, \partial\Omega) > 0$, entonces $\overline{\tau_\varphi^+}$ es un compacto contenido en Ω, y además $\beta < +\infty$.

En consecuencia, para todo par de puntos $x_1, x_2 \in [x_0, \beta)$, se satisface

$$|\varphi(x_1) - \varphi(x_2)| = \left| \int_{x_2}^{x_1} f(s, \varphi(s))\, ds \right| \leq \left(\max_{(x,y)\in \overline{\tau_\varphi^+}} |f(x,y)| \right) |x_1 - x_2|,$$

y por tanto (razónese), existe $\lim_{x \uparrow \beta} \varphi(x)$. Denotemos

$$y_\beta = \lim_{x\uparrow\beta} \varphi(x).$$

Evidentemente,

$$(\beta, y_\beta) \in \overline{\tau_\varphi^+} \subset \Omega,$$

y por ello, podemos plantear el Problema de Cauchy

$$(PC)_\beta \begin{cases} y' = f(x,y), \\ y(\beta) = y_\beta. \end{cases}$$

Por el teorema de Picard, existe una solución $(I_\delta, \overline{\varphi})$ de $(PC)_\beta$, con $I_\delta = [\beta - \delta, \beta + \delta]$, siendo $\delta > 0$, y que podemos suponer, tomándolo suficientemente pequeño, tal que $[\beta - \delta, \beta) \subset (\alpha, \beta)$.

Definamos

$$J = (\alpha, \beta + \delta), \quad \psi(x) = \begin{cases} \varphi(x), & \text{si } x \in (\alpha, \beta), \\ \overline{\varphi}(x), & \text{si } x \in [\beta, \beta + \delta). \end{cases}$$

Vamos a comprobar que $(J, \psi) \in S(x_0, y_0)$, con lo que quedará demostrado que (I, φ) es prolongable por la derecha.

Desde luego, por construcción $\psi(x_0) = \varphi(x_0) = y_0$, y $(x, \psi(x)) \in \Omega$, para todo $x \in J$. También por su definición, es evidente que ψ es continua en $J \setminus \{\beta\}$. Pero, en $x = \beta$, también es la función ψ continua, ya que

$$\psi(\beta) = \overline{\varphi}(\beta) = \lim_{x\downarrow\beta} \overline{\varphi}(x) = \lim_{x\downarrow\beta} \psi(x),$$

y

$$\psi(\beta) = y_\beta = \lim_{x\uparrow\beta} \varphi(x) = \lim_{x\uparrow\beta} \psi(x).$$

En consecuencia, $\psi \in C(J; \mathbb{R}^N)$, y por tanto, para terminar de demostrar que $(J, \psi) \in S(x_0, y_0)$, basta que comprobemos que se satisface

$$\psi(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(s, \psi(s))\, ds, \quad \forall x \in J. \tag{4.10}$$

Es inmediato que (4.10) se satisface para todo $x \in (\alpha, \beta)$. Por otra parte, si $x \in [\beta, \beta + \delta)$,

$$\psi(x) = \overline{\varphi}(x) = y_\beta + \int_\beta^x f(s, \overline{\varphi}(s))\, ds = \lim_{t\uparrow\beta} \varphi(t) + \int_\beta^x f(s, \overline{\varphi}(s))\, ds$$
$$= y_0 + \lim_{t\uparrow\beta} \int_{x_0}^t f(s, \varphi(s))\, ds + \int_\beta^x f(s, \overline{\varphi}(s))\, ds$$
$$= y_0 + \lim_{t\uparrow\beta} \int_{x_0}^t f(s, \psi(s))\, ds + \int_\beta^x f(s, \psi(s))\, ds = y_0 + \int_{x_0}^x f(s, \psi(s))\, ds.$$

■

Con una demostración similar a la del teorema precedente, se obtiene:

