# Tema 4

# Sistemas Diferenciales Ordinarios Lineales

## 1 Consideraciones generales

Denotemos por $\mathcal{L}(\mathbb{R}^N)$ al espacio vectorial de todas las matrices cuadradas $N \times N$ de coeficientes reales. Sobre dicho espacio, consideremos la norma definida por

$$|A| = \sup_{y \in \mathbb{R}^N,\, y \neq 0} \frac{|Ay|}{|y|}, \quad \forall\, A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^N). \tag{1.1}$$

Para la norma matricial así definida se satisfacen

$$|Ay| \leq |A||y|, \quad |AB| \leq |A||B|, \quad \forall\, A, B \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^N), \quad \forall\, y \in \mathbb{R}^N.$$

**Observación 1.1** *Es bien conocido que $\mathcal{L}(\mathbb{R}^N)$ dotado de la norma precedente es un espacio de Banach, y que de hecho, al ser $\mathcal{L}(\mathbb{R}^N)$ un espacio vectorial de dimensión finita igual a $N \times N$, todas las normas definidas en dicho espacio son equivalentes a la norma definida por* (1.1)*, y en particular, es equivalente a esta última la norma*

$$\|A\|_\infty = \sup_{1 \leq i,j \leq N} |a_{ij}|, \tag{1.2}$$

*donde $a_{ij}$ son la componentes de la matriz $A$.*

Dado un intervalo $I \subset \mathbb{R}$, no necesariamente abierto, de interior no vacío, denotaremos por $C(I; \mathcal{L}(\mathbb{R}^N))$ al espacio vectorial de todas las aplicaciones

$$A : x \in I \mapsto A(x) \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^N),$$

que sean continuas. De acuerdo con la observación anterior, la continuidad de $A$ es equivalente al carácter continuo de cada una de sus componentes.

**Definición 1.2** *Se denomina SDO lineal de primer orden y dimensión $N$, a cualquier SDO de la forma*

$$y' = A(x)y + b(x), \tag{1.3}$$

*donde $A \in C(I; \mathcal{L}(\mathbb{R}^N))$ y $b \in C(I; \mathbb{R}^N)$ están dados.*

*A la función matricial $A$ se le denomina la matriz de coeficientes del SDO* (1.3)*, y a $b$ el término independiente de dicho SDO. Si $b \equiv 0$, se dice que el SDO lineal* (1.3) *es homogéneo, y en caso contrario, al SDO*

$$y' = A(x)y, \tag{1.4}$$

*se le denomina el SDO lineal homogéneo asociado a* (1.3)*.*

En primer lugar, tenemos el siguiente resultado:

**Teorema 1.3** *Sean $I \subset \mathbb{R}$, un intervalo no necesariamente abierto, de interior no vacío, $A \in C(I; \mathcal{L}(\mathbb{R}^N))$ y $b \in C(I; \mathbb{R}^N)$. En estas condiciones, para cada punto $(x_0, y_0) \in I \times \mathbb{R}^N$ existe una y sólo una función $\varphi(\cdot; x_0, y_0) \in C^1(I; \mathbb{R}^N)$ que sea solución en $I$ del Problema de Cauchy*

$$(PC) \begin{cases} y' = A(x)y + b(x), \\ y(x_0) = y_0. \end{cases}$$

**Demostración.-** Supongamos primero que $I = (\alpha, \beta)$ es un intervalo abierto, y denotemos

$$\Omega = I \times \mathbb{R}^N,$$

$$f(x, y) = A(x)y + b(x), \quad \forall\, (x, y) \in \Omega.$$

Se observa entonces que para todo $(x, y), (\widetilde{x}, \widetilde{y}) \in \Omega$,

$$\begin{aligned} |f(x, y) - f(\widetilde{x}, \widetilde{y})| &\leq |A(x)y - A(\widetilde{x})\widetilde{y}| + |b(x) - b(\widetilde{x})| \\ &\leq |A(x)||y - \widetilde{y}| + |A(x) - A(\widetilde{x})||\widetilde{y}| + |b(x) - b(\widetilde{x})|, \end{aligned}$$

con lo que resulta inmediato que

$$f \in C(\Omega; \mathbb{R}^N) \cap Lip(y, J \times \mathbb{R}^N),$$

para todo intervalo $J$ tal que $\overline{J} \subset I$. En consecuencia, de acuerdo con lo ya demostrado en el Tema 4, dado cualquier dato inicial $(x_0, y_0) \in I \times \mathbb{R}^N$, el intervalo de definición de la solución maximal del Problema de Cauchy $(PC)$ es $I(x_0, y_0) = I$, y por tanto, en este caso está probado el teorema.

Supongamos ahora que $I$ no es un intervalo abierto. Por fijar ideas, vamos a suponer que $I = [\alpha, \beta]$ es un intervalo cerrado (los casos $I = [\alpha, \beta)$ o $I = (\alpha, \beta]$ se tratan de manera similar). En estas condiciones, si definimos $\widetilde{A}:\mathbb{R}\to\mathcal{L}(\mathbb{R}^N)$, y $\widetilde{b}:\mathbb{R}\to\mathbb{R}^N$, por

$$\widetilde{A}(x)=\begin{cases} A(\alpha), & \text{si } x<\alpha,\\ A(x), & \text{si } x\in[\alpha,\beta],\\ A(\beta), & \text{si } x>\beta,\end{cases}\qquad \widetilde{b}(x)=\begin{cases} b(\alpha), & \text{si } x<\alpha,\\ b(x), & \text{si } x\in[\alpha,\beta],\\ b(\beta), & \text{si } x>\beta,\end{cases}$$

es evidente que $\widetilde{A}\in C(\mathbb{R};\mathcal{L}(\mathbb{R}^N))$ y $\widetilde{b}\in C(\mathbb{R};\mathbb{R}^N)$, con lo que, por ser $\mathbb{R}$ un intervalo abierto, tenemos garantizada la existencia de solución $\widetilde{\varphi}(\cdot;x_0,y_0)$ del Problema de Cauchy

$$(\widetilde{PC})\begin{cases} y'=\widetilde{A}(x)y+\widetilde{b}(x),\\ y(x_0)=y_0,\end{cases}$$

definida en todo $\mathbb{R}$. En consecuencia, es inmediato que la restricción de $\widetilde{\varphi}(\cdot;x_0,y_0)$ al intervalo $[\alpha,\beta]$ es solución de $(PC)$ en dicho intervalo.

Para la unicidad, se puede razonar como sigue. Si $x_0\in(\alpha,\beta)$, y $\varphi_1$ y $\varphi_2$ son dos soluciones del problema $(PC)$ en el intervalo $[\alpha,\beta]$, en particular lo son en $(\alpha,\beta)$, con lo que, por la unicidad de solución en el caso de un intervalo abierto, obtenemos que $\varphi_1(x)=\varphi_2(x)$ para todo $x\in(\alpha,\beta)$, y en consecuencia, por ser ambas funciones continuas en $[\alpha,\beta]$, se tiene que $\varphi_1\equiv\varphi_2$ en dicho intervalo.

Finalmente, si $x_0=\alpha$ o si $x_0=\beta$, y $\varphi_1$ y $\varphi_2$ son dos soluciones del problema $(PC)$ en el intervalo $[\alpha,\beta]$, para demostrar que ambas coinciden en dicho intervalo, basta razonar utilizando el lema de Gronwall como en la demostración del teorema de unicidad global. ■

## 2 EL SDO lineal homogéneo. Matriz fundamental

En esta sección vamos a estudiar la resolución del SDO lineal homogéneo

$$y'=A(x)y, \tag{2.5}$$

siendo $I$ un intervalo de interior no vacío, y $A\in C(I;\mathcal{L}(\mathbb{R}^N))$.

Denotaremos por $C^1(I;\mathcal{L}(\mathbb{R}^N))$ al espacio vectorial de todas las aplicaciones

$$Y:x\in I\mapsto Y(x)=(y_{ij}(x))\in\mathcal{L}(\mathbb{R}^N),$$

tales que $y_{ij}\in C^1(I)$, para todo $1\le i,j\le N$. No es difícil demostrar, utilizando la norma $\|\cdot\|_\infty$, que $Y\in C^1(I;\mathcal{L}(\mathbb{R}^N))$ si y sólo si existe una función matricial $Y'\in C(I;\mathcal{L}(\mathbb{R}^N))$, tal que para todo $x_0\in I$ se satisfaga

$$\lim_{x\to x_0,\ x\in I}\left|\frac{Y(x)-Y(x_0)}{x-x_0}-Y'(x_0)\right|=0,$$

y en tal caso $Y'$ es única y viene definida por $Y'(x) = (y'_{ij}(x))$ para todo $x \in I$.

**Definición 2.1** *Se denomina SDO lineal matricial asociado al SDO* (2.5)*, al sistema*

$$Y' = A(x)Y. \tag{2.6}$$

*Una solución de* (2.6) *es, por definición, cualquier* $Y \in C^1(I; \mathcal{L}(\mathbb{R}^N))$ *tal que*

$$Y'(x) = A(x)Y(x), \quad \forall\, x \in I.$$

Obsérvese que $Y \in C^1(I; \mathcal{L}(\mathbb{R}^N))$ es solución de (2.6) si y sólo si cada uno de los $N$ vectores columna de $Y$ es solución en $I$ del SDO (2.5).

**Definición 2.2** *Se denomina matriz fundamental de* (2.5)*, a cualquier función matricial* $F \in C^1(I; \mathcal{L}(\mathbb{R}^N))$ *que sea solución de* (2.6)*, y tal que los* $N$ *vectores columna de* $F$ *sean elementos linealmente independientes de* $C^1(I; \mathbb{R}^N)$*.*

A partir de ahora, usaremos la notación m.f. como abreviatura de matriz fundamental, y denotaremos por $V_0$ al conjunto de todas las soluciones en $I$ del SDO (2.5). La existencia de m.f. para (2.5) viene garantizada por el siguiente resultado.

**Proposición 2.3** *El conjunto* $V_0$ *es un subespacio vectorial de* $C^1(I; \mathbb{R}^N)$*, de dimensión* $N$

**Demostración.-** Es inmediato comprobar que $V_0$ es un subespacio vectorial de $C^1(I; \mathbb{R}^N)$. Para demostrar que su dimensión es $N$, consideremos fijados una base $\{e_i;\ 1 \leq i \leq N\}$ de $\mathbb{R}^N$, y un punto $x_0 \in I$, y para cada $1 \leq i \leq N$ denotemos por $\varphi^i \in C^1(I; \mathbb{R}^N)$, a la solución en $I$ del Problema de Cauchy

$$(PC)_i \begin{cases} y' = A(x)y, \\ y(x_0) = e_i, \end{cases}$$

cuya existencia y unicidad está garantizada por el Teorema 1.3.

Como vamos ahora a ver, $\{\varphi^i;\ 1 \leq i \leq N\}$ constituye una base de $V_0$.

