ECUACIONES EN DERIVADAS PARCIALES Y ANÁLISIS FUNCIONAL

GENERALIDADES

1. Efectuar el cambio de variables $\xi = x + 2t$, $\eta = x + 3t$ en la ecuación

$$2w_{\xi\xi} + 8w_{\xi\eta} + 7w_{\eta\eta} = 0.$$

2. Se considera el problema de la cuerda vibrante

$$\begin{cases} tu_t - c^2 x u_x = F(x,t), & t > 0,\ a < x < b, \\ u(x,0) = f(x),\ u_t(x,0) = g(x), & a \leq x \leq b, \\ u(a,t) = p(t),\ b(b,t) = q(t). & \end{cases}$$

Efectuar el cambio de variable

$$\xi = \frac{x-a}{b-a}, \quad \eta = \frac{c}{b-a}t$$

y re-escribir el problema en las nuevas variables ξ y η.

3. Demostrar que la EDP

$$u_{tt} - aut - ku_{xx} = 0,$$

donde a y c son constantes, puede reducirse a una ecuación análoga con $a = c = 1$.

Indicación: Intentar un cambio de variable de la forma $\xi = mx$, $\eta = nt$, siendo m y n constantes adecuadas.

4. Demostrar que la EDP

$$u_t - au - c^2 u_{xx} = 0,$$

donde a y c son constantes, puede reducirse a otra ecuación análoga con $a = 0$.

5. Demostrar que la función $u(x,y) = f(x)g(y)$ es solución de

$$uu_{xy} = u_x u_y$$

para todo par de funciones dos veces continuamente diferenciables f y g.

6. Hallar la solución general, esto es, una familia de soluciones dependientes de dos funciones arbitrarias, de las siguientes ecuaciones:

$$\text{a) } u_{xx} = 0; \qquad \text{b) } u_{xy} = 0,$$

con $u = u(x,y)$.

ECUACIONES DE LAPLACE Y DE POISSON

1. Demuéstrese que, para cada $\xi \in \mathbb{R}^2$, la función $x \in \mathbb{R}^2 \setminus \{\xi\} \mapsto \log|x - \xi| \in \mathbb{R}$ es localmente integrable, es decir, integrable en cualquier compacto de $\mathbb{R}^2$.

2. Demuéstrese que, para cada $\xi \in \mathbb{R}^N$ y cada $m \in \mathbb{R}$, la función $x \in \mathbb{R}^N \setminus \{\xi\} \mapsto |x - \xi|^{-m} \in \mathbb{R}$ es localmente integrable en $\mathbb{R}^N$ si y sólo si $m < N$.

3. Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ un abierto conexo acotado no vacío, con $\partial\Omega \in C^{0,1}$. Dadas $f \in C^0(\Omega)$ y $g \in C^0(\partial\Omega)$, se considera el problema de Neumann para la ecuación de Poisson

$$\text{(NP)} \qquad \begin{cases} -\Delta u = f & \text{en } \Omega, \\ \partial_n u = g & \text{sobre } \partial\Omega. \end{cases}$$

(a) Comprobar que, para que exista solución $u \in C^2(\overline{\Omega})$ de (NP), es necesario que f y g satisfagan la relación de compatibilidad

$$\int_\Omega f(x)\,dx + \int_{\partial\Omega} g(x)\,d\Gamma = 0.$$

(b) Obtener un resultado de "unicidad"de solución en $C^2(\overline{\Omega})$ de (NP).

4. Sea $B = B((0,0);2) \subset \mathbb{R}^2$.

   (a) Hallar una función $u \in C^2(B) \cap C^0(\overline{B})$ que sea armónica en B y verifique

   $$u(x_1,x_2) = \log[(x_1-1)^2 + x_2^2] + x_1 + x_2 \qquad \forall (x_1,x_2) \in \partial B.$$

   (b) Utilizando el apartado precedente, resolver el problema de Dirichlet

   $$\begin{cases} -\Delta w = -12x_2^2, & (x_1,x_2) \in B, \\ w = \log[(x_1-1)^2 + x_2^2] + x_1 + x_2(x_2^3+1), & (x_1,x_2) \in \partial B. \end{cases}$$

