ECUACIONES EN DERIVADAS PARCIALES Y ANÁLISIS FUNCIONAL

Asignatura troncal, Cuarto Curso

Licenciatura de Matemáticas

Facultad de Matemáticas

Universidad de Sevilla

Tabla de contenidos

Introducción

Esta asignatura constituye una continuación de la asignatura *Análisis Funcional* de cuarto curso. En ella se pretende ofrecer una introducción al estudio teórico de las ecuaciones en derivadas parciales (EDPs). Se ha intentado cubrir aspectos de la teoría clásica y de la teoría moderna. En relación con ésta, ha sido preciso incluir algunos resultados de carácter abstracto (propios del Análisis Funcional): teorema de Lax-Milgram, teoría elemental de operadores lineales en espacios de Banach, teoría espectral, etc.

El énfasis principal se ha puesto en las ecuaciones de Poisson, del calor y de ondas (las representantes "canónicas" de las EDPs lineales de segundo orden). Se ha intentado aclarar que, para cada una de ellas, tiene sentido considerar problemas de naturaleza distinta. En la medida de lo posible, se presentan y demuestran resultados de existencia, unicidad y dependencia continua respecto de los datos que, en algunos casos, son constructivos. También en la medida de lo posible, se indica el papel que juegan las EDPs en algunas aplicaciones.

Para cursar esta asignatura, resulta imprescindible haber cursado y superado las asignaturas *Ecuaciones Diferenciales Ordinarias* (troncal de primer ciclo) y *Análisis Funcional* (troncal de segundo ciclo). Se recomienda además haber cursado las asignaturas de primer ciclo siguientes: *Análisis Matemático I y II*, *Elementos de Análisis Matemático*, *Ampliación de la Teoría de Funciones de Varias Variables*, *Ampliación de Ecuaciones Diferenciales* y *Variable Compleja y Análisis de Fourier*.

Las asignaturas optativas *Ampliación de Ecuaciones en Derivadas Parciales* y *Ecuaciones en Derivadas Parciales de Evolución* constituyen continuaciones naturales de este curso.

Notación y abreviaturas

EDP: ecuación en derivadas parciales.

EDO: ecuación diferencial ordinaria.

$\mathbb{R}$: cuerpo de los números reales.

$\mathbb{R}_+$: conjunto de los números reales positivos.

$\mathbb{R}^N_+$: el conjunto $\mathbb{R}^{N-1} \times \mathbb{R}_+$

Ω, G, U, $\mathcal{O}$: abiertos de $\mathbb{R}^N$.

$\partial\Omega$: frontera del abierto Ω.

$n(x)$: vector normal unitario en $x \in \partial\Omega$, generalmente exterior a Ω.

$d\Gamma$: elemento de integración sobre $\partial\Omega$ (véase el Apéndice al tema 2).

1_G: función característica de G; vale 1 en G y 0 en su complementario.

δ_{ij} : *delta de Kronecker*; $\delta_{ij} = 1$ si $i = j$, $\delta_{ij} = 0$ si no.

$C^0(U)$: espacio de las funciones $\varphi : U \mapsto \mathbb{R}$ que son continuas.

$C^k(U)$: subespacio de $C^0(U)$ formado por las funciones k veces continuamente diferenciables.

$C^\infty(U)$: intersección de todos los $C^k(U)$ con $k \geq 1$.

$C^\omega(U)$: subespacio de $C^\infty(U)$ formado por las funciones analíticas.

sop φ: soporte de la función φ; se trata de la adherencia del conjunto de puntos donde φ no se anula.

$C^k_c(\Omega)$: subespacio de $C^k(\Omega)$ formado por las funciones de soporte compacto contenido en Ω.

$\mathcal{D}(\Omega)$: subespacio de $C^\infty(\Omega)$ formado por las funciones de soporte compacto contenido en Ω.

$C^k_c(\overline{\Omega})$: subespacio de $C^k(\overline{\Omega})$ formado por las funciones de soporte compacto (contenido en $\overline{\Omega}$).

$\mathcal{D}(\overline{\Omega})$: subespacio de $C^\infty(\overline{\Omega})$ formado por las funciones de soporte compacto.

c.p.d.: "casi por doquier"; se usa para indicar abreviadamente que una propiedad se verifica en todo punto salvo a lo sumo en un conjunto de medida nula.

$N(A)$ y $R(A)$, con $A \in \mathcal{L}(H; G)$: el núcleo y el rango de un operador dado; se tiene que $N(A) = \{\, h \in H : Ah = 0 \,\}$ y $R(A) = \{\, Ah : h \in H \,\}$.

Denotaremos $|\cdot|$ la norma Euclídea de $\mathbb{R}^N$ y $B(x_0; r)$ (resp. $\overline{B}(x_0; r)$) la bola abierta (resp. cerrada) de centro x_0 y radio r. En ocasiones, dado un espacio normado X, B_X denotará la correspondiente bola unidad cerrada.

Tema 1

Generalidades. Ecuaciones en derivadas parciales lineales de segundo orden

De forma imprecisa, diremos que una ecuación en derivadas parciales (en lo que sigue una EDP) es una igualdad en la que la incógnita es una función de dos o más variables independientes y en la que aparecen derivadas parciales de ésta. Se denomina *orden* de la EDP al mayor de todos los órdenes de estas derivadas.

Por ejemplo, si aceptamos que $u = u(x_1, x_2)$ es una función desconocida (la incógnita de la ecuación), entonces

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} = 0, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial u}{\partial x_1} - \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial x_1} - \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} = u(1-u)$$

son EDPs de segundo orden (como veremos, se trata de EDPs de gran importancia). Por otra parte,

$$\frac{\partial^4 u}{\partial x_1^4} + 2\frac{\partial^4 u}{\partial^2 x_1^2 \partial x_2^2} + \frac{\partial^4 u}{\partial x_2^4} = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial x_1} - \frac{\partial^3 u}{\partial x_1 \partial x_2^2} + \frac{\partial^4 u}{\partial x_2^4} = 0$$

y

$$\operatorname{sen} u + \exp\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}\right) + \frac{\partial^4 u}{\partial x_1^2 \partial x_2^2} = 0$$

son EDPs de cuarto orden.

En este curso, nos centraremos casi exclusivamente en EDPs de segundo orden.

1.1 Definiciones fundamentales

Definición 1.1 *Sea $N \geq 1$ un entero. Una EDP de segundo orden en las N variables independientes $x_1, x_2, \dots x_N$ es una expresión de la forma*

$$F\left(x_1, \dots x_N, u, \frac{\partial u}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial u}{\partial x_N}, \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}, \dots, \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}, \dots, \frac{\partial^2 u}{\partial x_N^2}\right) = 0, \tag{1.1}$$

donde $F : \mathcal{O} \subset \mathbb{R}^{N^2+2N+1} \mapsto \mathbb{R}$ *es una función dada (aquí* $\mathcal{O}$ *es un abierto no vacío). A la incógnita* u *se le suele llamar también variable dependiente.*

Por simplicidad, pondremos habitualmente

$$x = (x_1, \dots, x_N), \quad u = u(x), \quad \nabla u = Du = \left(\frac{\partial u}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial u}{\partial x_N} \right)$$

(el *gradiente* de u) y

$$D^2 u = \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}, \dots, \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}, \dots, \frac{\partial u}{\partial x_N} \right)$$

(el *Hessiano* de u). Con esta notación, la EDP (1.1) se escribe

$$F(x, u, Du, D^2 u) = 0. \tag{1.2}$$

A diferencia de lo que sucede con las ecuaciones diferenciales ordinarias, no es posible desarrollar una teoría general de EDPs, ni siquiera si nos restringimos a las de segundo orden. Lo que sí pueden ser desarrolladas son teorías particulares, aplicables a determinados "tipos" de EDPs.

Con frecuencia, se usa otra notación para designar las variables x_i y la incógnita u. Por ejemplo, cuando $N = 2$, es usual ecribir

$$F(x, y, u, u_x, u_y, \dots) = 0.$$

En muchas ocasiones la notación asignada está motivada por el papel que juega la EDP considerada en las aplicaciones.

El concepto de solución de una EDP es de importancia fundamental. El análisis de dicho concepto ha conducido al desarrollo de buena parte de las Matemáticas: Análisis de Fourier, teoría de distribuciones, espacios de Sobolev, etc. Algunas de las nociones relacionadas con este desarrollo serán consideradas en los últimos temas de este curso.[1]

Por el momento, nos limitaremos a introducir el siguiente concepto de solución:

Definición 1.2 *Sean* $U \subset \mathbb{R}^N$ *un abierto no vacío y* $u : U \mapsto \mathbb{R}$ *una función. Se dice que* u *es solución clásica de* (1.2) *en* U *si se cumplen las propiedades siguientes:*

1. $u \in C^2(U)$,
2. $(x, u(x), Du(x), D^2 u(x)) \in \mathcal{O}$ *para cada* $x \in U$,
3. $F(x, u(x), Du(x), D^2 u(x)) = 0$ *para cada* $x \in U$.

No todas las EDPs resultan tener el mismo interés. Algunas de ellas son interesantes exclusivamente desde el punto de vista académico. Por el contrario, otras poseen origen en la formulación de problemas propios de la Física, otra Ciencia de la Naturaleza o incluso otro campo de las Matemáticas y por tanto tienen mayor relevancia y merecen ser analizadas con mayor atención.

De todas las EDPs de segundo orden, las más importantes son las EDPs lineales.

[1] Un estudio más profundo se llevará a cabo en las asignaturas optativas *Ampliación de Ecuaciones en Derivadas Parciales* y *Ecuaciones en Derivadas Parciales de Evolución*.

Definición 1.3 *Una EDP lineal de segundo orden en las variables independientes $x_1, \dots, x_N$ es una EDP de la forma*

$$\sum_{i,j=1}^{N} a_{ij}(x)\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^{N} b_i(x)\frac{\partial u}{\partial x_i} + c(x)u = f(x), \tag{1.3}$$

donde las a_{ij}, b_i, c, f son funciones definidas en Ω y Ω es un abierto de $\mathbb{R}^N$. Las funciones a_{ij}, b_i, c se denominan coeficientes de (1.3) *y f se denomina el término independiente (o segundo miembro). Si $f \equiv 0$, se dice que la ecuación es homogénea. Si las a_{ij}, b_i, c son constantes, se dice que* (1.3) *es una EDP de coeficientes constantes.*

Observación 1.1 Supondremos siempre en (1.3) que $a_{ij} \equiv a_{ji}$ para cada i y cada j (lo que no es restrictivo). Dado un abierto $U \subset \Omega$ no vacío, el conjunto de todas las soluciones clásicas de (1.3) en U es una variedad lineal de $C^2(U)$.[2]
■

Observación 1.2 Otras EDPs de segundo orden muy importantes son las llamadas *semilineales*. Se trata de las que tienen la forma

$$\sum_{i,j=1}^{N} a_{ij}(x)\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} = f(x, u, Du) \tag{1.4}$$

(lineales en las derivadas de segundo orden). También suelen considerarse EDPs con la estructura siguiente

$$\sum_{i,j=1}^{N} a_{ij}(x, u, Du)\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} = f(x, u, Du), \tag{1.5}$$

a las que se llama EDPs *casi-lineales*. ■

En estas Notas, pondremos énfasis sobre todo en el análisis de las ecuaciones de Laplace y Poisson, la ecuación del calor y la ecuación de ondas. En todos los casos, se trata de EDPs lineales de segundo orden de coeficientes constantes.

Al igual que sucede con las ecuaciones diferenciales ordinarias, en la práctica las EDPs aparecen acompañadas (o "completadas") de condiciones adicionales que han de ser satisfechas por la solución. Con frecuencia, estas condiciones (y también la propia EDP) están motivadas por leyes que rigen para diversos fenómenos de naturaleza física, química, biológica, etc.

Veremos a continuación que, ya en el caso de una EDP lineal de segundo orden de coeficientes constantes, el comportamiento frente a las mismas condiciones adicionales varía drásticamente de una EDP a otra. Así, supongamos dada una función $\varphi \in C^1(\mathbb{R})$ y consideremos los cuatro problemas siguientes:

Problema 1.1 Hallar una función $u \in C^2(\mathbb{R}^2)$ tal que

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_2} = 0, & x \in \mathbb{R}^2, \\ u(x_1, 0) = 0, & x_1 \in \mathbb{R}, \\ \dfrac{\partial u}{\partial x_2}(x_1, 0) = \varphi(x_1), & x_1 \in \mathbb{R}. \end{cases} \tag{1.6}$$

[2] Si $f \equiv 0$, este conjunto es un subespacio vectorial de $C^2(U)$.

Problema 1.2 Hallar una función $u \in C^2(\mathbb{R}^2)$ que verifique la EDP

$$\frac{\partial u}{\partial x_2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} = 0, \quad x \in \mathbb{R}^2, \tag{1.7}$$

junto con las condiciones adicionales que aparecen en (1.6) para $x_2 = 0$.

Problema 1.3 Hallar $u \in C^2(\mathbb{R}^2)$ tal que se tenga

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} = 0, \quad x \in \mathbb{R}^2, \tag{1.8}$$

junto con las dos últimas igualdades de (1.6).

Problema 1.4 Hallar $u \in C^2(\mathbb{R}^2)$ tal que se tenga

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} = 0, \quad x \in \mathbb{R}^2, \tag{1.9}$$

junto con las dos últimas igualdades de (1.6).

Observemos en primer lugar que, si u es solución del problema 1.1, entonces $\varphi'(x_1) \equiv 0$, es decir, φ es constante. Esta restricción sobre φ se llama una *condición de compatibilidad*. Por otra parte, si $\varphi \equiv C$, entonces (1.6) posee infinitas soluciones. En efecto, todas las funciones de la forma $u(x) = Cx_2 + \psi(x_2)$, con $\psi \in C^2(\mathbb{R}^2)$ tal que $\psi(0) = \psi'(0) = 0$, son soluciones de (1.6). En resumidas cuentas, para el problema 1.1, no siempre existe solución y además, caso de existir, no es única.

En segundo lugar, observemos que si u es solución del problema 1.2, necesariamente $\varphi \equiv 0$. En efecto, deberíamos tener en tal caso

$$\varphi(x_1) = \frac{\partial u}{\partial x_2}(x_1, 0) = \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}(x_1, 0) = 0 \quad \forall x_1 \in \mathbb{R}.$$

Así, el problema 1.2 posee solución si y sólo si $\varphi \equiv 0$. Se puede demostrar además que, cuando $\varphi \equiv 0$, la única solución es $u \equiv 0$.

En el caso del problema 1.3, si u es solución, entonces la función v, definida por

$$v(x_1, x_2) = \int_0^{x_1} \frac{\partial u}{\partial x_2}(s, 0)\, ds - \int_0^{x_2} \frac{\partial u}{\partial x_1}(x_1, t)\, dt \quad \forall (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2,$$

pertenece a $C^1(\mathbb{R}^2)$ y satisface junto con u las relaciones

$$\frac{\partial v}{\partial x_2} = -\frac{\partial u}{\partial x_1}, \quad \frac{\partial v}{\partial x_1} = \frac{\partial u}{\partial x_2}$$

en $\mathbb{R}^2$. Pero éstas son las *condiciones de Cauchy-Riemann* en $\mathbb{R}^2$ y por tanto u es una función analítica real en $\mathbb{R}^2$: $u \in C^\omega(\mathbb{R}^2)$. En consecuencia, si el problema 1.3 posee solución, φ ha de ser analítica en $\mathbb{R}$ (dicho de otro modo, si $\varphi \notin C^\omega(\mathbb{R})$, el problema 1.3 no posee solución).[3]

[3]Otra manera de ver que φ es analítica consiste en introducir las funciones $w_i = \partial u / \partial x_i$ para $i = 1, 2$ y comprobar que w_1 y w_2 satisfacen las condiciones de Cauchy-Riemann en $\mathbb{R}^2$. Como $\varphi(x_1) \equiv w_2(x_1, 0)$, se deduce efectivamente que $\varphi \in C^\omega(\mathbb{R})$.

Finalmente, consideremos el problema 1.4. No es difícil comprobar en este caso que la función

$$u(x_1, x_2) = \frac{1}{2} \int_{x_1 - x_2}^{x_1 + x_2} \varphi(s)\, ds \quad \forall (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$$

es una solución. Más adelante probaremos que, de hecho, esta función es la única solución. Por tanto, en este último caso, para cada $\varphi \in C^1(\mathbb{R})$ el problema posee una y sólo una solución clásica en $\mathbb{R}^2$.[4]

Observación 1.3 Las EDPs que aparecen en los problemas 1.1 y 1.4 son *equivalentes*, en el sentido de que cada una de ellas puede ser obtenida a partir de la otra mediante un cambio global de variables independientes. En efecto, partamos por ejemplo de la EDP (1.9) e introduzcamos las variables y_1 e y_2, con

$$y_1 = x_1 + x_2, \quad y_2 = x_1 - x_2.$$

Entonces es inmediato que, en las nuevas variables, (1.9) se convierte en

$$4 \frac{\partial^2 u}{\partial y_1 \partial y_2} = 0, \quad y \in \mathbb{R}^2.$$

Que las EDPs de los problemas 1.1 y 1.4 "reaccionen" de forma diferente cuando se añaden condiciones para $x_2 = 0$ como las que preceden es excepcional. Si las condiciones se hubieran impuesto (por ejemplo) sobre la recta $x_1 + 2x_2 = 0$, las dos EDPs habrían jugado papeles similares. Todo esto será clarificado más adelante. ∎

1.2 Las ecuaciones de Laplace y Poisson, la ecuación del calor y la ecuación de ondas

Consideraremos las siguientes EDPs lineales de segundo orden y coeficientes constantes:

$$-\Delta u = f(x), \tag{1.10}$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} - k \Delta u = F(x, t) \tag{1.11}$$

y

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2 \Delta u = h(x, t). \tag{1.12}$$

Aquí, hemos usado la notación

$$\Delta u = \sum_{i=1}^{N} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}$$

(se dice que $-\Delta$ es el *operador de Laplace* y que $-\Delta u$ es el *Laplaciano* de u). Se supone que k y c son constantes positivas y que las funciones f, F y h son (al

[4] Es importante resaltar que la solución obtenida depende continuamente del dato φ. Por ejemplo, si $\varphi_n \to \varphi$ uniformemente en los compactos de $\mathbf{R}$, entonces para las correspondientes soluciones u_n y u se tiene (entre otras cosas) que $u_n \to u$ uniformemente en los compactos de $\mathbf{R}^2$.

menos) continuas; más adelante daremos interpretaciones de estos datos. Por razones que pronto se verán, hemos respetado la notación clásica habitual, de modo que (1.10) es una EDP en las N variables independientes $x_1, \dots, x_N$ y (1.11) y (1.12) son EDPs en las $N+1$ variables $x_1, \dots, x_N$ y t.

La EDP (1.10) se denomina *ecuación de Poisson*. Cuando $f \equiv 0$, recibe el nombre de *ecuación de Laplace*. Ambas ecuaciones aparecen con frecuencia en Física, Química, Biología, etc. cuando se intenta describir el comportamiento de fenómenos *estacionarios*, esto es, independientes del tiempo. Por ejemplo, el campo eléctrico generado en un medio que ocupa el abierto $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ por una distribución de carga $f \in C^0(\Omega)$ está dado por $E = -\nabla u$, donde u es solución de

$$-\Delta u = \frac{1}{\alpha} f(x), \quad x \in \Omega,$$

siendo α una constante positiva adecuada.

La EDP (1.11) es la *ecuación del calor*. Cuando el número de variables independientes es $N+1$, se suele decir que se trata de la ecuación N-dimensional (las $x_1, \dots, x_N$ son las variables espaciales; t es la variable temporal). También es frecuente encontrar esta ecuación en muchas aplicaciones. Con carácter general, aparece cuando se intenta describir el comportamiento de fenómenos *difusivos*, es decir, ligados a una propagación rápida (o instantánea) de la variable dependiente. Por ejemplo, supongamos que $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ es un abierto ocupado por un medio conductor del calor y que sobre este medio actúa una fuente de calor $F = F(x,t)$ durante el intervalo temporal $(0,T)$. Entonces, bajo determinadas circunstancias, se puede aceptar que la temperatura del medio verifica (1.11) para una constante positiva k (la conductividad del medio).[5]

Por otra parte, (1.12) es la *ecuación de ondas* N-dimensional. Sirve para describir fenómenos ondulatorios, es decir, caracterizados por la propagación de señales con velocidad finita. Por ejemplo, cuando $N = 1$, (1.12) permite determinar las vibraciones de una cuerda elástica (siempre que éstas sean de pequeña amplitud (y por esa razón (1.12) también suele llamarse *ecuación de la cuerda vibrante*). Más precisamente, supongamos que una cuerda sujeta por sus extremos *ocupa* el intervalo espacial $[0,\ell]$ durante el intervalo de tiempo $(0,T)$. Entonces, bajo ciertas condiciones, se puede aceptar que la posición de cada punto de la cuerda está determinada por una solución de la ecuación

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0, \quad (x,t) \in (0,\ell) \times (0,T),$$

donde c es una constante positiva.

Debido a las características de los fenómenos que describen, se suele decir que las ecuaciones del calor y de ondas son *ecuaciones de evolución*. Por el contrario, las ecuaciones de Poisson y de Laplace se denominan *ecuaciones estacionarias*. Veremos más adelante que la presencia o no de la variable t es fundamental a la hora de elegir las condiciones que deben acompañar a estas ecuaciones.

Aparte de las EDPs que preceden, hay otras muchas de interés desde el punto de vista de las aplicaciones. Una buena parte de ellas son variantes de las anteriores. Por ejemplo, para la propagación de ondas en un medio físico no

---

[5] El hecho de que (1.11) permita describir la evolución de una temperatura es justamente lo que motiva que llamemos *ecuación del calor* a (1.11).

vacío, es usual recurrir a la llamada *ecuación del telegrafista*

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + a\frac{\partial u}{\partial t} - c^2\Delta u = h(x,t),$$

donde a es una nueva constante positiva. Esta ecuación aproxima bien, por ejemplo, la propagación de ondas de radio en la atmósfera.

Para la evolución de la temperatura en un medio físico tridimensional cuyas partículas se desplazan con velocidad $V = (V_1, V_2, V_3)$ (que puede ser función de x y de t), se usa la EDP

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \sum_{i=1}^{3} V_i \frac{\partial u}{\partial x_i} - k\Delta u = F(x,t),$$

llamada *ecuación de transporte-difusión.*

Para otras EDPs de interés en las aplicaciones, véase por ejemplo [7] y [16].

1.3 Problemas de valores iniciales, problemas de contorno y problemas mixtos

En lo que sigue, con el fin de abreviar la notación, pondremos u_t, u_x, u_{tt}, etc. para designar las sucesivas derivadas parciales de u. Presentaremos en este parágrafo varios problemas relacionados con las EDPs (1.10), (1.11) y (1.12). Algunos de ellos serán estudiados (y resueltos) en este curso.

Problema 1.5 El *problema de valores iniciales* (o problema de Cauchy) para la ecuación del calor es el siguiente: Hallar una función $u : \mathbb{R}^N \times [0,+\infty) \mapsto \mathbb{R}$ tal que

$$\begin{cases} u_t - k\Delta u = F(x,t), & (x,t) \in \mathbb{R}^N \times (0,+\infty), \\ u(x,0) = u_0(x), & x \in \mathbb{R}^N, \end{cases} \tag{1.13}$$

donde $k > 0$ y $F : \mathbb{R}^N \times [0,+\infty) \mapsto \mathbb{R}$ y $u_0 : \mathbb{R}^N \mapsto \mathbb{R}$ son funciones dadas.

Problema 1.6 El *problema de valores iniciales* para la ecuación de ondas se formula como sigue: Hallar una función $u : \mathbb{R}^N \times [0,+\infty) \mapsto \mathbb{R}$ tal que

$$\begin{cases} u_{tt} - c^2\Delta u = h(x,t), & (x,t) \in \mathbb{R}^N \times (0,+\infty), \\ u(x,0) = u_0(x), \quad u_t(x,0) = u_1(x), & x \in \mathbb{R}^N, \end{cases} \tag{1.14}$$

donde $c > 0$ y $h : \mathbb{R}^N \times [0,+\infty) \mapsto \mathbb{R}$, $u_0 : \mathbb{R}^N \mapsto \mathbb{R}$ y $u_1 : \mathbb{R}^N \mapsto \mathbb{R}$ son dadas.

En ambos casos, el objetivo es encontrar la solución (una función definida para todo tiempo positivo t) conociendo la EDP que verifica y conociendo su comportamiento en un instante inicial $t = 0$, esto es, añadiendo a la EDP una o varias *condiciones iniciales.* En el caso de la ecuación del calor, es suficiente decir cuánto vale u para $t = 0$. De hecho, hemos visto ya cuando analizamos el problema 1.2 que, si proporcionásemos más información, el problema resultante podría no tener solución. Por el contrario, en el caso de la ecuación de ondas, es preciso indicar cuáles son los valores de u y de u_t para $t = 0$ (esto será justificado más adelante, en el tema 4 de este curso).[6]

Desde el punto de vista de las aplicaciones, hay otros problemas que tienen el mismo o mayor interés. Nos interesaremos principalmente por algunos *problemas de contorno* para la EDP (1.10) y algunos *problemas mixtos* (de contorno y valores iniciales) para las EDPs (1.11) y (1.12). Como se ha dicho, las diferentes elecciones están fuertemente motivadas por el papel desempeñado por la variable t (o por la ausencia de ésta).

Problema 1.7 El *problema de Dirichlet* para la ecuación de Poisson es el que sigue: Hallar una función $u : \overline{\Omega} \mapsto \mathbb{R}$ tal que

$$\begin{cases} -\Delta u = f(x), & x \in \Omega, \\ u = g(x), & x \in \partial\Omega, \end{cases} \tag{1.15}$$

donde $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ es un abierto acotado no vacío de frontera $\partial\Omega$ y $f : \Omega \mapsto \mathbb{R}$ y $g : \partial\Omega \mapsto \mathbb{R}$ son funciones dadas.

La segunda igualdad de (1.15) se denomina *condición de contorno de tipo Dirichlet*, o bien simplemente condición de Dirichlet.

Supongamos que, por ejemplo, $f \in C^0(\Omega)$ y $g \in C^0(\partial\Omega)$. Se dice entonces que la función u es una *solución clásica* de (1.15) si $u \in C^2(\Omega) \cap C^0(\overline{\Omega})$, $-\Delta u(x) = f(x)$ para cada $x \in \Omega$ y $u(x) = g(x)$ para cada $x \in \partial\Omega$. Con el objetivo de probar la existencia y unicidad de solución clásica, este problema será analizado en el tema 2 de este curso.[7]

Problema 1.8 El *problema mixto de Cauchy-Dirichlet* para la ecuación del calor es el siguiente: Hallar una función $u : \overline{\Omega} \times [0, T] \mapsto \mathbb{R}$ tal que

$$\begin{cases} u_t - k\Delta u = F(x,t), & (x,t) \in \Omega \times (0,T), \\ u = G(x,t), & (x,t) \in \partial\Omega \times (0,T), \\ u(x,0) = u_0(x), & x \in \Omega, \end{cases} \tag{1.16}$$

donde $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ es un abierto acotado no vacío de frontera $\partial\Omega$, $T > 0$, $k > 0$ y $F : \Omega \times (0,T) \mapsto \mathbb{R}$, $G : \partial\Omega \times (0,T) \mapsto \mathbb{R}$ y $u_0 : \Omega \mapsto \mathbb{R}$ son funciones dadas.

Por analogía con el problema (1.15), las condiciones impuestas sobre la frontera lateral $\partial\Omega \times (0,T)$ se llaman *condiciones de contorno* (de tipo Dirichlet). Por otra parte, por razones obvias, la condición impuesta para $t = 0$ se denomina *condición inicial* (o condición de Cauchy). Existen varias nociones posibles de solución para este problema. De momento, no precisaremos ninguna de ellas.

En este curso vamos a considerar principalmente el caso particular de (1.16) en que $N = 1$ y Ω es un intervalo de la forma $(0, \ell)$. En este caso, dado que la

[6] De todos modos, dado que la ecuación de ondas es de segundo orden en t, parece lógico que, "para arrancar", necesitemos más información que en el caso de la ecuación del calor. Recuérdese que a una EDO de primer orden $y' = f(t, y)$ (resp. de segundo orden $y'' = f(t, y, y')$) es preciso añadir *una* (resp. *dos*) condiciones iniciales.

[7] Indiquemos no obstante que es posible introducir otro concepto de solución de (1.15) mucho más débil que permite resolver éste y otros muchos problemas de tipo similar (este concepto será presentado con detalle en el tema 3).

frontera de $(0,\ell)$ se reduce a dos puntos, (1.16) se escribe así:

$$\begin{cases} u_t - ku_{xx} = F(x,t), & (x,t) \in (0,\ell) \times (0,T), \\ u(0,t) = \alpha(t), \quad u(\ell,t) = \beta(t), & t \in (0,T), \\ u(x,0) = u_0(x), & x \in (0,\ell), \end{cases} \tag{1.17}$$

donde k, F y u_0 son como antes y $\alpha, \beta : (0,T) \mapsto \mathbb{R}$ son dadas.

La situación que describe (1.17) es, por ejemplo, la que se presenta cuando consideramos una "barra" de un material conductor del calor de longitud ℓ sobre la que actúa una fuente de calor F. Se supone que la barra está siendo mantenida a la temperatura α (resp. β) en el extremo $x = 0$ (resp. $x = l$); se supone también que la barra "arranca" de una temperatura inicial u_0 en el instante $t = 0$.

Problema 1.9 El *problema mixto de Cauchy-Dirichlet* para la ecuación de ondas es como sigue: Hallar una función $u : \overline{\Omega} \times [0,T] \mapsto \mathbb{R}$ tal que

$$\begin{cases} u_{tt} - c^2 \Delta u = h(x,t), & (x,t) \in \Omega \times (0,T), \\ u = q(x,t), & (x,t) \in \partial\Omega \times (0,T), \\ u(x,0) = u_0(x), \quad u_t(x,0) = u_1(x), & x \in \Omega, \end{cases} \tag{1.18}$$

donde $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ es un abierto acotado no vacío de frontera $\partial\Omega$, $T > 0$, $c > 0$ y $h : \Omega \times (0,T) \mapsto \mathbb{R}$, $q : \partial\Omega \times (0,T) \mapsto \mathbb{R}$, $u_0 : \Omega \mapsto \mathbb{R}$ y $u_1 : \Omega \mapsto \mathbb{R}$ son funciones dadas.

Como antes, encontramos aquí condiciones de contorno sobre $\partial\Omega \times (0,T)$ y condiciones iniciales para $t = 0$ (de nuevo necesitamos dos condiciones iniciales y no sólo una). También como antes, varios conceptos de solución son posibles.

En este curso nos centraremos sobre el siguiente caso particular de (1.18):

$$\begin{cases} u_{tt} - c^2 u_{xx} = h(x,t), & (x,t) \in (0,\ell) \times (0,T), \\ u(0,t) = \alpha(t), \quad u(\ell,t) = \beta(t), & t \in (0,T), \\ u(x,0) = u_0(x), \quad u_t(x,0) = u_1(x), & x \in (0,\ell). \end{cases} \tag{1.19}$$

donde c, h, u_0 y u_1 son como antes y $\alpha, \beta : (0,T) \mapsto \mathbb{R}$ son funciones dadas. Como ya se ha indicado, (1.19) describe el comportamiento de una cuerda elástica sometida a pequeñas vibraciones.

Entre otras cosas, veremos en el tema 4 que, si los datos h, u_0, u_1 α y β pertenecen a espacios adecuados y verifican ciertas hipótesis, llamadas *condiciones de compatibilidad*, entonces (1.19) posee una solución clásica única. En otras palabras, bajo estas condiciones, existe una única función $u \in C^2([0,\ell] \times [0,T])$ que verifica $u_{tt}(x,t) - c^2 u_{xx}(x,t) = h(x,t)$ para cada $(x,t) \in (0,\ell) \times (0,T)$, $u(0,t) = \alpha(t)$ y $u(\ell,t) = \beta(t)$ para cada $t \in (0,T)$ y $u(x,0) = u_0(x)$ y $u_t(x,0) = u_1(x)$ para cada $x \in [0,\ell]$.

Tema 2

El problema de Dirichlet para las ecuaciones de Laplace y Poisson

En este tema, salvo que se diga lo contrario, $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ es un abierto conexo acotado no vacío ($N \geq 1$). Denotaremos $\partial\Omega$ la frontera de Ω.

El objetivo perseguido es probar, en un contexto clásico, resultados de existencia y unicidad de solución del problema de Dirichlet para las EDPs de Laplace y Poisson (problema 1.7 del tema precedente). Así, de forma general, dadas las funciones $f \in C^0(\Omega)$ y $g \in C^0(\partial\Omega)$, buscaremos soluciones de

$$\begin{cases} -\Delta u = f(x), & x \in \Omega, \\ u = g(x), & x \in \partial\Omega, \end{cases} \tag{2.1}$$

Recordemos que una solución clásica de (2.1) es una función $u \in C^2(\Omega) \cap C^0(\overline{\Omega})$ que verifica $-\Delta u(x) = f(x)$ para todo $x \in \Omega$ y $u(x) = g(x)$ para todo $x \in \partial\Omega$.

2.1 Identidades de Green

Supondremos en este parágrafo que el abierto Ω posee frontera $\partial\Omega$ "suficientemente regular". Más precisamente, supondremos que $\partial\Omega \in C^{0,1}$, en el sentido que se precisa en el Apéndice a este tema. Denotaremos $d\Gamma$ la medida de superficie inducida sobre $\partial\Omega$ por la medida de Lebesgue y $n(x)$ el vector normal unitario exterior a Ω en el punto $x \in \partial\Omega$. Obsérvese que, cuando $\partial\Omega \in C^{0,1}$, podemos hablar de $n(x)$ "para casi todo" $x \in \partial\Omega$ (en el sentido de la medida $d\Gamma$; para más detalles, véase el Apéndice).

El siguiente resultado es fundamental en el análisis de (2.1). Su demostración puede ser encontrada por ejemplo en [15]:

Teorema 2.1 *Supongamos que $\partial\Omega \in C^{0,1}$ y $F \in C^1(\overline{\Omega})$. Entonces*

$$\int_\Omega \partial_i F(x)\, dx = \int_{\partial\Omega} F(x)\, n_i(x)\, d\Gamma(x) \tag{2.2}$$

para cada $i = 1, \ldots, N$.

Como consecuencias inmediatas, con $\partial\Omega \in C^{0,1}$, obtenemos las identidades siguientes:

- *Fórmula de integración por partes N-dimensional:* Si $u, v \in C^1(\overline{\Omega})$, entonces
$$\int_\Omega u\,\partial_i v\,dx = -\int_\Omega \partial_i u\,v\,dx + \int_{\partial\Omega} uv\,n_i\,d\Gamma \tag{2.3}$$

- *Fórmula de Gauss-Ostrogradski o teorema de la divergencia:* Si $F \in C^1(\overline{\Omega})^N$, entonces
$$\int_\Omega \nabla\cdot F\,dx = \int_{\partial\Omega} F\cdot n\,d\Gamma, \tag{2.4}$$
donde $\nabla\cdot F = \sum_{i=1}^N \partial_i F_i$ denota la *divergencia* de F.

- *Primera identidad de Green:* Si $u \in C^2(\overline{\Omega})$ y $v \in C^1(\overline{\Omega})$, entonces
$$\int_\Omega \nabla u\cdot\nabla v\,dx = -\int_\Omega (\Delta u)v\,dx + \int_{\partial\Omega} \partial_n u\,v\,d\Gamma. \tag{2.5}$$
Aquí, $\partial_n u$ es por definición la *derivada normal* de u, esto es,
$$\partial_n u(x) = \nabla u(x)\cdot n(x)$$
en todo punto x donde tenga sentido hablar de $n(x)$.