En primer lugar, si una combinación lineal $\displaystyle\sum_{i=1}^{N} \lambda_i \varphi^i$ es la función cero, entonces, en particular,

$$\sum_{i=1}^{N} \lambda_i e_i = \sum_{i=1}^{N} \lambda_i \varphi^i(x_0) = 0,$$

con lo que, al ser $\{e_i;\ 1 \leq i \leq N\}$ una base de $\mathbb{R}^N$, obtenemos que todos los $\lambda_i$ son nulos. Con esto, queda probado que la familia $\{\varphi^i;\ 1 \leq i \leq N\}$ está formada por funciones linealmente independientes.

Por otra parte, dada $\varphi \in V_0$, como $\varphi(x_0) \in \mathbb{R}^N$, existen $N$ números reales $\mu_i$, $1 \leq i \leq N$, tales que

$$\varphi(x_0) = \sum_{i=1}^{N} \mu_i e_i.$$

Entonces, es inmediato comprobar que la función $\psi$ definida por

$$\psi(x) = \varphi(x) - \sum_{i=1}^{N} \mu_i \varphi^i(x),$$

es solución del Problema de Cauchy

$$\begin{cases} y' = A(x)y, \\ y(x_0) = 0, \end{cases}$$

con lo que, por la unicidad de solución a dicho problema, obtenemos que $\psi$ es la función idénticamente nula, es decir,

$$\varphi = \sum_{i=1}^{N} \mu_i \varphi^i.$$

En consecuencia, $V_0$ coincide con el subespacio vectorial de $C^1(I;\mathbb{R}^N)$ generado por la familia $\{\varphi^i;\ 1 \leq i \leq N\}$, y es por tanto de dimensión $N$. ■

Obsérvese que para obtener una m.f. del SDO (2.5), basta tomar una matriz cuyas $N$ columnas sean los elementos de una base cualquiera de $V_0$. A este respecto, se tiene el siguiente resultado:

**Proposición 2.4** *Sea $F \in C^1(I;\mathcal{L}(\mathbb{R}^N))$ una solución del sistema matricial* (2.6). *Son equivalentes las tres afirmaciones siguientes:*

a) *$F$ es una m.f. del SDO* (2.5).

b) $\det F(x) \neq 0, \quad \forall\, x \in I$.

c) *Existe un $x_0 \in I$ tal que* $\det F(x_0) \neq 0$.

**Demostración.-** Denotemos por $\varphi^i$, $1 \leq i \leq N$, a las $N$ columnas de $F$.

En primer lugar, supongamos que b) no es cierto. En tal caso existe un $x_0 \in I$ tal que $\det F(x_0) = 0$, con lo que los $N$ vectores $\varphi^i(x_0)$, $1 \leq i \leq N$, son linealmente independientes, es decir, existen $N$ números reales, no todos nulos, $\lambda_i$, $1 \leq i \leq N$, tales que

$$\sum_{i=1}^{N} \lambda_i \varphi^i(x_0) = 0,$$

y en consecuencia, la función $\varphi = \sum_{i=1}^{N} \lambda_i \varphi^i$, será solución del Problema de Cauchy

$$\begin{cases} y' = A(x)y, \\ y(x_0) = 0, \end{cases}$$

con lo que, por la unicidad de solución a dicho problema, $\varphi$ será idénticamente nula, por tanto las $\varphi^i$, $1 \leq i \leq N$, no son linealmente independientes, y en consecuencia no se satisface a). De esta forma, hemos probado que a) implica b).

Que b) implica c), es evidente. Finalmente, para demostrar que c) implica a), supongamos satisfecha c), y sean $\lambda_i$, $1 \leq i \leq N$, números reales tales que $\sum_{i=1}^{N} \lambda_i \varphi^i$ sea la función idénticamente nula en $I$. En tal caso, en particular,

$$\sum_{i=1}^{N} \lambda_i \varphi^i(x_0) = 0,$$

con lo que, por c), todos los $\lambda_i$ son nulos, y por tanto las $\varphi^i$, $1 \leq i \leq N$, son linealmente independientes. ■

**Observación 2.5** *La equivalencia de las propiedades a), b) y c), se tiene garantizada sólo cuando las $N$ columnas de la función matricial son soluciones de un mismo SDO lineal.*

*Es decir, dada una función matricial $Y \in C^1(I; \mathcal{L}(\mathbb{R}^N))$, que su determinante se anule en un punto de $I$, no implica que se anule en todos los puntos de $I$, ni esto último implica que sus $N$ columnas sean linealmente dependientes. Así, por ejemplo, la función matricial*

$$Y_1(x) = \begin{pmatrix} x & x^2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

*posee determinante nulo para todo $x \in \mathbb{R}$, pero sus dos columnas son linealmente independientes en cualquier subintervalo.*

*Asimismo, la función matricial*

$$Y_2(x) = \begin{pmatrix} x & x^2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

*posee determinante que sólo es nulo en $x = 0$, siendo también sus dos columnas linealmente independientes en cualquier subintervalo de $\mathbb{R}$.*

**Observación 2.6** *Sea* $Y \in C^1(I;\mathcal{L}(\mathbb{R}^N))$ *una solución de* (2.6). *No es difícil demostrar ( ver [5]) que se satisface la siguiente igualdad, conocida como Fórmula de Jacobi-Liouville,*

$$\det Y(x) = \det Y(x_0) e^{\int_{x_0}^{x} \mathrm{tr} A(s)\, ds}, \quad \forall\, x_0, x \in I,$$

*donde por* $\mathrm{tr}A(s)$ *denotamos a la traza de la matriz* $A(s)$.

Naturalmente, el conocimiento de una m.f. del SDO (2.5), permite resolver de manera completa dicho sistema. En concreto se tiene:

**Proposición 2.7** *Sea* $F \in C^1(I;\mathcal{L}(\mathbb{R}^N))$ *una m.f. del SDO* (2.5). *Entonces, se satisfacen las tres propiedades siguientes:*

a) $V_0 = \{F(x)c;\ c \in \mathbb{R}^N\}$.

b) *Si* $\widehat{F} \in C^1(I;\mathcal{L}(\mathbb{R}^N))$ *es una solución del sistema matricial* (2.6), *entonces existe una matriz de coeficientes constantes* $C \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^N)$, *tal que*

$$\widehat{F}(x) = F(x)C, \quad \forall\, x \in I.$$

*Además,* $\widehat{F}$ *es en tal caso también una m.f. del SDO* (2.5), *si y sólo si* $\det C \neq 0$.

c) *Para todo* $(x_0, y_0) \in I \times \mathbb{R}^N$, *la solución del Problema de Cauchy*

$$\begin{cases} y' = A(x)y, \\ y(x_0) = y_0, \end{cases}$$

*viene dada por*

$$\varphi(x; x_0, y_0) = F(x)F^{-1}(x_0)y_0, \quad \forall\, x \in I. \tag{2.7}$$

**Demostración.-** La propiedad a) no es más que la expresión de que las columnas de $F$ constituyen una base de $V_0$.

La propiedad b) es una consecuencia inmediata de a), y de la Proposición 2.4, teniendo en cuenta que si $\widehat{F}(x) = F(x)C$, entonces

$$\det \widehat{F}(x) = \det F(x) \det C.$$

Finalmente, para demostrar c), se tiene en cuenta que, por a), existe un vector $c \in \mathbb{R}^N$ tal que

$$\varphi(x; x_0, y_0) = F(x)c, \quad \forall\, x \in I,$$

con lo que, teniendo en cuenta que $\varphi(x_0; x_0, y_0) = y_0$, se obtiene

$$F(x_0)c = y_0,$$

es decir,

$$c = F^{-1}(x_0)y_0.$$

■

# 3 EL SDO lineal no homogéneo. Método de Lagrange de variación de las constantes

Consideremos ahora el SDO lineal no homogéneo (1.3). Denotemos,

$$V_b = \{\varphi \in C^1(I; \mathbb{R}^N);\ \varphi \text{ es solución de (1.3) en } I\}.$$

Nuestro objetivo, es hallar $V_b$. Para ello, vamos a realizar unas consideraciones similares a las que hicimos en el Tema 1 para el caso de una EDO lineal de primer orden, y en particular vamos a comprobar cómo el conocimiento de una matriz fundamental del SDO lineal homogéneo asociado a (1.3), permite resolver esta último sistema.

En primer lugar, es inmediato comprobar que se satisfacen la dos propiedades siguientes:

a) Si $\widehat{\varphi}$ y $\widehat{\psi}$ pertenecen a $V_b$, es decir, son soluciones de (1.3) en $I$, entonces $\widehat{\varphi} - \widehat{\psi}$ pertenece a $V_0$, es decir, es solución de (1.4) en $I$.

b) Si $\widehat{\varphi}$ pertenece a $V_b$, es decir, es solución de (1.3) en $I$, y $\varphi$ pertenece a $V_0$, es decir, es solución de (1.4) en $I$, entonces $\widehat{\varphi} + \varphi$ pertenece a $V_b$, es decir, es solución de (1.3) en $I$.

Como consecuencia de a) y b), es inmediato obtener que si $\widehat{\varphi}_p$ es una solución particular de (1.3) en $I$, entonces

$$V_b = \{\widehat{\varphi}_p + \varphi;\ \varphi \in V_0\}, \tag{3.8}$$

es decir, $V_b$ coincide con la variedad afín $\widehat{\varphi}_p + V_0$.

La igualdad (3.8) se expresa también diciendo que la solución general de (1.3) es igual a la suma de una solución particular de dicha ecuación, más la solución general de (1.4).

El problema es por tanto cómo calcular una solución particular de (1.3). Vamos a ver que, de hecho, en la búsqueda de dicha solución particular encontraremos nuevamente la igualdad (3.8), es decir, hallaremos la solución general de (1.3).

