EJERCICIOS DE ECUACIONES EN DERIVADAS PARCIALES Y ANÁLISIS FUNCIONAL.
Curso 2010-2011

LAS ECUACIONES DEL CALOR Y DE ONDAS UNIDIMENSIONALES.

1.– Resolver por separación de variables el siguiente problema de contorno:

$$\begin{cases} u_{xx} + u_{yy} + 2u_x + 2u_y + u = 0 \quad \text{en } \Omega \\ u(x,y) = u_0(x,y) \quad \text{sobre } \partial\Omega, \end{cases}$$

donde $\Omega = (0,1) \times (0, \pi/2)$ y $u_0(x,y) = x^2 e^{-y}(\text{sen } 2y + \text{sen } 6y)$.

2.– Resolver por separación de variables el siguiente problema de contorno:

$$\begin{cases} u_{xx} + u_{yy} = 0 \quad \text{en } \Omega \\ u(x,y) = u_0(x,y) \quad \text{sobre } \partial\Omega, \end{cases}$$

donde $\Omega = (0,L) \times (0,L)$ y $u_0(x,y) = \text{sen } (\pi y/L) - (2x/L)\text{sen } (2\pi y/L)$.

3.– Resolver por separación de variables el siguiente problema de contorno:

$$\begin{cases} u_{xx} + 2u_y + u_{yy} = 0 \quad \text{en } \Omega \\ u(x,y) = u_0(x,y) \quad \text{sobre } \partial\Omega, \end{cases}$$

donde $\Omega = (0,1) \times (0,\pi)$ y $u_0(x,y) = xe^{-y}(\text{sen } y + \text{sen } 3y)$.

4.– Demuéstrese que los conjuntos $\{\sqrt{2}\,\text{sen } ((n\pi + \pi/2)x)\,;\ n \geq 0\}$ y $\{\sqrt{2}\,\cos((n\pi + \pi/2)x)\,;\ n \geq 0\}$ son bases ortonormales numerables de $L^2(0,1)$.

Indicación: Dada $f \in L^2(0,1)$, considerar g definida por $g(t) = \begin{cases} f(2t) & \text{si } t \in (0,1/2), \\ \pm f(2(1-t)) & \text{si } t \in (1/2,1). \end{cases}$

5.– Resolver por separación de variables los siguientes problemas, indicando la regularidad de las soluciones formales que se obtienen (c es una constante positiva):

$$a) \begin{cases} u_{tt} = c^2 u_{xx} \quad t > 0,\ 0 < x < \pi, \\ u(x,0) = 0,\ u_t(x,0) = 8 \text{ sen }^2 x \quad 0 \leq x \leq \pi, \\ u(0,t) = u(\pi,t) = 0 \quad t > 0. \end{cases} \qquad b) \begin{cases} u_{tt} = c^2 u_{xx} \quad t > 0,\ 0 < x < 1, \\ u(x,0) = 0,\ u_t(x,0) = x \text{ sen } x \quad 0 \leq x \leq 1, \\ u(0,t) = u(1,t) = 0 \quad t > 0. \end{cases}$$

$$c) \begin{cases} u_{tt} = c^2 u_{xx} \quad t > 0,\ 0 < x < \pi, \\ u(x,0) = x + \text{sen } x,\ u_t(x,0) = 0 \quad 0 \leq x \leq \pi, \\ u(0,t) = 0, \quad u_x(\pi,t) = 0 \quad t > 0. \end{cases} \qquad d) \begin{cases} u_{tt} = c^2 u_{xx} \quad t > 0,\ 0 < x < \pi, \\ u(x,0) = \cos x, \quad u_t(x,0) = 0 \quad 0 \leq x \leq \pi, \\ u_x(0,t) = u_x(\pi,t) = 0 \quad t > 0. \end{cases}$$

