ECUACIONES EN DERIVADAS PARCIALES Y ANÁLISIS FUNCIONAL

LA ECUACIÓN DE ONDAS UNIDIMENSIONAL

1. Se considera el problema

$$\begin{cases} u_{tt} - u_{xx} = 0, & t > 0,\ 0 < x < 1, \\ u(x,0) = f(x),\ u_t(x,0) = g(x), & 0 \le x \le 1, \\ u(0,t) = \alpha(t),\ u_x(1,t) = \beta(t), & t > 0. \end{cases}$$

   (a) Determinar las condiciones de compatibilidad necesarias para la existencia de solución en $C^2(\overline{Q})$, siendo $Q = (0,1) \times (0,+\infty)$.

   (b) Demostrar que el problema tiene a lo más una solución en $C^2(\overline{Q})$.

   (c) Admitiendo que existe la solución $u = u(x,t)$, determinar $u(1/2,1)$ en el caso en que $f \equiv g \equiv 0$, $\alpha(t) = t^3$ y $\beta(t) = 3t^2$.

2. Se considera el problema

$$\begin{cases} u_{tt} - u_{xx} = 0, & t > 0,\ 0 < x < 1, \\ u(x,0) = f(x),\ u_t(x,0) = g(x), & 0 \le x \le 1, \\ u(0,t) = \alpha(t),\ u(1,t) = \beta(t), & t > 0. \end{cases}$$

   Demostrar que, en las condiciones habituales de existencia y unicidad de solución, ésta depende continuamente de los datos en el sentido de la convergencia uniforme sobre compactos.

3. Supongamos que en el problema precedente se cumplen las condiciones habituales de existencia y unicidad de solución. Determinar la regularidad adicional y las relaciones de compatibilidad adicionales que han de cumplir los datos para que la solución verifique $u \in C^3(\overline{Q})$, donde $Q = (0,1) \times (0,+\infty)$.

4. Se considera el problema

$$\begin{cases} u_{tt} - u_{xx} = 0, & t > 0,\ 0 < x < 1, \\ u(x,0) = f(x),\ u_t(x,0) = g(x), & 0 \le x \le 1, \\ u_x(0,t) = p(t),\ u_x(1,t) = q(t), & t > 0. \end{cases}$$

   (a) Determinar las condiciones de compatibilidad necesarias para la existencia de solución en $C^2(\overline{Q})$, siendo $Q = (0,1) \times (0,+\infty)$.

   (b) Demostrar que el problema tiene a lo más una solución en $C^2(\overline{Q})$.

   (c) Indicar en qué modo puede construirse la solución del problema cuando las condiciones de compatibilidad son satisfechas.

5. Se considera el problema de Cauchy para la ecuación de ondas unidimensional

$$\begin{cases} u_{tt} - u_{xx} = 0, & t > 0,\ x \in \mathbb{R}, \\ u(x,0) = f(x),\ u_t(x,0) = g(x), & x \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

   Supongamos que f y g son idénticamente nulas fuera del intervalo $[-1,1]$. ¿ En qué región de $\mathbb{R} \times [0,+\infty)$ puede asegurarse que la solución es idénticamente nula ?

6. Obtener la solución del problema de Cauchy para la ecuación unidimensional de ondas no homogénea

$$\begin{cases} u_{tt} - u_{xx} = e^x, & t > 0,\ x \in \mathbb{R}, \\ u(x,0) = 0,\ u_t(x,0) = 0, & x \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

7. Se considera el problema

$$\begin{cases} u_{tt} - c^2 u_{xx} = 0, & t > 0,\ x > 0, \\ u(x,0) = f(x),\ u_t(x,0) = g(x), & x \ge 0, \\ u(0,t) = \alpha(t), & t > 0. \end{cases}$$

   Establecer las condiciones necesarias de compatibilidad para la existencia de solución en $C^2(\overline{Q})$, siendo $Q = \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+$. Suponiendo que se cumplen estas condiciones, construir la solución.