Para el cálculo de una solución particular de (1.3), haremos uso del denominado método de Lagrange de variación de las constantes. La idea del citado método consiste en, supuesto que se ha hallado una m.f. $F(x)$ del SDO lineal homogéneo asociado (1.4), con lo cual

$$\varphi_h(x,c) = F(x)c, \quad c \in \mathbb{R}^N,$$

es la solución general del SDO homogéneo, buscar $\widehat{\varphi}(x)$, solución de (1.3), de la forma

$$\widehat{\varphi}(x) = F(x)c(x), \tag{3.9}$$

con $c(x) \in C^1(I;\mathbb{R}^N)$ función por determinar. Para hallar $c(x)$, se exige que $\widehat{\varphi}(x)$ satisfaga (1.3), lo que conduce a

$$F'(x)c(x) + F(x)c'(x) = A(x)F(x)c(x) + b(x), \quad \forall\, x \in I,$$

con lo que, teniendo en cuenta que $F'(x) = A(x)F(x)$, se obtiene

$$F(x)c'(x) = b(x), \quad \forall\, x \in I,$$

lo que conduce a

$$c'(x) = F^{-1}(x)b(x), \quad \forall\, x \in I,$$

y por tanto, si fijamos un punto $x_0 \in I$, obtenemos

$$c(x) = \widehat{c} + \int_{x_0}^{x} F^{-1}(s)b(s)\, ds, \quad \forall\, x \in I,$$

con $\widehat{c} \in \mathbb{R}^N$ un vector constante arbitrario. Llevando esta expresión de $c(x)$ a (3.9), obtenemos

$$\widehat{\varphi}(x) = F(x)\widehat{c} + F(x)\int_{x_0}^{x} F^{-1}(s)b(s)\, ds, \quad \forall\, x \in I, \tag{3.10}$$

como expresión de la solución general de (1.3). De esta fórmula, se obtiene en particular el siguiente resultado:

**Teorema 3.1** *Sea $F$ una m.f. del SDO lineal homogéneo* (1.4). *Entonces, para cada $(x_0, y_0) \in I \times \mathbb{R}^N$, la solución $\varphi(\cdot; x_0, y_0)$ del Problema de Cauchy*

$$(PC)\begin{cases} y' = A(x)y + b(x), \\ y(x_0) = y_0, \end{cases}$$

*viene dada por*

$$\varphi(x;x_0,y_0) = F(x)F^{-1}(x_0)y_0 + \int_{x_0}^{x} F(x)F^{-1}(s)b(s)\, ds, \quad \forall\, x \in I. \tag{3.11}$$

**Demostración.-** Teniendo en cuenta que

$$F(x)\int_{x_0}^{x} F^{-1}(s)b(s)\,ds = \int_{x_0}^{x} F(x)F^{-1}(s)b(s)\,ds,$$

de (3.10) tenemos que $\varphi(\cdot;x_0,y_0)$ ha de ser de la forma

$$\varphi(x;x_0,y_0) = F(x)c + \int_{x_0}^{x} F(x)F^{-1}(s)b(s)\,ds,$$

con lo que, imponiendo la condición $\varphi(x_0;x_0,y_0) = y_0$, obtenemos $y_0 = F(x_0)c$, es decir,

$$c = F^{-1}(x_0)y_0.$$

■

# 4 SDO lineal de coeficientes constantes. Exponencial de una matriz

En esta sección suponemos que el sistema (1.3) es coeficientes constantes, es decir, es de la forma

$$y' = Ay + b(x), \tag{4.12}$$

donde $A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^N)$ es una matriz constante dada, y $b \in C(I;\mathbb{R}^N)$ está dado.

Nuestro objetivo es construir en este caso una matriz fundamental del sistema homogéneo asociado

$$y' = Ay\,, \tag{4.13}$$

mediante la consideración de la función exponencial de la matriz $A$.

Consideremos sobre $\mathcal{L}(\mathbb{R}^N)$ la norma definida por (1.1). Dada una sucesión de matrices $\{A_n;\ n \geq 0\} \subset \mathcal{L}(\mathbb{R}^N)$, se dice que la serie $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} A_n$ es convergente, si existe el límite

$$\lim_{m\to\infty} \sum_{n=0}^{m} A_n := \sum_{n=0}^{\infty} A_n,$$

en el espacio normado $\mathcal{L}(\mathbb{R}^N)$. Es inmediato comprobar que si la serie de matrices converge, entonces

$$\left|\sum_{n=0}^{\infty} A_n\right| \leq \sum_{n=0}^{\infty} |A_n|. \tag{4.14}$$

Por otra parte, como $\mathcal{L}(\mathbb{R}^N)$ es un espacio de Banach, una condición suficiente para la convergencia de la serie de matrices anterior es que la serie numérica $\sum_{n=0}^{\infty} |A_n|$ sea convergente.

Sea $A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^N)$ una matriz fijada, como, evidentemente, la serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{|A|^n}{n!} = e^{|A|},$$

es convergente, de lo dicho con anterioridad podemos concluir que la definición que sigue tiene sentido:

**Definición 4.1** *Se define la matriz exponencial de $A$ como la matriz $e^A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^N)$ dada por*

$$e^A := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{A^n}{n!},$$

*donde, por definición, $A^0 := I_N$, la matriz identidad $N \times N$.*

Es inmediato, teniendo en cuenta (4.14), que se satisface

$$\left|e^A\right| \leq e^{|A|}, \quad \text{para toda } A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^N). \tag{4.15}$$

**Observación 4.2** *Obsérvese que si $B$ y $P$ son matrices reales $N \times N$, con $P$ regular, y $A = PBP^{-1}$, entonces como consecuencia de la continuidad de la multiplicación en $\mathcal{L}(\mathbb{R}^N)$, es inmediato comprobar que*

$$e^A = Pe^B P^{-1}.$$

**Observación 4.3** *Es sencillo comprobar que la definición de $e^A$, y la observación precedente, se pueden extender al caso de matrices con coeficientes números complejos.*

Es evidente que

$$e^{\Theta_N} = I_N,$$

donde por $\Theta_N$ denotamos a la matriz $N \times N$ idénticamente nula.

También se satisface que $e^A$ siempre es invertible, y de hecho,

$$\left(e^A\right)^{-1} = e^{-A}, \quad \text{para toda } A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^N). \tag{4.16}$$

Esta última afirmación es un corolario inmediato del siguiente resultado:

**Proposición 4.4** *Si $A$, $B \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^N)$ son dos matrices que conmutan, es decir tales que $AB = BA$, entonces*

$$e^{A+B} = e^A e^B = e^B e^A, \tag{4.17}$$

$$Be^A = e^A B \tag{4.18}$$

**Demostración.-** Supongamos que $A$, $B \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^N)$ son dos matrices que conmutan. La demostración de que entonces se satisface (4.18) es sencilla, y se deja como ejercicio. Para demostrar (4.17), basta comprobar que

$$\lim_{m\to\infty}\left|\sum_{n=0}^{m}\frac{A^n}{n!}\sum_{n=0}^{m}\frac{B^n}{n!}-\sum_{n=0}^{m}\frac{(A+B)^n}{n!}\right|=0. \tag{4.19}$$

Ahora bien, evidentemente,

$$\sum_{n=0}^{m}\frac{A^n}{n!}\sum_{n=0}^{m}\frac{B^n}{n!}=\sum_{n_1,n_2=0}^{m}\frac{A^{n_1}}{n_1!}\frac{B^{n_2}}{n_2!}, \tag{4.20}$$

y como $A$ y $B$ conmutan,

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{m}\frac{(A+B)^n}{n!}&=\sum_{n=0}^{m}\frac{1}{n!}\left(\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}A^kB^{n-k}\right)\\ &=\sum_{n=0}^{m}\left(\sum_{k=0}^{n}\frac{A^kB^{n-k}}{k!(n-k)!}\right)=\sum_{\substack{n_1,n_2=0\\ n_1+n_2>m}}^{m}\frac{A^{n_1}}{n_1!}\frac{B^{n_2}}{n_2!}\end{aligned}$$

De esta última igualdad y de (4.20), concluimos que

$$\sum_{n=0}^{m}\frac{A^n}{n!}\sum_{n=0}^{m}\frac{B^n}{n!}-\sum_{n=0}^{m}\frac{(A+B)^n}{n!}=\sum_{\substack{n_1,n_2=0\\ n_1+n_2>m}}^{m}\frac{A^{n_1}}{n_1!}\frac{B^{n_2}}{n_2!}, \tag{4.21}$$

y en consecuencia,

$$\left|\sum_{n=0}^{m}\frac{A^n}{n!}\sum_{n=0}^{m}\frac{B^n}{n!}-\sum_{n=0}^{m}\frac{(A+B)^n}{n!}\right|\le\sum_{\substack{n_1,n_2=0\\ n_1+n_2>m}}^{m}\frac{|A|^{n_1}|B|^{n_2}}{n_1!n_2!} \tag{4.22}$$

Pero, de la misma manera que obtuvimos (4.21), se obtiene

$$\sum_{n=0}^{m}\frac{|A|^n}{n!}\sum_{n=0}^{m}\frac{|B|^n}{n!}-\sum_{n=0}^{m}\frac{(|A|+|B|)^n}{n!}=\sum_{\substack{n_1,n_2=0\\ n_1+n_2>m}}^{m}\frac{|A|^{n_1}}{n_1!}\frac{|B|^{n_2}}{n_2!},$$

y por tanto, de (4.22) tenemos

$$\begin{aligned}&\left|\sum_{n=0}^{m}\frac{A^n}{n!}\sum_{n=0}^{m}\frac{B^n}{n!}-\sum_{n=0}^{m}\frac{(A+B)^n}{n!}\right|\\ &\le\sum_{n=0}^{m}\frac{|A|^n}{n!}\sum_{n=0}^{m}\frac{|B|^n}{n!}-\sum_{n=0}^{m}\frac{(|A|+|B|)^n}{n!},\end{aligned}$$

y por consiguiente,

$$0 \le \limsup_{m\to\infty} \left| \sum_{n=0}^{m} \frac{A^n}{n!} \sum_{n=0}^{m} \frac{B^n}{n!} - \sum_{n=0}^{m} \frac{(A+B)^n}{n!} \right| \le e^{|A|}e^{|B|} - e^{|A|+|B|} = 0.$$

■

Dada una matriz $A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^N)$, denominaremos función exponencial asociada a $A$, a la función

$$F_A(x) := e^{xA} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n A^n}{n!}, \quad x \in \mathbb{R}. \tag{4.23}$$

**Proposición 4.5** *La función exponencial asociada a $A$ definida por* (4.23) *satisface:*

a) $F_A \in C^1(\mathbb{R}; \mathcal{L}(\mathbb{R}^N))$,

b) $F_A'(x) = AF_A(x)$, *para todo* $x \in \mathbb{R}$,

c) $F_A$ *es una matriz fundamental del sistema lineal homogéneo* (4.13).

**Demostración.-** Para demostrar a) y b), basta comprobar que $F_A \in C(\mathbb{R}; \mathcal{L}(\mathbb{R}^N))$ y

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \left| \frac{1}{\varepsilon}(F_A(x+\varepsilon) - F_A(x)) - AF_A(x) \right| = 0, \quad \text{para todo } x \in \mathbb{R}. \tag{4.24}$$

Ahora bien, en primer lugar, como $A$ conmuta consigo misma, es inmediato que

$$F_A(x+\varepsilon) - F_A(x) = e^{(x+\varepsilon)A} - e^{xA} = e^{xA}\left(e^{\varepsilon A} - I_N\right),$$

y en consecuencia,

$$|F_A(x+\varepsilon) - F_A(x)| \le |e^{xA}||e^{\varepsilon A} - I_N|. \tag{4.25}$$

Pero

$$\begin{aligned} |e^{\varepsilon A} - I_N| &= \left| \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varepsilon^n A^n}{n!} \right| \\ &\le |\varepsilon||A| \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|\varepsilon|^{n-1}|A|^{n-1}}{n!} \le |\varepsilon||A|e^{|\varepsilon||A|}, \end{aligned}$$

con lo que por (4.25), tenemos

$$|F_A(x+\varepsilon) - F_A(x)| \le |\varepsilon||e^{xA}||A|e^{|\varepsilon||A|},$$

lo que implica que $F_A \in C(\mathbb{R}; \mathcal{L}(\mathbb{R}^N))$.