- *Segunda identidad de Green:* Si $u, v \in C^2(\overline{\Omega})$, entonces
$$\int_\Omega (u\Delta v - v\Delta u)\,dx = \int_{\partial\Omega} (u\partial_n v - v\partial_n u)\,d\Gamma. \tag{2.6}$$

En particular, tomando $u = v$ en (2.5) y suponiendo que $u \in C^2(\overline{\Omega})$, obtenemos la denominada *identidad de la energía*, que dice así:
$$\int_\Omega |\nabla u|^2\,dx = \int_\Omega (-\Delta u)u\,dx + \int_{\partial\Omega} \partial_n u\,u\,d\Gamma. \tag{2.7}$$

Por otra parte, suponiendo de nuevo que $u \in C^2(\overline{\Omega})$ y tomando $v \equiv 1$ en (2.5), resulta la identidad
$$\int_\Omega \Delta u\,dx = \int_{\partial\Omega} \partial_n u\,d\Gamma. \tag{2.8}$$

Observación 2.1 Supongamos que $\partial\Omega \in C^{0,1}$ y sea u una solución (clásica) de (2.1). Supongamos además que $u \in C^2(\overline{\Omega})$. Entonces u es la única solución en $C^2(\overline{\Omega})$. En efecto, si $w \in C^2(\overline{\Omega})$ fuera otra solución, sin más que aplicar la identidad (2.7) a la función $u - w$ deduciríamos que $u - w \equiv$ Const., de donde $u \equiv w$.

En el siguiente parágrafo probaremos la unicidad de solución de (2.1) sin necesidad de exigir a ésta que pertenezca a $C^2(\overline{\Omega})$ y sin necesidad de pedir a $\partial\Omega$ que sea de clase $C^{0,1}$.

2.2 El principio del máximo y la unicidad de solución

El primer resultado de este parágrafo se conoce con el nombre de *principio del máximo débil* y dice lo siguiente:

Teorema 2.2 *Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ un abierto acotado no vacío. Sea $u \in C^2(\Omega) \cap C^0(\overline{\Omega})$ tal que $-\Delta u \leq 0$ en Ω. Entonces*

$$\max_{\overline{\Omega}} u = \max_{\partial\Omega} u. \tag{2.9}$$

En otras palabras, el máximo de u en $\overline{\Omega}$ se alcanza sobre la frontera de Ω.

Demostración: Supongamos en primer lugar que $-\Delta u < 0$ en Ω. Si no se tuviera (2.9), existiría $\xi \in \Omega$ tal que

$$u(\xi) = \max_{\overline{\Omega}} u > \max_{\partial\Omega} u.$$

Dado que $u \in C^2(\Omega) \cap C^0(\overline{\Omega})$ y u alcanza un máximo en Ω en ξ, necesariamente tendríamos $\Delta u(\xi) \leq 0$, en contra de lo supuesto. Luego en este caso tenemos la igualdad (2.9).

Consideremos ahora el caso general. Sea $v(x) \equiv |x|^2$. Para cada $\varepsilon > 0$ se tiene que $u + \varepsilon v \in C^2(\Omega) \cap C^0(\overline{\Omega})$ y $-\Delta(u + \varepsilon v) < 0$ en Ω. Por tanto,

$$\max_{\overline{\Omega}}(u + \varepsilon v) = \max_{\partial\Omega}(u + \varepsilon v) \leq \max_{\partial\Omega} u + \varepsilon \max_{\partial\Omega} v \quad \forall \varepsilon > 0. \tag{2.10}$$

Por otra parte,

$$\max_{\overline{\Omega}}(u + \varepsilon v) \geq \max_{\overline{\Omega}} u + \varepsilon \min_{\overline{\Omega}} v \quad \forall \varepsilon > 0. \tag{2.11}$$

En consecuencia,

$$\max_{\overline{\Omega}} u + \varepsilon \min_{\overline{\Omega}} v \leq \max_{\partial\Omega} u + \varepsilon \max_{\partial\Omega} v \quad \forall \varepsilon > 0. \tag{2.12}$$

Haciendo ε tender a cero en (2.12), obtenemos (2.9). ∎

Observación 2.2 Una consecuencia trivial del teorema precedente es que, si $u \in C^2(\Omega) \cap C^0(\overline{\Omega})$ y $-\Delta u \geq 0$ en Ω, entonces $\min_{\overline{\Omega}} u = \min_{\partial\Omega} u$.

Observación 2.3 En las condiciones del teorema 2.2, si el abierto Ω es conexo, se puede decir algo más, aparte de (2.9):

> *O bien la función u es constante (y coincide con $\max_{\partial\Omega} u$ en todo punto), o bien $u(x) < \max_{\partial\Omega} u$ en todo $x \in \Omega$.*

Esta propiedad se conoce como *principio del máximo fuerte*; para la demostración, véase por ejemplo [9, 11].

Corolario 2.1 *En las condiciones del teorema 2.2, si $u \in C^2(\Omega) \cap C^0(\overline{\Omega})$, $-\Delta u \leq 0$ en Ω y $u \leq 0$ sobre $\partial\Omega$, entonces $u \leq 0$ en Ω.*

Observación 2.4 El corolario 2.1 posee una clara interpretación en términos de (2.1): Si (por ejemplo) f y g son no negativas, toda posible solución también lo es. Esto es coherente con la interpretación que poseen las soluciones de (2.1) como distribuciones estacionarias de temperatura. Así, si se está aplicando indefinidamente una fuente de calor a un medio en su interior y sobre su frontera, es imposible que el medio se enfríe.

La demostración del corolario 2.1 es inmediata. Otras consecuencias (también casi evidentes) del teorema 2.2 son las siguientes:

Corolario 2.2 *En las condiciones del teorema 2.2, si* $u \in C^2(\Omega) \cap C^0(\overline{\Omega})$ *y* $-\Delta u = 0$ *en* Ω, *entonces*

$$\min_{\partial\Omega} u \le u(x) \le \max_{\partial\Omega} u \quad \forall x \in \overline{\Omega}. \tag{2.13}$$

Corolario 2.3 *Sea* $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ *un abierto acotado no vacío. Entonces existe a lo más una solución clásica del problema de Dirichlet* (2.1).

Así pues, la unicidad de solución clásica de (2.1) es cierta. Los resultados que se presentan a continuación están encaminados a probar la existencia de la misma.

2.3 La solución fundamental, la fórmula de representación de Green y la función de Green

En este parágrafo, consideraremos algunas soluciones de la EDP de Laplace muy particulares: las soluciones que poseen simetría esférica. Veremos que de hecho un gran número de soluciones de las EDPs de Laplace y de Poisson pueden obtenerse a partir de ellas.

Más precisamente, sea $\xi \in \mathbb{R}^N$ y tratemos de determinar las funciones $u \in C^2(\mathbb{R}^N \setminus \{\xi\})$ que sean de la forma $u(x) \equiv \varphi(|x-\xi|)$ para alguna $\varphi \in C^2(0,+\infty)$ y verifiquen

$$-\Delta u = 0 \ \text{ en } \ \mathbb{R}^N \setminus \{\xi\}. \tag{2.14}$$

No es difícil comprobar que, en estas circunstancias, $\varphi = \varphi(r)$ debe verificar la EDO

$$\varphi'' + \frac{N-1}{r}\varphi' = 0 \ \text{ en } \ (0,+\infty). \tag{2.15}$$

Por tanto, ha de tenerse

$$\varphi(r) = \begin{cases} -\dfrac{C_1}{(N-2)r^{N-2}} + C_2 & \text{si } \ N \ge 3, \\ C_1 \log r + C_2 & \text{si } \ N = 2, \end{cases} \tag{2.16}$$

donde C_1 y C_2 son constantes. Recíprocamente, si φ está dada por (2.16) y ponemos $u(x) \equiv \varphi(|x-\xi|)$, entonces $u \in C^2(\mathbb{R}^N \setminus \{\xi\})$ y se cumple (2.14).

Definición 2.1 *Sea*

$$\mathcal{A} = \{\, (x,\xi) \in \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N : x \neq \xi \,\}$$

y sea $K : \mathcal{A} \mapsto \mathbb{R}$ *la función definida por*

$$K(x,\xi) = \begin{cases} -\dfrac{1}{(N-2)\omega_N |x-\xi|^{N-2}} & si \;\; N \geq 3, \\ \dfrac{1}{2\pi} \log |x-\xi| & si \;\; N = 2, \end{cases} \tag{2.17}$$

donde ω_N *es la medida superficial de la esfera unidad en* $\mathbb{R}^N$*. Se dice que* K *es la solución fundamental de la EDP de Laplace.*

Es inmediato que $\mathcal{A}$ es un abierto de $\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N$ y que $K \in C^\infty(\mathcal{A})$. Además, si denotamos Δ_x (resp. Δ_ξ) al operador de Laplace en la variable x (resp. en la variable ξ), tenemos

$$\Delta_x K(x,\xi) = \Delta_\xi K(x,\xi) = 0 \;\; \text{en} \;\; \mathcal{A}.$$

Esto es consecuencia de que $K(x,\xi) \equiv \varphi(|x-\xi|)$ para una elección particular de C_1 y C_2.

Obsérvese que, para cada $\xi \in \mathbb{R}^N$, la función $x \mapsto K(x,\xi)$, que está definida en $\mathbb{R}^N \setminus \{\xi\}$, es *localmente integrable en* $\mathbb{R}^N$, es decir, es integrable en todo compacto de $\mathbb{R}^N$.[1]

La primera propiedad importante de la solución fundamental es la *fórmula de representación de Green*, contenida en el resultado siguiente:

Teorema 2.3 *Supongamos que* $\partial\Omega \in C^{0,1}$*. Entonces, para cada* $u \in C^2(\overline{\Omega})$*, se tiene que*

$$\begin{cases} u(\xi) = \displaystyle\int_\Omega K(x,\xi)\, \Delta u(x)\, dx \\ \qquad + \displaystyle\int_{\partial\Omega} \big(\partial_{n(x)} K(x,\xi)\, u(x) - K(x,\xi)\, \partial_{n(x)} u(x)\big)\; d\Gamma(x) \end{cases} \tag{2.18}$$

para todo $\xi \in \Omega$.

Demostración: Sea $u \in C^2(\overline{\Omega})$ y sea ξ un punto de Ω. Sea $\rho_0 > 0$ tal que $\overline{B}(\xi;\rho_0) \subset \Omega$. Para cada ρ que verifique $0 < \rho \leq \rho_0$, utilizaremos la notación $\Omega_\rho = \Omega \setminus \overline{B}(\xi;\rho)$.

La idea de la demostración consiste en aplicar la segunda identidad de Green (2.6) en Ω_ρ a las restricciones a este abierto de las funciones u y $K(\cdot,\xi)$ y hacer después tender ρ a cero.

Así, para cada $\rho \in (0,\rho_0]$ tenemos:

$$\begin{aligned} &-\int_{\Omega_\rho} K(x,\xi)\, \Delta u(x)\, dx \\ &\quad = \int_{\partial\Omega} \big(\partial_{n(x)} K(x,\xi)\, u(x) - K(x,\xi)\, \partial_{n(x)} u(x)\big)\; d\Gamma(x) \\ &\quad + \int_{\partial B(\xi;\rho)} \big(\partial_{n(x)} K(x,\xi)\, u(x) - K(x,\xi)\, \partial_{n(x)} u(x)\big)\; d\Gamma(x). \end{aligned} \tag{2.19}$$

[1] Esto se debe a que, sea cual sea N, $|K(x,\xi)|$ crece hacia $+\infty$ cuando $x \to \xi$ más lentamente que $|x-\xi|^{-N}$.

Es inmediato que

$$\lim_{\rho\to 0}\int_{\Omega_\rho} K(x,\xi)\,\Delta u(x)\,dx = \int_\Omega K(x,\xi)\,\Delta u(x)\,dx. \tag{2.20}$$

Por otra parte, si denotamos ψ la función definida por (2.16) con $C_1 = 1/\omega_N$ y $C_2 = 0$, tenemos que

$$\begin{aligned}\int_{\partial B(\xi;\rho)} & K(x,\xi)\,\partial_{n(x)}u(x)\,d\Gamma(x)\\ &= \psi(\rho)\int_{\partial B(\xi;\rho)} \partial_{n(x)}u(x)\,d\Gamma(x)\\ &= \psi(\rho)\int_{B(\xi;\rho)} \Delta u(x)\,dx.\end{aligned}$$

Teniendo en cuenta que

$$\left|\int_{B(\xi;\rho)} \Delta u(x)\,dx\right| \le c_N\rho^N \max_{\overline{\Omega}} |\Delta u|$$

(donde c_N es la medida de la bola unidad de $\mathbb{R}^N$) y que

$$\lim_{\rho\to 0}\psi(\rho)\rho^N = 0,$$

resulta:

$$\lim_{\rho\to 0}\int_{\partial B(\xi;\rho)} K(x,\xi)\,\partial_{n(x)}u(x)\,d\Gamma(x) = 0. \tag{2.21}$$

En virtud de (2.19)–(2.21), para demostrar el teorema basta probar que

$$\lim_{\rho\to 0}\int_{\partial B(\xi;\rho)} \partial_{n(x)}K(x,\xi)\,u(x)\,d\Gamma(x) = -u(\xi). \tag{2.22}$$

Ahora bien, en todo punto $x\in\partial B(\xi;\rho)$, tenemos $\partial_{n(x)}K(x,\xi) = -\psi'(\rho)$. Por tanto,

$$\begin{aligned}\int_{\partial B(\xi;\rho)} \partial_{n(x)}K(x,\xi)\,u(x)\,d\Gamma(x) &= -\psi'(\rho)\int_{\partial B(\xi;\rho)} u(x)\,d\Gamma(x)\\ &= -\frac{1}{\omega_N}\int_{\partial B(0;1)} u(\xi+\rho y)\,d\Gamma(y).\end{aligned}$$

Por la continuidad de u, es evidente que esto último converge hacia $-u(\xi)$. Luego se tiene (2.22) y el teorema queda demostrado. ■

Corolario 2.4 *Sea $u \in C^2(\Omega)$ y supongamos que*

$$-\Delta u = 0 \quad en \quad \Omega. \tag{2.23}$$

Entonces $u\in C^\infty(\Omega)$.

Demostración: Sea $\xi_0 \in \Omega$ y sea $\rho_0 > 0$ tal que $\overline{B}(\xi_0; \rho_0) \subset \Omega$. Podemos aplicar el teorema 2.3 en la bola abierta $B(\xi_0; \rho_0)$ a la restricción de u. Tenemos por tanto que

$$u(\xi) = \int_{\partial B(\xi_0;\rho_0)} \big(u(x)\, \partial_{n(x)} K(x,\xi) - \partial_{n(x)} u(x)\, K(x,\xi)\big)\, d\Gamma(x) \tag{2.24}$$

para cada $\xi \in B(\xi_0; \rho_0)$. Pero la expresión que hay a la derecha en (2.24), observada como función de ξ, es de clase C^∞ en $B(\xi_0; \rho_0)$. Por tanto, u es de clase C^∞ en esta bola. Dado que el punto ξ_0 es arbitrario, resulta finalmente que $u \in C^\infty(\Omega)$. ∎

Observación 2.5 En realidad, esencialmente el mismo argumento muestra que toda $u \in C^2(\Omega)$ que verifique (2.23) es analítica en Ω. En otras palabras, para cada $\xi_0 \in \Omega$ existe $\rho_0 > 0$ tal que $\overline{B}(\xi_0; \rho_0) \subset \Omega$, u es de clase C^∞ en $B(\xi_0; \rho_0)$ y los valores de u en los puntos $\xi \in B(\xi_0; \rho_0)$ se pueden expresar como la suma de una serie de potencias de las componentes de $\xi - \xi_0$. Para más detalles, véase [11].

La igualdad (2.18) es una *fórmula de representación*. Teóricamente, permite calcular los valores de una función u en un abierto Ω a partir de los valores de $-\Delta u$ en Ω y los valores de u y $\partial_n u$ sobre $\partial\Omega$.

No obstante, no se trata de una fórmula totalmente satisfactoria ya que, en general, dadas f, g y h, no existen funciones que verifiquen $-\Delta u = f$ en Ω y $u = g$ y $\partial_n u = h$ sobre $\partial\Omega$. Para convencerse de ello, basta considerar las funciones $f \equiv 0$, $g \equiv 0$ y $h \equiv 1$.

Para conseguir una fórmula de representación similar a (2.18) donde no estén los valores de $\partial_n u$ sobre $\partial\Omega$ (o no estén los valores de u sobre $\partial\Omega$), necesitaremos modificar K convenientemente. Esto se consigue introduciendo la denominada *función de Green*.

Definición 2.2 *Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ un abierto no vacío y sea $\mathcal{A}(\Omega)$ el conjunto*

$$\mathcal{A}(\Omega) = \mathcal{A} \cap (\overline{\Omega} \times \Omega) = \{\, (x,\xi) \in \overline{\Omega} \times \Omega : x \neq \xi \,\}.$$

Se llama función de Green en Ω del problema de Dirichlet para la EDP de Laplace a toda función $G : \mathcal{A}(\Omega) \mapsto \mathbb{R}$ que cumple lo siguiente:

1. *$G = K + w$, donde K es la solución fundamental y $w : \overline{\Omega} \times \Omega \mapsto \mathbb{R}$ verifica*

$$w(\cdot, \xi) \in C^2(\overline{\Omega}) \quad \forall \xi \in \Omega$$

y

$$-\Delta_x w(x,\xi) = 0 \quad \forall (x,\xi) \in \overline{\Omega} \times \Omega.$$

2. *$G(x,\xi) = 0$ para todo $(x,\xi) \in \partial\Omega \times \Omega$.*

Teniendo en cuenta el corolario 2.3 es inmediato que, para cada abierto Ω, caso de existir la función de Green G, ésta es única. Utilizaremos el resultado siguiente, que puede ser considerado una versión mejorada del teorema 2.3:

Teorema 2.4 *Supongamos que* $\partial\Omega \in C^{0,1}$ *y sea* $G = K + w$ *la función de Green en* Ω*. Entonces, para cada* $u \in C^2(\overline{\Omega})$*, se tiene que*

$$u(\xi) = \int_\Omega G(x,\xi)\,\Delta u(x)\,dx + \int_{\partial\Omega} \partial_{n(x)} G(x,\xi)\,u(x)\,d\Gamma(x) \tag{2.25}$$

para todo $\xi \in \Omega$*.*

La demostración es casi inmediata. Basta usar la fórmula (2.18) y la segunda identidad de Green (2.6) escrita para u y $w(\cdot,\xi)$.

Conocida G, hay una candidata natural a solución del problema (2.1) para $f \equiv 0$. En efecto, si u fuera solución de (2.1) con $f \equiv 0$ y tuviéramos $u \in C^2(\overline{\Omega})$, entonces en virtud del teorema 2.4, u verificaría

$$u(\xi) = \int_{\partial\Omega} \partial_{n(x)} G(x,\xi)\,g(x)\,d\Gamma(x) \quad \forall \xi \in \Omega. \tag{2.26}$$

Por tanto, una posible estrategia consiste en determinar G en primer lugar y, después, comprobar si la función definida por el segundo miembro de (2.26) es la solución buscada.

No obstante, determinar explícitamente G es en general difícil (y en la práctica imposible). Esto sólo se sabe hacer para algunos abiertos Ω muy particulares.

En el parágrafo siguiente, construiremos la función de Green G en el caso de una bola de $\mathbb{R}^N$. Esto permitirá resolver el correspondiente problema de Dirichlet para la EDP de Laplace.

2.4 Resolución del problema de Dirichlet en una bola y consecuencias

Por comodidad, sea $\Omega = B(0;R)$.

Para cada $\xi \in B(0;R) \setminus \{0\}$, pongamos $\xi^* = R^2|\xi|^{-2}\xi$. Diremos que ξ^* es el *simétrico* de ξ respecto de la esfera $\partial B(0;R)$. Obtenemos de este modo una aplicación bien definida $\xi \mapsto \xi^*$, de $B(0;R) \setminus \{0\}$ en $\mathbb{R}^N \setminus \overline{B}(0;R)$. No es difícil comprobar que se cumple la propiedad siguiente:

$$\frac{|x-\xi^*|}{|x-\xi|} = \frac{R}{|\xi|} \quad \forall x \in \partial B(0;R), \quad \forall \xi \in B(0;R) \setminus \{0\}. \tag{2.27}$$

Recordemos que la solución fundamental K está dada por $K(x,\xi) \equiv \psi(|x-\xi|)$, donde ψ es la función que aparece en (2.16) con $C_1 = 1/\omega_N$ y $C_2 = 0$. Tomemos w como sigue:

$$w(x,\xi) = \begin{cases} -\psi(\dfrac{|\xi|}{R}|x-\xi^*|) & \text{si } \ x \in \overline{B}(0;R),\ \xi \in B(0;R) \setminus \{0\}, \\ -\psi(R) & \text{si } \ x \in \overline{B}(0;R),\ \xi = 0. \end{cases} \tag{2.28}$$

Entonces la función w está bien definida y, en virtud de (2.27), verifica las propiedades enumeradas en la definición 2.2. Por tanto, la función de Green de

$B(0;R)$ es la siguiente:

$$G(x,\xi) = \begin{cases} \psi(|x-\xi|) - \psi(\frac{|\xi|}{R}|x-\xi^*|) & \text{si } \xi \neq 0, \\ \psi(|x|) - \psi(R) & \text{si } \xi = 0. \end{cases} \tag{2.29}$$

Más explícitamente, si $N \geq 3$, tenemos

$$G(x,\xi) = \begin{cases} -\dfrac{1}{(N-2)\omega_N} \left[\dfrac{1}{|x-\xi|^{N-2}} - \left(\dfrac{R}{|\xi||x-\xi^*|} \right)^{N-2} \right] & \text{si } \xi \neq 0, \\ -\dfrac{1}{(N-2)\omega_N} \left[\dfrac{1}{|x|^{N-2}} - \dfrac{1}{R^{N-2}} \right] & \text{si } \xi = 0. \end{cases}$$

Si por el contrario $N = 2$, obtenemos que

$$G(x,\xi) = \begin{cases} \dfrac{1}{2\pi} \log \left[\dfrac{R|x-\xi|}{|\xi||x-\xi^*|} \right] & \text{si } \xi \neq 0, \\ \dfrac{1}{2\pi} \log \dfrac{|x|}{R} & \text{si } \xi = 0. \end{cases}$$

En el caso que nos ocupa, la identidad (2.26) toma una forma muy particular que se detalla en el resultado siguiente:

Proposición 2.1 *Supongamos que* $u \in C^2(\overline{B}(0;R))$ *y* $-\Delta u = 0$ *en* $B(0;R)$. *Entonces se tiene la fórmula integral de Poisson:*

$$u(\xi) = \frac{R^2 - |\xi|^2}{\omega_N R} \int_{\partial B(0;R)} \frac{u(x)}{|x-\xi|^N} \, d\Gamma(x) \qquad \forall \xi \in B(0;R). \tag{2.30}$$

Para la demostración, basta tener en cuenta la identidad (2.26) con $\Omega = B(0;R)$ y G dada por (2.29). Observando que, en todo punto $x \in \partial B(0;R)$,

$$\partial_{n(x)} G(x,\xi) = \sum_{i=1}^{N} \partial_{x_i} G(x,\xi) \, \frac{x_i}{R} = \frac{R^2 - |\xi|^2}{\omega_N R |x-\xi|^N} \, ,$$

obtenemos de inmediato (2.30).

Se llama *núcleo de Poisson en* $B(0;R)$ a la función $H = H(x,\xi)$, dada por

$$H(x,\xi) = \frac{R^2 - |\xi|^2}{\omega_N R |x-\xi|^N} \quad \forall (x,\xi) \in \mathcal{A}(B(0;R)).$$

En términos de H, la fórmula integral de Poisson se escribe como sigue:

$$u(\xi) = \int_{\partial B(0;R)} H(x,\xi) \, u(x) \, d\Gamma(x) \qquad \forall \xi \in B(0;R). \tag{2.31}$$

Resolveremos a continuación en $B(0;R)$ el problema de Dirichlet para la EDP de Laplace

$$\begin{cases} -\Delta u = 0, & x \in B(0;R), \\ u = g(x), & x \in \partial B(0;R), \end{cases} \tag{2.32}$$

donde $g \in C^0(\partial B(0;R))$ es una función dada. Como hemos indicado, la función definida por el segundo miembro de (2.31) es la candidata natural a solución.

Proposición 2.2 *El núcleo de Poisson H verifica las propiedades siguientes:*

1. $H \in C^\infty(\mathcal{A}(B(0;R)))$.
2. $H(x,\xi) > 0$ *para todo* $(x,\xi) \in \mathcal{A}(B(0;R))$.
3. $-\Delta_\xi H(x,\xi) = 0$ *para todo* $(x,\xi) \in \partial B(0;R) \times B(0;R)$.
4. *Para cada* $\xi \in B(0;R)$, *se tiene que*
$$\int_{\partial B(0;R)} H(x,\xi)\, d\Gamma(x) = 1.$$
5. *Dados* $\xi_0 \in \partial B(0;R)$ *y* $\delta > 0$, *se tiene*
$$\lim_{\xi\to\xi_0} H(x,\xi) = 0$$
uniformemente en $x \in \overline{B}(0;R) \setminus B(\xi_0;\delta)$.

Demostración: Todas las propiedades que preceden son inmediatas salvo la última (de hecho, es fácil comprobar que H es una función analítica real en el abierto $\mathcal{A}$).

Sean entonces $\xi_0 \in \partial B(0;R)$ y $\delta > 0$. Si tenemos $\xi \in B(0;R)$ con $|\xi - \xi_0| \le \delta/2$ y $x \in \overline{B}(0;R) \setminus B(\xi_0;\delta)$, entonces

$$H(x,\xi) \le \frac{R^2 - |\xi|^2}{\omega_N R(|x-\xi_0| - |\xi - \xi_0|)^N} \le \frac{R^2 - |\xi|^2}{\omega_N R(\delta/2)^N}\,.$$

Esto prueba que $H(x,\xi) \to 0$ cuando $\xi \to \xi_0$ uniformemente en x y, en consecuencia, termina la demostración. ■

El resultado principal de este parágrafo es el siguiente:

Teorema 2.5 *Sea $g \in C^0(\partial B(0;R))$. Sea u la función siguiente:*

$$u(\xi) = \begin{cases} \displaystyle\int_{\partial B(0;R)} H(x,\xi)\, g(x)\, d\Gamma(x) & \text{si } \ \xi \in B(0;R), \\ g(\xi) & \text{si } \ |\xi| = R. \end{cases} \tag{2.33}$$

Entonces $u \in C^\infty(B(0;R)) \cap C^0(\overline{B}(0;R))$ y es la única solución de (2.32).

Demostración: Todo lo que se afirma sobre u es inmediato a partir de las propiedades verificadas por H que se enuncian en la proposición 2.2, salvo que sea $u \in C^0(\overline{B}(0;R))$.

Más precisamente, lo que queda por demostrar es que, para cada $\xi_0 \in \partial B(0;R)$ y cada $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que

$$\xi \in B(0;R),\ |\xi - \xi_0| \le \delta \Rightarrow \left| \int_{\partial B(0;R)} H(x,\xi)\, g(x)\, d\Gamma(x) - g(\xi_0) \right| \le \varepsilon. \tag{2.34}$$

Fijemos $\xi_0 \in \partial B(0;R)$ y $\varepsilon > 0$. Existe $\delta_1 > 0$ tal que

$$x \in \partial B(0;R),\ |x - \xi_0| \le \delta_1 \Rightarrow |g(x) - g(\xi_0)| \le \varepsilon/2. \tag{2.35}$$

Sea $M = \max_{\partial B(0;R)} |g(x)|$. Gracias al aptdo. 5 de la proposición 2.2, sabemos que existe $\delta_2 > 0$ tal que

$$0 < H(x,\xi) \leq \frac{\varepsilon}{4M\omega_N R^{N-1}} \tag{2.36}$$

para $\xi \in B(0;R)$ con $|\xi - \xi_0| \leq \delta_2$ y $x \in \overline{B}(0;R) \setminus B(\xi_0;\delta_1)$. Si $\xi \in B(0;R)$, tenemos

$$\begin{aligned}\int_{\partial B(0;R)} H(x,\xi)\, g(x)\, d\Gamma(x) - g(\xi_0) &= \int_{\partial B(0;R)} H(x,\xi)\,(g(x) - g(\xi_0))\, d\Gamma(x) \\ &= \int_{\partial B(0;R)\cap\{\,|x-\xi_0|<\delta_1\,\}} H(x,\xi)\,(g(x) - g(\xi_0))\, d\Gamma(x) \\ &\quad + \int_{\partial B(0;R)\cap\{\,|x-\xi_0|\geq\delta_1\,\}} H(x,\xi)\,(g(x) - g(\xi_0))\, d\Gamma(x).\end{aligned}$$

Ahora, usando (2.35) en la penúltima integral y (2.36) en la última, se deduce inmediatamente (2.34).

Esto prueba el teorema. ■

Observación 2.6 Una consecuencia inmediata del resultado precedente es que, si $g \in C^0(\partial B(x_0;R))$, la única solución clásica del problema de Dirichlet

$$\begin{cases} -\Delta u = 0, & x \in B(x_0;R), \\ u = g(x), & x \in \partial B(x_0;R), \end{cases}$$

está dada por

$$u(\xi) = \begin{cases} \displaystyle\int_{\partial B(x_0;R)} H(x - x_0, \xi - x_0)\, g(x)\, d\Gamma(x) & \text{si } \ \xi \in B(x_0;R), \\ g(\xi) & \text{si } \ |\xi - x_0| = R. \end{cases}$$

Para terminar este parágrafo, enunciaremos un resultado de existencia y unicidad para el problema de Dirichlet para la EDP de Laplace

$$\begin{cases} -\Delta u = 0, & x \in \Omega, \\ u = g(x), & x \in \partial\Omega \end{cases} \tag{2.37}$$

en el caso general, con Ω un abierto conexo acotado de frontera $\partial\Omega \in C^{0,1}(\Omega)$.

Teorema 2.6 *Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ un abierto conexo acotado de frontera $\partial\Omega \in C^{0,1}(\Omega)$ y sea $g \in C^0(\partial\Omega)$. Entonces existe una única solución clásica u del problema* (2.37). *Esta función verifica $u \in C^\infty(\Omega) \cap C^0(\partial\Omega)$ y, de hecho, es analítica real en el abierto Ω.*

La demostración es mucho más complicada que la del teorema 2.5; puede consultarse, por ejemplo, en [9] y [11]. De hecho, como parece lógico y al contrario de lo que ocurre en el caso de una bola, en general no es posible construir explícitamente la solución de (2.37).[2]

[2]Este resultado será demostrado y analizado con detalle en la asignatura *Ampliación de Ecuaciones en Derivadas Parciales.*

2.5 Potenciales Newtonianos y el problema de Dirichlet para la ecuación de Poisson

El objetivo de este parágrafo es resolver el problema (2.1). Esto se hará a partir del teorema 2.6. Supondremos por tanto que $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ es un abierto conexo acotado de frontera $\partial\Omega \in C^{0,1}(\Omega)$ y $f \in C^0(\Omega)$ y $g \in C^0(\partial\Omega)$ son dadas.

Sabemos que existe una única solución del problema (2.37) para cada dato de Dirichlet continuo g. También sabemos que, caso de existir, la solución de (2.1) es única. Por tanto, nuestra tarea se reduce a demostrar que el problema

$$\begin{cases} -\Delta u = f(x), & x \in \Omega, \\ u = 0, & x \in \partial\Omega, \end{cases} \tag{2.38}$$

donde las condiciones de contorno son homogéneas, posee al menos una solución clásica.

Ahora bien, con f (sólo) continua, no siempre existe solución de (2.38). En efecto, sea por ejemplo $\Omega = B(0; 1/2)$ y

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x_2^2 - x_1^2}{2|x|^2\sqrt{-\log|x|}} \left(N + 2 - \dfrac{1}{2\log|x|} \right) & \text{si } \ 0 < |x| \leq 1/2, \\ 0 & \text{si } \ x = 0. \end{cases}$$

Entonces $f \in C^0(\overline{\Omega})$, pero el correspondiente problema (2.38) no posee solución clásica; para más detalles, véase [16].

En consecuencia, para un resultado de existencia de solución de (2.38) es preciso considerar funciones f más regulares. Recordemos a tal efecto la definición siguiente:

Definición 2.3 *Sean $f : \Omega \mapsto \mathbb{R}$, $D \subset \Omega$ y $a \in (0, 1]$. Se dice que f es Hölder-continua en D con exponente a si existe una constante $C > 0$ tal que*

$$|f(x) - f(x')| \leq C|x - x'|^a \quad \forall x, x' \in D.$$

Se dice que f es localmente Hölder-continua en Ω (con exponente a) si es Hölder-continua en todo compacto $K \subset \Omega$.

En lo que sigue, denotaremos $C^{0,a}_{\text{loc}}(\Omega)$ el conjunto de las funciones $f : \Omega \mapsto \mathbb{R}$ localmente Hölder-continuas en Ω con exponente a. No es difícil comprobar que se trata de un subespacio vectorial propio de $C^0(\Omega)$ y que, cuando $a = 1$, coincide con el subespacio formado por las funciones *localmente Lipschitz-continuas* en Ω. Además, se tienen las inclusiones

$$C^{0,a}_{\text{loc}}(\Omega) \subset C^{0,b}_{\text{loc}}(\Omega),$$

para $0 < b \leq a \leq 1$.

Definición 2.4 *Sea $f : \Omega \mapsto \mathbb{R}$ continua y acotada. Se llama potencial Newtoniano asociado a f a la función $N_f : \mathbb{R}^N \mapsto \mathbb{R}$, dada por*

$$N_f(\xi) = \int_\Omega K(x, \xi)\, f(x)\, dx \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^N,$$

donde K es la solución fundamental de la EDP de Laplace.

Dado que la función f es continua y acotada y que, para cada $\xi \in \mathbb{R}^N$, la función $K(\cdot,\xi)$ es localmente integrable en $\mathbb{R}^N$, la definición precedente tiene perfecto sentido.

Observación 2.7 Supongamos que (por ejemplo) $N = 3$ y un sólido ocupa el abierto conexo acotado Ω y posee densidad de masa f. Entonces la Mecánica Clásica nos dice que el campo de fuerzas gravitatorias generado por este sólido en cada punto de $\mathbb{R}^3$ está dado por $E = E(x)$, donde

$$E(x) = \nabla N_f(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}^3$$

y N_f es el potencial Newtoniano asociado a f. Una interpretación análoga puede darse cuando se habla de distribuciones de carga eléctrica.

Proposición 2.3 *Sean $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ un abierto acotado, $f : \Omega \mapsto \mathbb{R}$ una función continua y acotada y N_f el potencial Newtoniano asociado. Entonces $N_f \in C^1(\mathbb{R}^N)$ y se tiene*

$$\nabla N_f(\xi) = \int_\Omega \nabla_\xi K(x,\xi)\, f(x)\, dx \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^N. \tag{2.39}$$

Si, además, $f \in C^{0,a}_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ para algún $a \in (0,1]$, entonces $N_f \in C^2(\Omega) \cap C^1(\overline{\Omega})$ y se tiene

$$\Delta N_f = f \quad en \quad \Omega. \tag{2.40}$$

La demostración de este resultado reposa de manera esencial sobre las propiedades de la solución fundamental K y puede encontrarse en [9].

Como consecuencia de la proposición 2.3 y del teorema 2.6, obtenemos:

Teorema 2.7 *Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ un abierto conexo acotado de frontera $\partial\Omega \in C^{0,1}(\Omega)$ y sean $f \in C^{0,a}_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ acotada con $0 < a \le 1$ y $g \in C^0(\partial\Omega)$. Entonces existe una única solución clásica u del problema* (2.1).