Teorema 4.3 *Sean $(x_0, y_0) \in \Omega$, e $(I, \varphi) \in S(x_0, y_0)$, tal que $I = (\alpha, \beta)$ es abierto. Las dos afirmaciones siguientes son equivalentes:*

a) *La solución (I, φ) es prolongable por la izquierda.*

b) *La semitrayectoria izquierda τ_φ^- está acotada y $d(\tau_\varphi^-, \partial\Omega) > 0$.*

Demostración.- Se deja como ejercicio. ■

Ahora, resulta evidente de los dos teoremas precedentes, que se satisface el siguiente:

Teorema 4.4 *Sean $(x_0, y_0) \in \Omega$, e $(I, \varphi) \in S(x_0, y_0)$. Las dos afirmaciones siguientes son equivalentes:*

a) *La solución (I, φ) es maximal.*

b) *O la semitrayectoria derecha τ_φ^+ no está acotada o $d(\tau_\varphi^+, \partial\Omega) = 0$ (o ambas cosas a la vez), y o la semitrayectoria izquierda τ_φ^- no está acotada o $d(\tau_\varphi^-, \partial\Omega) = 0$ (o ambas cosas a la vez).* ■

Observación 4.5 *Las nociones y resultados estudiados en esta sección y en las secciones precedentes, pueden ser extendidos fácilmente al caso del Problema de Cauchy para una EDO de orden n en forma normal. Para ello, basta considerar el correspondiente Problema de Cauchy para el SDO asociado. Se dejan al estudiante el estudio de los detalles (estudiése, por simplificar, el caso de una EDO de segundo orden).*

5 Casos particulares. El fenómeno de explosión en tiempo finito

Analizamos en esta sección dos casos particulares muy importantes de aplicación de los resultados de la sección anterior.

a) El caso en que Ω es una banda.

Supongamos que Ω es una banda de $\mathbb{R}^{N+1}$, es decir, es un conjunto de la forma

$$\Omega = I \times \mathbb{R}^N,$$

con $I = (a, b)$, un intervalo, siendo $-\infty \leq a < b \leq +\infty$.

Supongamos en primer lugar, que $f \in C(\Omega; \mathbb{R}^N) \cap Lip(y, \Omega)$. En tal caso, como vamos a demostrar ahora, se satisface

$$I(x_0, y_0) = I, \quad \forall\, (x_0, y_0) \in I \times \mathbb{R}^N, \tag{5.11}$$

es decir, el intervalo de definición de la solución maximal $\varphi(\cdot; x_0, y_0)$ es todo el intervalo I, cualquiera que sea el dato inicial (x_0, y_0) en la banda.

En efecto, sea $(x_0, y_0) \in I \times \mathbb{R}^N$, fijado, y denotemos $I(x_0, y_0) = (\alpha, \beta)$. Evidentemente, $(\alpha, \beta) \subset I = (a, b)$, y supongamos, por fijar ideas, que se tiene $\beta < b$. En tal caso, en particular $\beta < +\infty$, y si denotamos $\varphi(x) = \varphi(x; x_0, y_0)$, para todo $x \in [x_0, \beta)$ se satisface

$$\begin{aligned}
|\varphi(x) - y_0| &= \left| \int_{x_0}^{x} f(s, \varphi(s))\, ds \right| \\
&\leq \left| \int_{x_0}^{x} (f(s, \varphi(s)) - f(s, y_0))\, ds \right| + \left| \int_{x_0}^{x} f(s, y_0)\, ds \right| \\
&\leq M_0(x - x_0) + L \int_{x_0}^{x} |\varphi(s) - y_0|\, ds \\
&\leq M_0(\beta - x_0) + L \int_{x_0}^{x} |\varphi(s) - y_0|\, ds,
\end{aligned}$$

donde, $L > 0$ es una constante de Lipschitz respecto de y en Ω para f, y por definición,

$$M_0 = \max_{s \in [x_0, \beta]} |f(s, y_0)|.$$

Entonces, aplicando el lema de Gronwall, obtenemos de la desigualdad anterior,

$$|\varphi(x) - y_0| \leq M_0(\beta - x_0) e^{L(\beta - x_0)}, \quad \forall\, x \in [x_0, \beta),$$