Análogamente,

$$\left|\frac{1}{\varepsilon}(F_A(x+\varepsilon) - F_A(x)) - AF_A(x)\right| = \frac{1}{|\varepsilon|}\left|e^{(x+\varepsilon)A} - e^{xA} - \varepsilon A e^{xA}\right|$$

$$\leq \frac{1}{|\varepsilon|}|e^{xA}||e^{\varepsilon A} - I_N - \varepsilon A| = \frac{1}{|\varepsilon|}|e^{xA}|\left|\sum_{n=2}^{\infty}\frac{\varepsilon^n A^n}{n!}\right| \leq |\varepsilon||A|^2|e^{xA}|e^{|\varepsilon||A|},$$

y en consecuencia se satisface (4.24).

Finalmente, que $F_A$ es una matriz fundamental del sistema lineal homogéneo (4.13), es consecuencia inmediata de a), b), y el hecho de que $e^{xA}$ es invertible, con inversa $e^{-xA}$. ∎

Como consecuencia inmediata de la Proposición precedente, y del Teorema 3.1, tenemos el siguiente resultado:

**Corolario 4.6** *Sean $A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^N)$ y $b \in C(I; \mathbb{R}^N)$, con $I \subset \mathbb{R}$ intervalo de interior no vacío, dadas. Entonces, para cada $(x_0, y_0) \in I \times \mathbb{R}^N$, la solución $\varphi(\cdot; x_0, y_0)$ del Problema de Cauchy*

$$(PC)\begin{cases} y' = Ay + b(x), \\ y(x_0) = y_0, \end{cases}$$

*viene dada por*

$$\varphi(x; x_0, y_0) = e^{(x-x_0)A}y_0 + \int_{x_0}^{x} e^{(x-s)A}b(s)\,ds, \quad \textit{para todo } x \in I.$$

Cerramos esta sección con algunas consideraciones sobre el cálculo efectivo de $e^{xA}$, que va estar basado en el Teorema de Jordan, que exponemos a continuación. Previamente, introduzcamos algunas cuestiones de notación.

Denotaremos $I_1 = 1$, e $I_n$ a la matriz identidad $n \times n$, para todo entero $n \geq 2$. Análogamente, denotaremos $H_1 = 0 \in \mathbb{R}$, y para todo entero $n \geq 2$, denotaremos $H_n$ a la matriz $n \times n$ de término general $h_{ij} = \delta_{i+1,j}$, siendo $\delta_{i+1,j}$ la delta de Kronecker, es decir,

$$H_n = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Dados $\lambda$, número complejo, y $n \geq 1$ entero, llamaremos caja de Jordan de dimensión $n$ asociada al número $\lambda$, a

$$J_n(\lambda) := \lambda I_n + H_n.$$

Si $J_{n_r}(\lambda_r)$, $r = 1, ..., k$, son $k$ cajas de Jordan, denotaremos

$$\operatorname{diag}\left(J_{n_1}(\lambda_1), ..., J_{n_k}(\lambda_k)\right),$$

a la matriz $\left(\sum_{r=1}^{k} n_r\right) \times \left(\sum_{r=1}^{k} n_r\right)$ que se obtiene escribiendo las cajas de Jordan $J_{n_r}(\lambda_r)$ en la diagonal, y tomando el resto de las cajas ceros.

Se tiene el resultado siguiente (ver por ejemplo [2]):

**Teorema 4.7** (**de Jordan**) *Sea $A$ una matriz cualquiera $N \times N$ de números reales o complejos. Existen una matriz regular $N \times N$ de números complejos, $P$, y una matriz $J$ de la forma*

$$J = \operatorname{diag}\left(J_{n_1}(\lambda_1), ..., J_{n_k}(\lambda_k)\right), \tag{4.26}$$

*para algún $k \geq 1$, de tal manera que*

$$A = PJP^{-1}. \tag{4.27}$$

*La matriz $J$ está determinada por $A$ de manera unívoca, salvo el orden en que se escriben las cajas de Jordan, y se la denomina la forma canónica de Jordan de la matriz $A$. A la matriz $P$ se la denomina matriz de paso.*

Sobre el teorema precedente, hagamos las siguiente puntualizaciones:

a) Evidentemente, $\sum_{r=1}^{k} n_r = N$.

b) Los $\lambda_r$, $r = 1, ..., k$ son todos autovalores de $A$.

c) Un mismo autovalor puede aparecer en dos o más cajas de Jordan en $J$, pero en total, el número de veces que aparece en la diagonal de $J$ coincide con la multiplicidad de ese autovalor.

Observemos, que dada $A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^N)$, si la escribimos en la forma (4.27), entonces tenemos

$$e^{xA} = Pe^{xJ}P^{-1}, \quad \text{para todo } x \in \mathbb{R},$$

y en consecuencia, para calcular $e^{xA}$ basta conocer la forma canónica de Jordan de la matriz $A$, una matriz de paso $P$ y su inversa, y saber cómo se calcula $e^{xJ}$.

Sobre el cálculo de $J$ y de $P$, se expondrán algunos resultados en clases de problemas. Nos vamos a limitar aquí a indicar cómo se calcula $e^{xJ}$, cuando se conoce $J$.

En primer lugar, teniendo en cuenta que para cualquier $\lambda$ real o complejo, y cualquier entero $n \geq 1$, $\lambda x I_n$ y $xH_n$ conmutan, es inmediato que

$$e^{xJ_n(\lambda)} = e^{x} I_n e^{xH_n}.$$

Pero, como es sencillo comprobar, $H_n^k = \Theta_n$, para todo $k \geq n$, y si $2 \leq k \leq n-1$, $H_n^k$ es la matriz de elemento $h_{ij} = \delta_{i+k,j}$. En consecuencia, es inmediato que

$$e^{xJ_n(\lambda)} = \begin{pmatrix} e^{\lambda x} & \dfrac{xe^{\lambda x}}{1!} & \dfrac{x^2e^{\lambda x}}{2!} & \dots & \dfrac{x^{n-2}e^{\lambda x}}{(n-2)!} & \dfrac{x^{n-1}e^{\lambda x}}{(n-1)!} \\ 0 & e^{\lambda x} & \dfrac{xe^{\lambda x}}{1!} & \dots & \dfrac{x^{n-3}e^{\lambda x}}{(n-3)!} & \dfrac{x^{n-2}e^{\lambda x}}{(n-2)!} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & e^{\lambda x} & \dfrac{xe^{\lambda x}}{1!} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & e^{\lambda x} \end{pmatrix}$$

Ahora, basta observar que, como es sencillo comprobar, si $J$ es de la forma (4.26), entonces

$$e^{xJ} = \mathrm{diag}\left(e^{xJ_{n_1}(\lambda_1)}, ..., e^{xJ_{n_k}(\lambda_k)}\right).$$

**Observación 4.8** *En general, los autovalores de $A$ serán números complejos, y por tanto $J$ y $P$ serán matrices de números complejos, con lo que las funciones exponenciales que aparecerán en $\mathrm{e}^{xJ}$ serán funciones con valores complejos. Es posible introducir, una vez conocida $J$, una matriz $\widetilde{J}$ de coeficientes reales, denominada forma canónica de Jordan real asociada a $A$, la cual permite efectuar siempre el cálculo de $\mathrm{e}^{xA}$ sin salir del cuerpo de los números reales (ver [2])*

**Observación 4.9** *En el caso en que los autovalores de $A$ son todos reales, teniendo en cuenta el apartado b) de la Proposición* 2.7, *podemos afirmar que la función matricial*

$$F(x) = Pe^{xJ}, \quad x \in \mathbb{R},$$

*es una matriz fundamental del sistema lineal homogéneo* (4.13), *y por tanto, para resolver dicho sistema no es necesario el cálculo de $P^{-1}$.*

# 5 EDO lineal de orden $n$

Sea $n \geq 1$ entero. Se denomina EDO lineal de orden $n$ a una ecuación de la forma

$$a_0(x)y^{(n)} = a_1(x)y^{(n-1)} + ... + a_{n-1}(x)y' + a_n(x)y + b(x), \tag{5.28}$$

con $a_i(x) \in C(I)$, $i = 0, 1, ..., n$, y $b(x) \in C(I)$, funciones dadas, siendo $I \subset \mathbb{R}$ intervalo de interior no vacío, y donde suponemos que $a_0(x) \neq 0$ para todo $x \in I$. A las funciones $a_i(x)$ se las denominan los coeficientes de (5.28), y a $b(x)$ el término independiente de la EDO.

**Definición 5.1** *Si $b \equiv 0$, se dice que* (5.28) *es una EDO lineal de orden $n$ homogénea. En el caso en que $b \not\equiv 0$, se dice que la ecuación* (5.28) *es una EDO lineal de orden $n$ no homogénea. En este último caso, se dice que*

$$a_0(x)y^{(n)} = a_1(x)y^{(n-1)} + ... + a_{n-1}(x)y' + a_n(x)y, \tag{5.29}$$

*es la ecuación homogénea asociada a* (5.28).

A partir de ahora, sin pérdida de generalidad, suponemos que $a_0(x) \equiv 1$ (en caso contrario, basta dividir la EDO por $a_0(x)$).

Recordemos que una solución de (5.28) en $I$ es cualquier función $\varphi \in C^n(I)$ tal que

$$\varphi^{(n)}(x) = a_1(x)\varphi^{(n-1)}(x) + ... + a_{n-1}(x)\varphi'(x) + a_n(x)\varphi(x) + b(x), \quad \forall\, x \in I.$$

Asociado a la EDO (5.28), se considera el SDO de primer orden y dimensión $n$,

$$\begin{cases} y_1' = y_2, \\ ..........., \\ ..........., \\ y_{n-1}' = y_n, \\ y_n' = a_n(x)y_1 + a_{n-1}(x)y_2 + ... + a_1(x)y_n + b(x), \end{cases} \tag{5.30}$$

SDO que es evidentemente lineal, y es homogéneo si (5.28) lo es.

De los resultados obtenidos para los SDO lineales de primer orden, podemos afirmar:

**Proposición 5.2** *Para cada $(x_0, y_0, y_0', ..., y_0^{(n-1)}) \in I \times \mathbb{R}^n$ dado, existe una y sólo una solución en $I$ del Problema de Cauchy*

$$(PC) \begin{cases} y^{(n)} = a_1(x)y^{(n-1)} + ... + a_{n-1}(x)y' + a_n(x)y + b(x), \\ y(x_0) = y_0, \; y'(x_0) = y_0', ..., y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)}, \end{cases}$$

*dicha solución es denotada $\varphi(\cdot; x_0, y_0, y_0', ..., y_0^{(n-1)})$.*

**Demostración.-** Basta tener en cuenta que $\varphi$ es solución de $(PC)$ si y sólo si $(\varphi, \varphi', ..., \varphi^{(n-1)})$ es solución del correspondiente Problema de Cauchy para el SDO asociado (5.30). ■

Denotemos,

$$V_b^n = \{\varphi \in C^n(I);\ \varphi \text{ es solución de (5.28) en } I\},$$

con lo que en particular,

$$V_0^n = \{\varphi \in C^n(I);\ \varphi \text{ es solución de (5.29) en } I\}.$$

Es inmediato comprobar que toda combinación lineal de soluciones de (5.29) en $I$ es también solución de (5.29) en $I$, es decir, $V_0^n$ es un subespacio vectorial de $C^n(I)$. De hecho, más exactamente, se tiene el siguiente resultado

**Proposición 5.3** *El conjunto* $V_0^n$ *es un subespacio vectorial de* $C^n(I)$ *de dimensión* $n$.

**Demostración** Basta considerar el SDO lineal homogéneo de primer orden asociado a (5.29), y tener en cuenta la Proposición 2.3. ■

**Definición 5.4** *Se denomina sistema fundamental de soluciones de* (5.29), *a cualquier base* $\{\varphi_1, ..., \varphi_n\}$ *del espacio vectorial* $V_0^n$.