Demostración: Veamos que existe solución de (2.38). Basta para ello introducir la función $u = v - N_f$, donde v es la solución clásica del problema

$$\begin{cases} -\Delta v = 0, & x \in \Omega, \\ v = N_f(x), & x \in \partial\Omega, \end{cases}$$

y N_f es el potencial Newtoniano de f. En efecto, tenemos por construcción que $u \in C^2(\Omega) \cap C^0(\overline{\Omega})$, $-\Delta u = \Delta N_f = f$ en Ω y $u = N_f - N_f = 0$ sobre $\partial\Omega$.

Esto prueba el teorema. ∎

Observación 2.8 En las condiciones del teorema 2.7, se tiene además que $u \in C^{2,a}_{\mathrm{loc}}(\Omega)$. En otras palabras, todas las derivadas parciales segundas $\partial^2_{x_i x_j} u$ pertenecen a $C^{0,a}_{\mathrm{loc}}(\Omega)$.

Observación 2.9 Se pueden probar además resultados adicionales de regularidad para (2.1). Así, en términos generales, si f es "más regular" que lo que se necesita en el teorema precedente, también la solución u lo es en Ω (en particular, si $f \in C^m(\Omega)$ para algún entero $m \ge 1$, entonces $u \in C^{m+2}(\Omega)$). Por otra parte, si f y $\partial\Omega$ son "más regulares" que lo que se precisa en el teorema 2.7, la solución u lo es en $\overline{\Omega}$.

Apéndice: Resultados auxiliares

Consideremos fijado un abierto conexo acotado $\Omega \subset \mathbb{R}^N$. Consideremos también fijado un sistema de coordenadas cartesianas sobre $\mathbb{R}^N$, de tal manera que cada punto $x \in \mathbb{R}^N$ se escribe en la forma $x = (x_1, \dots, x_N)$. Este sistema de coordenadas será denominado *sistema de referencia*.

Definición 2.5 *Sea $k \geq 0$ un entero. Se dice que Ω es de clase C^k, o bien que $\partial\Omega \in C^k$, si existe un número finito m de sistemas de coordenadas cartesianas en $\mathbb{R}^N$, dos números reales positivos α y β y m funciones a_r $(1 \leq r \leq m)$ que verifican lo siguiente:*

1. *Para cada $r = 1, \dots, m$, los puntos $x \in \mathbb{R}^N$ se escriben respecto del r-ésimo sistema de coordenadas en la forma*
$$y^r = (y_1^r, \dots y_{N-1}^r, y_N^r) = (z^r, y_N^r).$$
Aquí, y^r se obtiene a partir de las x_i mediante la relación
$$y^r = A_r(x) \equiv M^r x + b^r, \tag{2.41}$$
donde M^r es una matriz ortogonal de dimensión $N \times N$ con $\det M^r = 1$ y $b^r \in \mathbb{R}^N$.

2. *Si ponemos*
$$\Delta_r = \{\, z^r \in \mathbb{R}^{N-1} : |z_i^r| < \alpha \quad \forall i = 1, \dots, N-1 \,\},$$
entonces $a_r \in C^k(\overline{\Delta}_r)$, los conjuntos
$$\Lambda_r = A_r^{-1}(\{\, (z^r, x_N^r) \in \mathbb{R}^N : z^r \in \Delta_r, \quad x_N^r = a_r(z^r) \,\}),$$
verifican $\cup_{r=1}^m \Lambda_r = \partial\Omega$ y los conjuntos
$$U_r^+ = A_r^{-1}(\{\, (z^r, x_N^r) \in \mathbb{R}^N : z^r \in \Delta_r, \quad a_r(z^r) < x_N^r < a_r(z^r) + \beta \,\})$$
y
$$U_r^- = A_r^{-1}(\{\, (z^r, x_N^r) \in \mathbb{R}^N : z^r \in \Delta_r, \quad a_r(z^r) - \beta < x_N^r < a_r(z^r) \,\})$$
verifican $U_r^+ \subset \Omega$ y $U_r^- \subset \mathbb{R}^N \setminus \Omega$ para todo $r = 1, \dots, m$.

Esta definición está tomada de [13] y de [15]. Cuando se cumple, se suele decir que $\partial\Omega$ es una *variedad diferenciable de clase C^k* y que Ω está situado *localmente a un lado de su frontera*.

Si Ω es de clase C^k para todo $k \geq 0$, se dice que es de clase C^∞. Por ejemplo, toda bola abierta de $\mathbb{R}^N$ es un abierto de clase C^∞.

Podemos también hablar de abiertos de clase $C^{k,a}$ para cada entero $k \geq 0$ y cada número real $a \in (0, 1]$:

Definición 2.6 *Sean $k \geq 0$ un entero y a un número real, con $0 < a \leq 1$. Se dice que Ω es de clase $C^{k,a}$ si cumple la definición 2.5 con funciones $a_r \in C^{k,a}(\overline{\Delta}_r)$.*

Esto significa que las $a_r \in C^k(\overline{\Delta}_r)$ y que, además, sus derivadas de orden k son Hölder-continuas en $\overline{\Delta}_r$ con exponente a. En otras palabras, existe una constante $C > 0$ tal que, si $D^k a_r$ es una cualquiera de estas derivadas, entonces
$$|D^k a_r(z^r) - D^k a_r(w^r)| \leq C|z^r - w^r|^a \quad \forall z^r, w^r \in \overline{\Delta}_r.$$

Obviamente, si Ω es de clase $C^{k,a}$, también es de clase $C^{j,b}$ para cada j y cada b que verifiquen $j+b \leq k+a$.

Cuando Ω es (como mínimo) un abierto de clase $C^{0,1}$, se puede hablar del vector normal unitario "en casi todo punto" de $\partial\Omega$:

Definición 2.7 *Sea Ω un abierto de clase $C^{0,1}$ y sea $x \in \partial\Omega$. Con la notación utilizada en la definición 2.5, supongamos que $x \in \Lambda_r$ y $x = A_r^{-1}(y^r, a_r(y^r))$, donde $y^r \in \Delta_r$ es un punto de diferenciabilidad de a_r. Sea $q(x)$ el vector cuyas $N-1$ primeras componentes son las derivadas $\partial_i a_r(y^r)$ $(1 \leq i \leq N-1)$ y cuya N-ésima componente vale -1. Entonces se llama vector normal unitario exterior a Ω en el punto x al vector*

$$n(x) = \frac{1}{|q(x)|}(M^r)^{-1}q(x). \tag{2.42}$$

Recordemos que, si la función a_r es como en la definición precedente, existen las derivadas parciales primeras de a_r respecto de todas las variables $y_1^r, \dots, y_{N-1}^r$ c.p.d., esto es, en todo punto de Δ_r salvo a lo sumo en un conjunto de medida de Lebegue $(N-1)$-dimensional nula. Además, en esta situación, las funciones $\partial_i a_r$, definidas en casi todo Δ_r y con valores en $\mathbb{R}$, son medibles y acotadas. Para una demostración de estas afirmaciones, véase por ejemplo [14] y [15].

Se puede comprobar que la definición precedente de $n(x)$ es correcta e independiente de los sistemas de referencia utilizados en las definiciones 2.5 y 2.6 para describir $\partial\Omega$. También se puede probar que (2.42) corresponde a la noción geométrica habitual de vector normal unitario en x dirigido hacia el exterior de Ω.

Sea Ω un abierto de clase $C^{0,1}$. Con la notación de la definición 2.5, sea ψ_r para cada $r = 1, \dots, m$ la siguiente función:

$$\psi_r(y^r) = \left(1 + \sum_{i=1}^{N-1} (\partial_i a_r(y^r))^2\right)^{1/2} \quad \text{c.p.d. en} \quad \Delta_r. \tag{2.43}$$

Dada una función $g \in C^0(\partial\Omega)$, por coherencia con las definiciones usuales, es natural definir la integral de g sobre Δ_r como sigue:

$$\int_{\Delta_r} g(x)\, d\Gamma(x) = \int_{\Delta_r} g(A_r^{-1}(y^r, a_r(y^r)))\, \psi_r(y^r)\, dy^r.$$

No obstante, no es posible extender directamente esta fórmula de manera que proporcione la integral de g en toda la frontera $\partial\Omega$, dado que los Λ_r no pueden ser disjuntos dos a dos.

Para superar esta dificultad, procederemos como sigue. Pongamos $U_r = U_r^+ \cup \Lambda_r \cup U_r^-$ para cada r. Entonces $\{U_r\}_{1 \leq r \leq m}$ es un *recubrimiento abierto* de $\partial\Omega$.

Sea $\{\varphi_r\}_{1 \leq r \leq m}$ una *partición de la unidad* en $\partial\Omega$ subordinada a este recubrimiento. Esto significa que las φ_r verifican

$$\begin{cases} \varphi_r \in C^\infty(\mathbb{R}^N), \quad \overline{\{\, x \in \mathbb{R}^N : \varphi_r(x) \neq 0 \,\}} \subset U_r, \\ 0 \leq \varphi_r \leq 1 \ \text{ en } \ \mathbb{R}^N, \quad \sum_{r=1}^m \varphi_r = 1 \ \text{ sobre } \ \partial\Omega \end{cases} \tag{2.44}$$

(la existencia de particiones de la unidad subordinadas a recubrimientos abiertos está demostrada por ejemplo en [1] y [5]).

Definición 2.8 *Sean Ω un abierto de clase $C^{0,1}$ y $g \in C^0(\partial\Omega)$. Con la notación precedente, diremos que la integral de g sobre $\partial\Omega$ (respecto de la medida superficial $d\Gamma$) es la cantidad siguiente:*

$$\int_{\partial\Omega} g(x)\, d\Gamma(x) = \sum_{r=1}^{m} \int_{\Delta_r} g(A_r^{-1}(y^r, a_r(y^r)\varphi_r(A_r^{-1}(y^r, a_r(y^r))\, \psi_r(y^r)\, dy^r.$$

Se puede demostrar que la definición precedente es correcta, independiente de la partición de la unidad elegida de modo que se tenga (2.44) y de los sistemas de referencia elegidos para describir $\partial\Omega$.

La noción de integral de superficie que precede corresponde en realidad a la integración respecto de una medida positiva $d\Gamma$, definida sobre una σ-álgebra adecuada Σ de partes de $\partial\Omega$.

Más precisamente, supongamos de nuevo que Ω es de clase $C^{0,1}$ y supongamos fijados unos sistemas de referencia y una partición de la unidad como los anteriores. Diremos que el conjunto $W \subset \partial\Omega$ es $d\Gamma$-*medible* si todos los

$$W_r = \{\, y^r \in \Delta_r : (y^r, a_r(y^r)) \in A_r(W)\,\}$$

son medibles para la medida de Lebesgue en $\mathbb{R}^{N-1}$. Denotemos Σ la familia de los conjuntos $W \subset \partial\Omega$ que son $d\Gamma$-medibles y pongamos

$$d\Gamma(W) = \sum_{r=1}^{m} \int_{W_r} \varphi_r(A_r^{-1}(y^r, a_r(y^r))\, \psi_r(y^r)\, dy^r \quad \forall W \in \Sigma.$$

Entonces Σ es un σ-álgebra de partes de $\partial\Omega$ y $d\Gamma$ es una medida positiva finita sobre Σ. De nuevo, las definiciones de Σ y $d\Gamma$ son independientes de las elecciones de los sistemas de referencia y de la partición de la unidad.

Además, una función $g : \partial\Omega \mapsto \mathbb{R}$ es medible (resp. integrable) respecto de la medida $d\Gamma$ si y sólo si las funciones

$$y^r \mapsto g(A_r^{-1}(y^r, a_r(y^r))\varphi_r(A_r^{-1}(y^r, a_r(y^r))$$

son medibles (resp. integrables) respecto de la medida de Lebesgue. Cuando $g : \partial\Omega \mapsto \mathbb{R}$ es integrable, su integral respecto de $d\Gamma$ viene dada por la cantidad indicada en la definición 2.8.

Señalemos finalmente que, como consecuencia de lo que precede, tiene sentido hablar de los espacios $L^p(\partial\Omega, \Sigma, d\Gamma)$, que denotaremos más brevemente $L^p(\partial\Omega)$ y serán considerados en el tema 3.

Tema 3

El teorema de Lax-Milgram y la formulación débil de problemas elípticos de segundo orden

Como se ha indicado con anterioridad, existen razones que aconsejan "debilitar" el concepto de solución utilizado en el tema 2 para resolver el problema de Dirichlet para la ecuación de Poisson y otras EDPs similares: por una parte, los resultados posibles son válidos sólo en un número muy reducido de casos particulares; por otra, los problemas con origen en las aplicaciones conducen a EDPs con coeficientes poco regulares (incluso discontinuos). Para cumplir este objetivo, debemos recurrir a una formulación diferente que reposa sobre ciertos elementos y resultados del Análisis Funcional.

3.1 Operadores lineales continuos en espacios de Hilbert

Sean X e Y dos espacios normados y denotemos $\|\cdot\|$ indistintamente las normas de X y de Y.[1] Consideraremos aplicaciones $T : X \mapsto Y$ lineales y continuas (también llamadas *operadores lineales continuos*).

Recordemos que si $T : X \mapsto Y$ es lineal, entonces es continua si y sólo si es *acotada*, es decir, si

$$\exists M > 0 \text{ tal que } \|Tx\| \leq M\|x\| \text{ para cada } x \in X.$$

El conjunto $\mathcal{L}(X;Y)$ de los operadores lineales continuos $T : X \mapsto Y$ es un espacio vectorial para las operaciones habituales. En este espacio vectorial,

$$\|T\|_{\mathcal{L}} := \sup_{x\in X, x\neq 0} \frac{\|Tx\|}{\|x\|} = \sup_{\|x\|\leq 1} \|Tx\| = \sup_{\|x\|=1} \|Tx\|$$

[1] A menos que se indique lo contrario, todos los espacios vectoriales que siguen son reales.

es una norma. Así, se puede hablar del *espacio normado de los operadores lineales continuos* de X en Y, que de nuevo denotaremos $\mathcal{L}(X;Y)$.

Obsérvese que si Y es un *espacio de Banach* (es decir, un espacio normado completo), entonces $\mathcal{L}(X;Y)$ también lo es.

Cuando $X = Y$, pondremos $\mathcal{L}(X)$ en vez de $\mathcal{L}(X;X)$. En el caso particular en que $Y = \mathbb{R}$, el espacio (de Banach) $\mathcal{L}(X;\mathbb{R})$ se denota X' y se denomina *dual topológico* (o simplemente dual) de X.

Recordemos que, si $X = H$ es un espacio de Hilbert (esto es, se trata de un espacio normado completo cuya norma es inducida por un producto escalar), entonces H puede identificarse algebraica y topológicamente con su dual. Esto es justamente lo que dice el *teorema de representación de Riesz*, que enunciamos a continuación:

Teorema 3.1 *Sea H un espacio de Hilbert de producto escalar $(\cdot\,,\cdot)$ y sea $f \in H'$. Entonces existe un único $x_f \in H$ tal que*

$$f(y) = (x_f, y) \quad \forall y \in H. \tag{3.1}$$

Además, la aplicación $f \mapsto x_f$ es un isomorfismo isométrico de H' sobre H.

Para la demostración, véase por ejemplo [3]. Como consecuencia de este resultado, cuando sea conveniente, podemos *identificar* un espacio de Hilbert H con su dual H'.

Definición 3.1 *Sean H y G dos espacios de Hilbert cuyos productos escalares serán denotados indistintamente $(\cdot\,,\cdot)$ y sea $T \in \mathcal{L}(H;G)$. Se llama operador adjunto de T al único operador $T^* \in \mathcal{L}(G;H)$ que verifica*

$$(Tx, y) = (x, T^*y) \quad \forall x \in H, \quad \forall y \in G. \tag{3.2}$$

Si $H = G$ y $T^* = T$, se dice que T es autoadjunto.

Comprobemos que esta definición es correcta, es decir, que fijados H, G y T existe un único $T^* \in \mathcal{L}(G;H)$ que verifica (3.2).

Sea $y \in G$. Entonces la aplicación $x \mapsto (Tx, y)$ es lineal continua de $H \mapsto \mathbb{R}$. Llamémosla f_y. Entonces $f_y \in H'$ y por el teorema 3.1 existe un único punto de H, denotado m_y, tal que

$$(m_y, x) = f_y(x) = (Tx, y) \quad \forall x \in H. \tag{3.3}$$

Pongamos $T^*y = m_y$ para cada $y \in Y$. Entonces la aplicación $T^* : G \mapsto H$ está bien definida, es lineal y verifica

$$\|T^*y\| = \|f_y\| = \sup_{\|x\| \le 1} |(m_y, x)| = \sup_{\|x\| \le 1} |(Tx, y)| \le \|T\|\,\|y\| \quad \forall y \in G$$

y

$$(T^*y, x) = f_y(x) = (Tx, y) \quad \forall x \in H, \quad \forall y \in G.$$

Esto prueba que existe al menos un operador en $T^* \in \mathcal{L}(G;H)$ para el que se tiene (3.2). Además, si $S \in \mathcal{L}(G;H)$ es otro operador con esta propiedad, entonces

$$(Sy, x) = (y, Tx) = (T^*y, x) \quad \forall x \in H, \quad \forall y \in G,$$

de donde

$$Sy = T^*y \quad \forall y \in G$$

y necesariamente $S = T^*$. Así pues, la definición 3.1 es correcta.

Obviamente, el concepto de operador adjunto generaliza el concepto de *matriz traspuesta.* Se tiene la proposición siguiente, cuya demostración es inmediata:

Proposición 3.1 *Sean H y G dos espacios de Hilbert y sea $T \in \mathcal{L}(H;G)$. Denotemos I_H el operador identidad en H. Entonces:*

1. $I_H^* = I_H$.
2. $(T^*)^* = T$ *y* $\|T^*\| = \|T\|$.
3. *Si* $S \in \mathcal{L}(H;G)$ *y* $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, *entonces* $(\alpha T + \beta S)^* = \alpha T^* + \beta S^*$.
4. *Si* F *es otro espacio de Hilbert y* $S \in \mathcal{L}(G;F)$, *entonces* $(S \circ T)^* = T^* \circ S^*$.
5. T *es biyectivo si y sólo si* T^* *lo es. En tal caso,* $(T^{-1})^* = (T^*)^{-1}$.

Más adelante, en el ejemplo 3.3, presentaremos un operador lineal continuo no trivial y su adjunto.

3.2 El teorema de la proyección y el teorema de Lax-Milgram

Sean H un espacio de Hilbert y $A \subset H$ un subconjunto no vacío. Por definición, el *ortogonal* de A es el conjunto

$$A^\perp = \{\, x \in H : (x,y) = 0 \ \ \forall y \in A \,\}.$$

Es fácil probar que $A^\perp$ es un subespacio cerrado de H, que $A^\perp = \overline{A}^{\perp}$ y que $A^\perp \cap A \subset \{0\}$.

El primer resultado principal de este parágrafo es el *teorema de la proyección sobre un convexo* y dice lo siguiente:

Teorema 3.2 *Sean H un espacio de Hilbert, $K \subset H$ un convexo cerrado no vacío y $x_0 \in H$. Entonces existe un único punto $\hat{x}$ que verifica*

$$\|\hat{x} - x_0\| = \inf_{x \in K} \|x - x_0\|, \quad \hat{x} \in K. \tag{3.4}$$

Además, $\hat{x}$ es el único punto de H que verifica

$$\begin{cases} \hat{x} \in K, \\ (x_0 - \hat{x}, x - \hat{x}) \le 0 \quad \forall x \in K. \end{cases} \tag{3.5}$$

Demostración: La existencia y unicidad de solución de (3.4) es consecuencia del teorema 3.14 (véase el Apéndice a este tema; obsérvese que estamos minimizando una función estrictamente convexa, continua y *coerciva* en un convexo cerrado). Veamos que (3.4) y (3.5) son equivalentes.

Si $\hat{x}$ verifica (3.4), entonces para cada $x \in K$ y cada $t \in (0,1)$, se tiene que

$$\begin{aligned}\|\hat{x} - x_0\|^2 &\le \|(tx + (1-t)\hat{x}) - x_0\|^2 \\ &= \|\hat{x} - x_0\|^2 - 2t(x_0 - \hat{x}, x - \hat{x}) + t^2\|\hat{x} - x\|^2,\end{aligned}$$

de donde

$$2t(x_0 - \hat{x}, x - \hat{x}) \le t^2\|x - \hat{x}\|^2.$$

Dividiendo por t y haciendo tender t a 0, obtenemos (3.5).

Recíprocamente, si $\hat{x}$ verifica (3.5), para cada $x \in K$ se tiene

$$\begin{aligned}\|\hat{x} - x_0\|^2 &= (\hat{x} - x_0, \hat{x} - x) + (\hat{x} - x_0, x - x_0) \\ &\le (\hat{x} - x_0, x - x_0) \le \|\hat{x} - x_0\|\,\|x - x_0\|.\end{aligned}$$

Por tanto, también tenemos (3.4). ∎

Observación 3.1 La caracterización (3.5) de $\hat{x}$ posee una sencilla interpretación geométrica: Por ejemplo, cuando $H = \mathbb{R}^N$ con la distancia Euclídea, $\hat{x}$ es el punto de K situado a la menor distancia posible de x_0. Por este motivo, $\hat{x}$ se denomina *proyección de x_0 sobre K*.

Observación 3.2 El teorema 3.2 puede ser también mirado como un resultado de existencia y unicidad de solución de (3.5).

Ejemplo 3.1 Sean H un espacio de Hilbert, $u \in H$ y $K = \overline{B}(u; R)$ (la bola cerrada de centro u y radio R). Sea $x_0 \in H$. Entonces, si $x_0 \in K$, está claro que la correspondiente proyección es $\hat{x} = x_0$. Por el contrario, si $x_0 \notin K$, $\hat{x}$ viene dado como sigue:

$$\hat{x} = u + \frac{R}{\|x_0 - u\|}\,(x_0 - u).$$

Como caso particular del teorema 3.2, tenemos:

Teorema 3.3 *Sean H un espacio de Hilbert, $M \subset H$ un subespacio cerrado y $x_0 \in H$. Entonces existe un único punto $\hat{x}$ que verifica*

$$\|\hat{x} - x_0\| = \inf_{x \in M} \|x - x_0\|, \quad \hat{x} \in M. \tag{3.6}$$

Además, $\hat{x}$ es el único punto de H que verifica

$$\begin{cases} \hat{x} \in M, \\ x_0 - \hat{x} \in M^\perp. \end{cases} \tag{3.7}$$

Y una reformulación del teorema 3.3 es el siguiente:

Teorema 3.4 *Sean H un espacio de Hilbert, $M \subset H$ un subespacio cerrado y $x_0 \in H$. Entonces existen dos únicas aplicaciones lineales $P : H \mapsto M$ y $Q : H \mapsto M^\perp$ tales que*

$$x = Px + Qx \quad \forall x \in H.$$

Estas aplicaciones tienen las propiedades siguientes:

1. *$P, Q \in \mathcal{L}(H)$ y $\|P\| = \|Q\| = 1$.*

2. $x \in M$ *si y sólo si* $Px = x$ *y* $Qx = 0$. *Análogamente,* $x \in M^\perp$ *si y sólo si* $Px = 0$ *y* $Qx = x$.

3. $\|x - Px\| = \inf_{m \in M} \|x - m\|$ *para cada* $x \in H$.

Observación 3.3 El operador P del teorema 3.4 verifica

$$P \circ P = P, \quad P^* = P. \tag{3.8}$$

Lo mismo le ocurre al operador Q. Diremos que P (resp. Q) es el *operador de proyección ortogonal* de H sobre M (resp. sobre $M^\perp$).

Corolario 3.1 *Sean H un espacio de Hilbert y $M \subset H$ un subespacio cerrado. Entonces H es la suma directa ortogonal de M y $M^\perp$, es decir, todo punto de H se puede descomponer de una única forma en la suma de un elemento de M y otro de $M^\perp$.*

Ejemplo 3.2 Sea H un espacio de Hilbert, sean $u, v \in H$ linealmente independientes y sea M el subespacio de H generado por u y v. Sea $x_0 \in H$ un punto dado. Entonces la proyección ortogonal de x_0 sobre M es

$$\hat{x} = Px_0 = au + bv,$$

donde a y b están caracterizados por verificar el sistema

$$\begin{bmatrix} (u,u) & (u,v) \\ (v,u) & (v,v) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (x_0,u) \\ (x_0,v) \end{bmatrix}.$$

Corolario 3.2 *Sean H un espacio de Hilbert y $M \subset H$ un subespacio. Entonces M es denso en H si y sólo si $M^\perp = \{0\}$.*

Observación 3.4 Como consecuecia de este corolario, si H es un espacio de Hilbert y $A \subset H$, para que el espacio vectorial generado por A sea denso es necesario y suficiente que se tenga $A^\perp = \{0\}$.

El segundo resultado principal de esta sección es el *teorema de Lax-Milgram*. Como veremos, se trata de un resultado fundamental para el tratamiento de las EDPs de tipo elíptico. Para su formulación, necesitamos la definición siguiente:

Definición 3.2 *Sean H un espacio de Hilbert y $a(\cdot\,,\cdot) : H \times H \mapsto \mathbb{R}$ una forma bilineal. Se dice que $a(\cdot\,,\cdot)$ es acotada si*

$$\exists M > 0 \text{ tal que } |a(u,v)| \le M\|u\|\,\|v\| \quad \forall u, v \in H.$$

Se dice que $a(\cdot\,,\cdot)$ es coerciva (o H-elíptica) si

$$\exists \alpha > 0 \text{ tal que } a(v,v) \ge \alpha\|v\|^2 \quad \forall v \in H.$$

No es difícil probar que una forma bilineal $a(\cdot\,,\cdot) : H \times H \mapsto \mathbb{R}$ es acotada si y sólo si es continua (como aplicación del espacio producto $H \times H$ en $\mathbb{R}$).

Sea $a(\cdot\,,\cdot) : H \times H \mapsto \mathbb{R}$ una forma bilineal continua y coerciva. Entonces, gracias al teorema 3.1, sabemos que existe un único operador $A \in \mathcal{L}(H)$ que verifica

$$(Au, v) = a(u,v) \quad \forall u, v \in H. \tag{3.9}$$

Claramente, $(Av, v) \ge \alpha\|v\|^2$ para cada $v \in H$, de donde en particular

$$\|Av\| \ge \alpha\|v\| \quad \forall v \in H. \tag{3.10}$$

El teorema de Lax-Milgram nos dice que A es un isomorfismo:

Teorema 3.5 *Sean H un espacio de Hilbert y $a(\cdot\,,\cdot) : H \times H \mapsto \mathbb{R}$ una forma bilineal continua y coerciva. Entonces, para cada $f \in H'$, existe una única $\hat{u}$ que verifica*

$$a(\hat{u}, v) = f(v) \quad \forall v \in H, \quad \hat{u} \in H. \tag{3.11}$$

Además, si $a(\cdot\,,\cdot)$ es simétrica, entonces $\hat{u}$ está caracterizado por ser la única solución del problema de mínimos

$$\frac{1}{2}\, a(\hat{u}, \hat{u}) - f(\hat{u}) = \inf_{v \in H} \left(\frac{1}{2}\, a(v, v) - f(v) \right), \quad \hat{u} \in H. \tag{3.12}$$

Demostración: Sea $f \in H'$ y sea $u_f \in H$ el punto de H asociado a f por el teorema 3.1. Entonces (3.11) es equivalente a

$$A\hat{u} = u_f, \quad \hat{u} \in H, \tag{3.13}$$

donde A es el operador definido por (3.9).

Gracias a (3.10), la ecuación en H (3.13) posee a lo más una solución. Para demostrar que posee al menos una, veamos que el rango $R(A)$ de A es a la vez cerrado y denso en H.

Probar que $R(A)$ es denso equivale a probar que $R(A)^\perp = \{0\}$. Pero esto es inmediato: si $v \in R(A)^\perp$, entonces $0 = (Av, v) \geq \alpha \|v\|^2$, de donde $v = 0$.

Para probar que $R(A)$ es cerrado, supongamos que $u_n \in H$ para cada $n \geq 1$ y que $Au_n \to v$ en H y veamos que, en tal caso, $v \in R(A)$. Tenemos que

$$\alpha \|u_n - u_m\|^2 \leq (Au_n - Au_m, u_n - u_m) \leq \|Au_n - Au_m\|\, \|u_n - u_m\|,$$

de donde $\{u_n\}$ es una sucesión de Cauchy y necesariamente existe $u \in H$ tal que $u_n \to u$. Pero entonces $v = Au$ y en consecuencia $v \in R(A)$, como queríamos demostrar.

Para demostrar que $\hat{u}$ está caracterizado por (3.12) cuando $a(\cdot\,,\cdot)$ es simétrica, razonaremos como sigue. En primer lugar, si $\hat{u}$ verifica (3.11), entonces, para cada $v \in H$,

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} a(v, v) - f(v) &= \frac{1}{2} a(\hat{u}, \hat{u}) - f(\hat{u}) \\ &\quad + [a(\hat{u}, v - \hat{u}) - f(v - \hat{u})] + \frac{1}{2} a(v - \hat{u}, v - \hat{u}) \\ &\geq \frac{1}{2} a(\hat{u}, \hat{u}) - f(\hat{u}). \end{aligned}$$

Luego $\hat{u}$ verifica (3.12).

Recíprocamente, si tenemos (3.12), dados $v \in H$ y $\theta \in [0, 1]$, necesariamente

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} a(\hat{u}, \hat{u}) - f(\hat{u}) &\leq \frac{1}{2} a(\hat{u} + \theta v, \hat{u} + \theta v) - f(\hat{u} + \theta v) \\ &= \frac{1}{2} a(\hat{u}, \hat{u}) - f(\hat{u}) + \theta\, [a(\hat{u}, v) - f(v)] + \frac{\theta^2}{2} a(v, v), \end{aligned}$$

de donde

$$\theta\, [a(\hat{u}, v) - f(v)] + \frac{\theta^2}{2} a(v, v) \geq 0.$$

Dividiendo por θ y haciendo tender θ a cero, obtenemos

$$a(\hat{u}, v) - f(v) \geq 0$$

y, como esto debe ser cierto para todo $v \in H$, resulta finalmente (3.11). ■

Observación 3.5 De acuerdo con este resultado, para cada $f \in H'$ el problema (3.11) posee solución única $\hat{u}$. Se puede afirmar también que esta solución depende continuamente del dato f. En efecto, si $\hat{u}$ y $\hat{v}$ son las soluciones asociadas respectivamente a f y g tenemos que

$$\alpha\|\hat{u}-\hat{v}\|^2 \leq a(\hat{u}-\hat{v},\hat{u}-\hat{v}) = f(\hat{u}-\hat{v}) - g(\hat{u}-\hat{v}) \leq \|f-g\|\,\|\hat{u}-\hat{v}\|,$$

de donde

$$\|\hat{u}-\hat{v}\| \leq \frac{1}{\alpha}\,\|f-g\|. \tag{3.14}$$

3.3 Los espacios L^p. Propiedades elementales

En el resto de este tema, mientras no se advierta lo contrario, Ω denotará un abierto no vacío de de $\mathbb{R}^N$ ($N \geq 1$ es un entero).

Definición 3.3 *Sea $\varphi \in C^0(\Omega)$. Llamaremos soporte de φ (denotado* sop φ*), a la adherencia del conjunto $\{\, x \in \Omega : \varphi(x) \neq 0 \,\}$.*

El conjunto sop φ es un cerrado contenido en $\overline{\Omega}$. Necesitaremos considerar varios subespacios de $C^0(\Omega)$: $C_c^0(\Omega)$, $C_c^k(\Omega)$ y $\mathcal{D}(\Omega)$. Están definidos como sigue:

$$C_c^0(\Omega) = \{\, \varphi \in C^0(\Omega) : \text{sop}\ \varphi \text{ es un compacto de } \Omega \,\},$$

$$C_c^k(\Omega) = C_c^0(\Omega) \cap C^k(\Omega), \quad \mathcal{D}(\Omega) = C_c^0(\Omega) \cap C^\infty(\Omega).$$

Veamos que $\mathcal{D}(\Omega)$ es un espacio no trivial (de hecho, con gran variedad de funciones):

Lema 3.1 *Dados $x_0 \in \mathbb{R}^N$ y $r > 0$, existe una función $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^N)$ tal que $\varphi > 0$ en $B(x_0; r)$ y* sop $\varphi = \overline{B}(x_0; r)$.

La demostración es inmediata. En efecto, sea ψ la función de $C^\infty(\mathbb{R})$ dada por

$$\psi(s) = e^{1/s} 1_{\{s<0\}} \quad \forall s \in \mathbb{R}.$$

Entonces basta tomar $\varphi(x) \equiv \psi(|x-x_0|^2 - r^2)$.

A partir del lema 3.1 se obtiene el resultado siguiente, cuya demostración puede encontrarse en el Apéndice de este tema:

Proposición 3.2 *Dado un compacto no vacío $K \subset \Omega$, existe una función $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ tal que $0 \leq \varphi \leq 1$ y $\varphi = 1$ en un entorno de K.*

Recordaremos a continuación algunas nociones y resultados relacionados con los espacios L^p. Para más detalles y demostraciones completas de lo que sigue, véase por ejemplo [14].

Denotaremos $\mathcal{M}(\Omega)$ el espacio vectorial de las funciones $v : \Omega \mapsto \mathbb{R}$ que son *medibles.* Si $v \in \mathcal{M}(\Omega)$ y es no negativa, se puede hablar de su *integral en* Ω respecto de la medida de Lebesgue (finita o no). En ambos casos, ésta se denota

$$\int_\Omega v(x)\,dx. \tag{3.15}$$

Si $v \in \mathcal{M}(\Omega)$, se dice que v es integrable si las funciones $v_+ = \max(v, 0)$ y $v_- = \max(-v, 0)$ (que son medibles y no negativas) poseen integral finita. En tal caso, llamaremos *integral de v en Ω* al número real

$$\int_\Omega v(x)\, dx = \int_\Omega v_+(x)\, dx - \int_\Omega v_-(x)\, dx. \tag{3.16}$$

Denotaremos $\mathcal{L}^1(\Omega)$ el subconjunto de $\mathcal{M}(\Omega)$ constituido por las funciones medibles e integrables.

Dada $v \in \mathcal{M}(\Omega)$, se tiene que $v \in \mathcal{L}^1(\Omega)$ si y sólo si $|v| \in \mathcal{L}^1(\Omega)$ y esto ocurre si y sólo si

$$\int_\Omega |v(x)|\, dx < +\infty.$$

Por tanto,

$$\mathcal{L}^1(\Omega) = \{\, v \in \mathcal{M}(\Omega) : \int_\Omega |v(x)|\, dx < +\infty \,\}.$$

Más generalmente, para cada $p \in [1, +\infty)$, denotaremos $\mathcal{L}^p(\Omega)$ el siguiente conjunto

$$\mathcal{L}^p(\Omega) = \{\, v \in \mathcal{M}(\Omega) : \int_\Omega |v(x)|^p\, dx < +\infty \,\}.$$

Para cada p, $\mathcal{L}^p(\Omega)$ es un subespacio vectorial de $\mathcal{M}(\Omega)$. Esto es consecuencia de la llamada *desigualdad triangular* (o desigualdad de Minkowski):

$$\left(\int_\Omega |u+v|^p\, dx \right)^{1/p} \le \left(\int_\Omega |u|^p\, dx \right)^{1/p} + \left(\int_\Omega |v|^p\, dx \right)^{1/p} \tag{3.17}$$

para cada $u, v \in \mathcal{L}^p(\Omega)$.