5. Sea $B = B(0,0,0);2) \subset \mathbb{R}^3$. Resolver el problema de Dirichlet

   $$\begin{cases} -\Delta w = -12(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2), & (x_1,x_2,x_3) \in B, \\ w = [(x_1-1)^2 + x_2^2 + x_3^2]^{-1/2} + x_1^4 + x_2^4 + x_3^4, & (x_1,x_2,x_3) \in \partial B. \end{cases}$$

6. Sea $B = B((0,0);3) \subset \mathbb{R}^2$. Hallar la solución clásica de

   $$\begin{cases} -\Delta u = 0 & \text{en } B, \\ u = x_1(x_1^2 + (x_2-2)^2)^{-1} & \text{sobre } \partial B. \end{cases}$$

7. Sea $B = B((0,0,0);4) \subset \mathbb{R}^3$. Hallar la solución clásica de

   $$\begin{cases} -\Delta u = 0 & \text{en } B, \\ u = 3x_3((x_1-2)^2 + (x_2-1)^2 + x_3^2)^{-3/2} & \text{sobre } \partial B. \end{cases}$$

8*. Sea $u \in C^2(\Omega)$ y supongamos que $-\Delta u = 0$ en Ω. Probar que, para todo $\xi \in \Omega$ y para todo $\rho > 0$ tales que $\overline{B}(\xi;\rho) \subset \Omega$, se satisface la igualdad

$$u(\xi) = \frac{1}{\omega_N \rho^{N-1}} \int_{\partial B(\xi,\rho)} u(x)\,d\Gamma(x)$$

(ley de Gauss de la media aritmética).

9*. Sea $u \in C^2(B(0;R)) \cap C^0(\overline{B}(0;R))$ tal que $-\Delta u = 0$ y $u \geq 0$ en $B(0;R)$. Probar la siguiente desigualdad:

$$\frac{R^{N-2}(R-|\xi|)}{(R+|\xi|)^{N-1}}u(0) \leq u(\xi) \leq \frac{R^{N-2}(R+|\xi|)}{(R-|\xi|)^{N-1}}u(0) \qquad \forall \xi \in B(0;R).$$

Indicaciones: Utilícese la ley de Gauss o la fórmula integral de Poisson; se dice que esta desigualdad es *de tipo Harnack*.

10*. Sea $u \in C^2(\Omega)$ tal que $-\Delta u = 0$ en Ω. Demuéstrese que, para todo punto $\xi \in \Omega$ y todo $R > 0$ tal que $\overline{B}(\xi;R) \subset \Omega$, se tiene:

$$u(\xi) = \frac{N}{\omega_N R^N} \int_{B(\xi;R)} u(x)\,dx.$$

Indicación: Usar la ley de Gauss de la media aritmética, pasar ρ al primer miembro e integrar.

11. Demuéstrese que el núcleo de Poisson en $B(0;R)$ satisface

$$-\Delta_\xi H(x,\xi) = 0 \quad \forall (x,\xi) \in \partial B(0;R) \times B(0;R).$$

12. El problema de Dirichlet para la ecuación de Poisson unidimensional puede ser formulado de la siguiente forma: Dados $\Omega = (0,1) \subset \mathbb{R}$, $f \in C^0([0,1])$ y g_1, $g_2 \in \mathbb{R}$, hallar $u \in C^2(0,1) \cap C^0([0,1])$ tal que

$$\text{(DP1D)} \qquad \left\{ \begin{array}{l} -u'' = f \quad \text{en } (0,1), \\ u(0) = g_1, \; u(1) = g_2. \end{array} \right.$$

Demuéstrese que (DP1D) posee una y sólo una solución que viene dada por

$$u(\xi) = (1-\xi)g_1 + \xi g_2 - \int_0^1 G(x,\xi) f(x)\, dx \quad \forall \xi \in [0,1],$$

donde G, función de Green asociada a $(0,1)$, está dada por

$$G(x,\xi) = \left\{ \begin{array}{lll} (x-1)\xi & \text{si} & 0 \le \xi < x \le 1, \\ (\xi-1)x & \text{si} & 0 \le x < \xi \le 1. \end{array} \right.$$

13. Sea $B = B(0;1) \subset \mathbb{R}^2$. Sea $u \in C^2(B) \cap C^0(\overline{B})$ la solución del problema

$$\left\{ \begin{array}{ll} -\Delta u = 0 & \text{en } B, \\ u(1,\theta) = \operatorname{sen}^2\theta & \text{sobre } \partial B. \end{array} \right.$$

   (a) Indicar de forma razonada cuánto valen $\max_{\overline{B}} u$ y $\min_{\overline{B}} u$.
   (b) Mediante la fórmula de Poisson, determinar $u(0)$.