y en consecuencia, τ_φ^+ está acotada, y de hecho,

$$\tau_\varphi^+ \subset [x_0, \beta] \times \overline{B}(y_0, M_0(\beta - x_0) e^{L(\beta - x_0)}),$$

siendo este último conjunto un compacto contenido en $\Omega = I \times \mathbb{R}^{N+1}$. En consecuencia, $\varphi(\cdot; x_0, y_0)$ resulta ser prolongable por la derecha, en contradicción con el hecho de ser maximal. Así pues, $\beta = b$.

Razonando de manera similar, se llega a la conclusión de que también se ha de tener $\alpha = a$, y en consecuencia se satisface (5.11).

Las consideraciones precedentes se pueden generalizar. Continuemos suponiendo $\Omega = I \times \mathbb{R}^N$, con $I = (a, b)$, un intervalo, siendo $-\infty \leq a < b \leq +\infty$, pero supongamos ahora que $f \in C(I \times \mathbb{R}^N; \mathbb{R}^N) \cap Lip_{loc}(y, I \times \mathbb{R}^N)$, y que

$$f \in C(J \times \mathbb{R}^N; \mathbb{R}^N) \cap Lip(y, J \times \mathbb{R}^N),$$

para todo intervalo J tal que $\overline{J} \subset I$.

En tal caso, se sigue satisfaciendo (5.11). En efecto, sea (x_0, y_0) un punto fijado en $\Omega = I \times \mathbb{R}^N$, y sean $\{a_n\}_{n\geq 1}$ una sucesión decreciente de números reales, y $\{b_n\}_{n\geq 1}$ una sucesión creciente de números reales, tales que

$$a < a_n < x_0 < b_n < b, \quad \forall\, n \geq 1,$$

y se satisfaga

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a, \quad \lim_{n\to\infty} b_n = b.$$

Para cada $n \geq 1$, denotemos $\Omega_n = (a_n, b_n) \times \mathbb{R}^N$, y

$$f_n(x, y) = f(x, y), \quad \forall\, (x, y) \in \Omega_n.$$

De acuerdo con la hipótesis precedente, $f \in C(\Omega_n; \mathbb{R}^N) \cap Lip(y, \Omega_n)$, y $(x_0, y_0) \in \Omega_n$, para todo $n \geq 1$. En consecuencia, tiene sentido considerar el Problema de Cauchy

$$(PC)_n \begin{cases} y' = f_n(x, y), \\ y(x_0) = y_0, \end{cases}$$

que, de acuerdo con las consideraciones hechas en el caso globalmente lipschitziano, tiene una solución global $\varphi_n(\cdot; x_0, y_0)$ definida en el intervalo $I_n(x_0, y_0) = (a_n, b_n)$. Además, por la unicidad global, es evidente que para cada entero $m \geq n$ se satisface

$$\varphi_m(x; x_0, y_0) = \varphi_n(x; x_0, y_0), \quad \forall\, x \in (a_n, b_n).$$

Resulta ahora claro que la solución maximal $\varphi(\cdot; x_0, y_0)$ está definida en

$$I(x_0, y_0) = \bigcup_{n=1}^{\infty} (a_n, b_n) = (a, b).$$

b) El caso de un SDO lineal.

Denotemos por $\mathcal{L}(\mathbb{R}^N)$ al espacio vectorial de todas las matrices cuadradas $N \times N$ de coeficientes reales. Sobre dicho espacio, consideremos la norma definida por

$$|A| = \sup_{y\in\mathbb{R}^N,\, y\neq 0} \frac{|Ay|}{|y|}, \quad \forall\, A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^N). \tag{5.12}$$

Observación 5.1 *Es bien conocido que $\mathcal{L}(\mathbb{R}^N)$ dotado de la norma precedente es un espacio de Banach, y que de hecho, al ser $\mathcal{L}(\mathbb{R}^N)$ un espacio vectorial de dimensión finita igual a N^2, todas las normas definidas en dicho espacio son equivalentes a la norma definida por* (5.12).