Sea $\mathcal{N}$ el subespacio de $\mathcal{M}(\Omega)$ formado por las funciones que se anulan c.p.d. en Ω. Entonces $\mathcal{N} \subset \mathcal{L}^p(\Omega)$ para cada p y, dada $v \in \mathcal{L}^p(\Omega)$, tenemos que $v \in \mathcal{N}$ si y sólo si

$$\int_\Omega |v|^p\, dx = 0.$$

Para poder trabajar en un marco funcional adecuado, nos interesará considerar el espacio-cociente $M(\Omega) = \mathcal{M}(\Omega)/\mathcal{N}$ (con las operaciones suma y producto por un escalar inducidas por las operaciones de $\mathcal{M}(\Omega)$ del modo habitual).

Obsérvese que $C^0(\Omega) \subset \mathcal{M}(\Omega)$ y que dos funciones de $C^0(\Omega)$ que coinciden c.p.d. necesariamente coinciden en todo punto $x \in \Omega$. Por tanto, no hay ambigüedad al identificar cada función de $C^0(\Omega)$ con la clase de $M(\Omega)$ a la que pertenece y podemos admitir que $C^0(\Omega)$ es un subespacio de $M(\Omega)$.

Si dos funciones de $\mathcal{M}(\Omega)$ coinciden c.p.d. en Ω y una de ellas es integrable, también lo es la otra y sus integrales coinciden. Por tanto, tiene sentido considerar los espacios-cociente $L^p(\Omega) = \mathcal{L}^p(\Omega)/\mathcal{N}$. Para cada "clase" $v \in L^p(\Omega)$, la integral de $|v|^p$ en Ω es por definición la integral en el sentido que precede de cualquiera de las funciones de la clase $|v|^p$.

Utilizaremos de nuevo la notación

$$\int_\Omega |v|^p\, dx$$

para designar la integral en Ω de una clase $v \in L^p(\Omega)$. Así,

$$L^p(\Omega) = \{ \, v \in M(\Omega) : \int_\Omega |v(x)|^p \, dx < +\infty \, \}.$$

Por supuesto, la desigualdad (3.17) es también cierta cuando $u, v \in L^p(\Omega)$. En consecuencia, $L^p(\Omega)$ es un espacio normado para la norma $\| \cdot \|_{L^p}$, definida por

$$\|v\|_{L^p} = \left(\int_\Omega |v|^p \, dx \right)^{1/p} \quad \forall v \in L^p(\Omega).$$

Se puede demostrar que este espacio normado, de nuevo denotado $L^p(\Omega)$, es completo. En particular, dado que la norma $\| \cdot \|_{L^2}$ está inducida por el producto escalar $(\cdot\,,\cdot)_{L^2}$, donde

$$(u, v)_{L^2} = \int_\Omega uv \, dx \quad \forall u, v \in L^2(\Omega),$$

resulta que $L^2(\Omega)$ es un espacio de Hilbert.

Por otra parte, denotaremos $\mathcal{L}^\infty(\Omega)$ el subespacio de $\mathcal{M}(\Omega)$ constituido por las funciones medibles acotadas y pondremos $L^\infty(\Omega) = \mathcal{L}^\infty(\Omega)/\mathcal{N}$. En este espacio vectorial, consideraremos la norma $\| \cdot \|_{L^\infty}$, con

$$\|v\|_{L^\infty} = \inf \{ \, M > 0 : |v(x)| \leq M \ \text{ c.p.d. en } \ \Omega \, \} \quad \forall v \in L^\infty(\Omega).$$

Con esta norma, $L^\infty(\Omega)$ es de nuevo un espacio de Banach.

Recordemos la siguiente propiedad, llamada *desigualdad de Hölder*, válida para cada $p \in [1, +\infty]$: *Si $u \in L^p(\Omega)$ y $v \in L^{p'}(\Omega)$, entonces $uv \in L^1(\Omega)$ y*

$$\int_\Omega |uv| \, dx \leq \|u\|_{L^p} \|v\|_{L^{p'}}. \tag{3.18}$$

Aquí, p' es el exponente conjugado de p, definido por la igualdad

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1. \tag{3.19}$$

Recordemos también que, para cada $p \in [1, +\infty)$, se tiene la *propiedad de convergencia dominada* en $L^p(\Omega)$: *Si $\{u_n\}$ es una sucesión en $L^p(\Omega)$, existe el límite $\lim_{n\to\infty} u_n(x) = u(x)$ para x c.p.d. en Ω y existe una función $v \in L^p(\Omega)$ tal que $|u_n(x)| \leq v(x)$ c.p.d. en Ω para cada $n \geq 1$, entonces $u \in L^p(\Omega)$ y además*

$$\lim_{n\to\infty} \|u_n - u\|_{L^p} = 0.$$

Se tiene el resultado de densidad siguiente, cuya demostración se da en el Apéndice a este tema:

Teorema 3.6 *Para cada $p \in [1, +\infty)$, $\mathcal{D}(\Omega)$ es denso en $L^p(\Omega)$.*

Corolario 3.3 *Sea $u \in L^2(\Omega)$ tal que*

$$\int_\Omega u\varphi \, dx = 0 \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega).$$

Entonces $u = 0$ c.p.d.

Demostración: Gracias al teorema 3.6, $\mathcal{D}(\Omega)$ es un subespacio denso de $L^2(\Omega)$. Por tanto, $\mathcal{D}(\Omega)^\perp = \{0\}$ y, en las condiciones del corolario, $u \in \mathcal{D}(\Omega)^\perp$. ■

Observación 3.6 Este resultado también es cierto cambiando $L^2(\Omega)$ por $L^p(\Omega)$ con p cualquiera en $[1, +\infty]$. De hecho, veremos más adelante que es cierto pidiéndole a u tan sólo que pertenezca a un espacio adecuado que contiene a todos los $L^p(\Omega)$; véase la proposición 3.3.

Corolario 3.4 *Para cada $p \in [1, +\infty)$, $L^p(\Omega)$ es un espacio de Banach separable.*

Demostración: Sea $\{K_n\}$ una sucesión no decreciente de compactos contenidos en Ω con $\Omega = \bigcup_{n\geq 1} K_n$. Para cada $n \geq 1$, se considera el conjunto Z_n de las funciones polinómicas en K_n con coeficientes racionales. Dada $z \in Z_n$, designaremos $\tilde{z}$ la correspondiente función prolongada por cero a todo Ω y llamaremos Z al conjunto de las funciones $\tilde{z}$ obtenidas de este modo.

Es obvio que Z es numerable (es unión numerable de conjuntos numerables).

Por otra parte, Z es denso en $L^p(\Omega)$. En efecto, sean $v \in L^p(\Omega)$ y $\varepsilon > 0$. Gracias al teorema 3.6, sabemos que existe $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ tal que

$$\|v - \varphi\|_{L^p} \leq \frac{\varepsilon}{2}.$$

Sean $n \geq 1$ tal que K_n contiene al soporte de ϕ, c_n la medida (de Lebesgue) de K_n y $z \in Z_n$ tal que

$$\|\varphi - z\|_{C^0(K_n)} = \max_{x\in K_n} |\varphi(x) - z(x)| \leq \frac{\varepsilon}{2c_n^{1/p}}.$$

La existencia de z está garantizada por la densidad de Z_n en $C^0(K_n)$. Entonces tenemos que

$$\begin{aligned}\|v - \tilde{z}\|_{L^p} &\leq \|v - \varphi\|_{L^p} + \|\varphi - \tilde{z}\|_{L^p} \\ &\leq \frac{\varepsilon}{2} + \left(\int_{K_n} |\varphi(x) - z(x)|^p \, dx\right)^{1/p} \\ &\leq \varepsilon.\end{aligned}$$

■

Observación 3.7 El espacio de Banach $L^\infty(\Omega)$ no es separable. Para una demostración de esta afirmación, véase por ejemplo [3].

Con una demostración similar a la del teorema 3.6 (que también se presenta en el Apéndice), tenemos:

Teorema 3.7 *Sea $p \in [1, +\infty)$. Dada $\varphi \in C_c^1(\Omega)$, existe una sucesión $\{\varphi_n\}$ de funciones de $\mathcal{D}(\Omega)$ tales que*

$$\|\varphi_n - \varphi\|_{L^p} \to 0, \quad \|\partial_i\varphi_n - \partial_i\varphi\|_{L^p} \to 0 \quad \forall i = 1, \ldots, N. \tag{3.20}$$

Definición 3.4 *Sea $v \in M(\Omega)$. Se dice que v es localmente integrable en Ω si, para cada compacto $K \subset \Omega$, se tiene $v1_K \in L^1(\Omega)$. El conjunto de las (clases de) funciones v localmente integrables en Ω es un subespacio vectorial de $M(\Omega)$ y se denota $L^1_{\mathrm{loc}}(\Omega)$.*

Es claro que $C^0(\Omega) \subset L^1_{\rm loc}(\Omega)$ y que $L^p(\Omega) \subset L^1_{\rm loc}(\Omega)$ para cada $p \in [1, +\infty]$. El resultado siguiente es una importante generalización del corolario 3.3 y está demostrado en el Apéndice de este tema:

Proposición 3.3 *Sea $u \in L^1_{\rm loc}(\Omega)$ tal que*

$$\int_\Omega u\varphi \, dx = 0 \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega).$$

Entonces $u = 0$ c.p.d.

Una vez introducidos los espacios L^p, podemos dar un ejemplo no trivial de operador lineal continuo, llamado operador integral de Fredholm:

Ejemplo 3.3 Sea $K \in L^2((a,b) \times (a,b))$ una función dada. Por definición, el *operador integral de Fredholm en $L^2(a,b)$ de núcleo K* es el operador T_K dado como sigue:

$$T_K(\phi)(t) = \int_a^b K(t,s)\phi(s)\, ds \quad \text{c.p.d. en } (0,T), \quad \forall \phi \in L^2(a,b). \qquad (3.21)$$

No es difícil comprobar que $T_K \in \mathcal{L}(L^2(a,b))$. En efecto, se tiene

$$\int_a^b \left| \int_a^b K(t,s)\phi(s)\, ds \right|^2 dt \le \left(\int_a^b \int_a^b |K(t,s)|^2 \, ds \, dt \right) \left(\int_a^b |\phi(s)|^2 \, ds \right)$$

para cada $\phi \in L^2(a,b)$. Por otra parte, es inmediato que

$$T_K^*(\phi)(t) = \int_a^b K(s,t)\phi(s)\, ds \quad \text{c.p.d. en } (0,T), \quad \forall \phi \in L^2(a,b). \qquad (3.22)$$

En consecuencia, para que T_K sea autoadjunto, es necesario y suficiente que el núcleo K sea simétrico, esto es, que se tenga

$$K(t,s) = K(s,t) \quad \text{c.p.d. en } (0,T) \times (0,T).$$

■

3.4 Los espacios de Sobolev H^1, H^1_0 y H^{-1}

Comenzaremos este parágrafo definiendo un concepto de derivada parcial más general que el habitual:

Definición 3.5 *Sean $u \in L^1_{\rm loc}(\Omega)$ e $i \in \{1, \dots, N\}$. Se dice que u posee derivada generalizada de primer orden respecto de x_i en $L^1_{\rm loc}(\Omega)$ si existe una función $v_i \in L^1_{\rm loc}(\Omega)$ tal que*

$$\int_\Omega v_i \, \varphi \, dx = - \int_\Omega u \, \partial_i \varphi \, dx \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega). \qquad (3.23)$$

En tal caso, gracias a la proposición 3.3 la función v_i es única, se denota $\partial_i u$ y se denomina derivada generalizada de u respecto de x_i.

Observación 3.8 El concepto *derivada generalizada en* $L^1_{\text{loc}}(\Omega)$ es una particularización de otro concepto aún más útil e interesante: *la derivada en el sentido de las distribuciones.*[2] Así, dada $u \in L^1_{\text{loc}}(\Omega)$, se llama derivada de u en el sentido de las distribuciones respecto de x_i a la forma lineal $D_i u$, definida como sigue:

$$D_i u(\varphi) = -\int_\Omega u\, \partial_i \varphi \, dx \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega).$$

Si existe $\partial_i u \in L^1_{\text{loc}}(\Omega)$ tal que se tiene (3.23), entonces se pueden identificar $D_i u$ y $\partial_i u$ de modo que, en tal caso, la derivada de u en el sentido de las distribuciones "coincide" con la derivada generalizada en $L^1_{\text{loc}}(\Omega)$, esto es:

$$D_i u(\varphi) = \int_\Omega \partial_i u\, \varphi \, dx \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega).$$

Veamos a continuación que la definición 3.5 es coherente con la definición clásica de derivada parcial:

Proposición 3.4 *Sea $u \in C^0(\Omega)$ y supongamos que, en todo $x \in \Omega$, existe la derivada parcial habitual $\partial_i u(x)$ y que $\partial_i u \in C^0(\Omega)$. Entonces u posee derivada generalizada en $L^1_{\text{loc}}(\Omega)$ respecto de x_i y ésta coincide con $\partial_i u$.*

Demostración: Denotando $\partial_i u$ la derivada parcial de u en el sentido clásico, hay que demostrar que

$$\int_\Omega \partial_i u\, \varphi \, dx = -\int_\Omega u\, \partial_i \varphi \, dx \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega). \tag{3.24}$$

Sea $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$. Tenemos que $u\varphi$ posee derivada parcial respecto de x_i en Ω y que

$$\int_\Omega \partial_i (u\varphi) \, dx = \int_\Omega \partial_i u\, \varphi \, dx + \int_\Omega u\, \partial_i \varphi \, dx. \tag{3.25}$$

Veamos que el primer miembro de (3.25) es cero.

Para ello, denotemos $\widetilde{u\varphi}$ la prolongación por cero a todo $\mathbb{R}^N$ de la función $u\varphi$. Entonces, si $M > 0$ es suficientemente grande,

$$\int_\Omega \partial_i (u\varphi) \, dx = \int_{\mathbb{R}^N} \partial_i (\widetilde{u\varphi}) \, dx = \int_{\mathbb{R}^{N-1}} \left(\int_{-M}^{M} \partial_i (\widetilde{u\varphi}) \, dx_i \right) dx',$$

donde dx' denota el elemento de integración en $\mathbb{R}^{N-1}$. Pero esta última integral es cero, de donde se tiene el resultado deseado. ∎

Observación 3.9 Por supuesto, existen muchas funciones $u \in L^1_{\text{loc}}(\Omega)$ que no poseen derivada en el sentido clásico pero sí derivada generalizada en $L^1_{\text{loc}}(\Omega)$. Esto puede ocurrir incluso cuando $u \in C^0(\Omega)$. Un ejemplo es el siguiente: $N = 2$, $\Omega = (-1,1) \times (-1,1)$ y $u : \Omega \mapsto \mathbb{R}$ dada por

$$u(x_1, x_2) = \begin{cases} x_1 & \text{si } x_1 \geq 0, \\ 0 & \text{si } x_1 < 0. \end{cases}$$

[2]Esta noción es presentada y analizada en la asignatura *Ampliación de Ecuaciones en Derivadas Parciales.*

Por otra parte, también existen muchas funciones de $L^1_{\text{loc}}(\Omega)$ que no poseen derivada generalizada en $L^1_{\text{loc}}(\Omega)$. Por ejemplo, de nuevo con $N = 2$ y $\Omega = (-1,1) \times (-1,1)$, esto le ocurre a la función

$$v(x_1, x_2) = \begin{cases} 1 & \text{si } x_1 \geq 0, \\ 0 & \text{si } x_1 < 0. \end{cases}$$

Definición 3.6 *Se llama espacio de Sobolev $H^1(\Omega)$ al conjunto*

$$H^1(\Omega) = \{\, v \in L^2(\Omega) : \exists\, \partial_i v \in L^2(\Omega) \text{ para } 1 \leq i \leq N \,\}, \tag{3.26}$$

donde las derivadas se entienden en el sentido generalizado de la definición 3.5. Si $v \in H^1(\Omega)$, denotaremos ∇v (o bien Dv) al vector formado por las derivadas parciales generalizadas $\partial_i v$:

$$\nabla v = Dv = (\partial_1 v, \ldots, \partial_N v).$$

Diremos que ∇v es el gradiente de v.

Es inmediato que $H^1(\Omega)$ es un subespacio vectorial de $L^2(\Omega)$ que contiene a $C^1_c(\Omega)$ y que, si Ω es acotado, $C^1(\overline{\Omega}) \subset H^1(\Omega)$.

En el espacio $H^1(\Omega)$ se puede introducir un producto escalar "natural". En efecto, pongamos

$$(u, v)_{H^1} = (u, v)_{L^2} + (\nabla u, \nabla v)_{L^2} \quad \forall u, v \in H^1(\Omega). \tag{3.27}$$

Entonces $(\cdot\,,\cdot)_{H^1}$ es ciertamente un producto escalar.

Teorema 3.8 *Dotado del producto escalar $(\cdot\,,\cdot)_{H^1}$, $H^1(\Omega)$ se convierte en un espacio de Hilbert.*

Demostración: La norma inducida por (3.27) es

$$\|v\|_{H^1} = \left(\|v\|^2_{L^2} + \|\nabla v\|^2_{L^2}\right)^{1/2} \quad \forall v \in H^1(\Omega). \tag{3.28}$$

Tenemos que comprobar que toda sucesión de Cauchy para esta norma es convergente en $H^1(\Omega)$.

Sea entonces $\{u_n\}$ una tal sucesión. Claramente, $\{u_n\}$ y $\{\partial_i u_n\}$ $(1 \leq i \leq N)$ son sucesiones de Cauchy en $L^2(\Omega)$, de donde existen funciones $u, v_1, \ldots, v_N$ tales que

$$u_n \to u, \quad \partial_i u_n \to v_i \ \text{ en } L^2(\Omega) \quad (1 \leq i \leq N). \tag{3.29}$$

Veamos que, para cada i, v_i es la derivada generalizada de u, con lo cual quedará probado que $u \in H^1(\Omega)$ y que $u_n \to u$ en $H^1(\Omega)$.

Dados i y $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$, tenemos que

$$\int_\Omega \partial_i u_n \,\varphi\, dx = -\int_\Omega u_n \,\partial_i \varphi\, dx \tag{3.30}$$

para cada $n \geq 1$. Gracias a (3.29), podemos pasar al límite en (3.30) y deducir que

$$\int_\Omega v_i \,\varphi\, dx = -\int_\Omega u \partial_i \,\varphi\, dx. \tag{3.31}$$

Pero, como φ es arbitraria en $\mathcal{D}(\Omega)$, esto significa que u posee derivada generalizada en $L^2(\Omega)$ respecto de x_i. Esto prueba lo que queríamos. ∎

Teorema 3.9 *El espacio de Hilbert $H^1(\Omega)$ es separable.*

Demostración: Recordemos que el espacio de Hilbert $L^2(\Omega)$ es separable. Introduzcamos el espacio producto $Y = L^2(\Omega)^{N+1}$, dotado del producto escalar

$$((u_0, u_1, \dots, u_N), (v_0, v_1, \dots, v_N))_Y = \sum_{i=0}^{N} (u_i, v_i)_{L^2}.$$

Entonces Y es un espacio de Hilbert separable.

Sea ahora $J : H^1(\Omega) \mapsto Y$ la aplicación definida por

$$Jv = (v, \partial_1 v, \dots, \partial_n v) \quad \forall v \in H^1(\Omega),$$

que es lineal, continua, inyectiva e *isométrica*, es decir, verifica

$$\|Jv\|_Y = \|v\|_{H^1} \quad \forall v \in H^1(\Omega).$$

Los espacios $H^1(\Omega)$ y $R(J)$ son isomorfos e isométricos. En particular, $R(J)$ es un subespacio cerrado de Y y es por tanto separable. De donde $H^1(\Omega)$ es separable. ∎

Observación 3.10 En general, $\mathcal{D}(\Omega)$ no es denso en $H^1(\Omega)$. De hecho, $\mathcal{D}(\Omega)$ nunca es denso si Ω es acotado y su frontera es por ejemplo "de clase $C^{0,1}$". Sin embargo, sí lo es cuando $\Omega = \mathbb{R}^N$ (para la demostración, véase [3]). Por otra parte, si $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ es un abierto conexo acotado de frontera $\partial\Omega$ "de clase $C^{0,1}$", se puede demostrar que $\mathcal{D}(\overline{\Omega})$ (el espacio de las restricciones a Ω de las funciones de $\mathcal{D}(\mathbb{R}^N)$) es denso en $H^1(\Omega)$ (véase [5]).

Definición 3.7 *Llamaremos $H_0^1(\Omega)$ a la adherencia de $\mathcal{D}(\Omega)$ en $H^1(\Omega)$. Se trata por tanto de un subespacio cerrado de $H^1(\Omega)$ que, para el producto escalar de $H^1(\Omega)$, se convierte en un nuevo espacio de Hilbert separable.*

Observación 3.11 En virtud de la observación 3.10, $H_0^1(\mathbb{R}^N) = H^1(\mathbb{R}^N)$, pero esta igualdad no es cierta en general. Se puede demostrar que si $v \in H^1(\Omega)$ y existe un compacto $K \subset \Omega$ tal que $v = 0$ en $\Omega \setminus K$, entonces $v \in H_0^1(\Omega)$. También se puede demostrar que si $v \in H^1(\Omega) \cap C^0(\overline{\Omega})$ y $v|_{\partial\Omega} = 0$ entonces $v \in H_0^1(\Omega)$; véase [3].

Teorema 3.10 *Supongamos que $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ y que, o bien Ω es un abierto conexo acotado no vacío de frontera $\partial\Omega$ de clase $C^{0,1}$, o bien $\Omega = \mathbb{R}^N_+$. Existe una única aplicación $\gamma \in \mathcal{L}(H^1(\Omega); L^2(\partial\Omega))$ tal que*

$$\gamma\varphi = \varphi|_{\partial\Omega} \quad \forall \varphi \in C_c^1(\overline{\Omega}) \tag{3.32}$$

(recuérdese que $C_c^1(\overline{\Omega})$ es el espacio de las restricciones a Ω de las funciones de $C_c^1(\mathbb{R}^N)$). El espacio $R(\gamma)$ está estrictamente contenido en $L^2(\partial\Omega)$ y, por otra parte, $N(\gamma) = H_0^1(\Omega)$.

Además, se verifica la siguiente propiedad, llamada fórmula generalizada de integración por partes:

$$\int_\Omega u\, \partial_i v\, dx = -\int_\Omega \partial_i u\, v\, dx + \int_{\partial\Omega} \gamma u\, \gamma v\, n_i\, d\Gamma \quad \forall u, v \in H^1(\Omega). \tag{3.33}$$

El resultado precedente suele conocerse como *teorema de trazas en* $H^1(\Omega)$. La aplicación γ es por definición la *traza sobre* $\partial\Omega$ (también se dice que $\gamma(v)$ es la traza de v sobre $\partial\Omega$ y es costumbre escribir $v|_{\partial\Omega}$ en vez de $\gamma(v)$). En virtud de lo que precede, dada una función $v \in H^1(\Omega)$, decir que $v \in H_0^1(\Omega)$ es, de algún modo, asegurar que "v se anula sobre $\partial\Omega$" (obsérvese que, en principio, no tiene sentido hablar de los valores de v sobre $\partial\Omega$, dado que $\partial\Omega$ es un conjunto de medida nula).

Para una demostración del teorema 3.10, véase por ejemplo [5].[3]

Teorema 3.11 *Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ un abierto no vacío acotado al menos en una dirección. Entonces existe una constante positiva C (que sólo depende de Ω) tal que*

$$\int_\Omega |v|^2\,dx \le C\int_\Omega |\nabla v|^2\,dx \quad \forall v \in H_0^1(\Omega) \tag{3.34}$$

(desigualdad de Poincaré).

Demostración: Por densidad, basta probar (3.34) cuando $v \in \mathcal{D}(\Omega)$. Denotaremos también v la prolongación por cero de v a todo $\mathbb{R}^N$ (una función de $\mathcal{D}(\mathbb{R}^N)$).

No es restrictivo suponer que Ω es acotado en la dirección de x_1. Esto quiere decir que existe $M > 0$ tal que $\Omega \subset (-M, M) \times \mathbb{R}^{N-1}$. Sea $x = (x_1, \dots, x_N) \in \Omega$. Entonces

$$v(x) = \int_{-M}^{x_1} \partial_1 v(y_1, x_2, \dots, x_N)\,dy_1,$$

de donde

$$\begin{aligned} |v(x)|^2 &\le \left(\int_{-M}^{M} |\partial_1 v(y_1, x_2, \dots, x_N)|\,dy_1 \right)^2 \\ &\le 2M \int_{-M}^{M} |\partial_1 v(y_1, x_2, \dots, x_N)|^2\,dy_1. \end{aligned}$$

Integrando respecto de x en Ω, tenemos ahora:

$$\begin{aligned} \int_\Omega |v(x)|^2\,dx &\le 2M \int_\Omega \int_{-M}^{M} |\partial_1 v(y_1, x_2, \dots, x_N)|^2\,dy_1\,dx \\ &= 4M^2 \int_{\mathbb{R}^{N-1}} \int_{-M}^{M} |\partial_1 v(y_1, x_2, \dots, x_N)|^2\,dy_1\,dx', \end{aligned} \tag{3.35}$$

donde dx' denota el elemento de integración en $\mathbb{R}^{N-1}$ respecto de las variables $x_2, \dots, x_N$. De (3.35), se deduce fácilmente (3.34). ■

Obsérvese que la desigualdad (3.34) es falsa en general para las funciones de $H^1(\Omega)$.

Si el abierto Ω es acotado al menos en una dirección, tiene entonces sentido definir un nuevo producto escalar en $H_0^1(\Omega)$. En efecto, pongamos

$$(u, v)_{H_0^1} = (\nabla u, \nabla v)_{L^2} \quad \forall u, v \in H_0^1(\Omega). \tag{3.36}$$

[3] Este resultado será generalizado y estudiado con detalle en la asignatura Ampliación de Ecuaciones en Derivadas Parciales.

Entonces, gracias a (3.34), $(\cdot\,,\cdot)_{H_0^1}$ es un verdadero producto escalar en $H_0^1(\Omega)$ que induce en este espacio una norma $\|\cdot\|_{H_0^1}$ que es equivalente a la norma usual $\|\cdot\|_{H^1}$.

Definición 3.8 *Denominaremos $H^{-1}(\Omega)$ al dual topológico de $H_0^1(\Omega)$.*

Tenemos que $H^{-1}(\Omega)$ es un nuevo espacio de Hilbert, isomorfo e isométrico a $H_0^1(\Omega)$. El resultado que sigue proporciona una importante caracterización de $H^{-1}(\Omega)$:

Teorema 3.12 *Sean $f_0, f_1, \dots, f_N \in L^2(\Omega)$ y sea $F : H_0^1(\Omega) \mapsto \mathbb{R}$ la forma lineal definida como sigue:*

$$F(v) = \int_\Omega (f_0\, v + \sum_{i=1}^N f_i\, \partial_i v)\, dx \quad \forall v \in H_0^1(\Omega). \tag{3.37}$$

Entonces $F \in H^{-1}(\Omega)$. Además, si denotamos $\|\cdot\|_{H^{-1}}$ la norma en $H^{-1}(\Omega)$ inducida por la norma de $H^1(\Omega)$,

$$\|F\|_{H^{-1}} \leq \left(\sum_{i=0}^N \|f_i\|_{L^2}^2 \right)^{1/2}. \tag{3.38}$$

Recíprocamente, si $F \in H^{-1}(\Omega)$, existen $N+1$ funciones $f_0, f_1, \dots, f_N \in L^2(\Omega)$ tales que se tiene (3.37) *y*

$$\|F\|_{H^{-1}} = \left(\sum_{i=0}^N \|f_i\|_{L^2}^2 \right)^{1/2}. \tag{3.39}$$

Demostración: Supongamos en primer lugar dadas $f_0, f_1, \dots, f_N \in L^2(\Omega)$. Es entonces inmediato que la forma lineal F definida por (3.37) es continua. Por tanto, $F \in H^{-1}(\Omega)$. Además,

$$|F(v)| \leq \|f_0\|_{L^2}\|v\|_{L^2} + \sum_{i=1}^N \|f_i\|_{L^2}\|\partial_i v\|_{L^2} \leq \left(\sum_{i=0}^N \|f_i\|_{L^2}^2 \right)^{1/2} \|v\|_{H^1},$$

de donde tenemos (3.38).

Recíprocamente, sea $F \in H^{-1}(\Omega)$. Por el teorema 3.1, existe $u_F \in H_0^1(\Omega)$ tal que

$$\|u_F\|_{H^1} = \|F\|_{H^{-1}}, \quad (u_F, v)_{H^1} = F(v) \quad \forall v \in H_0^1(\Omega).$$

Tomando $f_0 = u_F$ y $f_i = \partial_i u_F$ para $1 \leq i \leq N$, tenemos (3.37) y (3.39). ∎

Observación 3.12 Si Ω es acotado al menos en una dirección, las afirmaciones que se hacen en el teorema 3.12 son ciertas con $f_0 = 0$ (en tal caso, en (3.39), $\|\cdot\|_{H^{-1}}$ debe denotar la norma en $H^{-1}(\Omega)$ inducida por $\|\cdot\|_{H_0^1}$).

Si $F \in H^{-1}(\Omega)$ está definida por (3.37), donde las $f_0, f_1, \dots, f_N$ son funciones de $L^2(\Omega)$, pondremos

$$F = f_0 - \sum_{i=1}^N \partial_i f_i. \tag{3.40}$$

Esta notación está motivada por el hecho de que, si las $f_0, f_1, \dots, f_N$ son suficientemente regulares, entonces

$$F(\varphi) = \int_\Omega \left(f_0 - \sum_{i=1}^{N} \partial_i f_i \right) \varphi \, dx$$

para cada $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ y, por tanto, también para toda $v \in H_0^1(\Omega)$.

En particular, podemos definir siempre la derivada de una función de $L^2(\Omega)$, en el sentido que determina (3.37), como un elemento de $H^{-1}(\Omega)$.[4]

En lo que sigue, usaremos el teorema 3.1 para identificar $L^2(\Omega)$ con su dual. Por el contrario, no haremos uso de la identificación posible de $H_0^1(\Omega)$ y $H^{-1}(\Omega)$, sino que utilizaremos la fórmula (3.37) para describir los elementos de $H^{-1}(\Omega)$. De este modo, $L^2(\Omega)$ puede identificarse con un subespacio de $H^{-1}(\Omega)$ y podemos escribir que, salvo isomorfismos isométricos,

$$H_0^1(\Omega) \subset L^2(\Omega) \subset H^{-1}(\Omega). \tag{3.41}$$

Observación 3.13 Una manera informal de interpretar (3.41) consiste en decir que las funciones de $H_0^1(\Omega)$ están en $L^2(\Omega)$ (aunque en el segundo espacio hay más funciones que en el primero) y que, por otra parte, las funciones de $L^2(\Omega)$ determinan formas lineales continuas sobre $H_0^1(\Omega)$ (aunque hay formas lineales continuas que no están definidas por elementos de $L^2(\Omega)$). Para convencerse de esto último, basta elegir $N = 1$ y $\Omega = (-1, 1)$ y considerar la forma lineal F, dada como sigue:

$$F(v) = \int_0^1 v'(x) \, dx \quad \forall v \in H_0^1(-1, 1).$$

Observación 3.14 Razonando como en la demostración del teorema 3.12, se deduce que para cada $F \in (H^1(\Omega))'$ existen $N + 1$ funciones $f_0, f_1, \dots, f_N \in L^2(\Omega)$ tales que

$$F(v) = \int_\Omega \left(f_0 \, v + \sum_{i=1}^{N} f_i \, \partial_i v \right) dx \quad \forall v \in H^1(\Omega)$$

y

$$\|F\|_{(H^1)'} = \left(\sum_{i=0}^{N} \|f_i\|_{L^2}^2 \right)^{1/2}. \tag{3.42}$$

3.5 Resolución de la formulación débil de problemas elípticos de segundo orden

A continuación, analizaremos la existencia y unicidad de solución de un problema del cual el problema 1.7, enunciado en el tema 1 y resuelto en el tema 2,

[4] Por ejemplo, si $f \in L^2(\Omega)$, $\partial_1 f$ es el elemento de $H^{-1}(\Omega)$ que verifica

$$\partial_1 f(v) = -\int_\Omega f \, \partial_1 v \, dx \quad \forall v \in H_0^1(\Omega).$$

es un caso particular. Como ya hemos indicado con anterioridad, para ello es conveniente "relajar" o "debilitar" el concepto de solución. Para mayor claridad, nos limitaremos de momento a considerar el problema

$$\begin{cases} -\Delta u = f(x), & x \in \Omega, \\ u = 0, & x \in \partial\Omega, \end{cases} \tag{3.43}$$

donde $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ es un abierto acotado no vacío y $f \in L^2(\Omega)$.

Definición 3.9 *Se llama solución débil de* (3.43) *a toda función u que verifique:*

$$\begin{cases} \displaystyle\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v \, dx = \int_\Omega f \, v \, dx \quad \forall v \in H_0^1(\Omega), \\ u \in H_0^1(\Omega). \end{cases} \tag{3.44}$$

Este concepto de solución generaliza el de solución clásica. Más precisamente, tenemos la siguiente

Proposición 3.5 *Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ un abierto acotado no vacío y supongamos (por ejemplo) que $f \in L^2(\Omega) \cap C^0(\Omega)$. Si $u \in C^2(\Omega) \cap C^1(\overline{\Omega})$ es solución clásica de* (3.43)*, entonces u es solución débil.*

Demostración: En las condiciones de esta proposición, $u \in H_0^1(\Omega)$ (basta recordar (3.11), que $u \in C^1(\overline{\Omega})$ y que $u = 0$ sobre $\partial\Omega$).

Por otra parte, sea $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$. Para cada $i = 1, \dots, N$, se tiene que

$$\int_\Omega \partial_i^2 u \, \varphi \, dx = \int_\Omega \partial_i(\partial_i u \, \varphi) \, dx - \int_\Omega \partial_i u \, \partial_i \varphi \, dx. \tag{3.45}$$

La función $\partial_i u \, \varphi$ pertenece a $C_c^1(\Omega)$ y por tanto la integral en Ω de $\partial_i(\partial_i u \, \varphi)$ vale cero. En consecuencia, sumando las igualdades (3.45) para $i = 1, \dots, N$ y teniendo en cuenta que $-\Delta u = f$, obtenemos que

$$\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla \varphi \, dx = \int_\Omega f \, \varphi \, dx \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega).$$

Por densidad, se deduce de aquí que u es solución débil de (3.43). ■

Observación 3.15 También es cierto que si $f \in L^2(\Omega) \cap C^0(\Omega)$, u es solución débil de (3.43) y $u \in C^2(\Omega) \cap C^1(\overline{\Omega})$, entonces u es solución clásica.

Observación 3.16 Es más fácil *a priori* resolver (3.44) que resolver (3.43) en un sentido clásico. En efecto, en el primer caso estamos buscando la solución en un espacio mayor y estamos exigiendo menos a la solución.

Consideraremos a continuación una situación más general. Para ello, supongamos dadas unas funciones

$$a_{ij} = a_{ji} \in L^\infty(\Omega) \quad (i, j = 1, \dots, N), \quad c \in L^\infty(\Omega),$$
$$f_0, f_1, \dots, f_N \in L^2(\Omega), \quad \tilde{g} \in H^1(\Omega).$$

Nuestro problema es ahora el siguiente:

$$\begin{cases} \displaystyle -\sum_{i,j=1}^N \partial_i(a_{ij}\partial_j u) + cu = f_0 - \sum_{i=1}^N \partial_i f_i, & x \in \Omega, \\ u = \tilde{g}(x), & x \in \partial\Omega, \end{cases} \tag{3.46}$$

Definición 3.10 *Se llama solución débil de* (3.46) *a toda función u que verifique:*

$$\begin{cases} \displaystyle\int_\Omega (\sum_{i,j=1}^N a_{ij}\,\partial_j u\,\partial_i v + c\,u\,v)\,dx = \int_\Omega (f_0\,v + \sum_{i=1}^N f_i\,\partial_i v)\,dx \\ \forall v \in H_0^1(\Omega), \quad u - \tilde{g} \in H_0^1(\Omega). \end{cases} \tag{3.47}$$

No es difícil probar un resultado análogo a la proposición 3.5 para el problema (3.47). En consecuencia, la definición 3.10 es la adecuada.