6.– Se considera el siguiente problema:

$$(P) \begin{cases} u_t - u_{xx} + 2u_x = 0 \quad 0 < x < 1,\ t > 0, \\ u(x,0) = f(x) \quad 0 \leq x \leq 1, \\ u(0,t) = 0, \quad u(1,t) = u_x(1,t) \quad t \geq 0, \end{cases}$$

con $f \in C^2([0,1])$ dada. Se desea encontrar una solución u de (P) tal que

$$(1) \qquad u \in C^2([0,1] \times (0,\infty)) \cap C^0([0,1] \times [0,\infty)) \quad \text{y} \quad u_x \in C^0([0,1] \times [0,\infty)).$$

Se pide:

a) Demostrar que (P) posee a lo más una solución satisfaciendo (1).

b) Determinar las condiciones de compatibilidad que ha de satisfacer f para que (P) posea una solución satisfaciendo (1).

c) Obtener la solución formal u de (P) mediante el método de separación de variables, demostrar que pertenece a $C^\infty([0,1] \times (0,\infty))$, y comprobar que si f satisface las condiciones de compatibilidad obtenidas en b), entonces la solución formal hallada satisface (1).

7.– Se considera el problema de Cauchy-Dirichlet

$$(PCD)\begin{cases} u_t - u_{xx} + 2u_x = 1 & t > 0,\ 0 < x < 1, \\ u(x,0) = f(x) & 0 \le x \le 1, \\ u(0,t) = u(1,t) = t & t > 0, \end{cases}$$

con $f \in C^3([0,1])$ tal que $f(0) = f(1) = 0$, $f''(0) = 2f'(0)$ y $f''(1) = 2f'(1)$. Se pide:

a) Mediante el método de separación de variables, encontrar una solución formal de (PCD).

b) Demostrar que la solución formal hallada pertenece a $C^\infty(Q)$ y es solución clásica de (PCD) en $\overline{Q}$, donde denotamos $Q = (0,1) \times (0,+\infty)$ (es decir, demuéstrese que u, u_x, u_t y u_{xx} pertenecen a $C^0(\overline{Q})$).

8.– Se considera el siguiente problema:

$$(P)\begin{cases} u_t - u_{xx} + u = x & 0 < x < \pi,\ t > 0, \\ u(x,0) = f(x) & 0 \le x \le \pi, \\ u(0,t) = 0, \quad u_x(\pi,t) = 1 & t \ge 0, \end{cases}$$

con $f \in L^2(0,\pi)$ dada.

Se pide:

a) Obtener la solución formal u de (P) mediante el método de separación de variables, y demostrar que pertenece de hecho a $C^\infty([0,\pi] \times (0,+\infty))$.

b) Demostrar que si $f(x) = -\text{sen}\, x$, entonces u, la solución formal encontrada, así como u_x, u_t y u_{xx}, pertenecen a $C^0([0,\pi] \times [0,+\infty))$.

9.– Se considera el siguiente problema:

$$(P)\begin{cases} u_t = u_{xx} + 4u_x + u & 0 < x < \pi,\ t > 0, \\ u(x,0) = f(x) & 0 \le x \le \pi, \\ u(0,t) = 0, \quad 2u(\pi,t) = -u_x(\pi,t) & t \ge 0, \end{cases}$$

con $f \in C^2([0,\pi])$ dada, satisfaciendo $f(0) = 0$ y $f'(\pi) + 2f(\pi) = 0$.

Se pide:

a) Obtener la solución formal u de (P) mediante el método de separación de variables.

b) Demostrar que, bajo las condiciones anteriores sobre f, la solución formal u de (P) pertenece de hecho a $C^\infty([0,\pi] \times (0,\infty)) \cap C^0([0,\pi] \times [0,\infty))$, y su derivada u_x pertenece a $C^0([0,\pi] \times [0,\infty))$.