A partir de ahora, usaremos s.f. como abreviatura de sistema fundamental. Así pues, para resolver (5.29), basta con hallar un s.f. $\{\varphi_1, ..., \varphi_n\}$ de soluciones de (5.29), y en tal caso la solución general $y_h(x, C_1, C_2, ..., C_n)$ de esta ecuación viene dada por

$$y_h(x, C_1, C_2, ..., C_n) = C_1\varphi_1(x) + C_2\varphi_2(x) + ... + C_n\varphi_n(x), \quad \forall\, x \in I,$$

siendo $C_1, C_2, ..., C_n \in \mathbb{R}$ constantes arbitrarias.

Obsérvese por otra parte, que, como se comprueba fácilmente, una familia de $n$ funciones $\{\varphi_1, ..., \varphi_n\} \subset C^n(I)$ es un s.f. de soluciones de (5.29) si y sólo si la matriz

$$\begin{pmatrix} \varphi_1 & \varphi_2 & ..... & \varphi_n \\ \varphi_1' & \varphi_2' & ..... & \varphi_n' \\ ... & ... & ..... & ... \\ \varphi_1^{(n-1)} & \varphi_2^{(n-1)} & ..... & \varphi_n^{(n-1)} \end{pmatrix},$$

denominada matriz wronskiana de la familia $\{\varphi_1, ..., \varphi_n\}$, es una m.f. del correspondiente SDO lineal homogéneo de primer orden asociado. Por tanto, como consecuencia inmediata de la Proposición 2.4 se obtiene:

**Proposición 5.5** *Sean* $\{\varphi_1, ..., \varphi_n\}$ *n soluciones en* $I$ *de la EDO* (5.29). *Dichas soluciones constituyen un s.f. de soluciones de* (5.29) *si y sólo si existe un punto* $x_0 \in I$ *tal que el determinante de la matriz wronskiana de la familia* $\{\varphi_1, ..., \varphi_n\}$ *es distinto de cero en dicho punto, y en tal caso, el citado determinante no se anula en ningún punto del intervalo* $I$.

Nos planteamos ahora la cuestión de determinar $V_b^n$ cuando $b \not\equiv 0$.

En primer lugar, es inmediato comprobar que se satisfacen la dos propiedades siguientes:

a) Si $\widehat{\varphi}$ y $\widehat{\psi}$ pertenecen a $V_b^n$, es decir, son soluciones de (5.28) en $I$, entonces $\widehat{\varphi} - \widehat{\psi}$ pertenece a $V_0^n$, es decir, es solución de (5.29) en $I$.

b) Si $\widehat{\varphi}$ pertenece a $V_b^n$, es decir, es solución de (5.28) en $I$, y $\varphi$ pertenece a $V_0^n$, es decir, es solución de (5.29) en $I$, entonces $\widehat{\varphi} + \varphi$ pertenece a $V_b^n$, es decir, es solución de (5.28) en $I$.

Como consecuencia de a) y b), es inmediato obtener el resultado siguiente:

**Proposición 5.6** *Si* $\widehat{\varphi}_p$ *es una solución particular de* (5.28) *en* $I$*, entonces*

$$V_b^n = \{\widehat{\varphi}_p + \varphi;\ \varphi \in V_0^n\}, \tag{5.31}$$

*es decir,* $V_b^n$ *coincide con la variedad afín* $\widehat{\varphi}_p + V_0^n$.

La igualdad (5.31) se expresa también diciendo que la solución general de (5.28) es igual a la suma de una solución particular de dicha ecuación, más la solución general de la homogénea asociada (5.29).

Si se conoce un s.f. de soluciones de (5.29), se puede calcular una solución particular de (5.28), usando para ello el método de Lagrange de variación de las constantes. En concreto, sea $\{\varphi_1, ..., \varphi_n\}$ un s.f. de soluciones de (5.29), en tal caso, buscamos una solución particular de (5.28) que sea de la forma

$$\widehat{\varphi}_p(x) = \sum_{i=1}^{n} c_i(x)\varphi_i(x), \quad \forall\, x \in I,$$

con las $c_i(x)$ funciones de $C^1(I)$ por determinar. Esto equivale a buscar una función vectorial

$$c(x) = \begin{pmatrix} c_1(x) \\ c_2(x) \\ . \\ . \\ . \\ . \\ c_n(x) \end{pmatrix},$$

perteneciente a $C^1(I;\mathbb{R}^n)$, tal que $F(x)c(x)$ sea solución del SDO lineal asociado (5.30), siendo

$$F(x) = \begin{pmatrix} \varphi_1(x) & \varphi_2(x) & ..... & \varphi_n(x) \\ \varphi_1'(x) & \varphi_2(x) & ..... & \varphi_n'(x) \\ ... & ... & ..... & ... \\ \varphi_1^{(n-1)}(x) & \varphi_2^{(n-1)}(x) & ..... & \varphi_n^{(n-1)}(x) \end{pmatrix}.$$

En consecuencia, se ha de satisfacer

$$F(x)c'(x) = \widehat{b}(x),$$

con

$$\widehat{b}(x) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ . \\ . \\ . \\ 0 \\ b(x) \end{pmatrix}.$$

En resumen, podemos afirmar el siguiente resultado:

**Proposición 5.7** *(método de variación de las constantes) Sea* $\{\varphi_1, ..., \varphi_n\}$ *un s.f. de soluciones de* (5.29)*. En tal caso, existe una solución particular de* (5.28) *que es de la forma*

$$\widehat{\varphi}_p(x) = \sum_{i=1}^{n} c_i(x)\varphi_i(x), \quad \forall\, x \in I,$$

*con las* $c_i(x)$ *funciones de* $C^1(I)$ *determinadas de manera unívoca salvo constantes aditivas, por el SDO*

$$\begin{cases} c_1'(x)\varphi_1(x) + c_2'(x)\varphi_2(x) + ... + c_n'(x)\varphi_n(x) = 0, \\ c_1'(x)\varphi_1'(x) + c_2'(x)\varphi_2'(x) + ... + c_n'(x)\varphi_n'(x) = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ c_1'(x)\varphi_1^{(n-2)}(x) + c_2'(x)\varphi_2^{(n-2)}(x) + ... + c_n'(x)\varphi_n^{(n-2)}(x) = 0, \\ c_1'(x)\varphi_1^{(n-1)}(x) + c_2'(x)\varphi_2^{(n-1)}(x) + ... + c_n'(x)\varphi_n^{(n-1)}(x) = b(x), \end{cases}$$

*para todo* $x \in I$.

# 6 EDO lineal de orden $n$ de coeficientes constantes

Supongamos ahora que la EDO (5.28) es de coeficientes constantes. En este caso, vamos a describir un procedimiento general para hallar un sistema fundamental de soluciones de la ecuación homogénea asociada.

En concreto, consideremos la EDO

$$y^{(n)} = \sum_{k=1}^{n} a_k y^{(n-k)}, \tag{6.32}$$

con $a_k \in \mathbb{R}$, para todo $k = 1, 2, ..., n$.

Se denomina polinomio característico asociado a la ecuación (6.32), al polinomio

$$p(\lambda) = \lambda^n - \sum_{k=1}^{n} a_k \lambda^{n-k}$$

Sean $\lambda_j$, $j = 1, 2, ..., n$, las $n$ raices del polinomio característico, es decir, las $n$ soluciones de

$$p(\lambda) = 0,$$

contadas cada una tantas veces como indique su multiplicidad.

De esta forma,

$$p(\lambda) = \prod_{j=1}^{n} (\lambda - \lambda_j).$$

Se pueden presentar tres casos:

i) Las $n$ raices son reales y distintas entre sí.

En tal caso, si definimos

$$\varphi_j(x) = e^{\lambda_j x}, \quad j = 1, 2, ..., n, \tag{6.33}$$

la familia así definida constituye un s.f. de soluciones de (6.32).

En efecto, en primer lugar, teniendo en cuenta que

$$\varphi_j^{(n-k)}(x) = \lambda_j^{n-k} e^{\lambda_j x},$$

es inmediato comprobar que

$$\varphi_j^{(n)} - \sum_{k=1}^{n} a_k \varphi_j^{(n-k)} = p(\lambda_j)\varphi_j(x) = 0,$$

y en consecuencia las $n$ funciones definidas por (6.33), son soluciones de (6.32).

Finalmente, para probar que constituyen un sistema fundamental de soluciones de (6.32), basta comprobar que el determinante de la matriz wronskiana correspondiente no se anula.

Ahora bien, teniendo en cuenta la definición de las funciones $\varphi_j$,

$$\begin{pmatrix} \varphi_1 & \varphi_2 & ..... & \varphi_n \\ \varphi_1' & \varphi_2' & ..... & \varphi_n' \\ ... & ... & ..... & ... \\ \varphi_1^{(n-1)} & \varphi_2^{(n-1)} & ..... & \varphi_n^{(n-1)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varphi_1 & \varphi_2 & ..... & \varphi_n \\ \lambda_1\varphi_1 & \lambda_2\varphi_2 & ..... & \lambda_n\varphi_n \\ ... & ... & ..... & ... \\ \lambda_1^{n-1}\varphi_1 & \lambda_2^{n-1}\varphi_2 & ..... & \lambda_n^{n-1}\varphi_n \end{pmatrix},$$

de donde es inmediato que

$$\det \begin{pmatrix} \varphi_1 & \varphi_2 & ..... & \varphi_n \\ \varphi_1' & \varphi_2' & ..... & \varphi_n' \\ ... & ... & ..... & ... \\ \varphi_1^{(n-1)} & \varphi_2^{(n-1)} & ..... & \varphi_n^{(n-1)} \end{pmatrix} = e^{sx} \det \begin{pmatrix} 1 & 1 & ..... & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & ..... & \lambda_n \\ ... & ... & ..... & ... \\ \lambda_1^{n-1} & \lambda_2^{n-1} & ..... & \lambda_n^{n-1} \end{pmatrix},$$

con

$$s = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j.$$

Basta tener en cuenta ahora que

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & ..... & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & ..... & \lambda_n \\ ... & ... & ..... & ... \\ \lambda_1^{n-1} & \lambda_2^{n-1} & ..... & \lambda_n^{n-1} \end{pmatrix},$$

es la matriz de Vandermonde, de la que es bien sabido que su determinante es distinto de cero si todos los $\lambda_j$ son distintos.

ii) Todas las raices son reales, pero alguna es de multiplicidad mayor que 1.