FORMULACIÓN DÉBIL DE PROBLEMAS ELÍPTICOS

A menos que se indique otra cosa, Ω denota un abierto conexo no vacío de $\mathbb{R}^N$, con $N \ge 1$.

1. Sea Ω acotado, supongamos que $K \in L^\infty(\Omega \times \Omega)$ y pongamos $\hat{K} := \|K\|_{L^\infty(\Omega\times\Omega)}$. Utilizando el teorema de Lax-Milgram y suponiendo que $\hat{K}|\Omega| < 1$, probar que para cada $f \in L^2(\Omega)$ existe una única solución $u \in L^2(\Omega)$ de la ecuación integral

$$u(x) - \int_\Omega K(x,y)\, u(y)\, dy = f(x), \qquad x \in \Omega \;\; \text{c.p.d.}$$

2. Sea $\psi(t) = 0$ si $t \ge 0$ y $\psi(t) = e^{1/t}$ si $t < 0$. Probar que $\psi \in C^\infty(\mathbb{R})$.

3. Sea $v \in C_c^0(\Omega)$ tal que existe la derivada parcial clásica $\partial_i v \in C^0(\Omega)$. Probar que

$$\int_\Omega \partial_i v(x)\, dx = 0.$$

4. Calcular las derivadas primeras y segundas en $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ de las funciones siguientes:
   (a) Función de Heaviside o de salto unidad: $H(x) = 0$ si $x \le 0$ y $H(x) = 1$ si $x > 0$.
   (b) Función valor absoluto.

5. Sean $\Omega = (-1,1) \times (-1,1) \subset \mathbb{R}^2$ y g la función definida en Ω por

$$g(x_1,x_2) = \left\{ \begin{array}{ll} x_1 x_2 & \text{si } x_1 > 0, \\ x_1 & \text{si } x_1 \le 0. \end{array} \right.$$

Calcular las derivadas parciales primeras y segundas de g en el sentido de las distribuciones en Ω.

6. Sea Q el interior del cuadrado de vértices $(1,1)$, $(2,0)$, $(3,1)$ y $(2,2)$ (un abierto de $\mathbb{R}^2$). Denotemos T la función definida por 1_Q. Se pide calcular las siguientes derivadas en el sentido de las distribuciones en $\mathbb{R}^2$:

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x_1^2}, \quad \frac{\partial^2 T}{\partial x_2^2}, \quad \frac{\partial^2 T}{\partial x_1 x_2}.$$

7. Sea $B = B(0;1) \subset \mathbb{R}^N$ con $N \geq 3$ y sea $u(x) = |x|^{-\alpha}$, con $\alpha < N/2 - 1$. Probar que $u \in H^1(B)$.

8. Sea $\Omega = B(0;\rho) \subset \mathbb{R}^2$ con $\rho < 1$. Probar que la función $u(x) = (-\log|x|)^k$, definida para $x \in \Omega \setminus \{0\}$, pertenece a $H^1(\Omega)$ si $0 < k < 1/2$. Compruébese con esto que, en general, $H^1(\Omega)$ no es un subespacio de $C^0(\Omega)$.

9. Sea $u \in L^2(\Omega)$. Demostrar que $u \in H^1(\Omega)$ si y sólo si existe $C > 0$ tal que

$$\left| \int_\Omega u\, \partial_i \varphi\, dx \right| \leq C \|\varphi\|_{L^2(\Omega)} \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega),\ 1 \leq i \leq N.$$

Indicación: Poner $f(\varphi) = \displaystyle\int_\Omega u\, \partial_i \varphi\, dx$ y usar un teorema de prolongación.

10. Sea $I = (a,b)$ un intervalo abierto no necesariamente acotado. Se pide demostrar lo siguiente:

(a) Existe una función $\varphi_0 \in \mathcal{D}(I)$ tal que $\displaystyle\int_I \varphi_0(x)\, dx = 1$.

(b) Para cada $f \in \mathcal{D}(I)$, existe $\varphi \in \mathcal{D}(I)$ tal que

$$\varphi'(x) = f(x) - \left(\int_I f(y)\, dy \right) \varphi_0(x) \quad \forall x \in I,$$

siendo φ_0 la función cuya existencia se ha demostrado en el apartado (a).