Observación 3.17 Tampoco es difícil probar que u es solución débil de (3.46) si y sólo si $u \in H^1(\Omega)$,

$$-\sum_{i,j=1}^N \partial_i(a_{ij}\partial_j u) + cu = f_0 - \sum_{i=1}^N \partial_i f_i \quad \text{en} \quad H^{-1}(\Omega)$$

y $\gamma u = \gamma\tilde{g}$ en $L^2(\partial\Omega)$.

Pongamos

$$\begin{cases} \displaystyle J(v) = \frac{1}{2}\int_\Omega (\sum_{i,j=1}^N a_{ij}\,\partial_j v\,\partial_i v + c\,|v|^2)\,dx - \int_\Omega (f_0\,v + \sum_{i=1}^N f_i\,\partial_i v)\,dx \\ \forall v \in H^1(\Omega). \end{cases} \tag{3.48}$$

El resultado principal de este parágrafo es el siguiente:

Teorema 3.13 *Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ un abierto acotado y supongamos que los coeficientes a_{ij} y c verifican*

$$\begin{cases} a_{ij} = a_{ji} \in L^\infty(\Omega) \quad (i,j = 1,\dots,N), \\ \displaystyle\sum_{i,j=1}^N a_{ij}(x)\xi_i\xi_j \ge \alpha_0|\xi|^2 \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^N, \quad \textit{c.p.d. en } \Omega, \quad \alpha_0 > 0, \end{cases} \tag{3.49}$$

$$c \in L^\infty(\Omega), \quad c \ge 0 \quad \textit{c.p.d. en } \Omega. \tag{3.50}$$

Supongamos también que $f_0, f_1, \dots, f_N \in L^2(\Omega)$ y $\tilde{g} \in H^1(\Omega)$. Entonces existe una única solución débil u del problema (3.46)*. Además, u es la única función que verifica*

$$\begin{cases} J(u) \le J(z) \quad \forall z \in \tilde{g} + H_0^1(\Omega), \\ u \in \tilde{g} + H_0^1(\Omega). \end{cases} \tag{3.51}$$

Demostración: Introducimos el cambio de variable $u = w + \tilde{g}$. Entonces, la primera afirmación (existencia y unicidad de solución débil de (3.46)) se reduce a probar que existe una única $w \in H_0^1(\Omega)$ solución de

$$a(w,v) = \ell(v) \quad \forall v \in H_0^1(\Omega), w \in H_0^1(\Omega), \tag{3.52}$$

donde

$$a(w,v) = \int_\Omega (\sum_{i,j=1}^N a_{ij}\,\partial_j w\,\partial_i v + c\,w\,v)\,dx \quad \forall w,v \in H_0^1(\Omega), \tag{3.53}$$

$$\begin{cases} \ell(v) = \displaystyle\int_\Omega (f_0\, v + \sum_{i=1}^N f_i\, \partial_i v)\, dx - \int_\Omega (\sum_{i,j=1}^N a_{ij}\, \partial_j \tilde{g}\, \partial_i v + c\, \tilde{g}\, v)\, dx \\ \forall v \in H_0^1(\Omega). \end{cases} \tag{3.54}$$

Para probar la existencia y unicidad de solución débil de (3.52), aplicaremos el teorema 3.5. Así, tomemos $H = H_0^1(\Omega)$. Gracias a (3.49) y (3.50), la forma bilineal $a(\cdot\,,\cdot)$ está bien definida y es continua y coerciva en $H_0^1(\Omega)$. En efecto, por una parte tenemos que

$$\begin{aligned} |a(w,v)| &\le \sum_{i,j=1}^N \left| \int_\Omega a_{ij}\, \partial_j w\, \partial_i v\, dx \right| + \left| \int_\Omega c\, w\, v\, dx \right| \\ &\le C_1 \left(\sum_{i=1}^N \|\partial_i w\|_{L^2}^2 + \|w\|_{L^2}^2 \right)^{1/2} \left(\sum_{i=1}^N \|\partial_i v\|_{L^2}^2 + \|v\|_{L^2}^2 \right)^{1/2}, \end{aligned}$$

para $w, v \in H_0^1(\Omega)$, donde la constante C_1 sólo depende de las normas en $L^\infty(\Omega)$ de los a_{ij} y de c. Por tanto,

$$|a(w,v)| \le C_1 \|w\|_{H^1}\, \|v\|_{H^1} \quad \forall w, v \in H_0^1(\Omega),$$

esto es, $a(\cdot\,,\cdot)$ es continua.

Por otra parte, para cada $v \in H_0^1(\Omega)$ se tiene en virtud de (3.49) que

$$a(v,v) = \sum_{i,j=1}^N \int_\Omega a_{ij}\, \partial_j v\, \partial_i v\, dx + \int_\Omega c\, v^2\, dx \ge \alpha_0 \sum_{i=1}^N \|\partial_i v\|_{L^2}^2.$$

Dado que Ω es acotado, tenemos entonces que

$$a(v,v) \ge \alpha \|v\|_{H^1}^2 \quad \forall v \in H_0^1(\Omega)$$

para algún $\alpha > 0$; es decir, $a(\cdot\,,\cdot)$ es coerciva.

Por otra parte, la forma lineal ℓ definida por (3.54) pertenece a $H^{-1}(\Omega)$. En efecto, podemos escribir que

$$\begin{cases} \ell(v) = \displaystyle\int_\Omega (f_0 - c\tilde{g})\, v\, dx + \int_\Omega \sum_{i=1}^N \left(f_i - \sum_{j=1}^N a_{ij}\, \partial_j \tilde{g} \right) \partial_i v\, dx \\ \forall v \in H_0^1(\Omega) \end{cases}$$

y podemos aplicar la primra parte del teorema 3.12 cambiando f_0 por $f_0 - c\tilde{g}$ y f_i por $f_i - \sum_{j=1}^N a_{ij}\, \partial_j \tilde{g}$ para cada i.

Se deduce además que

$$|\ell(v)| \le C_2 \|v\|_{L^2} \quad \forall v \in H_0^1(\Omega),$$

donde la constante C_2 sólo depende de las normas en $L^2(\Omega)$ de f y las f_i, de la norma en $H^1(\Omega)$ de $\tilde{g}$ y de las normas en $L^\infty(\Omega)$ de los coeficientes a_{ij} y c.

Gracias al teorema 3.5, existe en efecto una única w que verifica

$$a(w,v) = \ell(v) \quad \forall v \in H_0^1(\Omega), \quad w \in H_0^1(\Omega) \tag{3.55}$$

y tenemos que $u = w + \tilde{g}$ es la única solución débil del problema (3.46).

Teniendo en cuenta que la forma bilineal $a(\cdot\,,\cdot)$ es simétrica y aplicando de nuevo el teorema 3.5, deducimos que w es, además, el único punto de $H_0^1(\Omega)$ donde la función
$$\frac{1}{2}\,a(v,v)-\ell(v)$$
alcanza el mínimo:
$$\frac{1}{2}\,a(w,w)-\ell(w)\le\frac{1}{2}\,a(v,v)-\ell(v)\quad\forall v\in H_0^1(\Omega).$$
Pero, teniendo en cuenta la definición (3.48) de J, vemos que esto es equivalente a decir que
$$J(u)\le J(z)\quad\forall z\in\tilde{g}+H_0^1(\Omega).$$
Esto termina la demostración. ∎

Observación 3.18 En particular, tomando $a_{ij}\equiv\delta_{ij}$, $c\equiv 0$ y $f_i\equiv 0$ para $1\le i\le N$, vemos como consecuencia del teorema 3.13 que el problema (3.43) posee una única solución débil. Naturalmente, si además se satisfacen las condiciones del teorema 1.10, la solución débil hallada coincide con la solución clásica que proporciona este resultado.

Observación 3.19 No ostante, es obvio que el teorema 3.13 da cobertura a muchos otros casos. Por ejemplo, sean Ω_1 y Ω_2 dos abiertos contenidos en Ω tales que
$$\overline{\Omega}_1\cup\overline{\Omega}_2=\overline{\Omega}$$
y sea $a(x)=\alpha$ para x c.p.d. en Ω_1 y $a(x)=\beta$ para x c.p.d. en Ω_2, con $0<\alpha<\beta$. Entonces, para cada $f\in L^2(\Omega)$ y cada $\tilde{g}\in H^1(\Omega)$, existe una única solución débil del problema
$$\begin{cases} -\displaystyle\sum_{i=1}^{N}\partial_i(a(x)\partial_i u)=f(x), & x\in\Omega,\\ u=\tilde{g}(x), & x\in\partial\Omega.\end{cases}$$

Observación 3.20 En el enunciado del teorema 3.13, se puede sustituir la hipótesis "Ω es acotado" por esta otra:
$$c\in L^\infty(\Omega),\quad c\ge\alpha_1>0\ \text{ c.p.d. en }\ \Omega.$$

Apéndice: Algunos resultados auxiliares

Comenzaremos con un resultado general que se usa en la demostración del teorema 3.2:

Teorema 3.14 *Sean H un espacio de Hilbert, $K\subset V$ un convexo cerrado no vacío y $\Phi:V\mapsto\mathbb{R}$ una función continua y convexa. Supongamos que, o bien K es acotado, o bien Φ es coerciva en K, esto es, verifica*
$$\lim_{v\in K,\,\|v\|\to+\infty}\Phi(v)=+\infty.$$
Entonces existe al menos un punto $u\in H$ que verifica
$$\Phi(u)\le\Phi(v)\quad\forall v\in K,\quad u\in K.$$
Además, si Φ es estrictamente convexa, el punto u es único.

Este resultado es de gran interés. Para su demostración, véase por ejemplo [8].

En lo que sigue, dados un conjunto A de $\mathbb{R}^N$ y un número positivo δ, denotaremos A_δ al conjunto

$$A_\delta = \{\, x \in \mathbb{R}^N : \operatorname{dist}(x, A) \le \delta \,\}.$$

Demostración de la proposición 3.2: En primer lugar, sea $\rho \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^N)$ una función positiva en la bola $B(0;1)$ y nula en su complementario. En virtud del lema 3.1, una tal ρ existe. Multiplicando ρ si hiciera falta por una constante positiva, podemos suponer que

$$\int_{\mathbb{R}^N} \rho(x)\, dx = 1. \tag{3.56}$$

Sea ε una cantidad positiva. Pongamos

$$\rho_\varepsilon(x) = \varepsilon^{-N} \rho(\varepsilon^{-1} x) \quad \forall x \in \mathbb{R}^N$$

y

$$\varphi_\varepsilon(x) = \int_{K_{2\varepsilon}} \rho_\varepsilon(x - y)\, dy \quad \forall x \in \Omega. \tag{3.57}$$

Se tiene entonces que, si ε es suficientemente pequeño, φ_ε cumple las propiedades deseadas.

En efecto, la función φ_ε está bien definida para todo $x \in \Omega$ y verifica $\varphi_\varepsilon \in C^\infty(\Omega)$. Además,

$$0 \le \varphi_\varepsilon(x) \le \int_{\mathbb{R}^N} \rho_\varepsilon(x - y)\, dy = 1 \quad \forall x \in \Omega.$$

Para $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeño, el conjunto $K_{3\varepsilon}$ es un compacto contenido en Ω. Por otra parte, si $x \in K_\varepsilon$,

$$\varphi_\varepsilon(x) = \int_{\mathbb{R}^N} \rho_\varepsilon(x - y) 1_{K_{2\varepsilon}}(y)\, dy = \int_{\mathbb{R}^N} \rho_\varepsilon(y) 1_{K_{2\varepsilon}}(x - y)\, dy = 1,$$

mientras que, si $x \notin K_{3\varepsilon}$, la bola $B(x;\varepsilon)$ no corta a $K_{2\varepsilon}$ y

$$\varphi_\varepsilon(x) = \int_{\mathbb{R}^N} \rho_\varepsilon(y) 1_{K_{2\varepsilon}}(x - y)\, dy = 0.$$

Esto termina la demostración. ■

Demostración del teorema 3.6: Sean $p \in [1, +\infty)$ y $v \in L^p(\Omega)$. Probaremos que, para cada $\kappa > 0$, existe una función $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ que verifica

$$\|v - \varphi\|_{L^p} \le \kappa. \tag{3.58}$$

Etapa 1: Para cada $\delta > 0$, sea $K(\delta)$ el compacto siguiente:

$$K(\delta) = \{\, x \in \Omega : \operatorname{dist}(x, \partial\Omega) \ge \delta \,\}.$$

Pongamos $v_\delta = v\, 1_{K(\delta)}$. Entonces

$$\|v - v_\delta\|_{L^p} = \left(\int_\Omega |v|^p \, 1_{\Omega \setminus K(\delta)}\, dx \right)^{1/p}$$

converge a cero, gracias al teorema de la convergencia dominada. Por tanto, eligiendo δ suficientemente pequeño, tenemos

$$\|v - v_\delta\|_{L^p} \leq \frac{\kappa}{2}. \tag{3.59}$$

Etapa 2: Fijemos δ tal que se tenga (3.59) y sea $K = K(\delta)$. Para cada $\varepsilon > 0$, sea ρ_ε la función introducida en la demostración de la proposición 3.2. Pongamos

$$w_\varepsilon(x) = \int_{\mathbf{R}^N} \rho_\varepsilon(x-y) v_\delta(y)\,dy \quad \forall x \in \Omega. \tag{3.60}$$

Entonces, si ε es suficientemente pequeño, w_ε cumple lo deseado.

En efecto, w_ε está bien definida para todo $x \in \Omega$ y verifica $w_\varepsilon \in C^\infty(\Omega)$. Para $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeño, el conjunto K_ε es un compacto contenido en Ω. Si $x \notin K_\varepsilon$, la bola $B(x;\varepsilon)$ no corta a K y entonces

$$w_\varepsilon(x) = \int_{\mathbf{R}^N} \rho_\varepsilon(y) v_\delta(x-y)\,dy = 0.$$

Por tanto, para ε suficientemente pequeño, $w_\varepsilon \in \mathcal{D}(\Omega)$. Finalmente,

$$\begin{aligned}
\|v_\delta - w_\varepsilon\|^p &= \int_\Omega \left| \int_{B(0;\varepsilon)} \rho_\varepsilon(y)(v_\delta(x) - v_\delta(x-y))\,dy \right|^p dx \\
&\leq \int_\Omega \|\rho_\varepsilon\|_{L^{p'}}^p \int_{B(0;\varepsilon)} |v_\delta(x) - v_\delta(x-y)|^p\,dy\,dx \\
&\leq C \int_{B(0;\varepsilon)} \left(\int_\Omega |v_\delta(x) - v_\delta(x-y)|^p\,dx \right) dy,
\end{aligned}$$

donde C es independiente de ε. Por tanto, para ε suficientemente pequeño, tenemos

$$\|v_\delta - w_\varepsilon\|_{L^p} \leq \frac{\kappa}{2}. \tag{3.61}$$

Combinando (3.59) y (3.61), obtenemos (3.58) para $\varphi = w_\varepsilon$. ■

Demostración del teorema 3.7: Es similar a la que se presenta en la Etapa 2 de la prueba del teorema 3.6. En efecto, sea $\varphi \in C_c^1(\Omega)$ y sea K el soporte de φ. Para cada $\varepsilon > 0$, sea w_ε la función definida por

$$w_\varepsilon(x) = \int_{\mathbf{R}^N} \rho_\varepsilon(x-y) \varphi(y)\,dy \quad \forall x \in \Omega. \tag{3.62}$$

Entonces es obvio que, si ε es suficientemente pequeño, $w_\varepsilon \in \mathcal{D}(\Omega)$. Razonando como antes, se deduce que $\|\varphi - w_\varepsilon\|_{L^p} \to 0$ cuando $\varepsilon \to 0$.

Por otra parte, para cada $i = 1, \ldots, N$, se tiene que

$$\partial_i w_\varepsilon(x) = \int_{\mathbf{R}^N} \rho_\varepsilon(x-y) \partial_i \varphi(y)\,dy \quad \forall x \in \Omega.$$

En consecuencia, también se puede demostrar que $\|\partial_i \varphi - \partial_i w_\varepsilon\|_{L^p} \to 0$ cuando $\varepsilon \to 0$. Esto prueba el teorema. ■

Demostración de la proposición 3.3: Supongamos en primer lugar que Ω es acotado y que $u \in L^1(\Omega)$.

Sea $\varepsilon > 0$. Sabemos que existe $\psi_\varepsilon \in \mathcal{D}(\Omega)$ tal que

$$\|u - \psi_\varepsilon\|_{L^1} \leq \varepsilon.$$

Para cada $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$, tenemos entonces que

$$\left| \int_\Omega \psi_\varepsilon \varphi \, dx \right| = \left| \int_\Omega (\psi_\varepsilon - u)\varphi \, dx \right| \leq \varepsilon \|\varphi\|_{L^\infty}.$$

Sean K_+ y K_- los dos conjuntos siguientes:

$$K_+ = \{ \, x \in \Omega : \psi_\varepsilon(x) \geq \varepsilon \, \}, \quad K_- = \{ \, x \in \Omega : \psi_\varepsilon(x) \leq -\varepsilon \, \}.$$

Entonces K_+ y K_- son dos compactos contenidos en Ω y, usando la proposición 3.2, es fácil probar que existe una función $\varphi_\varepsilon \in \mathcal{D}(\Omega)$ que verifica:

$$-1 \leq \varphi_\varepsilon \leq 1, \quad \varphi_\varepsilon = 1 \text{ en } K_+, \quad \varphi_\varepsilon = -1 \text{ en } K_-.$$

Pongamos $K = K_+ \cup K_-$ y denotemos $c(\Omega)$ la medida de Lebesgue de Ω. Entonces

$$\begin{aligned} \int_K |\psi_\varepsilon(x)| \, dx &= \int_\Omega \psi_\varepsilon \varphi_\varepsilon \, dx - \int_{\Omega \setminus K} \psi_\varepsilon \varphi_\varepsilon \, dx \\ &\leq \varepsilon + \int_{\Omega \setminus K} |\psi_\varepsilon(x)| \, dx \\ &\leq (1 + c(\Omega))\varepsilon, \end{aligned}$$

de donde

$$\|u\|_{L^1} \leq \|u - \psi_\varepsilon\|_{L^1} + \|\psi_\varepsilon\|_{L^1} \leq (2 + c(\Omega))\varepsilon.$$

Dado que ε es arbitrariamente pequeño, deducimos que $u = 0$ c.p.d.

Supongamos ahora que $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ es un abierto arbitrario y $u \in L^1_{\text{loc}}(\Omega)$. Para cada $n \geq 1$, sea

$$\Omega_n = \{ \, x \in \Omega : |x| < n, \ \ \text{dist}\,(x, \mathbb{R}^N \setminus \Omega) > 1/n \, \}.$$

Es inmediato que cada Ω_n es un abierto acotado, cada $\overline{\Omega}_n$ es un compacto contenido en Ω y que además se tiene

$$\overline{\Omega}_n \subset \Omega_{n+1} \quad \forall n \geq 1, \quad \cup_{n \geq 1} \Omega_n = \Omega.$$

En cada Ω_n podemos razonar como antes para deducir que u se anula c.p.d. Gracias a las propiedades precedentes de los Ω_n, es claro que esto implica $u = 0$ c.p.d. en Ω. ■

Tema 4

La ecuación de ondas unidimensional

En este tema consideraremos varios problemas para la EDP de ondas unidimensional

$$u_{tt} - c^2 u_{xx} = h,$$

donde $c > 0$ es una constante y $h = h(x,t)$ es una función dada. En primer lugar, hablaremos del caso en que $h \equiv 0$. La EDP correspondiente es

$$u_{tt} - c^2 u_{xx} = 0 \tag{4.1}$$

y se denomina EDP de ondas *homogénea*.

4.1 Soluciones clásicas y soluciones generalizadas

Ante todo, precisemos los conceptos de solución clásica y solución generalizada de (4.1):

Definición 4.1 *Sean $Q \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+$ un abierto y $u : Q \mapsto \mathbb{R}$ una función dada. Se dice que u es solución clásica de* (4.1) *en Q si $u \in C^2(Q)$ y $u_{tt}(x,t) - c^2 u_{xx}(x,t) = 0$ en todo $(x,t) \in Q$.*

Se dice que u es solución generalizada de (4.1) *en Q si, para cualquier paralelogramo determinado por rectas $x \pm ct = Const.$ de vértices consecutivos $A, B, C, D \in Q$, se cumple la igualdad*

$$u(A) + u(C) = u(B) + u(D), \tag{4.2}$$

conocida como ley del paralelogramo.

Obsérvese que toda función $u : Q \mapsto \mathbb{R}$ que tenga la estructura

$$u(x,t) = F(x+ct) + G(x-ct), \tag{4.3}$$

donde F y G son funciones dadas, es solución generalizada.

Lema 4.1 *Sean $Q \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+$ un abierto y $u : Q \mapsto \mathbb{R}$ una función dada. Si Q es convexo y u es solución clásica de* (4.1) *en Q, entonces u es solución generalizada. Por otra parte, si u es solución generalizada y $u \in C^2(Q)$, entonces es solución clásica.*

Demostración: Supongamos en primer lugar que Q es convexo y u es solución clásica de (4.1) en Q.

Supongamos dados cuatro vértices consecutivos $A, B, C, D \in Q$, determinados por rectas $x \pm ct =$ Const. y sea R el rectángulo (cerrado) asociado. Dado que Q es convexo, $R \subset Q$. Introduzcamos el cambio de variables

$$\xi = x + ct, \quad \eta = x - ct$$

y pongamos

$$v(\xi, \eta) = u(x, t) \equiv u(\frac{1}{2}(\xi + \eta), \frac{1}{2c}(\xi - \eta)) \quad \forall (\xi, \eta) \in \tilde{R},$$

donde $\tilde{R}$ es el rectángulo R escrito en las nuevas variables. Entonces v es de clase C^2 en $\tilde{R}$ y

$$v_{\xi\eta}(\xi, \eta) = 0 \quad \forall (\xi, \eta) \in \tilde{R}.$$

Pero entonces v es una función de la forma

$$v(\xi, \eta) = F(\xi) + G(\eta)$$

para dos funciones F y G de clase C^2. Por tanto, en R la función u es como en (4.3) y tenemos en particular (4.2).

Supongamos ahora que u es solución generalizada en Q y $u \in C^2(Q)$. Sea $(x^*, t^*) \in Q$. Existe $\varepsilon > 0$ tal que, para $0 < \xi, \eta < \varepsilon$, los puntos

$$(x^* + c\xi, t^* + \xi), (x^* - c\eta, t^* + \eta), (x^* + c\xi - c\eta, t^* + \xi + \eta)$$

también pertenecen a Q. En consecuencia, tenemos gracias a (4.2) que

$$\begin{aligned} &u(x^* + c\xi - c\eta, t^* + \xi + \eta) - u(x^* + c\xi, t^* + \xi) \\ &\quad = u(x^* - c\eta, t^* + \eta) - u(x^*, t^*) \end{aligned}$$

para estos ξ y η. Sumando y restando $u(x^* + c\xi - c\eta, t^* + \xi)$ en el primer miembro de esta igualdad, sumando y restando $u(x^* - c\eta, t^*)$ en el segundo, dividiendo por η y teniendo en cuenta la regularidad de u, no es difícil deducir que

$$u_t(x^* + c\xi, t^* + \xi) - cu_x(x^* + c\xi, t^* + \xi) = u_t(x^*, t^*) - cu_x(x^*, t^*),$$

de donde

$$u_t(x^* + c\xi, t^* + \xi) - u_t(x^*, t^*) = cu_x(x^* + c\xi, t^*) - cu_x(x^*, t^*)$$

para cada ξ. Ahora, sumando y restando $u_t(x^* + c\xi, t^*)$ en el primer miembro, sumando y restando $cu_x(x^*, t^* + \xi)$ en el segundo, dividiendo por ξ y recordando que u es de clase C^2 en Q, se deduce que

$$u_{tt}(x^*, t^*) = c^2 u_{xx}(x^*, t^*).$$

Dado que el punto $(x^*, t^*) \in Q$ es arbitrario, tenemos que u es solución clásica de (4.1) en Q.

Esto prueba el lema. ∎

Una consecuencia importante de este lema es la siguiente:

Para probar que una función $u : Q \mapsto \mathbb{R}$ es solución clásica de (4.1) *en Q, basta probar que es solución generalizada y que $u \in C^2(Q)$.*

En particular, si u es como en (4.3) para dos funciones F G de clase C^2, se tiene que u es solución clásica.

4.2 La fórmula de D'Alembert y el problema de Cauchy

Este parágrafo está dedicado al problema de Cauchy (o problema de valores iniciales). Se trata del siguiente:

$$\begin{cases} u_{tt} - c^2 u_{xx} = 0, & (x,t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+, \\ u(x,0) = f(x), \ u_t(x,0) = g(x), & x \in \mathbb{R}, \end{cases} \tag{4.4}$$

donde $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ y $g : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ son funciones dadas.

Definición 4.2 *Sean $f \in C^2(\mathbb{R})$ y $g \in C^1(\mathbb{R})$. Se llama solución clásica de* (4.4) *a toda función $u \in C^2(\mathbb{R} \times \overline{\mathbb{R}}_+)$ que verifica*

$$u_{tt}(x,t) - c^2 u_{xx}(x,t) = 0 \quad \forall (x,t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+,$$

$$u(x,0) = f(x) \quad y \quad u_t(x,0) = g(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

El resultado principal de este parágrafo es el siguiente:

Teorema 4.1 *Sean $f \in C^2(\mathbb{R})$ y $g \in C^1(\mathbb{R})$. Entonces el correspondiente problema* (4.4) *posee exactamente una solución clásica u que viene dada por la fórmula de D'Alembert*

$$\begin{cases} u(x,t) = \dfrac{1}{2}\left(f(x+ct) + f(x-ct)\right) + \dfrac{1}{2c}\displaystyle\int_{x-ct}^{x+ct} g(s)\,ds \\ \forall (x,t) \in \mathbb{R} \times \overline{\mathbb{R}}_+. \end{cases} \tag{4.5}$$

Demostración: Hay varias formas de demostrar este resultado. Una de ellas consiste en comprobar que la función u definida por (4.5) es de clase C^2, verifica las condiciones iniciales y de contorno de (4.4), es solución generalizada de (4.1) en $\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+$ y coincide con cualquier otra solución clásica de (4.4).

No obstante, seguiremos una estrategia distinta. Pongamos de nuevo

$$\xi = x + ct, \quad \eta = x - ct$$

y

$$v(\xi,\eta) = u(x,t) \equiv u(\frac{1}{2}(\xi+\eta), \frac{1}{2c}(\xi-\eta)).$$

Sea $Q = \{ (\xi,\eta) \in \mathbb{R}^2 : \xi > \eta \}$. Entonces u es solución clásica de (4.1) en $\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+$ si y sólo si $v \in C^2(\overline{Q})$ y $v_{\xi\eta} = 0$ en Q. Pero esto último ocurre si y sólo si v es una función de la forma

$$v(\xi,\eta) = F(\xi) + G(\eta)$$

para dos funciones F y G de clase C^2. Luego u es solución clásica de (4.1) en $\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+$ si y sólo si es de la forma

$$u(x,t) = F(x+ct) + G(x-ct) \tag{4.6}$$

con F y G de este tipo.

Para que una función u dada por (4.6) verifique las condiciones iniciales de (4.4), es necesario y suficiente que se tenga

$$F(x) + G(x) = f(x) \quad \text{y} \quad F'(x) - G'(x) = \frac{1}{c} g(x)$$

para todo $x \in \mathbb{R}$. De aquí se deduce que

$$F'(x) = \frac{1}{2}\left(f'(x) + \frac{1}{c}g(x)\right) \quad \text{y} \quad G'(x) = \frac{1}{2}\left(f'(x) - \frac{1}{c}g(x)\right)$$

y también que

$$F(x) = \frac{1}{2}f(x) + \frac{1}{2c}\int_0^x g(s)\,ds + C,$$
$$G(x) = \frac{1}{2}f(x) - \frac{1}{2c}\int_0^x g(s)\,ds - C,$$

donde C es una constante arbitraria. Por tanto, si u es solución clásica de (4.4), tenemos (4.5). Recíprocamente, si u está dada por (4.5), es claro que u es solución clásica de (4.4).

Esto prueba el teorema. ■

Observación 4.1 El problema (4.4) y su resolución poseen una clara interpretación física. Pensemos por ejemplo en una cuerda "ideal" que ocupa toda la recta. Conocemos para cada $x \in \mathbb{R}$ la posición $u(x,0)$ y la velocidad de desplazamiento vertical $u_t(x,0)$ en el instante inicial $t = 0$. Entonces, en virtud del resultado precedente, quedan determinadas, en todo instante posterior $t \geq 0$ y para cada punto $x \in \mathbb{R}$, la posición $u(x,t)$ y la velocidad de desplazamiento vertical $u_t(x,t)$.

Observación 4.2 A la vista de (4.5), deducimos que la solución de (4.4) depende continuamente de los datos f y g en el sentido de la convergencia uniforme sobre compactos de $\mathbb{R} \times \overline{\mathbb{R}}_+$. En efecto, si las f, g, f_n, g_n verifican

$$f, f_n \in C^2(\mathbb{R}), \quad g, g_n \in C^1(\mathbb{R}),$$

$$f_n \to f \quad \text{y} \quad g_n \to g$$

uniformemente sobre compactos en $\mathbb{R}$, entonces las soluciones asociadas u_n y u verifican

$$\begin{aligned} &u_n(x,t) - u(x,t) \\ &\quad = \frac{1}{2}\left(f_n(x+ct) - f(x+ct) + f_n(x-ct) - f(x-ct)\right) \\ &\quad + \frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct} (g_n(s) - g(s))\,ds \end{aligned}$$

para $(x,t) \in \mathbb{R} \times \overline{\mathbb{R}}_+$ y por tanto $u_n \to u$ uniformemente en los compactos de $\mathbb{R} \times \overline{\mathbb{R}}_+$.

Observación 4.3 Otra consecuencia de (4.5) es que la regularidad de la solución u está determinada por la regularidad de los datos f y g. Más precisamente, si k es un entero ≥ 2, $f \in C^k(\mathbb{R})$ y $g \in C^{k-1}(\mathbb{R})$, entonces $u \in C^k(\mathbb{R} \times \overline{\mathbb{R}}_+)$ (en particular, $u(\cdot, t) \in C^k(\mathbb{R})$ y $u_t(\cdot, t) \in C^{k-1}(\mathbb{R})$ para cada $t > 0$). Esta propiedad es exclusiva de la EDP de ondas unidimensional: para la EDP de ondas en dimensión ≥ 2 en espacio hay pérdida de regularidad para $t > 0$. Desde el punto de vista práctico, esta propiedad explica que sea preferible propagar ondas en medios aproximadamente unidimensionales, como ocurre por ejemplo en el caso de la fibra óptica.

Observación 4.4 La fórmula (4.5) también indica el modo en que se propagan las señales en el mundo físico. Para entender el fenómeno, fijemos un punto (x^*, t^*) con $t^* > 0$. El valor de u en (x^*, t^*) depende *exclusivamente* de los valores de f en los puntos $x^* - ct^*$ y $x^* + ct^*$ y de los valores de g en los puntos del intervalo de extremos $x^* - ct^*$ y $x^* + ct^*$. Por esta razón, éste se conoce como el *intervalo de dependencia* de (x^*, t^*) en el tiempo $t = 0$. Por otra parte, los valores de f y g en x^* *sólo* influyen en los valores que va a tomar u en los puntos (x, t) que verifican $t \geq 0$ y $x^* - ct \leq x \leq x^* + ct$. Por este motivo, el conjunto de estos puntos se denomina *cono de influencia* de x^*. A la vista de estas afirmaciones, resulta claro que una señal modelada por (4.4) se propaga sobre la recta real en ambas direcciones con velocidad c. El tiempo que necesita para hacer llegar la información por ejemplo del origen al punto x^* es $|x^*|/c$. Se dice por tanto que la EDP de ondas tiene la propiedad de *propagación con velocidad finita*.

4.3 El problema de Cauchy-Dirichlet

A continuación, consideraremos el problema de Cauchy-Dirichlet para la EDP de ondas unidimensional. Su formulación es la que sigue:

$$\begin{cases} u_{tt} - c^2 u_{xx} = 0, & (x,t) \in (0,\ell) \times \mathbb{R}_+, \\ u(0,t) = \alpha(t),\ u(\ell,t) = \beta(t), & t > 0, \\ u(x,0) = f(x),\ u_t(x,0) = g(x), & x \in [0,\ell]. \end{cases} \tag{4.7}$$

Aquí, $\alpha, \beta : [0, +\infty) \mapsto \mathbb{R}$ y $f, g : [0, \ell] \mapsto \mathbb{R}$ son funciones dadas.

En (4.7) encontramos, aparte de la EDP de ondas, condiciones iniciales para $t = 0$ (condiciones de Cauchy) y condiciones de contorno (de tipo Dirichlet) para $x = 0$ y $x = \ell$, esto es, condiciones sobre la *frontera lateral* del abierto $(0, \ell) \times \mathbb{R}_+$. Esto explica la denominación utilizada.

También suele llamarse a (4.7) el *problema de la cuerda vibrante*. La razón es que la solución u del mismo permite describir con precisión las vibraciones de una cuerda elástica de extremos situados en los puntos $x = 0$ y $x = \ell$ (donde se imponen los desplazamientos verticales α y β, respectivamente), que "arranca" de una situación inicial determinada por f y g en el instante $t = 0$.

En adelante, pondremos $Q = (0, \ell) \times \mathbb{R}_+$.

Definición 4.3 *Sean $\alpha, \beta \in C^2([0, +\infty))$, $f \in C^2([0, \ell])$ y $g \in C^1([0, \ell])$. Se llama solución clásica de* (4.7) *a toda función $u \in C^2(\overline{Q})$ que verifica*

$$u_{tt}(x,t) - c^2 u_{xx}(x,t) = 0 \quad \forall (x,t) \in Q,$$

$$u(0,t) = \alpha(t), \quad u(\ell,t) = \beta(t) \quad \forall t > 0$$

y

$$u(x,0) = f(x), \quad u_t(x,0) = g(x) \quad \forall x \in [0,\ell].$$

Obsérvese que, si existe solución clásica de (4.7), han de cumplirse necesariamente las relaciones

$$\begin{cases} \alpha(0) = f(0), & \dot\alpha(0) = g(0), & \ddot\alpha(0) = c^2 f''(0), \\ \beta(0) = f(\ell), & \dot\beta(0) = g(\ell), & \ddot\beta(0) = c^2 f''(\ell). \end{cases} \tag{4.8}$$

Aquí y en lo que sigue, denotamos con los símbolos $\dot{}$ y $\ddot{}$ (resp. $'$ y $''$) las derivadas de las funciones dependientes de la variable t (resp. x). Estas igualdades reciben el nombre de *condiciones de compatibilidad*.

En efecto, debemos tener por ejemplo que

$$u(0,0) = \lim_{t\to 0^+} u(0,t) = \lim_{t\to 0^+} \alpha(t) = \alpha(0)$$

y también que

$$u(0,0) = \lim_{x\to 0^+} u(x,0) = \lim_{x\to 0^+} f(x) = f(0).$$

Esto prueba que $\alpha(0) = f(0)$. De modo análogo se deducen las otras igualdades de (4.8).

En este parágrafo, el resultado principal es el siguiente:

Teorema 4.2 *Sean* $\alpha, \beta \in C^2([0,+\infty))$*,* $f \in C^2([0,\ell])$ *y* $g \in C^1([0,\ell])$ *y supongamos que se cumple* (4.8)*. Entonces el correspondiente problema* (4.7) *posee exactamente una solución clásica.*

Demostración: De nuevo este resultado admite varias demostraciones posibles.