Dado un intervalo $I \subset \mathbb{R}$, denotaremos por $C(I; \mathcal{L}(\mathbb{R}^N))$ al espacio vectorial de todas las aplicaciones

$$A : x \in I \mapsto A(x) \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^N),$$

que sean continuas. De acuerdo con la observación anterior, es sencillo comprobar que la continuidad de A es equivalente al carácter continuo de cada una de sus componentes.

Definición 5.2 *Se denomina SDO lineal de primer orden y dimensión N, a cualquier SDO de la forma*

$$y' = A(x)y + b(x), \tag{5.13}$$

donde $A \in C(I; \mathcal{L}(\mathbb{R}^N))$ y $b \in C(I; \mathbb{R}^N)$ están dados.

A la función matricial A se le denomina la matriz de coeficientes del SDO (5.13)*, y a b el término independiente de dicho SDO.*

Supongamos ahora que I es un intervalo abierto, y denotemos

$$\Omega = I \times \mathbb{R}^N,$$

$$f(x, y) = A(x)y + b(x), \quad \forall\, (x, y) \in \Omega.$$

Se observa entonces que

$$f \in C(\Omega; \mathbb{R}^N),$$

y para todo $(x, y), (\widetilde{x}, \widetilde{y}) \in \Omega$,

$$\begin{aligned} |f(x, y) - f(\widetilde{x}, \widetilde{y})| &\leq |A(x)y - A(\widetilde{x})\widetilde{y}| + |b(x) - b(\widetilde{x})| \\ &\leq |A(x)||y - \widetilde{y}| + |A(x) - A(\widetilde{x})||\widetilde{y}| + |b(x) - b(\widetilde{x})|, \end{aligned}$$

con lo que resulta inmediato que

$$f \in Lip(y, J \times \mathbb{R}^N),$$

para todo intervalo J tal que $\overline{J} \subset I$. En consecuencia, de acuerdo con lo ya demostrado en a), dado cualquier dato inicial $(x_0, y_0) \in I \times \mathbb{R}^N$, el intervalo de definición de la solución maximal del Problema de Cauchy

$$(PC) \begin{cases} y' = A(x)y + b(x), \\ y(x_0) = y_0, \end{cases}$$

es

$$I(x_0, y_0) = I.$$

Observación 5.3 *En los dos casos analizados en esta sección hemos estado ante un Problema de Cauchy planteado en una banda de* $\mathbb{R}^{N+1}$, *y en ambos casos la solución maximal deja de ser prolongable por llegar a la frontera de la banda. Esta situación no siempre se da, y por ejemplo, si la banda es todo* $\mathbb{R}^{N+1}$, *en cuyo caso la frontera es vacía, la solución global de un Problema de Cauchy puede estar definida tan sólo en un intervalo acotado por alguno de sus extremos, por no estar acotada la solución. Se dice en tal caso que hay explosión de la solución en tiempo finito. Así, por ejemplo, de acuerdo con lo que vimos en el Tema 1, es sencillo comprobar que el problema*

$$(PC) \begin{cases} y' = 1 + y^2, \\ y(0) = 0, \end{cases}$$

planteado en $\Omega = \mathbb{R}^2$, *tiene por solución maximal la función* $\varphi(x; 0, 0) = \operatorname{tg} x$, *con intervalo de definición* $I(0, 0) = (-\pi/2, \pi/2)$, *y está claro que la solución se va, en valor absoluto, a infinito en los extremos de* $I(0, 0)$.

Referencias

[1] H. Amann: *Ordinary Differential Equations: an introduction to Nonlinear Analysis*, Walter de Gruyter, New York, 1990.

[2] C. Corduneanu: *Principles of Differential and Integral Equations*, Chelsea P. Co., The Bronx, New York, 1971.

[3] N. Rouché & J. Mawhin: *Equations Différentielles Ordinaires*, Tomo 1, Masson, Paris, 1973.