(c) Si $v \in L^1_{loc}(I)$ es tal que

$$\int_I v(x)\, \varphi'(x)\, dx = 0 \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(I),$$

entonces existe una constante $C \in \mathbb{R}$ tal que $v(x) = C$ c.p.d. en I.

(d) Si $g \in L^1_{loc}(I)$, $x_0 \in I$ y ponemos $G(x) := \displaystyle\int_{x_0}^x g(y)\, dy \quad \forall x \in I$, entonces $G \in C^0(I)$ y

$$\int_I G(x)\, \varphi'(x)\, dx = -\int_I g(x)\, \varphi(x)\, dx \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(I).$$

(e) Supongamos ahora que I es acotado. Si $u \in H^1(I)$, entonces existe $\tilde{u} \in C^0(\overline{I})$ tal que $u = \tilde{u}$ c.p.d. en I y

$$\tilde{u}(t_2) - \tilde{u}(t_1) = \int_{t_1}^{t_2} u'(s) ds \quad \forall t_1,\, t_2 \in \overline{I}. \tag{1}$$

En consecuencia, identificando cada elemento de $H^1(I)$ con su representante continuo, podemos escribir que $H^1(I) \subset C^0(\overline{I})$.

(f) Supongamos de nuevo que I es acotado. Usar (1) para probar que existe una constante C_I tal que

$$|\tilde{u}(t_2)| \leq C_I \|u\|_{H^1(I)} \quad \forall t_2 \in \overline{I}$$

y deducir que la inyección $i : H^1(I) \mapsto C^0(\overline{I})$ es continua.

(g) Demostrar que, si I es acotado, la inyección $i : H^1(I) \mapsto C^0(\overline{I})$ es compacta, es decir, todo subconjunto acotado en $H^1(I)$ es relativamente compacto en $C^0(\overline{I})$.

(h) Suponiendo que I es acotado, probar la siguiente fórmula de integración por partes:

$$\int_I u'(x)\, v(x)\, dx = u(b)v(b) - u(a)v(a) - \int_I u(x)\, v'(x)\, dx \quad \forall u,\, v \in H^1(I).$$

11. Comprobar que $C^0(\overline{I}) \not\subset H^1(I)$.

En los siguientes ejercicios se suponen conocidos los resultados del ejercicio 10. También se supone conocido el resultado siguiente, que es consecuencia inmediata del apartado 10(e):

Si $u,\, v \in C^0(\overline{I})$ y $\int_I v\,\varphi\,dx = -\int_I u\,\varphi'\,dx \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(I)$, entonces $u \in C^1(\overline{I})$ y su derivada clásica coincide con v en $\overline{I}$.

Usaremos que $C^1(\overline{I})$ es denso en $H^1(I)$ y, más generalmente, que $C^1(\overline{\Omega})$ es denso en $H^1(\Omega)$ si $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ es un abierto acotado de frontera $\partial\Omega \in C^{0,1}$.

12. Sean $I = (-1, 1) \subset \mathbb{R}$ y $f : H^1(I) \mapsto \mathbb{R}$, con $f(v) = v(0)\ \forall v \in H^1(I)$.

    (a) Demostrar que $f \in (H^1(I))'$.

    (b) Probar que existe una única función $u \in H^1(I)$ tal que $(u, v)_{H^1(I)} = f(v) \quad \forall v \in H^1(I)$. Determinar u.

    (c) Probar que $f \in H^{-1}(I)$ y hallar $w \in H_0^1(I)$ tal que $f(v) = (w, v)_{H_0^1(I)} \quad \forall v \in H_0^1(I)$.

13. Sea $I = (0, 1) \subset \mathbb{R}$. Sea $a(\cdot\,, \cdot) : H^1(I) \times H^1(I) \mapsto \mathbb{R}$ definida por

$$a(u, v) = \int_0^1 (u'v' + 2xu'v + 3uv)\,dx$$

    (a) Demostrar que $a(\cdot\,, \cdot)$ es continua y coerciva en $H^1(I)$.

    (b) Probar que existe una única $u \in H^1(I)$ tal que $a(u, v) = v(0) + v(1) \quad \forall v \in H^1(I)$.