Veamos en primer lugar que existe a lo más una solución clásica de (4.7). Para ello, bastará comprobar que si los datos α, β, f y g son idénticamente cero y u es solución clásica, entonces $u \equiv 0$.

Sea entonces u solución clásica en estas circunstancias y pongamos

$$E(t) = \frac{1}{2}\int_0^\ell \left(u_t(x,t)^2 + c^2 u_x(x,t)^2\right) dx \quad \forall t \geq 0. \tag{4.9}$$

Entonces $E \in C^1([0,+\infty))$, $E(0) = 0$ y

$$\begin{aligned} \dot E(t) &= \int_0^\ell \left(u_{tt}(x,t)u_t(x,t) + c^2 u_{xt}(x,t)u_x(x,t)\right) dx \\ &= c^2 \int_0^\ell (u_x u_t)_x(x,t)\, dx = c^2 \left[(u_x u_t)(x,t)\right]_{x=0}^{x=\ell} = 0 \end{aligned}$$

para cada $t \geq 0$. Luego $E \equiv 0$; esto prueba que u es constante en $[0,\ell]\times[0,+\infty)$ y, por tanto, $u \equiv 0$.

A continuación, construiremos una función $u : \overline{Q} \mapsto \mathbb{R}$ que verifica las condiciones iniciales y de contorno de (4.7) y es solución generalizada de (4.1) en Q.

Con ayuda de (4.8) probaremos que, además, $u \in C^2(\overline{Q})$. Con ello quedará demostrado el teorema.

Buscaremos u con la estructura (4.3), de manera que quede garantizado automáticamente que u es solución generalizada. Así, bastará determinar funciones F y G tales que se cumplan las condiciones iniciales y de contorno que aparecen en (4.7). Obsérvese que F y G han de estar definidas respectivamente en $[0, +\infty)$ y $(-\infty, \ell]$.

Determinemos en primer lugar los valores de estas funciones en $[0, \ell]$. Para ello, basta tener en cuenta las condiciones iniciales. En efecto, para la función u de (4.3), éstas se escriben como sigue:

$$F(x) + G(x) = f(x) \quad \text{y} \quad F'(x) - G'(x) = \frac{1}{c} g(x), \tag{4.10}$$

para $x \in [0, \ell]$. Como en la demostración del teorema 4.1, esto conduce a las expresiones

$$F(x) = \frac{1}{2} f(x) + \frac{1}{2c} \int_0^x g(s)\, ds + C \quad \forall x \in [0, \ell] \tag{4.11}$$

y

$$G(x) = \frac{1}{2} f(x) - \frac{1}{2c} \int_0^x g(s)\, ds - C \quad \forall x \in [0, \ell], \tag{4.12}$$

donde C es una constante arbitraria.

Sea Q_1^* el conjunto de los puntos de $\overline{Q}$ que verifican $0 \leq x + ct < \ell$ y $0 < x - ct \leq \ell$. Pondremos

$$u(x,t) = \frac{1}{2} \left(f(x+ct) + f(x-ct) \right) + \frac{1}{2c} \int_{x-ct}^{x+ct} g(s)\, ds \quad \forall (x,t) \in Q_1^*. \tag{4.13}$$

Nótese que u coincide en Q_1^* con la función que proporciona la fórmula de D'Alembert. Más adelante daremos una explicación a este hecho.

Determinemos a continuación los valores de G en $[-\ell, 0]$. Para ello, basta tener en cuenta la condición de contorno impuesta en (4.7) para $x = 0$. En efecto, ésta se puede escribir en la forma

$$F(ct) + G(-ct) = \alpha(t) \quad \forall t \geq 0,$$

de donde

$$G(\xi) = \alpha(-\frac{1}{c}\, \xi) - F(-\xi) \quad \forall \xi \in [-\ell, 0].$$

Teniendo en cuenta que estos valores de F son ya conocidos (salvo una constante aditiva C), se deduce que

$$G(\xi) = \alpha(-\frac{1}{c}\, \xi) - \frac{1}{2} f(-\xi) - \frac{1}{2c} \int_0^{-\xi} g(s)\, ds - C \quad \forall \xi \in [-\ell, 0]. \tag{4.14}$$

Sea ahora Q_2^* el conjunto de los $(x,t) \in \overline{Q}$ que verifican $0 \leq x + ct < \ell$ y $-\ell < x - ct \leq 0$. Las igualdades (4.11) y (4.14) proporcionan los valores de u en Q_2^*:

$$\left\{ \begin{aligned} & u(x,t) = \alpha(t - \frac{x}{c}) + \frac{1}{2} \left(f(x+ct) - f(-(x-ct)) \right) \\ & \qquad + \tfrac{1}{2c} \int_{-(x-ct)}^{x+ct} g(s)\, ds \forall (x,t) \in Q_2^*. \end{aligned} \right. \tag{4.15}$$

De modo análogo, podríamos ahora determinar los valores de $F(\xi)$ para $\xi \in [\ell, 2\ell]$. Para ello, recurriríamos a la condición de contorno impuesta para $x = \ell$. A continuación, obtendríamos la expresión de u en el conjunto Q_3^* de los puntos $(x,t) \in \overline{Q}$ que verifican $\ell \leq x + ct < 2\ell$ y $0 < x - ct \leq \ell$, etc.

Resulta claro que es posible de esta manera determinar los valores de u en todo el rectángulo cerrado $\overline{Q}$.

Por construcción, u es solución generalizada de (4.1) y verifica las condiciones iniciales y de contorno que deseamos. Lo único que queda comprobar es que $u \in C^2(\overline{Q})$. Para ello, como hemos dicho antes, utilizaremos (4.8).

Gracias a (4.13), dado que $f \in C^2([0,\ell])$ y $g \in C^1([0,\ell])$, la función u es de clase C^2 en Q_1^*. Análogamente, gracias a (4.15), la función u es de clase C^2 en Q_2^*. Veamos que la función definida en $Q_1^* \cup Q_2^*$ a partir de (4.13) y (4.15) es dos veces continuamente diferenciable en todo punto (x^*, t^*) con $x^* - ct^* = 0$, $0 \leq x^* < \ell$.

En primer lugar, veamos que u es continua en uno cualquiera de estos puntos. Basta comprobar que

$$\lim_{(x,t)\to(x^*,t^*),(x,t)\in Q_1^*} u(x,t) = u(x^*,t^*). \tag{4.16}$$

Esto es consecuencia de la primera de las relaciones (4.8). En efecto, el límite que aparece en la izquierda de (4.16) vale

$$\frac{1}{2}\left(f(x^* + ct^*) + f(0)\right) + \frac{1}{2c}\int_0^{x^*+ct^*} g(s)\,ds$$

y, por otra parte,

$$u(x^*,t^*) = \alpha(0) + \frac{1}{2}\left(f(x^* + ct^*) - f(0)\right) + \frac{1}{2c}\int_0^{x^*+ct^*} g(s)\,ds.$$

Dado que $\alpha(0) = f(0)$, tenemos (4.16). De manera análoga puede comprobarse que las derivadas primeras y segundas de u son continuas en estos puntos. Por ejemplo, tenemos que

$$\lim_{(x,t)\to(x^*,t^*),(x,t)\in Q_1^*} u_{xx}(x,t) = u_{xx}(x^*,t^*), \tag{4.17}$$

gracias a las tres primeras igualdades de (4.8).

Así, la función construida es de clase C^2 en $Q_1^* \cup Q_2^*$. De forma similar podemos proceder con los conjuntos Q_1^* y Q_3^*. Para ello, se utilizan de manera esencial las tres últimas relaciones de (4.8), etc.

Con un argumento de inducción adecuado, podemos deducir que u es dos veces continuamente diferenciable en todo el rectángulo $\overline{Q} = [0,\ell] \times \overline{\mathbb{R}}_+$. Así conseguimos demostrar el teorema. ■

Observación 4.5 En virtud de la demostración que precede, cualesquiera que sean las funciones $\alpha, \beta \in C^0([0,+\infty))$ y $f, g \in C^0([0,\ell])$, podemos asociar a éstas una solución generalizada de (4.1) en Q que, si es suficientemente regular, es la única solución clásica de (4.7). Veremos más adelante que hay otras formas de construir u.

Observación 4.6 El argumento que ha servido para probar la unicidad de solución, ligeramente modificado, también permite demostrar que u depende continuamente de los datos del problema. Por otra parte, también es posible demostrar que si α, β, f y g son más regulares y verifican condiciones de compatibilidad adicionales, la solución u es más regular.

Observación 4.7 Fijado un punto (x^*, t^*), de nuevo puede identificarse el conjunto de los puntos de $\overline{Q}$ con $t = 0$, $x = 0$ ó $x = \ell$ donde hay que evaluar los datos α, β, f y g para conocer $u(x^*, t^*)$. Por ejemplo, a la vista de la igualdad (4.13), está claro que, si $(x^*, t^*) \in Q_1^*$, la cantidad $u(x^*, t^*)$ es independiente de los datos de contorno α y β. Esto vuelve a indicar que la velocidad de propagación de la información es finita: dado $x^* \in (0, \ell)$, hasta un tiempo $\bar{t}$ suficientemente grande, ni α ni β influyen los valores que toma u para $x = x^*$. Queda así explicado que, en Q_1^*, la expresión de u coincida con la que proporciona (4.5).

Observación 4.8 Supongamos que las funciones α y β son idénticamente nulas y que se cumplen las relaciones (4.8). Sean $\tilde{f}$ y $\tilde{g}$ las prolongaciones *impares* y periódicas de período ℓ de las funciones f y g, respectivamente. Entonces la solución clásica de (4.7) coincide con la solución clásica del problema (4.4) asociado a $\tilde{f}$ y $\tilde{g}$. En otras palabras, en este caso tenemos:

$$u(x,t) = \frac{1}{2}\left(\tilde{f}(x+ct) + \tilde{f}(x-ct)\right) + \frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct} \tilde{g}(s)\,ds \quad \forall (x,t) \in \overline{Q}.$$

Observación 4.9 Es posible formular y resolver problemas similares a (4.7) con otras condiciones de contorno. Por ejemplo, tiene perfecto sentido considerar el sistema

$$\begin{cases} u_{tt} - c^2 u_{xx} = 0, & (x,t) \in (0,\ell) \times \mathbb{R}_+, \\ u_x(0,t) = p(t),\ u_x(\ell,t) = q(t), & t \in \mathbb{R}_+, \\ u(x,0) = f(x),\ u_t(x,0) = g(x), & x \in [0,\ell], \end{cases} \tag{4.18}$$

donde f y g son como antes y $p, q \in C^1([0,+\infty))$. Ahora, decimos que las condiciones de contorno son de tipo Neumann. Se trata por tanto de un *problema de Cauchy-Neumann* para la EDP de ondas unidimensional. Es claro cuál debe ser el concepto de solución clásica de (4.18). En este caso, las condiciones de compatibilidad (de nuevo necesarias para la existencia de solución clásica) son las siguientes:

$$\begin{cases} p(0) = f'(0), & \dot{p}(0) = g'(0), \\ q(0) = f'(\ell), & \dot{q}(0) = g'(\ell). \end{cases} \tag{4.19}$$

Con argumentos de la misma naturaleza que los que preceden, es posible construir una solución generalizada de (4.1) en Q que coincide cuando los datos verifican (4.19) con la única solución clásica de (4.18).

4.4 La ecuación de ondas no homogénea

En este parágrafo, consideraremos el problema de Cauchy para la EDP de ondas no homogénea

$$\begin{cases} u_{tt} - c^2 u_{xx} = h(x,t), & (x,t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+, \\ u(x,0) = f(x),\ u_t(x,0) = g(x), & x \in \mathbb{R}, \end{cases} \tag{4.20}$$

donde $h : \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+ \mapsto \mathbb{R}$, $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ y $g : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ son dadas.

Definición 4.4 *Sean $h \in C^0(\mathbb{R} \times \overline{\mathbb{R}}_+)$, $f \in C^2(\mathbb{R})$ y $g \in C^1(\mathbb{R})$. Se llama solución clásica de* (4.20) *a toda función $u \in C^2(\mathbb{R} \times \overline{\mathbb{R}}_+)$ que verifica*

$$u_{tt}(x,t) - c^2 u_{xx}(x,t) = h(x,t) \quad \forall (x,t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+$$

y

$$u(x,0) = f(x), \quad u_t(x,0) = g(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Obviamente, para resolver (4.20), basta hallar la solución en dos casos particulares: el problema análogo con $h \equiv 0$ (que ya sabemos resolver, gracias al teorema 4.1) y el problema análogo con $f \equiv 0$ y $g \equiv 0$. Por tanto, podemos al menos de momento restringirnos a la situación siguiente:

$$\begin{cases} u_{tt} - c^2 u_{xx} = h(x,t), & (x,t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+, \\ u(x,0) = 0,\ u_t(x,0) = 0, & x \in \mathbb{R}. \end{cases} \tag{4.21}$$

Definición 4.5 *Para cada $t \geq 0$, designaremos $\mathcal{F}(t)$ la aplicación lineal que a cada $g \in C^1(\mathbb{R})$ asocia la función $v(\cdot,t) \in C^1(\mathbb{R})$, donde v es la única solución clásica del problema de Cauchy*

$$\begin{cases} v_{tt} - c^2 v_{xx} = 0, & (x,t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+, \\ v(x,0) = 0,\ v_t(x,0) = g(x), & x \in \mathbb{R}. \end{cases} \tag{4.22}$$

Gracias al teorema 4.1, la aplicación $\mathcal{F}(t)$ está bien definida para cada $t \geq 0$. Además, en virtud de (4.5), tenemos para cada $t \geq 0$ y cada $g \in C^1(\mathbb{R})$ que

$$(\mathcal{F}(t)g)(x) = \frac{1}{2c} \int_{x-ct}^{x+ct} g(\xi)\, d\xi \quad \forall x \in \mathbb{R}. \tag{4.23}$$

El resultado principal de esta sección se conoce como *principio de Duhamel* para la EDP de ondas. Dice lo siguiente:

Teorema 4.3 *Sea $h \in C^1(\mathbb{R} \times \overline{\mathbb{R}}_+)$. Entonces el problema* (4.21) *posee exactamente una solución clásica u, dada por la fórmula siguiente:*

$$u(x,t) = \int_0^t \left(\mathcal{F}(t-s)h(\cdot,s)\right)(x)\, ds \quad \forall (x,t) \in \mathbb{R} \times \overline{\mathbb{R}}_+. \tag{4.24}$$

Demostración: A la vista de (4.23), la fórmula (4.24) quiere decir que

$$u(x,t) = \frac{1}{2c} \int_0^t \left(\int_{x-c(t-s)}^{x+c(t-s)} h(\xi,s)\, d\xi \right) ds \quad \forall (x,t) \in \mathbb{R} \times \overline{\mathbb{R}}_+. \tag{4.25}$$

Que existe a lo más una solución clásica de (4.21) es evidente. Veamos que la función u que proporciona (4.25) lo es.

Es fácil comprobar que $u \in C^2(\mathbb{R} \times \overline{\mathbb{R}}_+)$ y que $u(x,0) \equiv 0$. Además,

$$u_t(x,t) = \frac{1}{2} \int_0^t \left(h(x + c(t-s), s) + h(x - c(t-s), s)\right) ds$$

y

$$u_{tt}(x,t) = h(x,t) + \frac{c}{2} \int_0^t \left(h_x(x + c(t-s), s) - h_x(x - c(t-s), s)\right) ds$$

para cada $(x,t) \in \mathbb{R} \times \overline{\mathbb{R}}_+$. Por otra parte,

$$u_x(x,t) = \frac{1}{2c} \int_0^t \left(h(x + c(t-s), s) - h(x - c(t-s), s) \right) \, ds$$

y

$$u_{xx}(x,t) = \frac{1}{2c} \int_0^t \left(h_x(x + c(t-s), s) - h_x(x - c(t-s), s) \right) \, ds$$

para $(x,t) \in \mathbb{R} \times \overline{\mathbb{R}}_+$. Luego $u_t(x,0) \equiv 0$ y $u_{tt}(x,t) \equiv h(x,t) + c^2 u_{xx}(x,t)$.

Esto prueba que u es solución clásica de (4.21). ∎

Observación 4.10 El teorema precedente permite establecer una importante relación entre la solución del problema (4.22) y la solución del problema (4.21). Se trata por tanto de un resultado similar al que proporciona el *método de Lagrange de variación de la constante* para la determinación de las soluciones de una EDO lineal. El papel que juega en este marco la matriz fundamental es desempeñado aquí por la familia de operadores $\{\mathcal{F}(t)\}_{t \geq 0}$. Existen numerosas versiones de este principio para otras EDPs. De hecho, volveremos sobre el mismo en el tema siguiente, cuando hablemos de la EDP del calor.

Una consecuencia inmediata del teorema 4.3 es la siguiente:

Corolario 4.1 *Supongamos que $h \in C^1(\mathbb{R} \times \overline{\mathbb{R}}_+)$, $f \in C^2(\mathbb{R})$ y $g \in C^1(\mathbb{R})$. Entonces el problema* (4.20) *posee exactamente una solución clásica u, dada por la fórmula siguiente:*

$$\left\{ \begin{aligned} & u(x,t) = \frac{1}{2} \left(f(x+ct) + f(x-ct) \right) + \frac{1}{2c} \int_{x-ct}^{x+ct} g(s) \, ds \\ & \qquad + \frac{1}{2c} \int_0^t \left(\int_{x-c(t-s)}^{x+c(t-s)} h(\xi, s) \, d\xi \right) ds \qquad \forall (x,t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+. \end{aligned} \right. \tag{4.26}$$

Observación 4.11 La hipótesis impuesta a h es poco natural. En efecto, estamos buscando una solución clásica de la EDP de ondas. Por tanto, serían más adecuados resultados similares al teorema 4.3 y al corolario 4.1 para $h \in C^0(\mathbb{R} \times \overline{\mathbb{R}}_+)$. De hecho, debilitando adecuadamente el concepto de solución, esto es posible, aunque queda fuera del objetivo y posibilidades de este curso.

Observación 4.12 Una vez más, pueden hacerse consideraciones sobre la dependencia continua, la regularidad de u, los conjuntos de dependencia, etc. análogas a las de los parágrafos precedentes. En particular, fijado $(x^*, t^*) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+$, la cantidad $u(x^*, t^*)$ depende exclusivamente de los valores de f en $x^* + ct^*$ y $x^* - ct^*$, de los valores de g en el intervalo que tiene estos puntos como extremos y de los valores de h en los puntos (x,t) con $0 \leq t \leq t^*$ y x en el intervalo de extremos $x^* + ct$ y $x^* - ct$. Se llama a este conjunto *cono de dependencia* de (x^*, t^*).

Tema 5

El método de separación de variables. La ecuación del calor unidimensional

Este tema está dedicado al método de separación de variables. Se trata de uno de los pocos métodos que permiten calcular explícitamente las soluciones de una EDP. Como veremos, se aplica sólo a una clase muy particular de EDPs de segundo orden lineales. Pero será útil en el marco que nos ocupa, por ejemplo cuando hablemos de la EDP del calor unidimensional.

5.1 Descripción del método

Supongamos que estamos en presencia de una EDP de la forma

$$a_1(x)u_{xx} + a_2(x)u_x + b_1(y)u_{yy} + b_2(y)u_y + (a_3(x) + b_3(y))u = 0, \qquad (5.1)$$

complementada con condiciones adecuadas. La idea de este método es la siguiente:

1. Buscar soluciones de la EDP que sean de la forma $X(x)\,Y(y)$ (esto es, con variables separadas) y satisfagan algunas de las condiciones adicionales. Gracias a la estructura de la EDP, es posible en muchos casos determinar las funciones X e Y resolviendo *problemas de valores propios* para EDOs adecuadas.[1]

2. Buscar una solución del problema completo como suma de una serie de funciones como las precedentes.

Generalmente, tras cálculos adecuados, se llega a una *solución formal* (o candidata a solución). En una etapa adicional, deberemos después comprobar que la función encontrada es realmente la solución que andamos buscando.

[1] Es decir, problemas en los que las incógnitas son una solución no trivial de una EDO (una autofunción) y un parámetro (el autovalor asociado). Esto será precisado más adelante.

Para una mejor comprensión, aplicaremos a continuación el método en un caso ya conocido y relativamente sencillo. Así, sea $Q = (0,1) \times \mathbb{R}_+$ y consideremos el problema de Cauchy-Dirichlet para la EDP de ondas unidimensional

$$\begin{cases} u_{tt} - u_{xx} = 0, & (x,t) \in (0,1) \times \mathbb{R}_+, \\ u(0,t) = u(1,t) = 0, & t \in \mathbb{R}_+, \\ u(x,0) = u_0(x), \ u_t(x,0) = 0, & x \in [0,\ell], \end{cases} \tag{5.2}$$

donde $u_0 \in C^2([0,1])$.

Etapa 1: En primer lugar, buscaremos soluciones $u \in C^2(\overline{Q})$ no triviales del problema

$$\begin{cases} u_{tt} - u_{xx} = 0, & (x,t) \in (0,1) \times \mathbb{R}_+, \\ u(0,t) = u(1,t) = 0, & t \in \mathbb{R}_+, \end{cases} \tag{5.3}$$

que tengan las variables separadas, es decir, que tengan la forma

$$u(x,t) = X(x)\,T(t).$$

Olvidaremos por tanto de momento las condiciones iniciales.

Obsérvese que el conjunto de todas estas soluciones es un subespacio vectorial de $C^2(\overline{Q})$. Esto explica que pretendamos después encontrar la solución de (5.2) como suma de una serie formada por soluciones de (5.3).

Si $u = X(x)\,T(t)$ es solución de (5.3), entonces $X''\,T = X\,\ddot{T}$. Si suponemos que $X \neq 0$ y $T \neq 0$, entonces

$$\frac{X''}{X} = \frac{\ddot{T}}{T} = -\lambda \tag{5.4}$$

para alguna constante λ.

Para conseguir que u cumpla las condiciones de contorno, bastará imponer $X(0) = X(1) = 0$. Por tanto, resulta natural buscar constantes λ y funciones $X = X(x)$ no idénticamente nulas que verifiquen

$$\begin{cases} X'' + \lambda X = 0, & x \in (0,1), \\ X(0) = X(1) = 0 \end{cases} \tag{5.5}$$

Esto es un problema de *autovalores* y *autofunciones* para una EDO; problemas de este tipo y más generales aparecerán y serán analizados en el tema 6.

No es difícil comprobar que las únicas soluciones no triviales de (5.5) son los pares (λ_n, X_n), con

$$\lambda_n = n^2\pi^2, \quad X_n(x) = C_n \operatorname{sen}(n\pi x) \quad \forall x \in [0,1], \quad n \geq 1 \tag{5.6}$$

(las C_n son constantes arbitrarias).

Para determinar las correpondientes funciones $T = T(t)$, usaremos (5.4) con $\lambda = \lambda_n$. Esto conduce a la EDO

$$\ddot{T} + n^2\pi^2 T = 0,$$

que tiene las soluciones

$$T_n(t) = A_n \cos(n\pi t) + B_n \operatorname{sen}(n\pi t) \quad \forall t \geq 0. \tag{5.7}$$

Con ayuda de (5.6) y (5.7), obtenemos las soluciones de (5.3) que andábamos buscando:

$$u_n(x,t) = (A_n \cos(n\pi t) + B_n \operatorname{sen}(n\pi t)) \operatorname{sen}(n\pi x) \quad \forall (x,t) \in \overline{Q}, \tag{5.8}$$

donde hemos cambiado las constantes $A_n C_n$ y $B_n C_n$ respectivamente por A_n y B_n.

Etapa 2: Cualquier combinación lineal finita formada con las u_n es de nuevo solución de (5.3). Por tanto, tiene perfecto sentido buscar la solución de (5.2) como suma de la serie

$$u(x,t) = \sum_{n\geq 1} (A_n \cos(n\pi t) + B_n \operatorname{sen}(n\pi t)) \operatorname{sen}(n\pi x) \tag{5.9}$$

(que deberá converger en un sentido apropiado).

Admitamos de momento que esta serie converge uniformemente e incluso puede ser derivada hasta dos veces respecto de x y respecto de t término a término.[2] Entonces, para poder asegurar que la función u definida en (5.9) es solución de (5.2), basta imponer a la misma las condiciones iniciales

$$u(x,0) = u_0(x), \quad u_t(x,0) = 0 \quad \forall x \in [0,1]. \tag{5.10}$$

En primer lugar, observamos que

$$u_t(x,t) = \sum_{n\geq 1} (-n\pi A_n \operatorname{sen}(n\pi t) + n\pi B_n \cos(n\pi t)) \operatorname{sen}(n\pi x)$$

para cada (x,t). Luego

$$u_t(x,0) = \pi \sum_{n\geq 1} n B_n \operatorname{sen}(n\pi x)$$

para cada x y la segunda condición inicial de (5.10) nos dice que necesariamente $B_n = 0$ para todo $n \geq 1$. En consecuencia, la función buscada es de la forma

$$u(x,t) = \sum_{n\geq 1} A_n \cos(n\pi t) \operatorname{sen}(n\pi x). \tag{5.11}$$

Para la determinación de los A_n, haremos uso de la primera condición inicial de (5.10). Así, debemos tener

$$u_0(x) = \sum_{n\geq 1} A_n \operatorname{sen}(n\pi x) \quad \forall x \in [0,1]. \tag{5.12}$$

Las funciones $\operatorname{sen}(n\pi x)$ son linealmente independientes. Por tanto, si u_0 es una combinación lineal finita de ellas, entonces es claro que los A_n están unívocamente determinados por (5.12). Pero naturalmente estamos interesados en resolver casos de mucha mayor generalidad.

---

[2] Dicho de otro modo, admitamos que cada una de las series formadas por una derivada de orden ≤ 2 de las u_n también converge uniformemente y lo hace hacia la correspondiente derivada de u.

En cualquier caso, si existen, los A_n deben coincidir con los coeficientes del desarrollo de u_0 en serie de Fourier "con senos" en el intervalo $[0,1]$. Esto es consecuencia de que $u_0 \in L^2(0,1)$ y las funciones $\operatorname{sen}(n\pi x)$ forman un *sistema ortogonal* en $L^2(0,1)$.

En efecto, si se tuviera (5.12), podríamos multiplicar escalarmente ambos miembros de (5.12) por la función $\operatorname{sen}(m\pi x)$ y deducir que

$$\int_0^1 u_0(x)\operatorname{sen}(m\pi x)\,dx = \sum_{n\geq 1} A_n \int_0^1 \operatorname{sen}(n\pi x)\,\operatorname{sen}(m\pi x)\,dx = \frac{1}{2}A_m.$$

Dado que $m \geq 1$ es aquí arbitrario vemos que, si existen, los A_n coinciden efectivamente con los coeficientes indicados:

$$A_n = 2\int_0^1 u_0(x)\operatorname{sen}(n\pi x)\,dx \quad \forall n \geq 1. \tag{5.13}$$

Este procedimiento conduce pues a una *candidata* a solución.

Observación 5.1 Ya sabemos que, para que exista solución clásica de (5.2), la función u_0 y sus derivadas primeras y segundas deben verificar ciertas condiciones de compatibilidad. Por tanto, no siempre vamos a poder encontrar unos A_n tales que la correspondiente u es una verdadera solución. Lo que proporciona el método de separación de variables para (5.2) es, en principio, una *solución generalizada* que tiene la propiedad de coincidir con la única solución clásica caso de que ésta exista.

Ejemplo 5.1 Supongamos que en (5.2) la función u_0 está dada por

$$u_0(x) = x(1-x) \quad \forall x \in [0,1].$$

Entonces no existe solución clásica (compruébese que no se verifican las condiciones (4.8) del tema precedente). Razonando como antes, encontramos que la candidata a solución a la que conduce el método es

$$u(x,t) = \frac{4}{\pi^3}\sum_{n\geq 1}\frac{1-(-1)^n}{n^3}\cos(n\pi t)\,\operatorname{sen}(n\pi x) \quad \forall (x,t) \in \overline{Q}.$$

Esta serie se puede sumar explícitamente en cada una de las regiones Q_1^*, Q_2^*,... que determinan en el rectángulo $\overline{Q}$ las rectas $x \pm t = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ (véase el tema 4 para más detalles). Una vez calculada la suma de la serie, no es difícil comprobar que u es la solución generalizada de la EDP de ondas que puede construirse como en la demostración del teorema 4.2.

5.2 Algunos resultados de convergencia

Para poder aplicar correctamente el método de separación de variables a diversas EDPs, será preciso utilizar algunos conceptos y resultados de convergencia ligados a las series de Fourier; para más detalles, véase por ejemplo [4, 7, 14, 16].

Las series de Fourier parecen haber sido introducidas por J. Bernouilli y L. Euler en el contexto del problema de la cuerda vibrante; ver el tema 4.

Deben su nombre no obstante a J. Fourier, que las utilizó para el análisis de problemas de difusión del calor.

El resultado de base es que

$$\{ \frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos x, \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos 2x, \dots, \frac{1}{\sqrt{\pi}} \operatorname{sen} x, \frac{1}{\sqrt{\pi}} \operatorname{sen} 2x, \dots \} \tag{5.14}$$

es una *base ortonormal* del espacio de Hilbert $L^2(-\pi, \pi)$. Esto quiere decir que estas funciones son ortonormales para el producto escalar en $L^2(-\pi, \pi)$ y que generan todo $L^2(-\pi, \pi)$, esto es, que las combinaciones lineales finitas a las que dan lugar constituyen un subespacio denso de $L^2(-\pi, \pi)$.

Por tanto, dada $f \in L^2(-\pi, \pi)$, si ponemos

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\xi) \cos n\xi \, d\xi \quad \forall n \geq 0 \tag{5.15}$$

y

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\xi) \operatorname{sen} n\xi \, d\xi \quad \forall n \geq 1, \tag{5.16}$$

la serie

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n \geq 1} (a_n \cos nx + b_n \operatorname{sen} nx) \tag{5.17}$$

converge en $L^2(-\pi, \pi)$ hacia f. En otras palabras, si introducimos las sumas parciales

$$s_m(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{m} (a_n \cos nx + b_n \sin nx) \quad \forall x \in [-\pi, \pi],$$

entonces

$$\lim_{m \to \infty} \int_{-\pi}^{\pi} |f(x) - s_m(x)|^2 \, dx = 0.$$

Se dice que (5.17) es la *serie de Fourier* de f en $(-\pi, \pi)$.

Observación 5.2 La convergencia en $L^2(-\pi, \pi)$ de las s_m hacia f implica la convergencia de al menos una subsucesión en casi todo punto $x \in (-\pi, \pi)$ hacia $f(x)$. Pero esto no quiere decir ni mucho menos que s_m converja puntualmente a f. De hecho, es relativamente fácil que esto no ocurra; para más detalles, véase [4, 16].

El procedimiento que permite determinar la serie de Fourier asociada a f consiste por tanto en calcular los coeficientes a_n y b_n a partir de (5.15) y (5.16) y luego sumar la serie (5.17). Se suele escribir que

$$f \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{m} (a_n \cos nx + b_n \sin nx) \quad \text{en} \quad (-\pi, \pi). \tag{5.18}$$

Más generalmente, supongamos dado un intervalo compacto $[a, b]$, con $a < b$. En virtud del cambio de variable

$$x = \frac{2\pi}{b - a} s - \pi \frac{b + a}{b - a},$$

es posible determinar a partir de (5.14) una base ortonormal de $L^2(a,b)$. Se trata de la siguiente:

$$\{ \tfrac{1}{\sqrt{b-a}} \, , \tfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{b-a}} \cos \left(n \left(\tfrac{2\pi(s-a)}{b-a} - \pi \right) \right) , \tfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{b-a}} \operatorname{sen} \left(n \left(\tfrac{2\pi(s-a)}{b-a} - \pi \right) \right) \}.$$

En otras palabras, dada $f \in L^2(a,b)$, si ponemos

$$A_n = \frac{2}{b-a} \int_a^b f(\sigma) \cos \left(n \left(\tfrac{2\pi(\sigma-a)}{b-a} - \pi \right) \right) d\sigma \quad \forall n \geq 0 \tag{5.19}$$

y

$$B_n = \frac{2}{b-a} \int_a^b f(\sigma) \operatorname{sen} \left(n \left(\tfrac{2\pi(\sigma-a)}{b-a} - \pi \right) \right) d\sigma \quad \forall n \geq 1, \tag{5.20}$$

entonces la serie

$$\frac{A_0}{2} + \sum_{n\geq 1} \left(A_n \cos \left(n \left(\tfrac{2\pi(s-a)}{b-a} - \pi \right) \right) + B_n \operatorname{sen} \left(n \left(\tfrac{2\pi(s-a)}{b-a} - \pi \right) \right) \right) \tag{5.21}$$

converge en $L^2(a,b)$ hacia f.

Recordemos que, en todos los casos, se da la *identidad de Parseval*, que nos dice lo siguiente:

$$\frac{2}{b-a} \int_a^b |f(\sigma)|^2 \, d\sigma = \frac{A_0^2}{2} + \sum_{n\geq 1} \left(A_n^2 + B_n^2 \right). \tag{5.22}$$

Consideremos el caso particular en que $[a,b] = [-\ell, \ell]$, con $\ell > 0$. Entonces (5.19), (5.20) y (5.21) se escriben como sigue:

$$A_n = \frac{1}{\ell} \int_{-\ell}^{\ell} f(\sigma) \cos \left(\frac{n\pi\sigma}{\ell} \right) d\sigma \quad \forall n \geq 0, \tag{5.23}$$

$$B_n = \frac{1}{\ell} \int_{-\ell}^{\ell} f(\sigma) \operatorname{sen} \left(\frac{n\pi\sigma}{\ell} \right) d\sigma \quad \forall n \geq 1 \tag{5.24}$$

y

$$\frac{A_0}{2} + \sum_{n\geq 1} \left(A_n \cos \left(\frac{n\pi s}{\ell} \right) + B_n \operatorname{sen} \left(\frac{n\pi s}{\ell} \right) \right). \tag{5.25}$$

Si f es una función *par*, esto es, si $f(-s) \equiv f(s)$, entonces los coeficientes B_n asociados son todos nulos y, en consecuencia, obtenemos un desarrollo de Fourier que contiene exclusivamente “cosenos”. Análogamente, si f es *impar*, es decir, si se tiene que $f(-s) \equiv -f(s)$, entonces todos los $A_n = 0$ y el desarrollo obtenido sólo posee “senos”.

Razonaremos ahora del modo siguiente. Sea $f \in L^2(0,\ell)$ dada y sea f_{par} (resp. f_{impar}) la prolongación par (resp. impar) de f a todo el intervalo $(-\ell,\ell)$. De acuerdo con lo que precede, f_{par} (resp. f_{impar}) posee un desarrollo de Fourier en $(-\ell,\ell)$ que contiene sólo “cosenos” (resp. “senos”). Particularizando a $(0,\ell)$, obtenemos de este modo dos nuevos desarrollos de Fourier de f en este intervalo:

$$f \sim \frac{A_0^*}{2} + \sum_{n\geq 1} A_n^* \cos \left(\frac{n\pi s}{\ell} \right) \quad \text{en} \quad (0,\ell) \tag{5.26}$$

con

$$A_n^* = \frac{2}{\ell} \int_0^\ell f(\sigma) \cos\left(\frac{n\pi\sigma}{\ell}\right) d\sigma \quad \forall n \geq 0 \tag{5.27}$$

y

$$f \sim \sum_{n\geq 1} B_n^* \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi s}{\ell}\right) \quad \text{en} \quad (0, \ell) \tag{5.28}$$

con

$$B_n^* = \frac{2}{\ell} \int_0^\ell f(\sigma) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi\sigma}{\ell}\right) d\sigma \quad \forall n \geq 1. \tag{5.29}$$

Diremos que (5.26) (resp. (5.28)) es el desarrollo par (resp. impar) de f en $(0, \ell)$.