8. Se considera el problema de valores iniciales - valores de contorno

$$\begin{cases} u_{tt} - u_{xx} = 0, & t > 0,\ x > 0, \\ u(x,0) = f(x),\ u_t(x,0) = g(x), & x \geq 0, \\ u_x(0,t) - 2u(0,t) = 0, & t > 0. \end{cases}$$

(a) Establecer la regularidad que deben tener f y g y las condiciones de compatibilidad necesarias para que el problema posea solución $u \in C^2([0,+\infty) \times [0,+\infty))$.

(b) Calcular dicha solución en el caso en que $f(x) = e^{2x}$ y $g(x) = x^2$.

EL MÉTODO DE SEPARACIÓN DE VARIABLES

1. Resolver por el método de separación de variables el siguiente problema de contorno

$$\begin{cases} u_{xx} + u_{yy} + 2u_x + 2u_y + u = 0, & x \in \Omega, \\ u(x,y) = u_0(x,y), & x \in \partial\Omega, \end{cases}$$

donde $\Omega = (0,1) \times (0,\pi/2)$ y $u_0(x,y) = x^2 e^{-y}(\operatorname{sen} 2y + \operatorname{sen} 6y)$.

2. Resolver por el método de separación de variables el problema de contorno

$$\begin{cases} u_{xx} + u_{yy} = 0, & x \in \Omega, \\ u(x,y) = u_0(x,y), & x \in \partial\Omega, \end{cases}$$

donde $\Omega = (0,L) \times (0,L)$ y $u_0(x,y) = \operatorname{sen}(\pi y/L) - (2x/L)\operatorname{sen}(2\pi y/L)$.

3. Resolver por el método de separación de variables el problema de contorno

$$\begin{cases} u_{xx} + 2u_y + u_{yy} = 0, & x \in \Omega, \\ u(x,y) = u_0(x,y), & x \in \partial\Omega, \end{cases}$$

donde $\Omega = (0,1) \times (0,\pi)$ y $u_0(x,y) = xe^{-y}(\operatorname{sen} y + \operatorname{sen} 3y)$.

4. Resolver por el método de separación de variables los siguientes problemas de Cauchy-Dirichlet para la ecuación de ondas homogénea, indicando la regularidad de las soluciones formales que se obtienen (c es una constante positiva):

a) $\begin{cases} u_{tt} = c^2 u_{xx}, & t > 0,\ 0 < x < \pi, \\ u(x,0) = 0,\ u_t(x,0) = 8\operatorname{sen}^2 x,\ 0 \leq x \leq \pi, \\ u(0,t) = u(\pi,t) = 0, & t > 0, \end{cases}$ b) $\begin{cases} u_{tt} = c^2 u_{xx}, & t > 0,\ 0 < x < 1, \\ u(x,0) = 0,\ u_t(x,0) = x\operatorname{sen} x,\ 0 \leq x \leq 1, \\ u(0,t) = u(1,t) = 0, & t > 0, \end{cases}$

c) $\begin{cases} u_{tt} = c^2 u_{xx}, & t > 0,\ 0 < x < \pi, \\ u(x,0) = x + \operatorname{sen} x,\ u_t(x,0) = 0,\ 0 \leq x \leq \pi, \\ u(0,t) = 0,\ u_x(\pi,t) = 0, & t > 0, \end{cases}$ d) $\begin{cases} u_{tt} = c^2 u_{xx}, & t > 0,\ 0 < x < \pi, \\ u(x,0) = \cos x,\ u_t(x,0) = 0,\ 0 \leq x \leq \pi, \\ u_x(0,t) = u_x(\pi,t) = 0, & t > 0. \end{cases}$

5. Demuéstrese que $\{ \sqrt{2}\operatorname{sen}((n+\frac{1}{2})\pi x);\ n \geq 0 \}$ es una base ortonormal de $L^2(0,1)$.

Indicación: Dada $f \in L^2(0,1)$, considérese la función $g(t) = \begin{cases} f(2t) & \text{si} \quad t \in (0,1/2), \\ f(2(1-t)) & \text{si} \quad t \in (1/2,1). \end{cases}$

6. Se considera el problema

$$\begin{cases} u_t - u_{xx} + 2u_x = 0, & 0 < x < 1,\ t > 0, \\ u(x,0) = f(x), & 0 \leq x \leq 1, \\ u(0,t) = 0,\ u(1,t) = u_x(1,t), & t \geq 0, \end{cases} \tag{1}$$

con $f \in C^2([0,1])$. Se desea encontrar una solución u de (1) tal que

$$u \in C^2([0,1] \times (0,\infty)) \cap C^0([0,1] \times [0,\infty)) \quad \text{y} \quad u_x \in C^0([0,1] \times [0,\infty)). \tag{2}$$

(a) Demostrar que (1) posee a lo más una solución que verifica (2).