10.– Se considera el siguiente problema:

$$(P)\begin{cases} u_t = u_{xx} + \beta u & 0 < x < \pi,\ t > 0, \\ u(x,0) = f(x) & 0 \le x \le \pi, \\ u_x(0,t) = u_x(\pi,t) = 0 & t \ge 0, \end{cases}$$

con $f \in L^2(0,\pi)$ y $\beta \in \mathbb{R}$ dadas. Se pide:

a) Obtener la solución formal u de (P) mediante el método de separación de variables, y demostrar que pertenece de hecho a $C^\infty([0,\pi] \times (0,+\infty))$.

b) Demostrar que si $f \in C^3[0,\pi]$ y satisface $f'(0) = f'(\pi) = 0$, entonces la solución formal encontrada es solución clásica de (P) en $[0,\pi] \times [0,+\infty)$ (es decir, demuéstrese que u, u_x, u_t y u_{xx} pertenecen a $C^0([0,\pi] \times [0,+\infty))$).

c) Indicar u en el caso particular en que $f(x) = \cos 3x$.

11.– En los problemas siguientes, calcular soluciones formales mediante el método de separación de variables, establecer su validez y analizar la unicidad de solución:

$$a)\begin{cases} u_{tt}+b^2u=c^2u_{xx} \quad t>0,\ 0<x<l,\ (b\in\mathbb{R}),\\ u(x,0)=f(x), \quad u_t(x,0)=0 \quad 0\le x\le l\\ u(0,t)=u(l,t)=0 \quad t>0.\\ (f\in C^3([0,l]),\ f \text{ y } f'' \text{ se anulan en } 0 \text{ y en } l).\end{cases} \qquad b)\begin{cases} u_{tt}+2au_t=c^2u_{xx} \quad t>0,\ 0<x<l,\ (a>0),\\ u(x,0)=0, \quad u_t(x,0)=g(x) \quad 0\le x\le l\\ u(0,t)=u(l,t)=0 \quad t>0.\\ (g\in C^2([0,l]),\ g(0)=g(l)=0)..\end{cases}$$

$$c)\begin{cases} u_{tt}-u_{xx}+2u_t+u=0 \quad t>0,\ 0<x<1,\\ u(x,0)=x-x^2,\ u_t(x,0)=x^2-x \quad 0\le x\le 1,\\ u(0,t)=u(1,t)=0 \quad t>0.\end{cases}$$

12.– Resolver por el método de separación de variables los problemas siguientes:

$$a)\begin{cases} u_{tt}-u_{xx}=x^2 \quad t>0,\ 0<x<1,\\ u(x,0)=x,\ u_t(x,0)=0 \quad 0\le x\le 1,\\ u(0,t)=0, \quad u(1,t)=1 \quad t>0.\end{cases} \qquad b)\begin{cases} u_t-u_{xx}=0 \quad t>0,\ 0<x<1,\\ u(x,0)=1-x^2 \quad 0\le x\le 1,\\ u_x(0,t)=u(1,t)=0 \quad t>0.\end{cases}$$

$$c)\begin{cases} u_t-4u_{xx}=0 \quad t>0,\ 0<x<1,\\ u(x,0)=x^2(1-x) \quad 0\le x\le 1,\\ u(0,t)=0 \quad u(1,t)=0 \quad t>0.\end{cases} \qquad d)\begin{cases} u_t-u_{xx}=0 \quad t>0,\ 0<x<\pi,\\ u(x,0)=\operatorname{sen}^2 x \quad 0\le x\le \pi,\\ u(0,t)=0,\ u(\pi,t)=0 \quad t>0.\end{cases}$$

$$e)\begin{cases} u_t-u_{xx}=0 \quad t>0,\ 0<x<2,\\ u(x,0)=x \quad 0\le x\le 2,\\ u(0,t)=0 \quad u_x(2,t)=1 \quad t>0.\end{cases} \qquad f)\begin{cases} u_t-u_{xx}=0 \quad t>0,\ 0<x<l,\\ u(x,0)=\operatorname{sen}\frac{\pi x}{2l} \quad 0\le x\le l,\\ u(0,t)=0,\ u(l,t)=1 \quad t>0.\end{cases}$$