    (c) Concluir de manera razonada que $u \in C^\infty([0, 1])$ y es solución clásica de un problema de contorno que se determinará.

14. Sea $I = (0, 1) \subset \mathbb{R}$. Sea $a(\cdot\,, \cdot) : H^1(I) \times H^1(I) \mapsto \mathbb{R}$ definida por

$$a(u, v) = \int_I (u'v' + uv)\,dx + ku(0)v(0),$$

    con $k > -1$ fijado. Se denota $V = \{\, v \in H^1(I) : \ v(1) = 0 \,\}$.

    (a) Demostrar que la forma $a(\cdot\,, \cdot)$ es coerciva en V.

    (b) Dada $f \in L^2(I)$, probar que existe una y sólo una $u_f \in V$ tal que $a(u_f, v) = \displaystyle\int_I f\,v\,dx$ para cada $v \in V$. Caracterizar u_f como solución de un problema de mínimos.

    (c) ¿ Qué se puede decir de u_f si $f \in C^0(\overline{I})$? Caracterizar en este caso u_f como solución clásica de un problema de contorno.

15. Se define $a(\cdot\,, \cdot) : H^1(0, 1) \times H^1(0, 1) \mapsto \mathbb{R}$ como

$$a(u, v) = \int_0^1 (u'v' + uv)\,dx - \left(\int_0^1 u\,dx\right)\left(\int_0^1 v\,dx\right)$$

    para $u, v \in H^1(0, 1)$. Por otra parte, para una constante $k \neq 1$ fija, ponemos $V = \{\, v \in H^1(0, 1) : v(0) = kv(1) \,\}$.

    (a) Demostrar que existe una constante $C > 0$ tal que $\|v\|_{L^\infty(0,1)} \le C\|v'\|_{L^2(0,1)}\ \forall v \in V$ y que existe otra constante $C_1 > 0$ tal que $\|v\|_{H^1(0,1)} \le C_1\|v'\|_{L^2(0,1)}\ \forall v \in V$.

    (b) Probar que, cualquiera que sea $f \in L^2(0, 1)$, existe una única $u_f \in V$ con la propiedad de que $a(u_f, v) = \displaystyle\int_I f\,v\,dx$ para cada $v \in V$.

    (c) Probar que, si $f \in C^0([0, 1])$, entonces $u_f \in C^2([0, 1])$. Caracterizar el problema de contorno que satisface u_f, así como el problema de mínimos asociado.

16. Sean $I = (1,3) \subset \mathbb{R}$ y $a(\cdot\,,\cdot) : H^1(I) \times H^1(I) \mapsto \mathbb{R}$ la forma bilineal continua definida por

$$a(u,v) = \int_1^3 (t^2 u'(t)v'(t) + tu'(t)v(t) + 3u(t)v(t))\, dt \quad \forall u, v \in H^1(I).$$

Se pide:

(a) Demostrar que la forma $a(u,v)$ es coerciva sobre $H^1(I)$.

(b) Demostrar que existe una solución única del problema

$$(\mathrm{PV}) \qquad \begin{cases} u \in H^1(I) \\ a(u,v) = v(1) + v(3) + \displaystyle\int_1^3 v(t)dt \quad \forall v \in H^1(I) \end{cases}$$

(c) Demostrar que la solución u de (PV) pertenece a $C^\infty(\overline{I})$ y es solución clásica de un problema de contorno que se determinará.

17. Sea $V = \{\, v \in H^1(0,1) : \; v(0) = 0 \,\}$ y consideremos la forma bilineal $a(\cdot\,,\cdot) : V \times V \mapsto \mathbb{R}$, definida por

$$a(u,v) = \int_0^1 u'(t)v'(t)dt - \frac{1}{2}u(1)v(1) \quad \forall u, v \in H^1(0,1).$$

Se pide:

(a) Probar que para toda $v \in V$ se tiene que $\|v\|^2_{L^2(0,1)} \leq \|v'\|^2_{L^2(0,1)}$

(b) Sea $f \in L^2(0,1)$. Demostrar que existe una y sólo una solución del problema

$$(\mathrm{PV}) \qquad \text{Hallar } u \in V \text{ tal que } a(u,v) = \int_0^1 f(t)\, v'(t)\, dt \quad \forall v \in V$$

y que para dicha solución se satisface la desigualdad $\|u\|_{C^0([0,1])} \leq 2\|f\|_{L^2(0,1)}$.