(b) Determinar las condiciones de compatibilidad que ha de satisfacer f para que (1) posea una solución que verifica (2).

(c) Obtener la solución formal u de (1) mediante el método de separación de variables.

(d) Demostrar que $u \in C^\infty([0,1] \times (0,\infty))$ y comprobar que, si f satisface las condiciones de compatibilidad obtenidas en el apartado anterior, entonces la solución formal verifica (2) y es una verdadera solución de (1).

7. Se considera el siguiente problema

$$\begin{cases} u_t = u_{xx} + 4u_x + u, & 0 < x < \pi,\ t > 0, \\ u(x,0) = f(x), & 0 \leq x \leq \pi, \\ u(0,t) = 0,\ 2u(\pi,t) = -u_x(\pi,t), & t \geq 0, \end{cases} \tag{3}$$

con $f \in C^2([0,\pi])$ dada, verificando $f(0) = 0$ y $f'(\pi) + 2f(\pi) = 0$.

(a) Obtener la solución formal u de (3) mediante el método de separación de variables.

(b) Demostrar que, bajo las condiciones anteriores sobre f, la solución formal verifica

$$u \in C^\infty([0,\pi)] \times (0,\infty)) \cap C^0([0,\pi] \times [0,\infty)), \quad u_x \in C^0([0,\pi] \times (0,\infty)).$$

8. Se considera el siguiente problema

$$\begin{cases} u_t = u_{xx} + \beta u, & 0 < x < \pi,\ t > 0, \\ u(x,0) = f(x), & 0 \leq x \leq \pi, \\ u_x(0,t) = u_x(\pi,t) = 0, & t \geq 0, \end{cases} \tag{4}$$

con $f \in L^2(0,\pi)$ y $\beta \in \mathbb{R}$ dadas.

(a) Obtener la solución formal u de (4) mediante el método de separación de variables y demostrar que, de hecho, $u \in C^\infty([0,\pi] \times (0,+\infty))$.

(b) Demostrar que, si $f \in C^3([0,\pi])$ y satisface $f'(0) = f'(\pi) = 0$, entonces la solución formal encontrada es solución una clásica de (4) en $[0,\pi] \times [0,+\infty)$ (es decir, demuéstrese que u, u_x, u_t, y u_{xx} pertenecen a $C^0([0,\pi] \times [0,+\infty))$ y que las igualdades que hay en (4) se verifican puntualmente).

(c) Determinar u en el caso particular en que $f(x) = \cos 3x$.

9. Calcular la solución formal mediante el método de separación de variables de los siguientes problemas de Cauchy-Dirichlet para la *ecuación del telegrafista*, donde a y c son constantes positivas dadas:

$$\text{a)} \begin{cases} u_{tt} + 2au_t = c^2 u_{xx},\ t > 0,\ 0 < x < \pi, \\ u(x,0) = 0,\ u_t(x,0) = g(x), \quad 0 \leq x \leq \pi, \\ u(0,t) = u(\pi,t) = 0, \quad t > 0, \end{cases} \quad \text{b)} \begin{cases} u_{tt} + 2u_t = u_{xx},\ t > 0,\ 0 < x < \pi, \\ u(x,0) = f(x),\ u_t(x,0) = 0, \quad 0 \leq x \leq \pi, \\ u_x(0,t) = u_x(\pi,t) = 0, \quad t > 0. \end{cases}$$

Establecer las relaciones de compatibilidad que deben verificar f y g para que la solución formal pertenezca a $C^2([0,\pi] \times [0,\infty))$. Probar que, cuando estas condiciones se satisfacen, la solución formal tiene esta regularidad. Analizar el problema de la unicidad de solución en $C^2([0,\pi] \times [0,\infty))$.