$$g)\begin{cases} u_t-u_{xx}=0 \quad t>0,\ 0<x<\pi,\\ u(x,0)=x(\pi-x) \quad 0\le x\le \pi,\\ u_x(0,t)=u_x(\pi,t)=0 \quad t>0.\end{cases} \qquad h)\begin{cases} u_t-u_{xx}+u=1 \quad t>0,\ 0<x<1,\\ u(x,0)=\operatorname{sen}\pi x+1 \quad 0\le x\le 1,\\ u(0,t)=1,\ u(1,t)=1 \quad t>0.\end{cases}$$

13.– Hallar soluciones formales de los siguientes problemas, indicando su regularidad:

$$a)\begin{cases} u_t-u_{xx}=0 \quad t>0,\ 0<x<1,\\ u(x,0)=x(1-x) \quad 0\le x\le 1,\\ u(0,t)=t \quad u(1,t)=\operatorname{sen} t \quad t>0.\end{cases} \qquad b)\begin{cases} u_t-4u_{xx}=xt \quad t>0,\ 0<x<1,\\ u(x,0)=\operatorname{sen}\pi x \quad 0\le x\le 1,\\ u(0,t)=t \quad u(1,t)=t^2 \quad t>0.\end{cases}$$

14.– Se considera el problema siguiente, donde $a\in C^\infty([0,+\infty))$ y $f\in C^2([0,\pi])$:

$$\begin{cases} u_t-u_{xx}+a'(t)u=0, \quad \text{en } Q=(0,\pi)\times(0,+\infty)\,,\\ u(x,0)=f(x), \quad x\in[0,\pi],\\ u(0,t)=u_x(\pi,t)=0, \quad t>0.\end{cases}$$

a) Hallar las "condiciones de compatibilidad", necesarias para la existencia de solución $u\in C^2(\overline{Q})$.
b) Hallar una solución formal de este problema y probar que ésta es $C^\infty(Q)$.
c) ¿ Qué condiciones sobre f permiten asegurar que la solución formal u es tal que pertenece a $C^2([0,1]\times(0,+\infty))\cap C^0(\overline{Q})$ y u_x pertenece a $C^0(\overline{Q})$? Justifíquese la respuesta.
d) Hallar la solución del problema en el caso particular en que $a(t)=t^2$ y $f(x)=2\operatorname{sen} x\cdot\cos\frac{x}{2}$.

15.– Resolver los siguientes problemas, indicando la regularidad de las soluciones formales que se obtienen:

$$a)\begin{cases} u_{tt}-u_{xx}=t\operatorname{sen} 2\pi x \quad t>0,\ 0<x<1,\\ u(x,0)=3\operatorname{sen} 3\pi x,\ u_t(x,0)=0 \quad 0\le x\le 1,\\ u(0,t)=u(1,t)=0 \quad t>0.\end{cases} \qquad b)\begin{cases} u_{tt}-u_{xx}=0 \quad t>0,\ 0<x<1,\\ u(x,0)=x,\ u_t(x,0)=0 \quad 0\le x\le 1,\\ u(0,t)=t^2,\ u(1,t)=\cos t \quad t>0.\end{cases}$$

$$c) \begin{cases} u_{tt} - 4u_{xx} = xt & t > 0,\ 0 < x < 1, \\ u(x,0) = x,\ u_t(x,0) = 0 & 0 \leq x \leq 1, \\ u(0,t) = 0,\ u_x(1,t) = 1 + t & t > 0. \end{cases} \qquad d) \begin{cases} u_t - u_{xx} + u = -x, & (x,t) \in Q = (0,1) \times \mathbb{R}_+, \\ u(x,0) = 1 - x + x^2/2, & x \in [0,1], \\ u(0,t) = e^{-t}, \quad u_x(1,t) = e^{-t} - 1, & t > 0. \end{cases}$$

16.– Se considera el problema

$$\begin{cases} u_{tt} - u_{xx} = 0 & t > 0,\ 0 < x < \pi, \\ u(x,0) = 0,\ u_t(x,0) = \text{sen } x & 0 \leq x \leq \pi, \\ u_x(0,t) = \text{sen } t, \quad u_x(\pi,t) = -\text{sen } t, & t > 0. \end{cases}$$

Averiguar si se verifican las condiciones de compatibilidad, necesarias para la existencia de solución en $C^2(\overline{Q})$, donde $Q = (0,\pi) \times \mathbb{R}_+$. En caso afirmativo, hallar una solución y probar que ésta es única.