En este caso, se procede de manera similar a como ya vimos en el caso de una EDO de segundo orden. En concreto, si, por fijar ideas,

$$\lambda_1 = \lambda_2 = ... = \lambda_m,$$

es decir, $\lambda_1$ es una raiz de $P(\lambda)$ de multiplicidad $m \leq n$, se puede demostrar, ver [4] para los detalles, que las $m$ funciones definidas por

$$\varphi_j(x) = x^{j-1}e^{\lambda_1 x}, \quad j = 1, 2, ..., m,$$

son soluciones linealmente independientes de (6.32).

iii) Si $p(\lambda)$ posee raices complejas.

Supongamos, por fijar ideas, que

$$\lambda_1 = \alpha + \beta i,$$

con $\alpha \in \mathbb{R}$, y $\beta \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, es raiz de $p(\lambda)$. En tal caso, reordenando si es preciso,

$$\lambda_2 = \alpha - \beta i,$$

es también raiz de $p(\lambda)$, y si $\lambda_1$ es raiz de multiplicidad $m$, también lo es $\lambda_2$.

Razonando como en el caso ii), se puede comprobar que las funciones $\varphi_{1j}(x) = x^{j-1}e^{\lambda_1 x}$ y $\varphi_{2j}(x) = x^{j-1}e^{\lambda_2 x}$, $j = 1, 2, ..., m$, son soluciones de (6.32), pero toman valores complejos. Para solventar este problema, y limitarnos al caso de funciones con valores reales, se toman como soluciones de (6.32), las funciones parte real y parte imaginaria de $\varphi_{1j}(x)$, es decir, las $2m$ funciones

$$x^{j-1}e^{\alpha x}\cos(\beta x), \quad x^{j-1}e^{\alpha x}\operatorname{sen}(\beta x), \quad j = 1, 2, ..., m,$$

que, también se puede demostrar que son linealmente independientes.

Procediendo en la manera previamente descrita, es posible demostrar el siguiente resultado (ver [4] para los detalles):

**Teorema 6.1** *Sean $\lambda_1, ..., \lambda_q$, las raices reales distintas de $P(\lambda)$, de multiplicidades respectivas $m_1, ..., m_q$. Sean $\lambda_{q+1}, ..., \lambda_{q+s}$, las raices no reales distintas de $P(\lambda)$, agrupadas por conjugadas, es decir,*

$$\lambda_{q+j} = \alpha_{q+j} \pm \beta_{q+j} i,$$

*con $\alpha_{q+j} \in \mathbb{R}$, y $\beta_{q+j} \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, con multiplicidades respectivas $m_{q+1}, ..., m_{q+s}$ (luego $\displaystyle\sum_{j=1}^{q} m_j + 2\sum_{j=1}^{s} m_{q+j} = n$).*

*Definamos $\varphi_{jk}(x) = x^k e^{\lambda_j x}$, para todo $1 \le j \le q$, y todo $0 \le k \le m_j - 1$,*

$$\begin{cases} \varphi^1_{jk}(x) = x^k e^{\alpha_j x} \cos \beta_j x, \\ \varphi^2_{jk}(x) = x^k e^{\alpha_j x} \operatorname{sen} \beta_j x, \\ \textit{para todo } q+1 \le j \le q+s, \textit{ y todo } 0 \le k \le m_j - 1. \end{cases}$$

*Entonces, el conjunto de las $n$ funciones así definidas, constituye un sistema fundamental de soluciones de* (6.32).

# 7 Problemas de contorno para un SDO lineal. El caso de una EDO lineal de segundo orden.

En esta sección vamos a considerar un tipo de problemas para los SDO lineales, y muy especialmente para la EDO lineal de segundo orden, que no son problemas de valores iniciales. En concreto, sean $\alpha < \beta$ números reales, y denotemos

$$I = [\alpha, \beta].$$

Supongamos dados $A \in C(I; \mathcal{L}(\mathbb{R}^N))$, $b \in C(I; \mathbb{R}^N)$, $B, C \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^N)$, y $h \in \mathbb{R}^N$, y consideremos el siguiente Problema de Contorno:

$$\begin{cases} y' = A(x)y + b(x), \text{ en } I, \\ By(\alpha) + Cy(\beta) = h. \end{cases} \tag{7.34}$$

**Definición 7.1** *Una solución de* (7.34) *es cualquier función $\varphi \in C^1(I; \mathbb{R}^N)$ tal que*

$$\varphi'(x) = A(x)\varphi(x) + b(x), \qquad \textit{para todo } x \in I,$$

*y satisfaga la condición de contorno:*

$$B\varphi(\alpha) + C\varphi(\beta) = h.$$

Se denomina Problema de Contorno homogéneo asociado a (7.34) al problema

$$\begin{cases} y' = A(x)y, \text{ en } I, \\ By(\alpha) + Cy(\beta) = 0. \end{cases} \tag{7.35}$$

Evidentemente, la función idénticamente nula es siempre solución de (7.35), pero pueden existir más soluciones de este último problema, como ya veremos en los ejercicios. Como primer resultado se tiene:

**Proposición 7.2** *El conjunto $W_0$ de todas las soluciones de* (7.35) *es un subespacio vectorial de dimensión menor o igual que $N$ del espacio $C^1(I;\mathbb{R}^N)$, y de hecho,*

$$\dim(W_0) = N - \mathrm{rango}(BF(\alpha) + CF(\beta)), \tag{7.36}$$

*siendo $F(x)$ cualquier matriz fundamental del SDO $y' = A(x)y$.*

**Demostración.-** Sea $F(x)$ cualquier matriz fundamental del SDO $y' = A(x)y$. Es evidente que

$$W_0 = \{\varphi :\ \varphi(x) = F(x)a,\ a \in \mathbb{R}^N,\ BF(\alpha) + CF(\beta) = 0\},$$

es decir,

$$W_0 = \{\varphi :\ \varphi(x) = F(x)a,\ a \in \ker(BF(\alpha) + CF(\beta))\},$$

y en consecuencia, como las columnas de $F(x)$ son linealmente independientes en $C^1(I;\mathbb{R}^N)$,

$$\dim(W_0) = \dim(\ker(BF(\alpha) + CF(\beta))) = N - \mathrm{rango}(BF(\alpha) + CF(\beta)).$$

■

**Observación 7.3** *Como consecuencia de la Proposición precedente, obtenemos que* $\mathrm{rango}(BF(\alpha)+CF(\beta))$ *es independiente de la matriz fundamental $F(x)$ del SDO $y' = A(x)y$ que se elija. Además, decir que el Problema de Contorno homogéneo* (7.35) *sólo tiene la solución idénticamente nula, es equivalente a afirmar que* $\mathrm{rango}(BF(\alpha) + CF(\beta)) = N$.

A diferencia de (7.35), el problema (7.34) puede no tener solución. En concreto se tiene el siguiente resultado:

**Teorema 7.4 (de alternativa)** *Sea $F(x)$ una matriz fundamental del SDO homogéneo $y' = A(x)y$. Se verifican las siguientes propiedades:*

a) *El Problema de Contorno* (7.34) *posee solución si y sólo si*

$$\begin{aligned} &\mathrm{rango}(BF(\alpha) + CF(\beta)) \\ &= \mathrm{rango}\Big((BF(\alpha) + CF(\beta) \mid h - CF(\beta)\int_\alpha^\beta F^{-1}(s)b(s)\,ds\Big)\Big). \end{aligned} \tag{7.37}$$

b) *Si el problema* (7.35) *posee únicamente la solución idénticamente nula, entonces para cada* $b \in C(I;\mathbb{R}^N)$ *y* $h \in \mathbb{R}^N$ *dados, existe una y sólo una solución del Problema de Contorno* (7.34).

c) *Si el problema* (7.35) *posee soluciones distintas de la idénticamente nula, entonces para un* $b \in C(I;\mathbb{R}^N)$ *y un* $h \in \mathbb{R}^N$ *dados, puede existir o no existir solución de* (7.34)*, pero si existe, hay infinitas soluciones.*

**Demostración.-**
a) Evidentemente, (7.34) posee solución si y sólo si existe $a \in \mathbb{R}^N$ tal que la función $\varphi(x) = F(x)a + F(x)\displaystyle\int_\alpha^x F^{-1}(s)b(s)\,ds$, satisface la condición de contorno $B\varphi(\alpha) + C\varphi(\beta) = h$. Es decir, el problema (7.34) posee solución si y sólo si existe $a \in \mathbb{R}^N$ solución del sistema algebráico de ecuaciones lineales

$$(BF(\alpha) + CF(\beta))a = h - CF(\beta)\int_\alpha^\beta F^{-1}(s)b(s)\,ds. \tag{7.38}$$

Por el Teorema de Rouché-Frobenius, (7.38) posee solución si y sólo si se satisface (7.37).

b) Si el problema (7.35) posee únicamente la solución idénticamente nula, entonces rango$(BF(\alpha)+CF(\beta)) = N$, y en consecuencia, para cada $b \in C(I;\mathbb{R}^N)$ y $h \in \mathbb{R}^N$ dados, (7.38) posee una y sólo una solución $a \in \mathbb{R}^N$, lo que equivale a que existe una y sólo una solución del correspondiente problema (7.34).

c) Esta útima afirmación es consecuencia evidente del Teorema de Rouché-Frobenius, ya que por la Proposición 7.2, la dimensión de $W_0$ es mayor o igual que 1 si y sólo si rango$(BF(\alpha) + CF(\beta)) < N$. ■

Como ejercicio, se propone que se encuentren los $h \in \mathbb{R}^2$ para los que existe solución del Problema de contorno

$$\begin{cases} y' = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2x & 1 \end{pmatrix} y + \begin{pmatrix} 0 \\ e^x \end{pmatrix}, \quad \text{en } [0,1], \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & e \end{pmatrix} y(0) + \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} y(1) = h, \end{cases}$$

y que se calculen las soluciones de este problema para tales $h$.

La noción de Problema de Contorno, y las consideraciones precedentes, pueden ser extendidas al caso de una EDO lineal de orden $n$, sin más que considerar el SDO lineal de primer orden asociado. No obstante, nosotros vamos a considerar y analizar de manera directa una clase particular de Problemas de Contorno para las EDO lineales de segundo orden, los problemas con condiciones de contorno separadas, que aparecen en la práctica, por ejemplo, cuando se aplica el denominado Método de Separación de Variables para la resolución de problemas mixtos para las EDP del calor y de ondas unidimensionales (dicho método se estudia en la asignatura Ecuaciones en Derivadas Parciales y Análisis Funcional).