10. Calcular la solución formal mediante el método de separación de variables de los siguientes problemas de Cauchy-Dirichlet, donde c es una constante positiva y $b \in \mathbb{R}$:

$$\text{a)} \begin{cases} u_{tt} + b^2 u = c^2 u_{xx},\ t > 0,\ 0 < x < 1, \\ u(x,0) = f(x),\ u_t(x,0) = 0,\ 0 \leq x \leq 1, \\ u(0,t) = u(1,t) = 0, \quad t > 0, \end{cases} \text{b)} \begin{cases} u_{tt} - u_{xx} + 2u_t + u = 0,\ t > 0,\ 0 < x < 1, \\ u(x,0) = x - x^2,\ u_t(x,0) = x^2 - x,\ 0 \leq x \leq 1, \\ u(0,t) = u(1,t) = 0, \quad t > 0. \end{cases}$$

Establecer las relaciones de compatibilidad que debe verificar f en el caso a) para que la solución pueda pertenecer a $C^2([0,1] \times [0,\infty))$ Probar que, cuando estas condiciones se satisfacen, la solución formal tiene esta regularidad. Establecer la validez de la solución formal en el caso b). Analizar el problema de la unicidad de solución en $C^2([0,1] \times [0,\infty))$.

11. Resolver por el método de separación de variables los problemas siguientes relativos a la ecuación del calor:

$$\text{a)}\begin{cases} u_t - u_{xx} = 0, & t > 0,\, 0 < x < 1, \\ u(x,0) = 1 - x^2, & 0 \le x \le 1, \\ u_x(0,t) = u(1,t) = 0, & t > 0, \end{cases} \qquad \text{b)}\begin{cases} u_t - 4u_{xx} = 0, & t > 0,\, 0 < x < 1, \\ u(x,0) = x^2(1-x), & 0 \le x \le 1, \\ u(0,t) = u(1,t) = 0, & t > 0. \end{cases}$$

$$\text{c)}\begin{cases} u_t - u_{xx} = 0, & t > 0,\, 0 < x < \pi, \\ u(x,0) = \operatorname{sen}^2 x, & 0 \le x \le \pi, \\ u(0,t) = 0,\, u(\pi,t) = 0, & t > 0, \end{cases} \qquad \text{d)}\begin{cases} u_t - u_{xx} = 0, & t > 0,\, 0 < x < \pi, \\ u(x,0) = x(\pi - x), & 0 \le x \le \pi, \\ u_x(0,t) = u_x(\pi,t) = 0, & t > 0. \end{cases}$$

12. Resolver por el método de separación de variables los siguientes problemas no homogéneos:

$$\text{a)}\begin{cases} u_{tt} - u_{xx} = x^2, & t > 0,\, 0 < x < 1, \\ u(x,0) = x,\, u_t(x,0) = 0,\, 0 \le x \le \pi, \\ u(0,t) = 0,\, u(1,t) = 1, & t > 0, \end{cases} \qquad \text{b)}\begin{cases} u_t - u_{xx} = 0, & t > 0,\, 0 < x < 2, \\ u(x,0) = 0, & 0 \le x \le 2, \\ u(0,t) = 0,\, u_x(2,t) = 1, & t > 0, \end{cases}$$

$$\text{c)}\begin{cases} u_t - u_{xx} = 0, & t > 0,\, 0 < x < l, \\ u(x,0) = \operatorname{sen}\left(\dfrac{\pi x}{2l}\right), & 0 \le x \le l, \\ u(0,t) = 0,\, u(l,t) = 1, & t > 0, \end{cases} \qquad \text{d)}\begin{cases} u_t - u_{xx} + u = 1, & t > 0,\, 0 < x < 1, \\ u(x,0) = \operatorname{sen}(\pi x) + 1,\, 0 \le x \le 1, \\ u(0,t) = 1,\, u(1,t) = 1, & t > 0. \end{cases}$$

13. Se considera el problema de Cauchy-Dirichlet

$$\begin{cases} u_t - u_{xx} + 2u_x = 1, & t > 0,\, 0 < x < 1, \\ u(x,0) = f(x), & 0 \le x \le 1, \\ u(0,t) = u(1,t) = t, & t > 0, \end{cases} \tag{5}$$

con $f \in C^3([0,1])$ tal que $f(0) = f(1) = 0$, $f''(0) = 2f'(0)$ y $f''(1) = 2f'(1)$.