17.– Se considera el problema

$$\begin{cases} u_{tt} - u_{xx} = 0 & t > 0,\ 0 < x < 1, \\ u(x,0) = f(x),\ u_t(x,0) = g(x) & 0 \leq x \leq 1, \\ u(0,t) = \alpha(t), \quad u_x(1,t) = \beta(t), & t > 0. \end{cases}$$

Se pide: a) Determinar las condiciones de compatibilidad, necesarias para la existencia de solución en $C^2(\overline{Q})$, donde $Q = (0,1) \times (0,+\infty)$.

b) Demostrar que el problema posee, a lo más, una solución en $C^2(\overline{Q})$.

c) Admitiendo que existe la solución $u(x,t)$, determinar $u(\frac{1}{2}, 1)$ en el caso en que $f \equiv g \equiv 0$, $\alpha(t) = t^3$ y $\beta(t) = 3t^2$.

18.– Se considera el problema "mixto"

$$\begin{cases} u_{tt} - u_{xx} = 0 & t > 0,\ x > 0, \\ u(x,0) = 0,\ u_t(x,0) = g(x) & x \geq 0, \\ u_x(0,t) + u(0,t) = 0, & t > 0 \end{cases}$$

Se pide:

a) Establecer qué regularidad debe tener g y cuáles son las condiciones de compatibilidad necesarias para que el problema posea solución $u \in C^2([0,+\infty) \times [0,+\infty))$.

b) Calcular una solución en el caso en que $g(x) = x^2$, y comprobar que efectivamente se trata de una solución. Razónese si es única.

19.– Se considera el problema "mixto"

$$\begin{cases} u_{tt} - u_{xx} = 0 & t > 0,\ x > 0, \\ u(x,0) = f(x),\ u_t(x,0) = g(x) & x \geq 0, \\ u_x(0,t) - 2u(0,t) = 0, & t > 0 \end{cases}$$

Se pide:

a) Establecer qué regularidad deben tener f y g, y cuáles son las condiciones de compatibilidad necesarias para que el problema posea solución $u \in C^2([0,+\infty) \times [0,+\infty))$.

b) Calcular dicha solución en el caso en que $f(x) = e^{2x}$ y $g(x) = x^2$.

20.– Se considera el problema

$$\begin{cases} u_{tt} - c^2 u_{xx} = 0 & t > 0,\ x > 0, \\ u(x,0) = f(x),\ u_t(x,0) = g(x) & x \geq 0, \\ u(0,t) = \alpha(t), & t > 0. \end{cases}$$

Establecer las condiciones de compatibilidad, necesarias para la existencia de solución en $C^2(\overline{Q})$, donde $Q = \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+$. Suponiendo que se cumplen estas condiciones, construir la solución.

21.– Sea $\alpha \neq 1$. Encontrar la solución $u \in C^2([0,+\infty) \times [0,+\infty))$ del problema

$$\begin{cases} u_{tt} - u_{xx} = 0 \quad t > 0,\ x > 0, \\ u(x,0) = f(x),\ u_t(x,0) = g(x) \quad x \geq 0, \\ u_t(0,t) + \alpha u_x(0,t) = 0, \quad t > 0, \end{cases}$$

suponiendo que f y g son suficientemente regulares y se anulan en un entorno de 0.