(c) Caracterizar la solución u del problema (PV) como solución de un problema de minimización.

(d) Probar que, si $f \in C^1([0,1])$, entonces la solución u de (PV) pertenece a $C^2([0,1])$. Oobtener el problema de contorno del que u es solución.

18. Sean $I = (1,2) \subset \mathbb{R}$ y $a(\cdot\,,\cdot) : H^1(I) \times H^1(I) \mapsto \mathbb{R}$, definida por

$$a(u,v) = \int_1^2 (u'(t)v'(t) + tu'(t)v(t) + 2u(t)v(t))\, dt \quad \forall u, v \in H^1(I).$$

(a) Demostrar que la forma $a(\cdot\,,\cdot)$ es continua y coerciva sobre $H^1(I)$.

(b) Demostrar que existe una y sólo una solución del problema

$$(\mathrm{P}) \qquad \text{Hallar } u \in H^1(I) \text{ tal que } a(u,v) = v(1) + \int_1^2 v(t)\, dt \quad \forall v \in H^1(I).$$

(c) Demostrar que la solución u de (P) pertenece a $C^2(\overline{I})$ y hallar el problema de contorno del que u es solución clásica.

19. Sea $i \in \{1, ..., N\}$. Se pide lo que sigue:

(a) Probar que si $a \in C^1(\Omega)$ entonces

$$\int_\Omega a(x)\, \varphi(x)\, \partial_i \varphi(x)\, dx = -\frac{1}{2} \int_\Omega \partial_i a(x)\, \varphi^2(x)\, dx \quad \forall \varphi \in C^1_c(\Omega).$$

(b) Probar que si $a \in C^1(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$ y $\partial_i a \in L^\infty(\Omega)$ entonces

$$\int_\Omega a(x)\, u(x)\, \partial_i u(x)\, dx = -\frac{1}{2} \int_\Omega \partial_i a(x)\, u^2(x)\, dx \quad \forall u \in H^1_0(\Omega).$$

20. Sea $\Omega = \mathbb{R}^2 \times (0,1)$.

   (a) Demostrar que toda $u \in H_0^1(\Omega)$ verifica $\|u\|_{L^2(\Omega)} \leq \|\partial_3 u\|_{L^2(\Omega)}$.

   (b) Demostrar que la forma bilineal $a(\cdot\,,\cdot) : H_0^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega) \mapsto \mathbb{R}$, definida por
$$a(u,v) = \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v \, dx + \int_\Omega x_3 v \partial_3 u \, dx \quad \forall u, v \in H_0^1(\Omega),$$
   es continua y coerciva en $H_0^1(\Omega)$.

   (c) Sea $f \in L^2(\mathbb{R}^2)$ dada. Demostrar de manera razonada que existe una única $u \in H_0^1(\Omega)$ que verifica
$$\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v \, dx + \int_\Omega x_3 \, v \, \partial_3 u \, dx = \int_\Omega x_3 \, f(x_1, x_2) \, v(x) \, dx \quad \forall v \in H_0^1(\Omega).$$

   (d) Acotar la norma $\|\nabla u\|_{L^2(\Omega)^3}$ en función de $\|f\|_{L^2(\mathbb{R}^2)}$.

   (e) Caracterizar u como solución de un problema de contorno.

21. Para $\Omega = (-1,1) \times \mathbb{R}^2$ y $\beta \in \mathbb{R}$, se considera la forma bilineal continua $a(\cdot\,,\cdot) : H^1(\Omega) \times H^1(\Omega) \mapsto \mathbb{R}$, definida por
$$a(u,v) = 3\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v \, dx + \int_\Omega \sqrt{2(x_1+3)}\, u \, \partial_1 v \, dx - \beta \int_\Omega u \, v \, dx \quad \forall v \in H_0^1(\Omega).$$

   (a) Demostrar que $\|u\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq 2\|\partial_1 u\|_{L^2(\Omega)}^2$ para toda $u \in H_0^1(\Omega)$.

   (b) Demostrar que si $\beta < 2$ la forma bilineal es coerciva en $H_0^1(\Omega)$.