(a) Mediante el método de separación de variables, encontrar una solución formal de (5).

(b) Demostrar que la solución formal hallada pertenece a $C^\infty(Q)$ y es solución clásica de (5) en Q, donde $Q = (0,1) \times (0,+\infty)$.

14. Se considera el siguiente problema

$$\begin{cases} u_t - u_{xx} + u = x, & 0 < x < \pi,\, t > 0, \\ u(x,0) = f(x), & 0 \le x \le \pi, \\ u(0,t) = 0,\, u_x(\pi,t) = 1, & t \ge 0, \end{cases} \tag{6}$$

con $f \in L^2(0,\pi)$ dada.

(a) Obtener la solución formal de (6) mediante el método de separación de variables y demostrar que pertenece de hecho a $C^\infty([0,\pi] \times (0,+\infty))$.

(b) Demostrar que, si $f(x) = -\operatorname{sen} x$, entonces la solución formal encontrada u, así como u_x, u_t y u_{xx}, pertenecen a $C^0([0,\pi] \times [0,+\infty))$.

15.* Sea $B_a = B(0;a) \subset \mathbb{R}^2$. Se desea resolver el problema

$$\begin{cases} -\Delta u = 0 & x \in B_a, \\ u = g & x \in \partial B_a, \end{cases} \tag{7}$$

donde $g \in C^0(\partial B_a)$.

(a) Probar que en coordenadas polares ($x_1 = r\cos\theta$, $x_2 = r\operatorname{sen}\theta$), el problema (7) se escribe

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial u}{\partial r} + \dfrac{1}{r^2}\dfrac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} = 0, & r \in (0,a),\, \theta \in [0,2\pi), \\ u(a,\theta) = f(\theta) := g(a\cos\theta, a\operatorname{sen}\theta), & \theta \in [0,2\pi), \\ u(r,\theta + 2\pi) = u(r,\theta), & r \in (0,a),\, \theta \in [0,2\pi). \end{cases} \tag{8}$$

(b) Resolver el problema (8) mediante el método de separación de variables (se recuerda que las ecuaciones de Euler: $a_0 r^2 R'' + a_1 r R' + a_2 R = 0$ tienen soluciones de la forma $R(r) = r^\alpha$).

(c) Obtener la fórmula de representación de Poisson:

$$u(r,\theta) = \frac{a^2 - r^2}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{f(t)}{a^2 - 2ar\cos(\theta - t) + r^2} dt \quad \forall r < a$$

(se recuerda que $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} z^n = \frac{1}{1-z}$ para $|z| < 1$).

TEORIA ESPECTRAL DE OPERADORES COMPACTOS

1. Hallar el operador adjunto del operador identidad Id. : $H_0^1(0,1) \mapsto L^2(0,1)$.

2. Hallar el operador adjunto del operador derivación de $H_0^1(0,1)$ en $L^2(0,1)$. Hallar el núcleo y el rango del operador de derivación y de su adjunto. Comprobar las relaciones de ortogonalidad que se tienen entre estos subespacios.

3. Sea $T : L^2(0,1) \mapsto L^2(0,1)$, definido por

$$(Tx)(t) = tx(t) \quad \text{c.p.d. } t \in (0,1), \quad \forall x \in L^2(0,1).$$

Probar que $T \in \mathcal{L}(L^2(0,1))$ es autoadjunto y no tiene autovalores. Hallar su espectro.

4. Se define el operador $T : C^0([0,1]) \mapsto C^0([0,1])$ como sigue:

$$(Tx)(t) = x(0) + tx(1) \quad \forall t \in [0,1], \quad \forall x \in C^0([0,1]).$$

Probar que $T \in \mathcal{K}(C^0([0,1]))$. Hallar su espectro, sus autovalores y los autoespacios asociados.