22.– Haciendo uso del Teorema de Green ($\int_{\partial D} Pdx + Qdt = \int\int_D (Q_x - P_t)dxdt$), obtener la fórmula de representación de D'Alembert del siguiente problema de Cauchy para la ecuación de ondas:

$$(PCO) \quad \begin{cases} u_{tt} - c^2 u_{xx} = h, & \text{en } \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+, \\ u = f, & \text{en } \mathbb{R}, \\ u_t = g, & \text{en } \mathbb{R}. \end{cases}$$

23.– Se considera el problema de Cauchy para la ecuación de ondas unidimensional

$$\begin{cases} u_{tt} - u_{xx} = 0, & t > 0,\ x \in \mathbb{R}, \\ u(x,0) = f(x),\ u_t(x,0) = g(x), & x \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

Supongamos que f y g son idénticamente nulas fuera del intervalo $[-1,1]$. ¿ En qué región de $\mathbb{R} \times [0,+\infty)$ puede asegurarse que la solución es idénticamente nula ?

24.– Obtener la solución de los problemas de Cauchy para la ecuación unidimensional de ondas no homogénea siguientes:

$$(a) \begin{cases} u_{tt} - u_{xx} = e^x, & t > 0,\ x \in \mathbb{R}, \\ u(x,0) = 0,\ u_t(x,0) = 1, & x \in \mathbb{R}. \end{cases} ; \qquad (b) \begin{cases} u_{tt} - u_{xx} = x\text{sen } t, & t > 0,\ x \in \mathbb{R}, \\ u(x,0) = x,\ u_t(x,0) = 0, & x \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

25.– Se considera el siguiente problema:

$$(P) \begin{cases} u_{tt} - u_{xx} = 0 \quad \text{en } [0,2] \times [0,\infty), \\ u(x,0) = u_t(x,0) = 0 \quad \forall x \in [0,2], \\ u_x(0,t) = t^2,\ u(2,t) = t^3 \quad \forall t \geq 0. \end{cases}$$

Se pide:
a) Probar que tiene a lo más una solución $u \in C^2([0,2] \times [0,\infty))$.

b) Admitiendo que exista dicha solución, calcular $u(1,2)$.

26.– Se considera el siguiente problema:

$$(P) \begin{cases} u_t = u_{xx} + 2u_x \quad \text{en } (0,\pi) \times (0,\infty), \\ u(x,0) = f(x) \quad \forall x \in [0,\pi], \\ u_x(0,t) + u(0,t) = u_x(\pi,t) + u(\pi,t) = 0 \quad \forall t \geq 0, \end{cases}$$

con $f \in L^2(0,\pi)$ dada. Se pide:
a) Obtener la solución formal u de (P) mediante el método de separación de variables.

b) Demostrar que si $f \in C^3([0,\pi])$ y satisface $f'(0) + f(0) = f'(\pi) + f(\pi) = 0$, entonces la solución formal encontrada satisface que u, u_x, u_t y u_{xx} pertenecen a $C^0([0,\pi] \times [0,+\infty))$.

LAS ECUACIONES DE LAPLACE Y DE POISSON.

27.– Demuéstrese que dado $\xi \in \mathbb{R}^2$, la función $x \in \mathbb{R}^2 \mapsto \log|x-\xi| \in \mathbb{R}$ es localmente integrable en $\mathbb{R}^2$, es decir, es integrable en cualquier compacto de $\mathbb{R}^2$

28.– Demuéstrese que dados $\xi \in \mathbb{R}^N$ y $m \in \mathbb{R}$, la función $x \in \mathbb{R}^N \to |x-\xi|^{-m} \in \mathbb{R}$ es localmente integrable en $\mathbb{R}^N$, es decir, es integrable en cualquier compacto de $\mathbb{R}^N$, si y sólo si $m < N$.