Supongamos dadas tres funciones $p = p(x)$, $q = q(x)$ y $b = b(x)$, tales que

$$p \in C^1(I), \quad q, b \in C(I), \quad p(x) > 0, \quad \text{para todo } x \in I, \tag{7.39}$$

y seis números reales $c_1$, $d_1$, $c_2$, $d_2$, $h_1$, $h_2$, tales que

$$c_k^2 + d_k^2 > 0, \quad k = 1, 2. \tag{7.40}$$

Asociados a estos datos, consideremos el Problema de Contorno

$$(PCo) \begin{cases} (p(x)y')' + q(x)y = b(x), & \text{en } I, \\ c_1 y(\alpha) + d_1 y'(\alpha) = h_1, \\ c_2 y(\beta) + d_2 y'(\beta) = h_2. \end{cases}$$

A las dos condiciones que aparecen asociadas a la EDO en $(PCo)$ se las denominan las condiciones de contorno.

**Definición 7.5** *Una solución de* $(PCo)$ *es cualquier función* $\varphi \in C^2(I)$ *tal que*

$$p(x)\varphi''(x) + p'(x)\varphi'(x) + q(x)\varphi(x) = b(x), \qquad \textit{para todo } x \in I,$$

*y se satisfagan las dos condiciones de contorno:*

$$\begin{cases} c_1\varphi(\alpha) + d_1\varphi'(\alpha) = h_1, \\ c_2\varphi(\beta) + d_2\varphi'(\beta) = h_2. \end{cases}$$

**Observación 7.6** *Toda EDO lineal de segundo orden*

$$y'' = a_1(x)y' + a_2(x)y + a_3(x),$$

*con las* $a_k \in C(I)$, $k = 1, 2, 3$, *puede ser escrita en la forma* $(p(x)y')' + q(x)y = b(x)$, *sin más que multiplicar la EDO de partida por* $e^{-A_1(x)}$, *siendo* $A_1(x) := \int_\alpha^x a_1(s)\, ds$, *para todo* $x \in I$.

**Observación 7.7** *El problema* $(PCo)$ *puede no tener solución, o tener infinitas soluciones. Así por ejemplo, es inmediato comprobar, por resolución directa, que el problema de contorno*

$$\begin{cases} y'' + y = 1, & \text{en } [0, \pi], \\ y(0) = 0, \\ y(\pi) = 0, \end{cases}$$

*no tiene solución, mientras que el problema de contorno*

$$\begin{cases} y'' + y = 0, & \text{en } [0, \pi], \\ y(0) = 0, \\ y(\pi) = 0, \end{cases}$$

*posee infinitas soluciones.*

Se denomina Problema de Contorno homogéneo asociado a $(PCo)$ al problema resultante de tomar $b \equiv 0$ y $h_1 = h_2 = 0$ en este último, es decir,

$$(PCo)_{hom} \begin{cases} (p(x)y')' + q(x)y = 0, & \text{en } I, \\ c_1 y(\alpha) + d_1 y'(\alpha) = 0, \\ c_2 y(\beta) + d_2 y'(\beta) = 0. \end{cases}$$

Es evidente que la función $\varphi \equiv 0$ es solución de $(PCo)_{hom}$, pero que no necesariamente es la única, como pone de manifiesto el segundo ejemplo de la Observación 7.7. De hecho se tiene el resultado siguiente:

**Proposición 7.8** *Si se satisfacen las condiciones* (7.39) *y* (7.40), *el conjunto de soluciones de* $(PCo)_{hom}$ *es un subespacio vectorial de* $C^2(I)$ *de dimensión menor o igual a* 1.

**Demostración.-** Es inmediato comprobar que el conjunto de soluciones de $(PCo)_{hom}$ es un subespacio vectorial del espacio vectorial de dimensión 2 formado por todas las soluciones en $I$ de la EDO $(p(x)y')' + q(x)y = 0$. En consecuencia, si la afirmación de la Proposición no es cierta, entonces toda solución en $I$ de dicha EDO es solución de $(PCo)_{hom}$. Pero en tal caso, en particular las soluciones de los Problemas de Cauchy

$$\begin{cases} (p(x)y')' + q(x)y = 0, & \text{en } I, \\ y(\alpha) = 1, \\ y'(\alpha) = 0, \end{cases} \qquad \begin{cases} (p(x)y')' + q(x)y = 0, & \text{en } I, \\ y(\alpha) = 0, \\ y'(\alpha) = 1, \end{cases}$$

serán ambas soluciones de $(PCo)_{hom}$, lo que implica que $c_1 = d_1 = 0$, en contradicción con (7.40). ■

A partir de ahora vamos a realizar la siguiente hipótesis:

$$\text{la función } \varphi \equiv 0 \text{ es la única solución del problema } (PCo)_{hom}. \tag{7.41}$$

Obsérvese que, como es inmediato comprobar, la diferencia de dos soluciones de $(PCo)$ es solución de $(PCo)_{hom}$, y en consecuencia, bajo la hipótesis (7.41), para cada $b \in C(I)$ dada el problema $(PCo)$ posee, a lo más, una solución. En lo que sigue vamos a demostrar que de hecho, bajo la hipótesis anterior, para cada $b \in C(I)$ dada el problema $(PCo)$ posee exactamente una solución, y vamos a obtener una fórmula para construir ésta. Como paso previo, tenemos el resultado siguiente:

**Proposición 7.9** *Supongamos que se satisfacen las condiciones* (7.39), (7.40) *y* (7.41). *Entonces existen dos soluciones* $\varphi_1$, $\varphi_2$ *de la EDO* $(p(x)y')' + q(x)y = 0$ *en el intervalo* $I$, *tales que*

i) $c_1\varphi_1(\alpha) + d_1\varphi_1'(\alpha) = 0$,

ii) $c_2\varphi_2(\beta) + d_2\varphi_2'(\beta) = 0$,

iii) $\varphi_1(x)\varphi_2'(x) - \varphi_1'(x)\varphi_2(x) = \dfrac{1}{p(x)}$, *para todo* $x \in I$.

**Demostración.-** Si $d_1 \neq 0$, tomemos como $\psi_1$ la solución del Problema de Cauchy

$$\begin{cases} (p(x)\psi_1')' + q(x)\psi_1 = 0, & \text{en } I, \\ \psi_1(\alpha) = 1, \quad \psi_1'(\alpha) = -\dfrac{c_1}{d_1}. \end{cases}$$

Si $d_1 = 0$, tomemos como $\psi_1$ la solución del Problema de Cauchy

$$\begin{cases} (p(x)\psi_1')' + q(x)\psi_1 = 0, & \text{en } I, \\ \psi_1(\alpha) = 0, \quad \psi_1'(\alpha) = 1. \end{cases}$$

De esta forma, en cualquiera de los dos casos obtenemos una función $\psi_1$ no idénticamente nula, que es solución de la EDO $(p(x)y')' + q(x)y = 0$ en el intervalo $I$, y que satisface i).

De manera análoga, cambiando $c_1$ por $c_2$, $d_1$ por $d_2$, y $\alpha$ por $\beta$ en la argumentación anterior, podemos obtener una función $\psi_2$ no idénticamente nula, que es solución de la EDO $(p(x)y')' + q(x)y = 0$ en el intervalo $I$, y que satisface ii).

Pero entonces, para todo $x \in I$ se tiene

$$\frac{d}{dx}[p(x)(\psi_1(x)\psi_2'(x) - \psi_1'(x)\psi_2(x))]$$
$$= (p(x)\psi_2'(x))'\psi_1(x) + p(x)\psi_1'(x)\psi_2'(x) - p(x)\psi_1'(x)\psi_2'(x) - (p(x)\psi_1'(x))'\psi_2(x)$$
$$= p(x)\psi_2'(x))'\psi_1(x) - (p(x)\psi_1'(x))'\psi_2(x)$$
$$= -q(x)\psi_2(x)\psi_1(x) + q(x)\psi_1(x)\psi_2(x) = 0,$$

y por consiguiente, existe una constante $r \in \mathbb{R}$ tal que

$$p(x)(\psi_1(x)\psi_2'(x) - \psi_1'(x)\psi_2(x)) = r, \quad \text{para todo } x \in I.$$

Si demostramos que $r \neq 0$, entonces, tomando por ejemplo $\varphi_1 = \psi_1$ y $\varphi_2 = \psi_2/r$, tendremos dos funciones que satisfacen las condiciones del Teorema.

Demostremos por consiguiente que $r \neq 0$. Si $r$ fuese cero, como $p(x) > 0$ en todo $x \in I$, tendríamos que

$$\det\begin{pmatrix} \psi_1(x) & \psi_2(x) \\ \psi_1'(x) & \psi_2'(x) \end{pmatrix} = 0, \quad \text{para todo } x \in I,$$

y por tanto $\psi_2$ sería un múltiplo de $\psi_1$, con lo que $\psi_2$ sería una solución no nula de $(PCo)_{hom}$, en contra de la hipótesis (7.41). ■

**Observación 7.10** *Obsérvese que las funciones $\varphi_1$ y $\varphi_2$ obtenidas en la Proposición precedente son soluciones en $I$ de la EDO homogénea $(p(x)y')' + q(x)y = 0$, tales que, por iii) y* (7.39),

$$\det \begin{pmatrix} \varphi_1(x) & \varphi_2(x) \\ \varphi_1'(x) & \varphi_2'(x) \end{pmatrix} \neq 0, \quad \textit{para todo } x \in I,$$

*y en consecuencia constituyen un sistema fundamental de soluciones de la citada EDO homogénea.*

*Además, por la hipótesis* (7.41), *se satisfacen*

$$c_1\varphi_2(\alpha) + d_1\varphi_2'(\alpha) \neq 0,$$

$$c_2\varphi_1(\beta) + d_2\varphi_1'(\beta) \neq 0,$$

*y es inmediato comprobar entonces que la función*

$$\varphi_{h_1h_2}(x) := \frac{h_2}{c_2\varphi_1(\beta) + d_2\varphi_1'(\beta)}\varphi_1(x) + \frac{h_1}{c_1\varphi_2(\alpha) + d_1\varphi_2'(\alpha)}\varphi_2(x), \tag{7.42}$$

*es la solución del problema de contorno*

$$(PCo)_{h_1h_2} \begin{cases} (p(x)y')' + q(x)y = 0, \quad \text{en } I, \\ c_1y(\alpha) + d_1y'(\alpha) = h_1, \\ c_2y(\beta) + d_2y'(\beta) = h_2. \end{cases}$$

Téngase en cuenta que, como es inmediato comprobar, si $\varphi_b$ es solución del problema de contorno

$$(PCo)_b \begin{cases} (p(x)y')' + q(x)y = b(x), \quad \text{en } I, \\ c_1y(\alpha) + d_1y'(\alpha) = 0, \\ c_2y(\beta) + d_2y'(\beta) = 0, \end{cases}$$

entonces la función

$$\varphi(x) = \varphi_b(x) + \varphi_{h_1h_2}(x), \quad x \in I, \tag{7.43}$$

con $\varphi_{h_1h_2}$ definida por (7.42), es solución del problema $(PCo)$. Podemos ahora demostrar el siguiente resultado:

**Teorema 7.11** *Supongamos que se satisfacen las condiciones* (7.39), (7.40), (7.41), *y sean $\varphi_1$, $\varphi_2$, dos soluciones de la EDO $(p(x)y')' + q(x)y = 0$ en el* *intervalo $I$, que satisfagan las propiedades* i), ii), iii) *de la Proposición* 7.9. *Consideremos la función $g : (x,s) \in I \times I \mapsto g(x,s) \in \mathbb{R}$ definida por*

$$g(x,s) = \begin{cases} \varphi_1(x)\varphi_2(s), & si\ x \leq s, \\ \varphi_1(s)\varphi_2(x), & si\ x > s. \end{cases} \tag{7.44}$$

*En estas condiciones, para cada $b \in C(I)$, $h_1$, $h_2 \in \mathbb{R}$ dados, existe una y sólo una solución $\varphi$ de $(PCo)$, que viene dada por la igualdad* (7.43), *siendo*

$$\varphi_b(x) = \int_\alpha^\beta g(x,s)b(s)\,ds, \quad para\ todo\ x \in I, \tag{7.45}$$

*y $\varphi_{h_1h_2}$ la función definida por* (7.42).