En particular, las afirmaciones precedentes muestran que

$$\{ \frac{1}{\sqrt{\ell}}, \sqrt{\frac{2}{\ell}} \cos\left(\frac{\pi s}{\ell}\right), \sqrt{\frac{2}{\ell}} \cos\left(\frac{2\pi s}{\ell}\right), \dots \}$$

y

$$\{ \sqrt{\frac{2}{\ell}} \operatorname{sen}\left(\frac{\pi s}{\ell}\right), \sqrt{\frac{2}{\ell}} \operatorname{sen}\left(\frac{2\pi s}{\ell}\right), \dots \}$$

son sistemas ortonormales completos en $L^2(0, \ell)$.

Volvamos a considerar el caso general de un intervalo compacto arbitrario $[a, b]$. En el resultado siguiente, presentamos un criterio que garantiza la convergencia absoluta y uniforme del desarrollo determinado por (5.19)–(5.21).

Teorema 5.1 *Sea $f \in C^0([a, b])$ y supongamos que $f(a) = f(b)$ y que existe $g \in L^2(a, b)$ tal que*

$$f(s) = f(a) + \int_a^s g(\sigma)\, d\sigma \quad \forall s \in [a, b]. \tag{5.30}$$

Entonces la serie de Fourier (5.21) *converge absoluta y uniformemente a f en $[a, b]$.*

Demostración: Veamos que (5.21) converge absoluta y uniformemente en $[a, b]$. En tal caso, debe hacerlo hacia f (pues la convergencia absoluta y uniforme en $[a, b]$ implica la convergencia en $L^2(a, b)$).

En virtud del criterio *M de Weierstrass*, teniendo en cuenta que

$$\left| A_n \cos\left(n\left(\tfrac{2\pi(s-a)}{b-a} - \pi\right)\right) + B_n \operatorname{sen}\left(n\left(\tfrac{2\pi(s-a)}{b-a} - \pi\right)\right) \right| \leq |A_n| + |B_n|,$$

vemos que basta probar que

$$\sum_{n\geq 1} (|A_n| + |B_n|) < +\infty. \tag{5.31}$$

Para ello, utilizaremos los coeficientes del desarrollo en serie de Fourier de la función g que aparece en (5.30).

Más precisamente, sean

$$A_n' = \frac{2}{b-a} \int_{-\pi}^{\pi} g(\sigma) \cos\left(n\left(\tfrac{2\pi(\sigma-a)}{b-a} - \pi\right)\right) d\sigma \quad \forall n \geq 0 \tag{5.32}$$

y

$$B'_n = \frac{2}{b-a}\int_{-\pi}^{\pi} g(\sigma)\,\mathrm{sen}\left(n\left(\tfrac{2\pi(\sigma-a)}{b-a}-\pi\right)\right)\,d\sigma \quad \forall n \geq 1. \tag{5.33}$$

Gracias a la identidad de Parseval, sabemos que

$$\sum_{n\geq 1}\left(|A'_n|^2 + |B'_n|^2\right) < +\infty. \tag{5.34}$$

Por otra parte, en las condiciones del teorema, tenemos para $n \geq 1$ que

$$\begin{aligned}
A_n &= \frac{2}{b-a}\int_a^b f(\sigma)\cos\left(n\left(\tfrac{2\pi(\sigma-a)}{b-a}-\pi\right)\right)\,d\sigma \\
&= \frac{2}{b-a}\int_a^b \left(f(a)+\int_a^\sigma g(\xi)\,d\xi\right)\cos\left(n\left(\tfrac{2\pi(\sigma-a)}{b-a}-\pi\right)\right)\,d\sigma \\
&= \frac{2}{b-a}\int_a^b \left(\int_a^\sigma g(\xi)\,d\xi\right)\cos\left(n\left(\tfrac{2\pi(\sigma-a)}{b-a}-\pi\right)\right)\,d\sigma.
\end{aligned}$$

Aplicando el teorema de Fubini en esta última integral iterada, obtenemos:

$$\begin{aligned}
A_n &= \frac{2}{b-a}\int_a^b \left(\int_\xi^b \cos\left(n\left(\tfrac{2\pi(\sigma-a)}{b-a}-\pi\right)\right)\,d\sigma\right) g(\xi)\,d\xi \\
&= \frac{2}{b-a}\int_a^b \left[\frac{b-a}{2\pi n}\,\mathrm{sen}\left(n\left(\tfrac{2\pi(\sigma-a)}{b-a}-\pi\right)\right)\right]_{\sigma=\xi}^{\sigma=b} g(\xi)\,d\xi \\
&= -\frac{1}{\pi n}\int_a^b g(\xi)\,\mathrm{sen}\left(n\left(\tfrac{2\pi(\xi-a)}{b-a}-\pi\right)\right)\,d\xi \\
&= -\frac{b-a}{2\pi n}B'_n.
\end{aligned}$$

Así pues,

$$|A_n| = \frac{b-a}{2\pi n}|B'_n| \leq \frac{(b-a)^2}{\pi^2 n^2} + |B'_n|^2 \tag{5.35}$$

para cada $n \geq 1$.

De forma análoga, usando que $f(a) = f(b)$ y por tanto

$$\int_a^b g(\sigma)\,d\sigma = 0,$$

se prueba que

$$B_n = \frac{b-a}{2\pi n}A'_n.$$

Deducimos entonces que

$$|B_n| = \frac{b-a}{2\pi n}|A'_n| \leq \frac{(b-a)^2}{\pi^2 n^2} + |A'_n|^2 \tag{5.36}$$

Finalmente, de (5.35), (5.36) y (5.34), resulta (5.31). Esto termina la demostración. ∎

Observación 5.3 En el teorema precedente, lo que estamos imponiendo a f es lo siguiente:

$$f \in H^1(a,b), \quad f(a) = f(b).$$

Más generalmente, toda condición sobre f que haga que los coeficientes A_n y B_n cumplan (5.31) implica la convergencia absoluta y uniforme del desarrollo en serie de Fourier. Para más detalles, véase [4, 16, 19].

Como consecuencia del teorema 5.1, tenemos también el resultado siguiente:

Teorema 5.2 *Sea $f \in C^0([0,\ell])$ y supongamos que existe $g \in L^2(0,\ell)$ tal que*

$$f(s) = f(0) + \int_0^s g(\sigma)\, d\sigma \quad \forall s \in [0,\ell]. \tag{5.37}$$

Entonces se tienen las siguientes propiedades de convergencia:

- *El desarrollo par (5.26) de f converge absoluta y uniformemente en $[0,\ell]$.*
- *Si $f(0) = f(\ell) = 0$, el desarrollo impar (5.28) de f converge absoluta y uniformemente en $[0,\ell]$.*

Demostración: Este resultado es una sencilla consecuencia del teorema 5.1.

En efecto, supongamos que $f \in C^0([0,\ell])$ y se tiene (5.37). Entonces la prolongación par f_{par} de f está en las condiciones del teorema 5.1, con $a = -\ell$ y $b = \ell$. Por tanto, su desarrollo en serie de Fourier converge absoluta y uniformemente en $[-\ell,\ell]$. Evidentemente, esto prueba la convergencia absoluta y uniforme de (5.26) hacia f en $[0,\ell]$.

Supongamos ahora que, además, $f(0) = f(\ell) = 0$. Entonces también podemos aplicar el teorema 5.1 a la prolongación impar f_{impar} y, como antes, se deduce la convergencia absoluta y uniforme de (5.28). ∎

Observación 5.4 En ocasiones son útiles las propiedades siguientes. Sea $\{\varphi_n\}$ una sucesión de funciones de $C^0([a,b])$ y supongamos que existen constantes M_n tales que

$$|\varphi_n(x)| \le M_n \quad \forall x \in [a,b], \quad \forall n \ge 1,$$

con $\sum_{n\ge1} M_n < +\infty$. Para cada $x \in [a,b]$, sea $f(x) = \sum_{n\ge1} \varphi_n(x)$. Entonces $f : [a,b] \mapsto \mathbb{R}$ está bien definida, es continua y en la suma precedente hay convergencia absoluta y uniforme en $[a,b]$. Si, además, las $\varphi_n \in C^1([a,b])$ y existen nuevas constantes M'_n tales que

$$|\varphi'_n(x)| \le M'_n \quad \forall x \in [a,b], \quad \forall n \ge 1$$

con $\sum_{n\ge1} M'_n < +\infty$, entonces f es continuamente diferenciable y se tiene $f'(x) = \sum_{n\ge1} \varphi'_n(x)$ en $[a,b]$, de nuevo con convergencia absoluta y uniforme. Estas propiedades son también válidas para funciones de varias variables, por ejemplo en cerrados de la forma $\overline{Q} = [0,\ell] \times [0,+\infty)$. Así, si las $u_n \in C^0(\overline{Q})$, tenemos que $|u_n| \le M_n$ en $\overline{Q}$ con $\sum_{n\ge1} M_n < +\infty$ y ponemos $u(x,t) = \sum_{n\ge1} u_n(x,t)$ para cada $(x,t) \in \overline{Q}$, entonces $u : \overline{Q} \mapsto \mathbb{R}$ está bien definida y es continua y en la serie que precede hay convergencia absoluta y uniforme en $\overline{Q}$.

5.3 Aplicación a la ecuación del calor unidimensional

El resto de este tema está dedicado a la EDP del calor unidimensional

$$u_t - u_{xx} = F,$$

donde $F = F(x,t)$ es una función dada. Más precisamente, aplicaremos los resultados que preceden a la resolución del problema mixto de Cauchy-Dirichlet:

$$\begin{cases} u_t - u_{xx} = F(x,t), & (x,t) \in (0,\ell) \times (0,T), \\ u(0,t) = u(\ell,t) = 0, & t \in (0,T), \\ u(x,0) = u_0(x), & x \in [0,\ell], \end{cases} \tag{5.38}$$

donde los datos u_0 y F verifican propiedades adecuadas (recuérdese el problema (1.16) formulado en el tema 1 para la situación N-dimensional análoga).

Supondremos en primer lugar que $F(x,t) \equiv 0$. El problema es entonces el siguiente:

$$\begin{cases} u_t - u_{xx} = 0, & (x,t) \in (0,\ell) \times (0,+\infty), \\ u(0,t) = u(\ell,t) = 0, & t \in (0,+\infty), \\ u(x,0) = u_0(x), & x \in [0,\ell], \end{cases} \tag{5.39}$$

En el resto de este tema pondremos $Q = (0,\ell)\times(0,+\infty)$ y $Q_T = (0,\ell)\times(0,T)$ para cada $T > 0$.

Definición 5.1 *Sea $u_0 \in C^0([0,\ell])$. Se dice que $u : \overline{Q} \mapsto \mathbb{R}$ es solución (clásica) de* (5.39) *si $u \in C^0(\overline{Q})$, las funciones $u_t, u_x, u_{xx} \in C^0([0,\ell] \times [a,+\infty)))$ para cada $a > 0$,*

$$u_t(x,t) - u_{xx}(x,t) = 0 \quad \forall (x,t) \in Q, \tag{5.40}$$

$$u(0,t) = u(\ell,t) = 0 \ \ \forall t > 0 \ \ y \ \ u(x,0) = u_0(x) \ \ \forall x \in [0,\ell]. \tag{5.41}$$

Evidentemente, si existe solución de (5.39), necesariamente

$$u_0(0) = u_0(\ell) = 0. \tag{5.42}$$

Veremos a continuación que, bajo condiciones un poco más exigentes que éstas, existe una única solución de (5.39).

Teorema 5.3 *Sea $u_0 \in C^0([0,\ell])$ una función dada. Supongamos que se cumple* (5.42) *y que existe una función $u_1 \in L^2(0,\ell)$ tal que*

$$u_0(x) = \int_0^x u_1(\xi)\, d\xi \quad \forall x \in [0,\ell]. \tag{5.43}$$

Entonces existe una única solución u del problema (5.39)*. Además, u verifica*

$$\lim_{t \to 0^+} \|u(\cdot,t) - u_0\|_{L^2(0,\ell)} = 0 \tag{5.44}$$

y la propiedad de regularidad siguiente:

$$u \in C^\infty([0,\ell] \times [a,+\infty)) \quad \forall a > 0. \tag{5.45}$$

Demostración: Probaremos en primer lugar que (5.39) posee al menos una solución.

De acuerdo con el método de separación de variables, buscaremos una solución de la forma

$$u(x,t) = \sum_{n\geq 1} a_n e^{-(n\pi/\ell)^2 t} \operatorname{sen}(n\pi x/\ell), \tag{5.46}$$

donde las a_n están dadas por

$$a_n = \frac{2}{\ell}\int_0^\ell u_0(\xi)\operatorname{sen}(n\pi\xi/\ell)\,d\xi \quad \forall n \geq 1. \tag{5.47}$$

Veamos que la función u determinada por (5.46) es solución de (5.39).

En primer lugar, veremos que la serie que aparece en (5.46) converge absoluta y uniformemente en $\overline{Q}$. Esto es inmediato: en efecto, las serie de los valores absolutos está mayorada por

$$\sum_{n\geq 1} |a_n|\,|\operatorname{sen}(n\pi x)\ell)|$$

y esta serie converge uniformememte en $[0,\ell]$ por el teorema 5.2 y (5.43).

Para ello, en virtud del criterio de Weierstrass, basta demostrar que

$$\sum_{n\geq 1} |a_n| < +\infty. \tag{5.48}$$

Esto se puede conseguir razonando como en la demostración del teorema 5.1.

En efecto, para cada n, sea b'_n el n-ésimo coeficiente de Fourier del desarrollo en cosenos de la función u_1 en $(0,\ell)$, esto es:

$$b'_n = \frac{2}{\ell}\int_0^\ell u_1(\xi)\cos(n\pi\xi/\ell)\,d\xi.$$

Entonces, por la identidad de Parseval,

$$\sum_{n\geq 1} |b'_n|^2 < +\infty. \tag{5.49}$$

Por otra parte,

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{2}{\ell}\int_0^\ell u_0(\sigma)\operatorname{sen}(n\pi\sigma/\ell)\,d\sigma \\ &= \frac{2}{\ell}\int_0^\ell \left(\int_0^\sigma u_1(\xi)\,d\xi\right)\operatorname{sen}(n\pi\sigma/\ell)\,d\sigma \\ &= \frac{2}{n\pi}\int_0^\ell u_1(\sigma)\cos(n\pi\sigma/\ell)\,d\sigma \\ &= \frac{2}{n\pi}b'_n. \end{aligned}$$

Así pues,

$$|a_n| \leq \frac{1}{\pi^2 n^2} + |b'_n|^2 \quad \forall n \geq 1. \tag{5.50}$$

Evidentemente, de (5.49) y (5.50), obtenemos (5.48).

De la convergencia absoluta y uniforme precedente, se deduce que la función $u : \overline{Q} \mapsto \mathbb{R}$ determinada por (5.48) está bien definida y es continua. Además, la serie converge puntualmente en $\overline{Q}$ y, en particular, tenemos (5.41).

Veamos a continuación que, fijados $a > 0$ y los enteros $\alpha_1, \alpha_2 \geq 0$, la serie

$$\sum_{n\geq 1} \frac{\partial^{\alpha_1+\alpha_2}}{\partial x^{\alpha_1} \partial t^{\alpha_2}} \left(a_n e^{-(n\pi/\ell)^2 t} \mathrm{sen}\,(n\pi x/\ell) \right) \tag{5.51}$$

converge absoluta y uniformemente en $[0, \ell] \times [a, +\infty)$.

En efecto, sean a, α_1 y α_2 dados. Dado que $a_n \to 0$, existe una constante $K > 0$ tal que

$$|a_n| \leq K \quad \forall n \geq 1.$$

Por otra parte, existe $C(\alpha_1, \alpha_2) > 0$ tal que

$$\left| \frac{\partial^{\alpha_1+\alpha_2}}{\partial x^{\alpha_1} \partial t^{\alpha_2}} \left(e^{-(n\pi/\ell)^2 t} \mathrm{sen}\,(n\pi x/\ell) \right) \right| \leq C(\alpha_1, \alpha_2)\, n^{\alpha_1+2\alpha_2} e^{-(n\pi/\ell)^2 t}$$

para todo $n \geq 1$. Pero en $[0, \ell] \times [a, +\infty)$ tenemos esta última cantidad acotada por

$$C(\alpha_1, \alpha_2)\, n^{\alpha_1+2\alpha_2} e^{-(n\pi/\ell)^2 a}$$

Por tanto, tenemos que

$$\sum_{n\geq 1} \left| a_n \frac{\partial^{\alpha_1+\alpha_2}}{\partial x^{\alpha_1} \partial t^{\alpha_2}} \left(e^{-(n\pi/\ell)^2 t} \mathrm{sen}\,(n\pi x/\ell) \right) \right|$$
$$\leq K C(\alpha_1, \alpha_2) \sum_{n\geq 1} n^{\alpha_1+2\alpha_2} e^{-(n\pi/\ell)^2 a}.$$

Teniendo en cuenta que esta última serie converge, deducimos que, efectivamente, (5.51) converge absoluta y uniformemente en $[0, \ell] \times [a, +\infty)$.

Dado que α_1 y α_2 son arbitrarios, obtenemos que la función u posee derivadas de orden arbitrario en $[0, \ell] \times [a, +\infty)$ para cada $a > 0$ y en consecuencia verifica la propiedad de regularidad (5.45).

Además, las propiedades de convergencia precedentes muestran que la serie puede derivarse término a término en Q. Por tanto, también tenemos (5.40).

Finalmente, veamos que se tiene (5.44). Podemos suponer $u_0 \neq 0$. Sea entonces $\varepsilon > 0$. Probemos que existe $\tau > 0$ (dependiente de u_0 y ε) tal que, si $0 \leq t \leq \tau$, entonces

$$\|u(\cdot, t) - u_0\|^2_{L^2(0,\ell)} \leq \varepsilon. \tag{5.52}$$

Teniendo en cuenta (5.46) y que los a_n son los coeficientes del desarrollo impar de u_0 en $(0, \ell)$, tenemos que

$$\|u(\cdot, t) - u_0\|^2_{L^2(0,\ell)} = \sum_{n\geq 1} \left(1 - e^{-(n\pi/\ell)^2 t} \right)^2 |a_n|^2. \tag{5.53}$$

Existe $n_0 \geq 1$ (dependiente de u_0 y ε) tal que

$$\sum_{n\geq n_0+1} |a_n|^2 \leq \frac{\varepsilon}{2}. \tag{5.54}$$

Por otra parte, existe $\tau > 0$ (que depende sólo de u_0, n_0 y ε) tal que, si $0 \leq t \leq \tau$, se tiene

$$\max_{1 \leq n \leq n_0} \left(1 - e^{-(n\pi/\ell)^2 t}\right)^2 \leq \frac{\varepsilon}{2} \|u_0\|_{L^2(0,\ell)}^{-2}. \tag{5.55}$$

Combinando (5.53), (5.54) y (5.55), deducimos que

$$\begin{aligned}
&\|u(\cdot,t) - u_0\|_{L^2(0,\ell)}^2 \\
&= \sum_{n=1}^{n_0} \left(1 - e^{-(n\pi/\ell)^2 t}\right)^2 |a_n|^2 + \sum_{n \geq n_0+1} \left(1 - e^{-(n\pi/\ell)^2 t}\right)^2 |a_n|^2 \\
&\leq \frac{\varepsilon}{2} \|u_0\|_{L^2(0,\ell)}^{-2} \sum_{n=1}^{n_0} |a_n|^2 + \sum_{n \geq n_0+1} |a_n|^2 \\
&\leq \varepsilon.
\end{aligned}$$

Esto prueba lo que queríamos. Por tanto, también tenemos (5.44).

Veamos ahora que la solución construida es única. Así, sea v otra solución de (5.39) y pongamos $w = u - v$ y

$$E(t) = \frac{1}{2} \int_0^\ell |w(x,t)|^2 \, dx \quad \forall t \geq 0.$$

Entonces E es continua en $[0, +\infty)$. Además, gracias a las propiedades satisfechas por u y v, es claro que $E(0) = 0$ y que, si $0 < t_1 < t_2$,

$$\begin{aligned}
E(t_2) - E(t_1) &= \frac{1}{2} \int_0^\ell \left(|w(x,t_2)|^2 - |w(x,t_1)|^2\right) dx \\
&= \int_0^\ell \left(\int_{t_1}^{t_2} w \, w_t \, dt\right) dx = \int_{t_1}^{t_2} \left(\int_0^\ell w \, w_{xx} \, dt\right) dx \\
&= -\int_{t_1}^{t_2} \left(\int_0^\ell |w_x|^2 \, dt\right) dx \leq 0.
\end{aligned}$$

Por tanto, $E(t) \equiv 0$, de donde $w(x,t) \equiv 0$ y u y v coinciden.

Esto termina la demostración. ∎

Observación 5.5 Vemos pues que la solución de (5.39) es *muy regular* para $t > 0$ (aunque el dato inicial u_0 puede ser poco regular). Esto se interpreta diciendo que la EDP del calor *posee efecto regularizante*. Esta propiedad está ligada a la *irreversibilidad* de la EDP del calor, es decir, al hecho de que la ecuación no es invariante para el cambio de t por $-t$. Obsérvese que nada de esto ocurre en el caso de la EDP de ondas.

Observación 5.6 Sean u_0 un dato inicial en las condiciones del teorema 5.3 y sea u la solución del correspondiente problema (5.39). Entonces, para cada $\varepsilon > 0$ existe una constante $C_\varepsilon > 0$ tal que

$$\|u(\cdot,t)\|_{L^\infty(0,\ell)} \leq C_\varepsilon e^{-(\pi/\ell)^2 t} \quad t \geq \varepsilon.$$

En otras palabras, la solución u "decae exponencialmente a cero" uniformemente en x cuando $t \to +\infty$.

Observación 5.7 Podríamos haber introducido un concepto de solución más débil, que no requiriera hipótesis tan exigentes sobre u_0 (como ya se ha hecho para las EDPs de Poisson y de ondas). Para ello, es necesario recurrir a los espacios de Sobolev $H_0^1(0,\ell)$ (recuérdese la definición 3.6) y $H^2(0,\ell)$, donde

$$H^2(0,\ell) = \{\, v \in L^2(0,\ell) : v_x, v_{xx} \in L^2(0,\ell)\,\}.$$

Evidentemente, $H^2(0,\ell)$ es un subespacio vectorial de $H^1(0,\ell)$. Si $v \in H^2(0,\ell)$, entonces podemos hablar de v_x y de v_{xx} (la derivada débil de v_x). Además, dotado del producto escalar

$$(v,w)_{H^2} = (v,w)_{L^2} + (v_x,w_x)_{L^2} + (v_{xx},w_{xx})_{L^2} \quad \forall v,w \in H^2(0,\ell),$$

$H^2(0,\ell)$ se convierte en un espacio de Hilbert separable. Introduzcamos la notación siguiente:

$$D = H^2(0,\ell) \cap H_0^1(0,\ell), \quad Av = -v_{xx} \quad \forall v \in D.$$

Se puede demostrar fácilmente que D es un subespacio cerrado de $H^2(0,\ell)$ y, por tanto, es un nuevo espacio de Hilbert para el mismo producto escalar.

Sea entonces $u_0 \in L^2(0,\ell)$. Se dice que $\tilde{u}$ es solución generalizada de (5.39) si

$$\tilde{u} \in C^0([0,+\infty); L^2(0,\ell)) \cap C^1((0,+\infty); L^2(0,\ell)) \cap C^0((0,+\infty); D),$$

$$\tilde{u}'(t) + A\tilde{u}(t) = 0 \quad \forall t > 0 \;\text{ y }\; \tilde{u}(0) = u_0.$$

Obsérvese que estamos mirando aquí la EDP del calor como una ecuación diferencial en la variable t. De acuerdo con ello, buscamos soluciones que sean funciones de la variable t con valores en un espacio de funciones en la variable x. Desde un punto de vista práctico, es mucho más apropiado imponer a u_0 que sea (sólo) de clase L^2. Esto permite trabajar, por ejemplo, con datos iniciales u_0 constantes o regulares a trozos. Incluso permite trabajar con algunas u_0 no acotadas. Así, muchos más fenómenos tomados de la realidad pueden ser descritos. Esto justifica el concepto de solución generalizada.

Razonando como en la demostración del teorema 5.3, se puede probar que, para cada $u_0 \in L^2(0,\ell)$, existe una única solución generalizada $\tilde{u}$ de (5.39). Naturalmente, si u_0 está en las condiciones del teorema 5.3 y u es la correspondiente solución de (5.39), se tiene que

$$(\tilde{u}(t))(x) = u(x,t) \;\text{ c.p.d. en }\; (0,\ell) \;\; \forall t \geq 0.$$

Observación 5.8 Supongamos que el dato inicial u_0 verifica

$$u_0 \in C^2([0,\ell]), \quad u_0(0) = u_0(\ell) = u_0''(0) = u_0''(\ell) = 0$$

y que existe una función $z \in L^2(0,\ell)$ tal que

$$u_0''(x) = \int_0^x z(\xi)\, d\xi \quad \forall x \in [0,\ell].$$

Entonces se puede demostrar que la solución u del problema (5.39) verifica

$$u_t, u_x, u_{xx} \in C^0(\overline{Q}). \tag{5.56}$$

Consideremos ahora el problema no homogéneo (5.38), donde el dato inicial $u_0 \in C^0([0,\ell])$ y (por ejemplo) el segundo miembro $F \in C^0(\overline{Q})$. En este caso, nos limitaremos a indicar en qué modo puede aplicarse el método de separación de variables, sin analizar la convergencia de las series resultantes.

En base a la técnica descrita en la sección 1, buscaremos una solución de (5.38) que se escriba en la forma

$$u(x,t) = \sum_{n\geq 1} u_n(t) \,\mathrm{sen}\,(n\pi x/\ell), \tag{5.57}$$

donde las funciones u_n son desconocidas. Para cada $t \in (0,T)$, la función $F(\cdot,t)$ admite un desarrollo en serie de Fourier y podemos escribir

$$F(x,t) \sim \sum_{n\geq 1} F_n(t) \,\mathrm{sen}\,(n\pi x/\ell) \quad \text{en} \quad (0,\ell), \tag{5.58}$$

con las F_n dadas como sigue:

$$F_n(t) = \frac{2}{\ell}\int_0^\ell F(\xi,t)\,\mathrm{sen}\,(n\pi\xi/\ell)\,d\xi \quad \forall n \geq 1. \tag{5.59}$$

Teniendo en cuenta (5.57), (5.58) y la EDP que debe verificar u, es natural pedirle a las funciones u_n que verifiquen

$$u_n'(t) + \left(\frac{n\pi}{\ell}\right)^2 u_n(t) = F_n(t), \quad t \in (0,T). \tag{5.60}$$

Por otra parte, de la condición inicial que debe verificar u, resulta claramente que las u_n deben cumplir

$$u_n(0) = a_n \ \text{ con } \ a_n = \frac{2}{\ell}\int_0^\ell u_0(\xi)\,\mathrm{sen}\,(n\pi\xi/\ell)\,d\xi. \tag{5.61}$$

Así, contamos con un problema de Cauchy diferencial ordinario para cada u_n que nos permite calcular esta función y después la candidata a solución u. Más precisamente, tenemos:

$$u_n(t) = a_n e^{-(n\pi/\ell)^2 t} + \int_0^t e^{-(n\pi/\ell)^2(t-s)} F_n(s)\,ds \quad \forall t \in [0,T]. \tag{5.62}$$

En los ejercicios propuestos, aplicaremos este procedimiento en diversos casos particulares (y también en algunos casos similares, correspondientes a otras ecuaciones y/o otras condiciones de contorno).

Observación 5.9 Para más información sobre el método de separación de variables y su aplicación, entre otras, a las EDPs de Laplace, Poisson y ondas, véase por ejemplo [16, 19].

Tema 6

Teoría espectral de operadores lineales compactos y aplicaciones

En este tema presentaremos una introducción a la *teoría espectral* de operadores. En particular, analizaremos la estructura del *espectro* de un operador lineal *compacto* y *autoadjunto*. Este análisis permitirá llegar a importantes consecuencias, primero en el contexto de las ecuaciones integrales y después en el marco de las EDPs.

6.1 Propiedades del rango y el núcleo de un operador y su adjunto

Sean H y G dos espacios de Hilbert, cuyos productos escalares y normas se denotan respectivamente $(\cdot\,,\cdot)_H$ y $(\cdot\,,\cdot)_G$ y $\|\cdot\|_H$ y $\|\cdot\|_G$. Sea $T \in \mathcal{L}(H;G)$. Recordemos que el núcleo $N(T) = \{\, x \in H : Tx = 0 \,\}$ es un subespacio cerrado de H y que el rango $R(T) = \{\, Tx : x \in H \,\}$ es un subespacio de G.

Proposición 6.1 *Dado un operador $T \in \mathcal{L}(H;G)$, se tiene:*

1. $N(T) = R(T^*)^\perp$ *y* $N(T^*) = R(T)^\perp$.

2. $N(T)^\perp = \overline{R(T^*)}$ *y* $N(T^*)^\perp = \overline{R(T)}$.

Demostración: Observemos que $x \in N(T)$ si y sólo si $(Tx, y)_G = 0$ para cada $y \in G$ y que esto ocurre si y sólo si $(x, T^*y)_H = 0$ para cada $y \in G$, es decir, si y sólo si $x \in R(T^*)^\perp$. Esto prueba la primera parte del aptdo. 1.

Por otra parte, como H es la suma directa ortogonal de $\overline{R(T^*)}$ y $R(T^*)^\perp$ y sabemos ya que $R(T^*)^\perp = N(T)$, deducimos que $N(T)^\perp = \overline{R(T^*)}$. Esto prueba la primera igualdad del aptdo. 2.

Las restantes afirmaciones son ahora inmediatas, cambiando T por su adjunto T^*. ■

6.2 Operadores lineales compactos

En este parágrafo y en los que siguen, X e Y son espacios de Banach cuyas normas se denotan respectivamente $\| \cdot \|_X$ y $\| \cdot \|_Y$.

En el espacio de Banach $\mathcal{L}(X;Y)$ hay algunos operadores particulares que merecen nuestra atención: los operadores lineales compactos.

Definición 6.1 *Sean B_X la bola unidad cerrada de X y sea $T \in \mathcal{L}(X;Y)$. Se dice que T es compacto si el conjunto $T(B_X) = \{ Tx : x \in B_X \}$ es relativamente compacto en Y.*

Recordemos que un conjunto $K \subset Y$ es relativamente compacto si y sólo si su adherencia $\overline{K}$ es un compacto, es decir, si y sólo si de todo recubrimiento abierto de $\overline{K}$ puede extraerse un sub-recubrimiento finito.

Dado que todo espacio de Banach es en particular un espacio métrico completo, K es relativamente compacto si y sólo si para cada $\varepsilon > 0$ existe un recubrimiento finito de K formado por bolas de radio ε; véase por ejemplo [14].

En lo que sigue, se usará con frecuencia que el conjunto $K \subset Y$ es relativamente compacto si y sólo si de toda sucesión $\{y_n\}$ con los $y_n \in K$ puede extraerse una subsucesión convergente. Por supuesto, el límite de esta subsucesión pertenecerá necesariamente a $\overline{K}$.

Observación 6.1 Sabemos que la bola unidad cerrada B_X es compacta si y sólo si X posee dimensión finita; para una demostraión de esta afirmación, véase [3]. Por tanto, si X es un espacio de Banach de dimensión infinita, la identidad $\mathrm{Id} : X \mapsto X$ es un operador lineal continuo no compacto.

Proposición 6.2 *Sea $T \in \mathcal{L}(X;Y)$. Son equivalentes:*

1. *T es compacto.*
2. *Si $B \subset X$ es acotado, $T(B)$ es relativamente compacto en Y.*
3. *De toda sucesión $\{x_n\}$ que sea acotada se puede extraer una subsucesión $\{x_{n_k}\}$ tal que $\{Tx_{n_k}\}$ es convergente (en Y).*

Demostración: Supongamos que T es compacto y sea $B \subset X$ un acotado. Entonces existe $r > 0$ tal que $B \subset rB_X$, de donde $T(B) \subset rT(B_X)$. Pero $rT(B_X)$ es relativamente compacto. Por tanto, también lo es $T(B)$.

Esto prueba que la primera afirmación implica la segunda.

Que la segunda afirmación implica la tercera es evidente.

Finalmente, si suponemos que la tercera afirmación es cierta, es también evidente que de toda sucesión $\{Tx_n\}$ con los $x_n \in B_X$ se puede extraer una subsucesión convergente. Luego $T(B_X)$ es relativamente compacto. Esto muestra que la tercera afirmación implica la primera. ∎

Proposición 6.3 *Sean X, Y y Z tres espacios de Banach y sean $T \in \mathcal{L}(X;Y)$ y $S \in \mathcal{L}(Y;Z)$. Si alguno de los operadores T ó S es compacto, entonces lo es el operador de composición $S \circ T$.*

La demostración es inmediata, a partir de la proposición 6.2. En particular, deducimos que si X es de dimensión infinita y $T \in \mathcal{L}(X;Y)$ es compacto entonces T no puede ser biyectivo.

Definición 6.2 *Sea $T \in \mathcal{L}(X;Y)$. Se dice que T es de rango finito si $R(T)$ posee dimensión finita.*

Como consecuencia de la proposición 6.2, todo operador de rango finito es compacto (en todo espacio de dimensión finita los acotados son relativamente compactos).

En lo que sigue, denotaremos $\mathcal{K}(X;Y)$ el conjunto de los operadores lineales compactos de X en Y. Cuando tengamos $X = Y$, pondremos $\mathcal{K}(X)$ en vez de $\mathcal{K}(X;X)$.

Teorema 6.1 *$\mathcal{K}(X;Y)$ es un subespacio cerrado de $\mathcal{L}(X;Y)$.*

Demostración: Toda combinación lineal de operadores compactos es un nuevo operador compacto. En efecto, sean $T_1, T_2 \in \mathcal{K}(X;Y)$ y $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$. Entonces $T_1(B_X)$ y $T_2(B_X)$ son relativamente compactos en Y. Luego también lo es $\lambda_1 T_1(B_X) + \lambda_2 T_2(B_X)$, de donde $\lambda_1 T_1 + \lambda_2 T_2 \in \mathcal{K}(X;Y)$. Por tanto, $\mathcal{K}(X;Y)$ es un subespacio vectorial de $\mathcal{L}(X;Y)$.

Veamos ahora que $\mathcal{K}(X;Y)$ es cerrado. Sea $\{T_n\}$ una sucesión de operadores de $\mathcal{K}(X;Y)$, sea $T \in \mathcal{L}(X;Y)$ y supongamos que $T_n \to T$ en $\mathcal{L}(X;Y)$. Debemos probar que T es compacto.

Sea $\{x_n\}$ una sucesión de puntos de B_X. Por el procedimiento diagonal habitual, es posible extraer de ella una subsucesión $\{x_{n_k}\}$ tal que todas las sucesiones $\{T_i(x_{n_k})\}$ convergen en Y. Veamos que $\{T(x_{n_k})\}$ es una sucesión de Cauchy.