29.– Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ abierto acotado conexo no vacío con $\partial\Omega \in C^{0,1}$. Dadas $f \in C^0(\Omega)$ y $g \in C^0(\partial\Omega)$, se considera el problema de Neumann para la ecuación de Poisson

$$(PNP)\begin{cases} -\Delta u = f & \text{en } \Omega, \\ \partial_{\vec{n}} u = g & \text{sobre } \partial\Omega. \end{cases}$$

Se pide:
a) Comprobar que para que exista solución $u \in C^2(\overline{\Omega})$ de (PNP), es necesario que f y g satisfagan la relación de compatibilidad

$$\int_\Omega f(x)\,dx + \int_{\partial\Omega} g(x)\,d\sigma(x) = 0.$$

b) Obtener un resultado de "unicidad" de solución en $C^2(\overline{\Omega})$ para (PNP).

30.– Sea $B = B((0,0);2) \subset \mathbb{R}^2$.
a) Hallar una función $u \in C^2(B) \cap C^0(\overline{B})$ que sea armónica en B y verifique

$$u(x_1,x_2) = \log[(x_1-1)^2 + x_2^2] + x_1 + x_2 \qquad \forall (x_1,x_2) \in \partial B.$$

b) Utilizando el apartado precedente, resolver el problema de Dirichlet

$$\begin{cases} -\Delta w = -12x_2^2 & (x_1,x_2) \in B, \\ w = \log[(x_1-1)^2 + x_2^2] + x_1 + x_2(x_2^3+1) & (x_1,x_2) \in \partial B. \end{cases}$$

31.– Sean $B = B((0,0,0);2) \subset \mathbb{R}^3$. Resolver el problema de Dirichlet

$$\begin{cases} -\Delta w = -12(x_1^2+x_2^2+x_3^2) & (x_1,x_2,x_3) \in B, \\ w = [(x_1-1)^2 + x_2^2 + x_3^2]^{-1/2} + x_1^4 + x_2^4 + x_3^4 & (x_1,x_2,x_3) \in \partial B. \end{cases}$$

32.– Sea B la bola abierta de $\mathbb{R}^2$ de centro el origen y radio 3. Hallar una función u que sea armónica en B, continua en $\overline{B}$, y verifique $u = x_1(x_1^2 + (x_2-2)^2)^{-1}$ para $(x_1,x_2) \in \partial B$.

33.– Sea B la bola abierta de $\mathbb{R}^3$ de centro el origen y radio 4. Hallar una función u que sea armónica en B, continua en $\overline{B}$, y verifique $u = 3x_3\left((x_1-2)^2 + (x_2-1)^2 + x_3^2\right)^{-3/2}$ para $(x_1,x_2,x_3) \in \partial B$.

34.– Sea $u \in C^2(\Omega)$ y supongamos que $-\Delta u = 0$ en Ω. Probar que, para todo $\xi \in \Omega$ y para todo $\rho > 0$ tales que $\overline{B}(\xi;\rho) \subset \Omega$, se satisface la igualdad

$$u(\xi) = \frac{1}{\omega_N \rho^{N-1}} \int_{\partial B(\xi,\rho)} u(x)\,d\Gamma(x)$$

(ley de Gauss de la media aritmética).

35.– Sea $u \in C^2(B(0;R)) \cap C^0(\overline{B}(0;R))$ tal que $-\Delta u = 0$ y $u \geq 0$ en $B(0;R)$. Probar que

$$\frac{R^{N-2}(R-|\xi|)}{(R+|\xi|)^{N-1}}\,u(0) \leq u(\xi) \leq \frac{R^{N-2}(R+|\xi|)}{(R-|\xi|)^{N-1}}\,u(0), \ \forall \xi \in B(0;R).$$

36.– Sea $u \in C^2(\Omega)$ tal que $-\Delta u = 0$ en Ω. Demuéstrese que para todo punto $\xi \in \Omega$ y todo $R > 0$ tal que $\overline{B}(\xi, R) \subset \Omega$ se satisface

$$u(\xi) = \frac{N}{\omega_N R^N} \int_{B(\xi,R)} u(x)\, dx.$$

Sugerencia: Usar la ley de Gauss de la media aritmética, e integrar después de pasar ρ al primer miembro.