**Demostración.-** Fijemos $b \in C(I)$, y consideremos la función $\varphi_b$ definida por (7.45). Lo único que hemos de probar es que $\varphi_b$ es solución de $(PCo)_b$. Es evidente que

$$\varphi_b(x) = \varphi_2(x)\int_\alpha^x \varphi_1(s)b(s)\,ds + \varphi_1(x)\int_x^\beta \varphi_2(s)b(s)\,ds, \tag{7.46}$$

para todo $x \in I$, por consiguiente $\varphi_b \in C^2(I)$, y derivando en esta última igualdad,

$$\begin{aligned} \varphi_b'(x) &= \varphi_2'(x)\int_\alpha^x \varphi_1(s)b(s)\,ds + \varphi_2(x)\varphi_1(x)b(x) \\ &\quad + \varphi_1'(x)\int_x^\beta \varphi_2(s)b(s)\,ds - \varphi_1(x)\varphi_2(x)b(x) \\ &= \varphi_2'(x)\int_\alpha^x \varphi_1(s)b(s)\,ds + \varphi_1'(x)\int_x^\beta \varphi_2(s)b(s)\,ds, \end{aligned} \tag{7.47}$$

para todo $x \in I$. Derivando nuevamente en (7.47), obtenemos,

$$\begin{aligned} \varphi_b''(x) &= \varphi_2''(x)\int_\alpha^x \varphi_1(s)b(s)\,ds + \varphi_1''(x)\int_x^\beta \varphi_2(s)b(s)\,ds \\ &\quad + [\varphi_2'(x)\varphi_1(x) - \varphi_2(x)\varphi_1'(x)]b(x), \end{aligned} \tag{7.48}$$

para todo $x \in I$.

Multiplicando (7.46) por $q(x)$, (7.47) por $p'(x)$, (7.48) por $p(x)$, sumando las tres igualdades resultantes, y teniendo en cuenta que $\varphi_1$ y $\varphi_2$ son soluciones en $I$ de la EDO $(p(x)y')' + q(x)y = 0$, y satisfacen la propiedad iii), se obtiene fácilmente que $\varphi_b$ satisface la EDO $(p(x)y')' + q(x)y = b(x)$ en $I$.

Por otra parte, de (7.46) y (7.47) se deducen

$$c_1\varphi_b(\alpha) + d_1\varphi_b'(\alpha) = [c_1\varphi_1(\alpha) + d_1\varphi_1'(\alpha)]\int_\alpha^\beta \varphi_2(s)b(s)\,ds = 0,$$

$$c_2\varphi_b(\beta) + d_2\varphi_b'(\beta) = [c_2\varphi_2(\beta) + d_2\varphi_2'(\beta)] \int_\alpha^\beta \varphi_1(s)b(s)\,ds = 0.$$

■

**Observación 7.12** *Evidentemente, la función $g$ construida por la fórmula* (7.44) *es continua en $I \times I$. Es inmediato comprobar que es la única función continua en $I \times I$ que satisfaga* (7.45) *para toda función $b \in C^0(I)$. A $g$ se le denomina el núcleo de Green para el problema $(PCo)$.*

*Como ejercicio, cálculese el núcleo de Green para el problema de contorno*

$$\begin{cases} y'' = b(x), & \textit{en } [0,1], \\ y(0) = h_1, \\ y(1) = h_2, \end{cases}$$

*y encuéntrese la expresión general de la solución de dicho problema de contorno.*

**Observación 7.13** *Para el problema $(PCo)$ se presenta la siguiente alternativa:*

*a) La única solución del problema homogéneo asociado es la idénticamente nula.*

*En este caso, como ya hemos demostrado, para cada $b \in C(I)$, $h_1$, $h_2 \in \mathbb{R}$, dados, existe una y sólo una solución de $(PCo)$.*

*b) El problema homogéneo asociado posee soluciones distintas de la idénticamente nula.*

*En tal caso, por la Proposición 7.8, el conjunto de soluciones de $(PCo)_{hom}$ es un subespacio vectorial de $C^2(I)$ de dimensión 1, por otra parte, es inmediato comprobar que la suma de una solución de $(PCo)_{hom}$ y otra de $(PCo)$ es una solución de $(PCo)$, y ya sabemos que la diferencia de dos soluciones de $(PCo)$ es solución de $(PCo)_{hom}$. En consecuencia, en este caso, para $b \in C(I)$, $h_1$, $h_2 \in \mathbb{R}$, dados, si existe solución del problema $(PCo)$ correspondiente, existen infinitas, de hecho una variedad afín de $C^2(I)$ de dimensión 1.*

**Observación 7.14** *El concepto de núcleo de Green y la construcción del mismo, pueden ser generalizados al caso del Problema de Contorno para un SDO lineal,* (7.34)*, en el caso en que el homogéneo asociado* (7.35) *posee únicamente la solución idénticamente nula.*

Para terminar con este tema, consideremos el denominado Problema de Sturm-Liouville, consistente en hallar los valores de $\lambda \in \mathbb{R}$ para los que exista solución no idénticamente nula del problema de contorno

$$(SL) \begin{cases} (p(x)y')' + q(x)y = \lambda y, & \text{en } I, \\ c_1 y(\alpha) + d_1 y'(\alpha) = 0, \\ c_2 y(\beta) + d_2 y'(\beta) = 0, \end{cases}$$

donde $I$, $p(x)$, $q(x)$, $c_k$, $d_k$, son los mismos que en la formulación de $(PCo)$.

A los valores de $\lambda \in \mathbb{R}$ para los que exista solución no idénticamente nula de $(SL)$ se les denomina autovalores del Problema de Sturm-Liouville, y a cualquier función $\varphi_\lambda \in C^2(I)$, no idénticamente nula, que sea solución de $(SL)$ para dicho valor de $\lambda$, se le denomina una autofunción asociada al autovalor $\lambda$.

Así por ejemplo, para el problema

$$\begin{cases} y'' = \lambda y, & \text{en } [0,1], \\ y(0) = 0, \\ y(1) = 0, \end{cases}$$

es un sencillo ejercicio comprobar que los autovalores vienen dados por la sucesión de números

$$\lambda_n = -n^2\pi^2, \quad n = 1, 2, .....,$$

siendo las autofunciones asociadas a $\lambda_n$ de la forma

$$\varphi_n(x) = a_n \operatorname{sen}(n\pi x), \quad n = 1, 2, .....,$$

con $a_n \in \mathbb{R}$, $a_n \neq 0$, arbitrario.

No es difícil demostrar (hágase como ejercicio) que si $\lambda_1 \neq \lambda_2$ son dos autovalores distintos del Problema de Sturm-Liouville, y $\varphi_1$ y $\varphi_2$ son autofunciones asociadas a $\lambda_1$ y $\lambda_2$ respectivamente, entonces

$$\int_\alpha^\beta \varphi_1(s)\varphi_2(s)\, ds = 0. \tag{7.49}$$

Como consecuencia de la Proposición 7.8, es evidente que bajo las condiciones (7.39) y (7.40), el conjunto de autofunciones asociadas a un autovalor cualquiera del Problema de Sturm-Liouville es un subespacio vectorial de $C^2(I)$ de dimensión 1 (esta propiedad se expresan diciendo que los autovalores del Problema de Sturm-Liouville son simples). Teniendo en cuenta (7.49), que expresa la ortogonalidad de las autofunciones asociadas a autovalores distintos del Problema de Sturm-Liouville, para cada autovalor $\lambda$ se toma como autofunción asociada la normalizada, es decir, aquella autofunción $\varphi_\lambda$ (única) asociada a $\lambda$ que satisface

$$\int_\alpha^\beta \varphi_\lambda^2(s)\, ds = 1. \tag{7.50}$$

Con esta elección, si denotamos $\Lambda$ al conjunto de los autovalores del Problema de Sturm-Liouville, podemos afirmar que el conjunto $\{\varphi_\lambda : \ \lambda \in \Lambda\}$ es un sistema ortonormal de $C(I)$ dotado del producto escalar $(\varphi, \psi)_2 = \int_\alpha^\beta \varphi(s)\psi(s)\, ds$.

El Problema de Sturm-Liouville es estudiado con más detalle en la asignatura Ecuaciones en Derivadas Parciales y Análisis Funcional. Aquí nos vamos a limitar a comprobar que dicho Problema está relacionado con la Teoría de Ecuaciones Integrales. En concreto, supongamos que $\lambda = 0$ no es autovalor del Problema de Sturm-Liouville, es decir que se satisface la hipótesis (7.41). En tal caso, si consideramos el núcleo de Green $g(x,s)$ construido en el Teorema 7.11, es inmediato comprobar que dado $\lambda \in \mathbb{R}$, una función $\varphi$ es solución de $(SL)$ si y sólo si es solución de la ecuación integral

$$\begin{cases} \varphi \in C(I), \\ \varphi(x) = \lambda \displaystyle\int_\alpha^\beta g(x,s)\varphi(s)\,ds, \quad \text{para todo } x \in I. \end{cases} \tag{7.51}$$

A la ecuación (7.51) se la denomina ecuación integral de Fredholm con núcleo $g(x,s)$.

## Referencias


[1] H. Amann: *Ordinary Differential Equations: an introduction to Nonlinear Analysis*, Walter de Gruyter, New York, 1990.

[2] M. de Guzmán: *Ecuaciones Diferenciales Ordinarias. Teoría de Estabilidad y Control*, Ed. Alhambra, Madrid, 1975.

[3] S. Novo, R. Obaya & J. Rojo: *Ecuaciones y sistemas diferenciales*, Mac-Graw & Hill, Madrid, 1995.

[4] L. Pontriaguine: *Equations Différentielles Ordinaires*, Ed. Mir, Moscou, 1975.

[5] N. Rouché & J. Mawhin: *Equations Différentielles Ordinaires*, Tomo 1, Masson, Paris, 1973.