5. Se considera el operador $T : L^2(0,1) \mapsto L^2(0,1)$, definido por

$$(Tx)(t) = \int_0^1 (1 + \cos(\pi t) \operatorname{sen}(\pi s)) x(s) ds \quad \text{c.p.d. } t \in [0,1], \quad \forall x \in L^2(0,1).$$

(a) Probar que las ecuaciones $(\text{Id.} - T)x = 0$ y $(\text{Id.} - T^*)x = 0$ tienen soluciones no triviales en $L^2(0,1)$.

(b) ¿ Qué condiciones debe verificar $y \in L^2(0,1)$ para que la ecuación $(I - T)x = y$ tenga solución en $L^2(0,1)$?

6. Se considera el operador $T : C^0([0,1]) \mapsto C^0([0,1])$, definido como

$$(Tx)(t) = 2\int_0^1 x(s) ds - x(0)t \quad \forall t \in [0,1], \quad \forall x \in C^0([0,1]).$$

(a) Demostrar que $T \in \mathcal{L}(C^0([0,1]))$ y es compacto.

(b) Hallar el espectro y los autovalores de T, así como los autoespacios asociados y la dimensión de éstos.

7. (a) Se considera el operador $T : L^2(-\pi,\pi) \mapsto L^2(-\pi,\pi)$, definido por

$$(Tx)(t) = \int_{-\pi}^{\pi} (\operatorname{sen} s + \operatorname{sen} t) x(s) ds \qquad \text{c.p.d. } t \in (-\pi,\pi), \forall x \in L^2(-\pi,\pi).$$

Demostrar que T satisface las hipótesis del teorema de Hilbert-Schmidt.

(b) Hallar el espectro y los autovalores del operador T definido en el apartado anterior. Determinar los espacios H_n que se obtienen al aplicar el teorema de Hilbert-Schmidt.

8. Se considera el operador $T:\, C^0([-1,1]) \mapsto C^0([-1,1])$, definido como

$$(Tx)(t) = \int_{-1}^{1} x(s)ds + x(1)t^3 \quad \forall t \in [-1,1], \quad \forall x \in C^0([-1,1]).$$

   (a) Demostrar que $T \in \mathcal{L}(C^0([-1,1]))$ y es compacto.

   (b) Hallar el espectro y los autovalores de T, así como los autoespacios asociados y la dimensión de éstos.

9. Se considera el operador $T:\, C^0([0,1]) \mapsto C^0([0,1])$, definido como

$$(Tx)(t) = \int_{0}^{1} x(s)ds \quad \forall t \in [0,1], \quad \forall x \in C^0([0,1]).$$

   Probar que $T \in \mathcal{K}(C^0([0,1]))$. Hallar su espectro, sus autovalores y los autoespacios asociados.

10. Se considera el operador $T:\, L^2(0,1) \mapsto L^2(0,1)$, definido por

$$(T\phi)(t) = \int_{0}^{1} K(t,s)\phi(s)ds \quad \text{c.p.d. } t \in (0,1), \quad \forall \phi \in L^2(0,1),$$

   donde

$$K(t,s) = \begin{cases} t(1-s) & \text{si } 0 \le t \le s \le 1, \\ s(1-t) & \text{si } 0 \le s \le t \le 1. \end{cases}$$

   Hallar los valores propios de T y los autoespacios asociados.

11. Se considera el operador $T:\, L^2(0,\pi) \mapsto L^2(0,\pi)$ definido por

$$(Tx)(t) = \int_{0}^{\pi} K(t,s)x(s)ds \quad \text{c.p.d. } t \in (0,\pi), \quad \forall x \in L^{(}0,\pi),$$

   donde

$$K(t,s) = \begin{cases} \operatorname{sen} t \cos s & \text{si } 0 \le s \le t \le \pi \\ \operatorname{sen} s \cos t & \text{si } 0 \le t \le s \le \pi \end{cases}$$

   (a) Probar que T es un operador compacto y autoadjunto en $L^2(0,\pi)$.

   (b) Hallar los valores propios de T y los subespacios asociados.

   (c) Sea $y(t) = \operatorname{sen}(t/2)$. Para cada $\lambda \in \mathbb{R}$, discutir la existencia y unicidad de solución de

$$x - \lambda T x = y \quad x \in L^2(0,\pi), \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$