37.– Demuéstrese que el núcleo de Poisson en $B(0, R)$ satisface

$$-\Delta_\xi H(x, \xi) = 0, \quad \forall\, (x, \xi) \in \partial B(0, R) \times B(0, R).$$

38.– El problema de Dirichlet para la ecuación de Poisson en $\mathbb{R}^1$ puede ser formulado de la siguiente forma:

Dados $\Omega = (0, 1) \subset \mathbb{R}$, $f \in C^0(0, 1)$, y $g_1, g_2 \in \mathbb{R}$, hallar $u \in C^2(0, 1) \cap C^0([0, 1])$ tal que

$$(PDP) \begin{cases} -u'' = f & \text{en } (0, 1), \\ u(0) = g_1, \quad u(1) = g_2. \end{cases}$$

Demuéstrese que (PDP) posee una y sólo una solución, que viene dada por

$$u(\xi) = (1 - \xi) g_1 + \xi g_2 + \int_0^1 G(x, \xi) f(x)\, dx, \quad \forall\, \xi \in [0, 1],$$

donde

$$G(x, \xi) = \begin{cases} (1 - x)\xi & \text{si } 0 \le \xi < x \le 1, \\ (1 - \xi)x & \text{si } 0 \le x < \xi \le 1. \end{cases}$$

39.– Sea $B = B(0; 1) \subset \mathbb{R}^2$. Sea $u \in C^2(B) \cap C^0(\overline{B})$ la solución del problema

$$\begin{cases} -\Delta u = 0 & \text{en } B, \\ u(1, \theta) = \operatorname{sen}^2 \theta & \text{sobre } \partial B. \end{cases}$$

a) Indicar de forma razonada cuánto valen $\max_{\overline{B}} u$ y $\min_{\overline{B}} u$.
b) Mediante la fórmula de Poisson, determinar $u(0)$.

40.– Sea $\Omega = \{\, (x_1, x_2);\ (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2,\ x_2 > 0 \,\}$. Se pide:
a) Obtener una función de Green en Ω y deducir que si $u \in C^2(\overline{\Omega})$ es armónica en Ω y tal que $\lim\limits_{|x| \to \infty} u(x) = \lim\limits_{|x| \to \infty} |\nabla u(x)| = 0$, entonces: $u(\xi) = \dfrac{\xi_2}{\pi} \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{u(x_1, 0)}{(x_1 - \xi_1)^2 + \xi_2^2}\, dx_1 \quad \forall \xi \in \Omega$.
b) Probar que si $f \in C^0(\mathbb{R})$ es acotada, entonces la función u, dada por

$$u(\xi) = \begin{cases} \dfrac{\xi_2}{\pi} \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{f(x_1)}{(x_1 - \xi_1)^2 + \xi_2^2}\, dx_1 & \text{si } \xi \in \Omega, \\ f(\xi_1) & \text{si } \xi \in \partial\Omega, \end{cases}$$

está bien definida y verifica: $u \in C^2(\Omega) \cap C^0(\overline{\Omega}), \quad -\Delta u = 0 \ \text{ en } \ \Omega, \quad |u| \le Cte.$

41.– Sea $\Omega = \{\, (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3;\ x_3 > 0 \,\}$. Se pide:
a) Obtener una función de Green para el problema (PDL) en Ω.
b) Deducir que si $u \in C^2(\overline{\Omega})$ es armónica en Ω y tal que $\lim\limits_{|x| \to \infty} u(x) = \lim\limits_{|x| \to \infty} |\nabla u(x)| = 0$, entonces se satisface la siguiente fórmula integral:

$$u(\xi) = \frac{\xi_3}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{u(x_1, x_2, 0)}{((x_1 - \xi_1)^2 + (x_2 - \xi_2)^2 + \xi_3^2)^{3/2}}\, dx_1 dx_2 \quad \forall \xi \in \Omega.$$