   (c) Probar que, si $\beta < 2$, para cada $f \in L^2(\Omega)$ existe una única $u \in H_0^1(\Omega)$ tal que
$$a(u,v) = \int_\Omega f v \, dx \quad \forall v \in H_0^1(\Omega).$$

   (d) Caracterizar u como solución de un problema de contorno.

22. Sean $\Omega = (-1,1)^N \subset \mathbb{R}^N$, $\gamma \in \mathbb{R}$ y $a(\cdot\,,\cdot) : H^1(\Omega) \times H^1(\Omega) \mapsto \mathbb{R}$, definida por
$$a(u,v) = \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v \, dx + \int_\Omega (x \cdot \nabla u) v \, dx + \gamma \int_\Omega uv \, dx \quad \forall u, v \in H_0^1(\Omega).$$

   (a) Demostrar la desigualdad de Poincaré en $H_0^1(\Omega)$.

   (b) Probar que, para $\gamma \geq -N/2$, $a(\cdot\,,\cdot)$ es coerciva en $H_0^1(\Omega)$.

   (c) Probar que la función $g : \mathbb{R}^N \mapsto \mathbb{R}$, dada por $g(x) = \sum_{i=1}^N |x_i|$ para cada $x \in \mathbb{R}^N$, pertenece a $H^1(\Omega)$.

   (d) Probar que, para cada $\gamma \geq -N/2$, existe una única u que verifica
$$a(u,v) = 0 \quad \forall v \in H_0^1(\Omega), \quad u \in g + H_0^1(\Omega).$$
   Hallar una estimación de $\|u\|_{H^1(\Omega)}$ en función de $\|g\|_{L^2(\Omega)}$ y $\|\nabla g\|_{L^2(\Omega)}$.

   (e) Caracterizar u como solución de un problema de contorno.

23. Sean $\Omega = B(0;1) \subset \mathbb{R}^N$, $\gamma \in \mathbb{R}$ y $a(\cdot\,,\cdot) : H^1(\Omega) \times H^1(\Omega) \mapsto \mathbb{R}$, definida por
$$a(u,v) = \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v \, dx + \int_\Omega |x|(x \cdot \nabla v) u \, dx + \gamma \int_\Omega uv \, dx \quad \forall u, v \in H^1(\Omega).$$

   (a) Probar que, para $\gamma > (N+1)/2$, $a(\cdot\,,\cdot)$ es coerciva en $H_0^1(\Omega)$.

   (b) Probar que la función $g : \mathbb{R}^N \mapsto \mathbb{R}$, dada por $g(x) = |x|$ para cada $x \in \mathbb{R}^N$, pertenece a $H^1(\Omega)$.

(c) Sea $f \in L^2(\Omega)$. Probar que para cada $\gamma > (N+1)/2$ existe una única u que verifica

$$a(u,v) = \int_\Omega f v \, dx \quad \forall v \in H_0^1(\Omega), \quad u \in g + H_0^1(\Omega).$$

Con $f(x) = |x|$ para cada $x \in \mathbb{R}^N$, hallar una estimación de $\|u\|_{H^1(\Omega)}$.

(d) Caracterizar u como solución de un problema de contorno.

24. Sean $\Omega = (-1,1) \times (-1,1)$, $K > 3$, $a(\cdot\,,\cdot) : H^1(\Omega) \times H^1(\Omega) \mapsto \mathbb{R}$ la forma bilineal continua definida por

$$a(u,v) = \int_\Omega (K\partial_1 u \partial_1 v + \partial_2 u \partial_2 v + x_1 v \partial_1 u - uv) \, dx \quad \forall u, v \in H^1(\Omega)$$

y g la función definida en Ω por $g(x_1,x_2) = x_2 \operatorname{sen} x_1$ si $x_1 > 0$, $g(x_1,x_2) = x_1$ si $x_1 \leq 0$.

(a) Demostrar que $g \in H^1(\Omega)$.

(b) Demostrar que $\|v\|_{L^2(\Omega)} \leq 2\|\partial_1 v\|_{L^2(\Omega)}$ para cada $v \in H_0^1(\Omega)$ y deducir que $a(\cdot\,,\cdot)$ es coerciva sobre $H_0^1(\Omega)$.

(c) Demostrar de manera razonada que existe una y sólo una función u que verifica

$$a(u,v) = \int_\Omega x_1 v \, dx \quad \forall v \in H_0^1(\Omega), \quad u \in g + H_0^1(\Omega).$$