Sea entonces $\varepsilon > 0$. Existe $i \geq 1$ tal que

$$\|T_i - T\|_{\mathcal{L}(X;Y)} \leq \frac{\varepsilon}{3}. \tag{6.1}$$

Por otra parte, como la sucesión $\{T_i(x_{n_k})\}$ es de Cauchy, existe $k_0 \geq 1$ tal que, si $k, j \geq k_0$, entonces

$$\|T_i(x_{n_k}) - T_i(x_{n_j})\|_Y \leq \frac{\varepsilon}{3}. \tag{6.2}$$

De (6.1) y (6.2), deducimos que, cuando $k, j \geq k_0$,

$$\begin{aligned} &\|T(x_{n_k}) - T(x_{n_j})\|_Y \leq \|T(x_{n_k}) - T_i(x_{n_k})\|_Y \\ &\quad + \|T_i(x_{n_k}) - T_i(x_{n_j})\|_Y + \|T_i(x_{n_j}) - T(x_{n_j})\|_Y \\ &\quad \leq \varepsilon. \end{aligned} \tag{6.3}$$

Así, hemos demostrado que para cada $\varepsilon > 0$ existe $k_0 \geq 1$ tal que, si $k, j \geq k_0$, entonces necesariamente

$$\|T(x_{n_k}) - T(x_{n_j})\|_Y \leq \varepsilon.$$

Esto prueba que $\{T(x_{n_k})\}$ es una sucesión de Cauchy y, por tanto, termina la demostración. ∎

Una consecuencia inmediata de este teorema es el corolario siguiente:

Corolario 6.1 *Sea $\{T_n\}$ una sucesión de operadores de rango finito y sea $T \in \mathcal{L}(X;Y)$ tal que $\|T_n - T\|_{\mathcal{L}(X;Y)} \to 0$ cuando $n \to +\infty$. Entonces $T \in \mathcal{K}(X;Y)$.*

Observación 6.2 Si X e Y son espacios de Hilbert, se puede demostrar el recíproco del corolario 6.1. En otras palabras, siempre que $T \in \mathcal{K}(X;Y)$, existen sucesiones $\{T_n\}$ de operadores de rango finito tales que $\|T_n - T\|_{\mathcal{L}(X;Y)} \to 0$. No obstante, este resultado no es cierto en general; para más detalles, véase [3].

Ejemplos no triviales de operadores compactos son los operadores integrales. Recuérdese que, dada $K \in L^2((a,b)\times(a,b))$, el *operador integral de Fredholm* en $L^2(a,b)$ de núcleo K está dado como sigue:

$$T_K(\phi)(t) = \int_a^b K(t,s)\phi(s)\,ds \quad \text{c.p.d. en } (a,b), \quad \forall \phi \in L^2(a,b). \tag{6.4}$$

Más generalmente, si $1 < p \le 2$ y $K \in L^{p'}((a,b)\times(a,b))$ (p' es el exponente conjugado de p), podemos hablar del operador integral de Fredholm en $L^p(a,b)$ de núcleo K. Se trata de la aplicación lineal definida por

$$T_K(\phi)(t) = \int_a^b K(t,s)\phi(s)\,ds \quad \text{c.p.d. en } (a,b), \quad \forall \phi \in L^p(a,b). \tag{6.5}$$

Por otra parte, si $K \in C^0([a,b]\times[a,b])$, llamaremos operador integral de Fredholm en $C^0([a,b])$ de núcleo K al operador definido como sigue:

$$T_K(\phi)(t) = \int_a^b K(t,s)\phi(s)\,ds \quad \forall t \in [a,b], \quad \forall \phi \in C^0([a,b]). \tag{6.6}$$

Teorema 6.2 *Si* $1 < p \le 2$ *y* $K \in L^{p'}((a,b)\times(a,b))$*, el operador lineal* T_K *definido por* (6.5) *es compacto:* $T_K \in \mathcal{K}(L^p(a,b))$*.*

Por otra parte, si $K \in C^0([a,b]\times[a,b])$*, el operador lineal* T_K *definido por* (6.6) *es compacto:* $T_K \in \mathcal{K}(C^0([a,b]))$*.*

Demostración: Supongamos en primer lugar que $1 < p \le 2$ y $K \in L^{p'}((a,b)\times(a,b))$. Es fácil comprobar que la aplicación lineal $T_K : L^p(a,b) \mapsto L^p(a,b)$ es continua y que

$$\|T_K\phi\|_{L^p(a,b)} \le \|K\|_{L^{p'}((a,b)\times(a,b))}\|\phi\|_{L^p(a,b)} \quad \forall \phi \in L^p(a,b). \tag{6.7}$$

Veamos por otra parte que $T_K \in \mathcal{K}(L^p(a,b))$ es compacto. Para ello, probaremos que T_K es el límite en el espacio de Banach $\mathcal{L}(L^p(a,b))$ de una sucesión de operadores compactos. Aplicando el teorema 6.1, quedará demostrado que T_K es compacto.

La sucesión puede ser construida del modo siguiente. Como $p' < +\infty$, $C^0(([a,b]\times[a,b])$ es denso en $L^{p'}((a,b)\times(a,b))$. Como $K \in L^{p'}((a,b)\times(a,b))$, existe una sucesión $\{K_n\}$ de funciones $K_n \in C^0([a,b]\times[a,b])$ que verifican

$$\iint_{(a,b)\times(a,b)} |K_n(t,s) - K(t,s)|^{p'}\,dt\,ds \to 0 \tag{6.8}$$

cuando $n \to +\infty$. Para cada n, sea T_n esl operador de Fredholm en $L^p(a,b)$ de núcleo integral K_n, esto es, la aplicación lineal definida por

$$T_n(\phi)(t) = \int_a^b K_n(t,s)\phi(s)\,ds \quad \text{c.p.d. en } (a,b), \quad \forall \phi \in L^p(a,b). \tag{6.9}$$

Entonces T_n converge a T_K en $\mathcal{L}(L^p(a,b))$. En efecto, $T_n - T_K$ es, para cada n, el operador integral de núcleo $K_n - K$; aplicando (6.7) con K sustituido por $K_n - K$ y (6.8), tenemos que $\|T_n - T_K\|_{\mathcal{L}(L^p(a,b))} \to 0$.

Veremos a continuación que los operadores de Fredholm T_n son compactos. Para ello, probaremos que T_n es el límite en $\mathcal{L}(L^p(a,b))$ de una sucesión de operadores de rango finito.

En efecto, basta tener en cuenta que el espacio de las funciones polinómicas es denso en $C^0(([a,b] \times [a,b])$. Así, existe una sucesión $\{H_m\}$ de funciones de la forma

$$H_m(t,s) = \sum_{i=0}^{d_m} a_i(t)\, s^i,$$

con las a_i polinómicas, tales que $H_m \to K_n$ en $C^0(([a,b]\times[a,b])$ cuando $m \to \infty$. Obviamente, esto implica

$$\iint_{(a,b)\times(a,b)} |H_m(t,s) - K_n(t,s)|^{p'}\, dt\, ds \to 0 \tag{6.10}$$

cuando $m \to +\infty$. Sea S_m el operador de Fredholm en $L^p(a,b)$ de núcleo H_m. Entonces S_m es de rango finito y gracias a (6.10) tenemos que $\|S_m - T_n\|_{\mathcal{L}(L^p(a,b))} \to 0$ cuando $m \to \infty$.

Por tanto, los T_n son efectivamente compactos, de donde lo es T_K. Esto prueba la primera parte del teorema.

La demostración de la segunda parte es análoga (e incluso más sencilla) y se deja como ejercicio. ■

Terminaremos este parágrafo con el teorema siguiente:

Teorema 6.3 *Sean H y G dos espacios de Hilbert y sea $T \in \mathcal{L}(H;G)$. Entonces T es compacto si y sólo si T^* es compacto.*

Demostración: Basta demostrar que si T es compacto también lo es T^* (dado que $(T^*)^* = T$).

Supongamos por tanto que T es compacto y sea $\{y_n\}$ una sucesión acotada en G. Sea $M > 0$ tal que $\|y_n\|_H \le M$ para cada $n \ge 1$. Tenemos que probar que existe una subsucesión $\{y_{n_k}\}$ tal que $\{T^* y_{n_k}\}$ converge en H.

La sucesión $\{T^* y_n\}$ está acotada en H:

$$\|T^* y_n\|_H \le \|T^*\|_{\mathcal{L}(G;H)} M \quad \forall n \ge 1.$$

Por tanto, existe una subsucesión $\{y_{n_k}\}$ tal que $\{TT^* y_{n_k}\}$ converge. Veamos que $\{T^* y_{n_k}\}$ es una sucesión de Cauchy en H, con lo cual estará probado lo que queríamos. En efecto, para $k, \ell \ge 1$ tenemos

$$\begin{aligned}\|T^* y_{n_k} - T^* y_{n_\ell}\|_H^2 &= (y_{n_k} - y_{n_\ell}, TT^*(y_{n_k} - y_{n_\ell}))_H \\ &\le 2M \|TT^* y_{n_k} - TT^* y_{n_\ell}\|_H\end{aligned}$$

y este último miembro tiende a cero cuando $k, \ell \to +\infty$. ■

6.3 El teorema de alternativa de Fredholm. Primeras aplicaciones

El resultado central de este parágrafo está relacionado con la existencia o no de soluciones de ecuaciones de la forma

$$v - Tv = f, \quad v \in H, \tag{6.11}$$

donde $T \in \mathcal{K}(H)$. Necesitaremos antes probar un resultado que tiene interés por sí mismo:

Lema 6.1 *Sean X un espacio normado y $X_0 \subset X$ un subespacio cerrado no trivial. Entonces para cada $\varepsilon \in (0,1)$ existe $v_\varepsilon \in X$ tal que*

$$\|v_\varepsilon\|_X = 1, \quad \operatorname{dist}(v_\varepsilon, X_0) := \inf_{v \in X_0} \|v_\varepsilon - v\|_X \geq \varepsilon. \tag{6.12}$$

Demostración: Sea $\varepsilon \in (0,1)$ y sea $w \in X$ con $w \notin X_0$. Dado que X_0 es cerrado, tenemos

$$d := \operatorname{dist}(w, X_0) > 0.$$

Sea $v_0 \in X_0$, con

$$d_0 \leq \|w - v_0\|_X \leq \frac{d_0}{\varepsilon}$$

y pongamos $v_\varepsilon = \|w - v_0\|_X^{-1}(w - v_0)$. Entonces es claro que $\|v_\varepsilon\|_X = 1$ y, por otra parte,

$$\|v_\varepsilon - v\|_X = \|w - v_0\|_X^{-1}\|w - (v_0 + \|w - v_0\|_X v)\|_X \geq \varepsilon$$

para cada $v \in X_0$. Luego $\operatorname{dist}(v_\varepsilon, X_0) \geq \varepsilon$.

Esto prueba el lema. ∎

Observación 6.3 Cuando X es un espacio de Hilbert o X_0 es de dimensión finita, el lema 6.1 también puede ser probado con $\varepsilon = 1$. Pero esto no es cierto en general.

Teorema 6.4 *Sean H un espacio de Hilbert y $T \in \mathcal{K}(H)$ y denotemos Id al operador identidad en H. Se tiene entonces lo siguiente:*

1. *$N(\mathrm{Id} - T)$ es un espacio de dimensión finita.*

2. *$R(\mathrm{Id} - T)$ es un subespacio cerrado de H. Por tanto,*

$$R(\mathrm{Id} - T) = N(\mathrm{Id} - T^*)^\perp.$$

3. *$N(\mathrm{Id} - T) = \{0\}$ si y sólo si $R(\mathrm{Id} - T) = H$.*

4. *Las dimensiones de los espacios $N(\mathrm{Id} - T)$ y $N(\mathrm{Id} - T^*)$ coinciden.*

Demostración: Pongamos $M = N(\mathrm{Id} - T)$ y sea B_M la bola unidad cerrada de M. Entonces es inmediato que $B_M \subset T(B_M) \subset T(B_H)$, de donde B_M es compacta y M es necesariamente un espacio de dimensión finita.

Veamos ahora que $R(\mathrm{Id} - T)$ es cerrado. Sean entonces $\{v_n\}$ una sucesión de H y supongamos que las $y_n = v_n - Tv_n$ convergen en H hacia y. Veamos que $y \in R(\mathrm{Id} - T)$.

Si $y = 0$, esto es evidente. En caso contrario, podemos suponer que $y_n \neq 0$, es decir que $v_n \notin M$ para cada $n \geq 1$. Sea $P : H \mapsto M$ el operador de proyección ortogonal habitual. Entonces $TPv_n = Pv_n$ y podemos escribir que

$$y_n = v_n - Pv_n - T(v_n - Pv_n) \quad \forall n \geq 1. \tag{6.13}$$

La sucesión $\{v_n - Pv_n\}$ está acotada. En efecto, si no fuera así, al menos para una subsucesión $\{v_{n_k} - Pv_{n_k}\}$ tendríamos $\|v_{n_k} - Pv_{n_k}\|_H \to \infty$. Poniendo

$$z_{n_k} = \frac{v_{n_k} - Pv_{n_k}}{\|v_{n_k} - Pv_{n_k}\|_H},$$

encontraríamos que $z_{n_k} \in M^\perp$, $\|z_{n_k}\|_H = 1$ y

$$z_{n_k} - Pz_{n_k} = \frac{y_{n_k}}{\|v_{n_k} - Pv_{n_k}\|_H} \to 0. \tag{6.14}$$

Eventualmente extrayendo una nueva subsucesión, podríamos suponer que las Tz_{n_k} convergen a z en H. Luego también tendríamos que $z_{n_k} \to z$ y $\|z\|_H = 1$. Pero entonces habríamos encontrado un punto $z \in M \cap M^\perp$ distinto de 0, lo que es absurdo.

Como $\{v_n - Pv_n\}$ está acotada, existen una subsucesión $\{v_{n_j} - Pv_{n_j}\}$ y un punto $w \in H$ tales que $T(v_{n_j} - Pv_{n_j}) \to w$. Pero entonces $v_{n_j} - Pv_{n_j} \to w + y$ y en consecuencia $T(v_{n_j} - Pv_{n_j}) \to Tw + Ty$. Pasando al límite en (6.13) con $n = n_j$, obtenemos que $y = (\mathrm{Id} - T)(y + w)$, esto es, $y \in R(\mathrm{Id} - T)$.

Dado que $R(\mathrm{Id} - T)$ es cerrado, tenemos que coincide con su adherencia y por tanto con $N(\mathrm{Id} - T^*)^\perp$.

Veamos a continuación que si $N(\mathrm{Id} - T) = \{0\}$ entonces $R(\mathrm{Id} - T) = H$. Supongamos lo contrario. Entonces $H_1 = R(\mathrm{Id} - T)$ es un subespacio cerrado propio de H (y por tanto un nuevo espacio de Hilbert). Si denotamos T_1 la restricción de T a H_1, es inmediato que $T_1 \in \mathcal{K}(H_1)$ y $H_2 = R(\mathrm{Id} - T_1)$ vuelve a ser un subespacio cerrado propio de H_1, etc.

De este modo, conseguimos una sucesión estrictamente decreciente de espacios de Hilbert $\{H_n\}$, todos ellos subespacios de H. De acuerdo con el lema 6.1, para cada $n \geq 1$ existe $e_n \in H_n$ tal que

$$\|e_n\|_H = 1, \quad \mathrm{dist}\,(e_n, E_{n+1}) \geq \frac{1}{2}\,. \tag{6.15}$$

Para $n > m$, tenemos que

$$\begin{aligned} Te_n - Te_m &= -(e_n - Te_n) + (e_m - Te_m) + (e_n - e_m) \\ &[-(e_n - Te_n) + (e_m - Te_m) + e_n] - e_m \end{aligned}$$

y, como $-(e_n - Te_n) + (e_m - Te_m) + e_n \in H_{m+1}$, obtenemos la desigualdad

$$\|Te_n - Te_m\|_H \geq \frac{1}{2}\,.$$

Pero esto está en contradicción con que T sea compacto. Por tanto, necesariamente $R(\mathrm{Id}-T)=H$.

Recíprocamente, supongamos que $R(\mathrm{Id}-T)=H$. Entonces $N(\mathrm{Id}-T^*)=R(\mathrm{Id}-T)^\perp=\{0\}$. Dado que $T^*\in\mathcal{K}(H)$, podemos aplicar el razonamiento precedente a T^*, lo que conduce a que $R(\mathrm{Id}-T^*)=H$. En consecuencia, $N(\mathrm{Id}-T)=R(\mathrm{Id}-T^*)^\perp=\{0\}$.

Esto prueba que, efectivamente, $N(\mathrm{Id}-T)=\{0\}$ si y sólo si $R(\mathrm{Id}-T)=H$.

La demostración del aptdo. 4 queda como ejercicio; pueden consultarse más detalles en [3]. ∎

Observación 6.4 Se puede demostrar un resultado análogo al teorema 6.4 cuando X es un espacio de Banach y $T\in\mathcal{K}(X)$; para más detalles, véase [3].

El teorema 6.4 se conoce con nombre de *teorema de alternativa de Fredholm*. Esto se debe a la interpretación siguiente del mismo.

Consideremos la ecuación (6.11), donde $T\in\mathcal{K}(H)$ y $f\in H$ es dada. En primer lugar, podemos afirmar que la *ecuación homogénea* asociada

$$v-Tv=0,\quad v\in H, \tag{6.16}$$

posee a lo sumo un número finito de soluciones linealmente independientes.

En segundo lugar, tenemos que (6.11) posee solución para cada $f\in H$ si y sólo si (6.16) sólo posee la solución trivial.

Finalmente, si (6.16) posee soluciones no triviales, entonces, dada $f\in H$, la correspondiente ecuación (6.11) posee solución (en cualquier caso no única) si y sólo si f es ortogonal a las soluciones de la *ecuación adjunta*

$$v-T^*v=0,\quad v\in H. \tag{6.17}$$

En la práctica, esto significa que f debe satisfacer un número de restricciones lineales que coincide con la dimensión del espacio de soluciones de (6.16).

Observación 6.5 El teorema 6.4 es evidentemente cierto (y bien conocido) cuando H posee dimensión finita. En particular, si H es de dimensión finita, un operador $T\in\mathcal{L}(H)$ es inyectivo si y sólo si es sobreyectivo. Por el contrario, el resultado no es cierto en general si la dimensión de H es infinita y T no es compacto. Así, por ejemplo la aplicación lineal

$$T\{x_1,x_2,x_3,\dots\}=\{0,x_1,x_2,\dots\}\quad\forall\{x_n\}\in\ell^2 \tag{6.18}$$

es inyectiva pero no sobreyectiva. Por otra parte, la aplicación

$$S\{x_1,x_2,\dots\}=\{x_2,x_3,\dots\}\quad\forall\{x_n\}\in\ell^2$$

es sobreyectiva pero no inyectiva.

6.4 El espectro de un operador lineal compacto

Con frecuencia, en las aplicaciones se encuentran ecuaciones similares a (6.11) en donde interviene también un parámetro (un número real) en principio desconocido. Se trata de ecuaciones que tienen la estructura

$$v-\lambda Tv=f,\quad v\in H,\quad \lambda\in\mathbb{R}, \tag{6.19}$$

donde $f\in H$ y $T\in\mathcal{L}(H)$. En este parágrafo veremos qué se puede decir sobre la existencia de solución de (6.19) cuando T es compacto.

Definición 6.3 *Sea $T \in \mathcal{L}(H)$. Se llama resolvente de T al conjunto de los $\mu \in \mathbb{R}$ tales que el operador $T - \mu\mathrm{Id} : H \mapsto H$ es biyectivo. Se llama espectro de T al conjunto $\sigma(T) = \mathbb{R} \setminus \rho(T)$.*

Gracias al *teorema de Banach del operador inverso*, si $\mu \in \rho(T)$, existe $(T - \mu\mathrm{Id})^{-1}$ y es un operador lineal continuo de H en sí mismo. Por otra parte, si $\mu \in \sigma(T)$, al menos una de las dos cosas siguientes ocurre: o bien $N(T - \mu\mathrm{Id}) \neq \{0\}$, o bien $R(T - \mu\mathrm{Id}) \neq H$.

Definición 6.4 *Sea $T \in \mathcal{L}(H)$. Se dice que μ es un valor propio de T si $N(T - \mu\mathrm{Id}) \neq \{0\}$. En tal caso, se dice que $N(T - \mu\mathrm{Id})$ es el subespacio propio asociado a μ y a los elementos de $N(T - \mu\mathrm{Id})$ no nulos se les llama autovectores asociados.*

Dado $T \in \mathcal{L}(H)$, denotaremos $\mathrm{VP}(T)$ el conjunto de valores propios de T. Obviamente $\mathrm{VP}(T) \subset \sigma(T)$, pero esta inclusión puede ser estricta. Así, para la aplicación definida en (6.18), tenemos que $0 \in \sigma(T)$ pero $0 \notin \mathrm{VP}(T)$.

Proposición 6.4 *Sea $T \in \mathcal{L}(H)$. Entonces $\sigma(T)$ es un compacto contenido en el intervalo $[-\|T\|_{\mathcal{L}(H)}, \|T\|_{\mathcal{L}(H)}]$. En consecuencia, $\rho(T)$ es un abierto no acotado de $\mathbb{R}$.*

Demostración: Veamos en primer lugar que si $|\mu| > \|T\|_{\mathcal{L}(H)}$ entonces $\mu \in \rho(T)$. Esto probará que $\sigma(T) \subset [-\|T\|_{\mathcal{L}(H)}, \|T\|_{\mathcal{L}(H)}]$.

En efecto, si $|\mu| > \|T\|_{\mathcal{L}(H)}$, entonces para cada $f \in H$ la ecuación

$$Tv - \mu v = f, \quad v \in H, \tag{6.20}$$

posee solución única. Esto es consecuencia de que (6.20) admite la formulación equivalente

$$v = \frac{1}{\mu}(Tv - f), \quad v \in H,$$

que es una ecuación de punto fijo a la que se puede aplicar el *teorema de Banach*.

Veamos ahora que $\rho(T)$ es un abierto. Con esto quedará demostrada la proposición. Sea por tanto $\mu_0 \in \rho(T)$. Dada $f \in H$, la ecuación (6.20) es equivalente a

$$Tv - \mu_0 v = f + (\mu - \mu_0)v, \quad v \in H.$$

Pero ésta puede también escribirse en la forma

$$v = (T - \mu_0\mathrm{Id})^{-1}(f + (\mu - \mu_0)v), \quad v \in H$$

y ésta última es de nuevo una ecuación de punto fijo a la que puede aplicarse el *teorema de Banach* a condición de que $|\mu - \mu_0|$ sea suficientemente pequeño. Por tanto, existe $\varepsilon > 0$ tal que, si $\mu \in \mathbb{R}$ y $|\mu - \mu_0| \leq \varepsilon$, tenemos $\mu \in \rho(T)$. Esto prueba, como queríamos, que $\rho(T)$ es un abierto. ■

El resultado principal de este parágrafo es el siguiente:

Teorema 6.5 *Sean H un espacio de Hilbert de dimensión infinita y sea $T \in \mathcal{K}(H)$. Se tiene entonces lo siguiente:*

1. *$0 \in \sigma(T)$ (y por tanto $\sigma(T)$ es un compacto no vacío).*

2. $\sigma(T)\setminus\{0\} = \mathrm{VP}(T)\setminus\{0\}$.

3. Los puntos de $\sigma(T)\setminus\{0\}$ *son aislados. Más precisamente, o bien* $\sigma(T)\setminus\{0\}$ *es el vacío, o bien es un conjunto finito, o bien es numerable. En este último caso, los puntos de* $\sigma(T)\setminus\{0\}$ *pueden ser ordenados como los términos de una sucesión cuyos valores absolutos decrecen estrictamente y convergen a* 0.

Demostración: En primer lugar, observemos que si tuviéramos $0\in\rho(T)$, T sería biyectivo, en contra de ser T compacto y H de dimensión infinita. Por tanto, $0\in\sigma(T)$.

Veamos a continuación que si $\mu\in\sigma(T)\setminus\{0\}$ entonces $N(T-\mu\mathrm{Id})\neq\{0\}$. Esto probará que $\sigma(T)\setminus\{0\} = \mathrm{VP}(T)\setminus\{0\}$.

Supongamos entonces que $\mu\in\sigma(T)$, $\mu\neq 0$ y $N(T-\mu\mathrm{Id}) = \{0\}$. Como $N(T-\mu\mathrm{Id}) = N(\mathrm{Id}-\frac{1}{\mu}T)$ y el operador $-\frac{1}{\mu}T$ es compacto, por el teorema 6.4 tenemos que

$$H = R(\mathrm{Id}-\frac{1}{\mu}T) = R(T-\mu\mathrm{Id}).$$

Luego $T-\mu\mathrm{Id}$ es biyectivo, en contra de que sea $\mu\in\sigma(T)$.

Para demostrar el aptdo. 3, supongamos dada una sucesión $\{\mu_n\}$ de puntos de $\sigma(T)\setminus\{0\}$ todos distintos que converge a μ y veamos que $\mu = 0$. Para cada $n\geq 1$, tenemos $\mu_n\in\mathrm{VP}(T)$, de donde podemos elegir un punto $e_n\in N(T-\mu_n\mathrm{Id})$ distinto de 0.

Los e_n son linealmente independientes. En efecto, si tuviéramos para algún n y algunos $\alpha_i\in\mathbb{R}$ que $e_{n+1} = \sum_{i=1}^n \alpha_i e_i$, también tendríamos

$$Te_{n+1} = \sum_{i=1}^n \alpha_i Te_i = \sum_{i=1}^n \alpha_i\mu_i e_i$$

y

$$\mu_{n+1}e_{n+1} = \sum_{i=1}^n \alpha_i\mu_{n+1}e_i,$$

de donde necesariamente $\alpha_i(\mu_i-\mu_{n+1}) = 0$ para cada i, lo que es imposible.

Pongamos $X_n = [e_1,\dots,e_n]$ para cada $n\geq 1$. Pongamos también $X_0 = \{0\}$. Entonces $\{X_n\}$ es una sucesión estrictamente creciente de subespacios de H de dimensión finita (y por tanto cerrados) que verifican

$$(T-\mu_n)X_n \subset X_{n-1} \quad \forall n\geq 1. \tag{6.21}$$

En virtud del lema 6.1, existe una sucesión $\{v_n\}$ de puntos de H que verifican lo siguiente:

$$v_n\in X_n,\quad \|v_n\|_H = 1 \ \text{ y } \ \mathrm{dist}\,(v_n, X_{n-1}) \geq \frac{1}{2} \ \text{ para cada } \ n\geq 1.$$

Veamos que

$$\|\frac{1}{\mu_m}Tv_m - \frac{1}{\mu_j}Tv_j\|_H \geq \frac{1}{2} \quad \forall m,j\geq 1,\quad m\neq j. \tag{6.22}$$

En efecto, podemos suponer por ejemplo que $j < m$. Entonces $X_{j-1} \subset X_j \subset X_{m-1}$. Como

$$\|\frac{1}{\mu_m}Tv_m - \frac{1}{\mu_j}Tv_j\|_H = \|v_m + \frac{1}{\mu_m}(Tv_m - \mu_m v_m) - \frac{1}{\mu_j}(Tv_j - \mu_j v_j) - v_j\|_H$$

y se cumple (6.21), esta cantidad es $\geq \operatorname{dist}(v_m, X_{m-1})$, de donde obtenemos (6.22).

Dado que $T \in \mathcal{K}(H)$, es evidente que $\{Tv_n\}$ posee subsucesiones convergentes. Sin embargo, esto sólo puede ocurrir si $\mu = 0$. En efecto, si fuera $\mu \neq 0$, también podríamos extraer subsucesiones convergentes de $\{\frac{1}{\mu_n}Tv_n\}$, lo cual contradice (6.22).

Finalmente, comprobemos que $\sigma(T) \setminus \{0\}$ es como se dice en el aptdo. *3.* Para cada $n \geq 1$, sea

$$\sigma_n(T) = \sigma(T) \cap \{\, \mu \in \mathbb{R} : |\mu| \geq \frac{1}{n} \,\}.$$

Entonces $\sigma_n(T)$ es vacío o a lo sumo finito (si fuera infinito, contendría un punto de acumulación, en contra de lo que se afirma en el aptdo. 3). Por tanto, $\sigma(T) \setminus \{0\}$ es a lo sumo numerable. Si este conjunto contiene una infinidad de puntos distintos, es claro que éstos pueden ordenarse en la forma que se ha indicado. ∎

Observación 6.6 Sea X un espacio de Banach y sea $T \in \mathcal{L}(X)$. De forma análoga a como se hizo más arriba, se pueden definir en este contexto los conjuntos $\rho(T)$, $\sigma(T)$ y $\mathrm{VP}(T)$. Una vez hecho esto, la proposición 6.4 y el teorema 6.5 son de nuevo ciertos. Para la demostración, véase [3].

6.5 Aplicación a la resolución de algunas ecuaciones integrales

Como aplicación de los resultados precedentes, en este parágrafo estableceremos resultados de existencia para las llamadas *ecuaciones integrales de Fredholm de segunda especie*

$$\left\{ \begin{array}{l} \phi(t) - \lambda \displaystyle\int_a^b K(t,s)\phi(s)\,ds = f(t) \quad \text{c.p.d. en } (a,b), \\ \lambda \in \mathbb{R}, \quad \phi \in L^2(a,b). \end{array} \right. \tag{6.23}$$

En (6.23) supondremos que el núcleo $K \in L^2((a,b)\times(a,b))$ y $f \in L^2(a,b)$. Pondremos $M = \|K\|_{L^2((a,b)\times(a,b))}$ y supondremos que $M > 0$.

El primer resultado de existencia se obtiene fácilmente a partir del teorema de Banach del punto fijo cuando $|\lambda|$ es suficientemente pequeño. Más precisamente, tenemos el siguiente resultado:

Teorema 6.6 *Para cada $f \in L^2(a,b)$ y cada $\lambda \in (-\frac{1}{M}, \frac{1}{M})$ existe una única solución ϕ de* (6.23).

Demostración: Supongamos que f y λ son dadas y cumplen las condiciones del teorema. Sea $\Lambda : L^2(a,b) \mapsto L^2(a,b)$ la aplicación dada por

$$\Lambda(\phi)(t) = f(t) + \lambda \int_a^b K(t,s)\phi(s)\, ds \quad \text{c.p.d. en} \quad (a,b) \tag{6.24}$$

para cada $\phi \in L^2(a,b)$.

Entonces es fácil comprobar que Λ está bien definida y es contractiva (esto último gracias a que $|\lambda| < 1/M$). En consecuencia, Λ posee un único punto fijo en $L^2(a,b)$ que evidentemente coincide con la única solución de (6.23). ■

Sabemos que para los valores precedentes de λ el método de las aproximaciones sucesivas aplicado a Λ converge. Por tanto, si consideramos la sucesión $\{\phi_n\}$ donde para $t \in (a,b)$ c.p.d.

$$\begin{aligned} \phi_0(t) &= f(t), \\ \phi_1(t) &= f(t) + \lambda \int_a^b K(t,s)\phi_0(s)\, ds, \\ \phi_2(t) &= f(t) + \lambda \int_a^b K(t,s)\phi_1(s)\, ds, \\ \cdots & \quad \cdots \end{aligned}$$

sabemos que ϕ_n converge en $L^2(a,b)$ hacia la solución ϕ. Tras un cálculo simple, no es difícil probar que, para cada $n \geq 1$,

$$\phi_n(t) = f(t) + \lambda \int_a^b \left(\sum_{j=1}^{n} K_j(t,s)\lambda^{j-1} \right) f(s)\, ds$$

c.p.d. en (a,b), donde las funciones K_j son las siguientes:

$$\begin{aligned} & K_1(t,s) \equiv K(t,s), \\ & K_{j+1}(t,s) \equiv \int_a^b K(t,\sigma)K_j(\sigma,s)\, ds \quad \text{para} \quad j \geq 1. \end{aligned}$$

También es sencillo probar que, para casi todo t, la serie $\sum_{j\geq 1} K_j(t,s)\lambda^{j-1}$ converge en $L^2(a,b)$.

Por tanto, cuando $f \in L^2(a,b)$ y $\lambda \in (-1/M, 1/M)$, la única solución de (6.23) verifica

$$\phi(t) = f(t) + \lambda \int_a^b R(t,s;\lambda) f(s)\, ds \quad \text{c.p.d. en} \quad (a,b), \tag{6.25}$$

donde hemos hecho uso de la notación siguiente:

$$R(t,s;\lambda) = \sum_{j\geq 1} K_n(t,s)\lambda^{j-1} \quad \forall \lambda \in \mathbb{R} \quad \text{c.p.d. en} \quad (a,b)\times(a,b). \tag{6.26}$$

Investiguemos a continuación qué puede ocurrir cuando $|\lambda| \geq 1/M$.

Consideremos el operador integral de Fredholm T_K de núcleo K. Sabemos que T_K es un operador lineal compacto del espacio de Hilbert $L^2(a,b)$ en sí mismo. Para $\lambda \neq 0$, la ecuación integral también se puede escribir en la forma

$$T_K\phi - \mu\phi = -\mu f, \tag{6.27}$$

donde $\mu = 1/\lambda$.

Por tanto, por el teorema 6.4, existe a lo sumo un conjunto numerable $\{\lambda_n\}$ (el conjunto de los inversos de los valores propios de T_K) tal que

- Si $\lambda \neq \lambda_n$ para todo n, para cada $f \in L^2(a,b)$ existe una única solución de la correspondiente ecuación (6.23).
- Si $\lambda = \lambda_n$ para algún n, dada $f \in L^2(a,b)$, existe solución (no única) de (6.23) si y sólo si $(f,\psi)_{L^2(a,b)} = 0$ para toda solución de la *ecuación adjunta*
$$\psi - \lambda_n T_K^* \psi = 0. \tag{6.28}$$
En la práctica, esto significa que f debe verificar un número finito de condiciones de ortogonalidad que coincide con la dimensión del espacio propio asociado a λ_n.

Obsérvese que T_K^* es un nuevo operador integral de Fredholm. En efecto, coincide con el operador asociado al núcleo K^*, donde

$$K^*(t,s) \equiv K(s,t).$$

Por definición, los λ_n precedentes son los *autovalores de* K. Si el conjunto de los λ_n es el vacío, para todo $\lambda \in \mathbb{R}$ y para toda $f \in L^2(a,b)$ la ecuación (6.23) posee solución única. Si es finito, esto mismo es cierto salvo un número finito de valores de λ. La tercera y última posibilidad es que $\{\lambda_n\}$ sea numerable y entonces los λ_n pueden enumerarse como los términos de una sucesión cuyos valores absolutos tienden a infinito.

Observación 6.7 Se puede construir una función *meromorfa* cuyos ceros sobre la recta real coinciden con los autovalores de K. En efecto, para cada $j \geq 1$, pongamos

$$H_j(t_1,\dots,t_j,s_1,\dots,s_j) = \det \begin{pmatrix} K(t_1,s_1) & \cdots & K_j(t_1,s_j) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ K(t_j,s_1) & \cdots & K_j(t_j,s_j) \end{pmatrix}$$

para $t_1,\dots,t_j,s_1,\dots,s_j \in (a,b)$ c.p.d. y

$$d_j = \int_a^b \cdots \int_a^b H_j(t_1,\dots,t_j,t_1,\dots,t_j)\, dt_1 \dots dt_j.$$

Entonces la serie de potencias

$$\sum_{j\geq 1} (-1)^j d_j \frac{\lambda^j}{j!}$$

converge en todo el campo complejo y la función entera

$$d(\lambda) = 1 + \sum_{j\geq 1} (-1)^j d_j \frac{\lambda^j}{j!} \quad \forall \lambda \in \mathbb{R} \tag{6.29}$$

tiene la propiedad deseada: los autovalores de K son los ceros reales de d.

Para más detalles sobre las ecuaciones integrales de Fredholm, véase por ejemplo [6, 10].

6.6 El teorema de Hilbert-Schmidt

A continuación, consideraremos el caso en que H es separable y el operador lineal $T : H \mapsto H$ es compacto y autoadjunto. Veremos que en este caso existe una base ortonormal de H que permite "diagonalizar" T.

Proposición 6.5 *Sea $T \in \mathcal{L}(H)$ un operador autoadjunto y pongamos*

$$m_T := \inf_{v \in H, \|v\|_H = 1} (Tv, v)_H, \quad M_T := \sup_{v \in H, \|v\|_H = 1} (Tv, v)_H.$$

Entonces $\sigma(T) \subset [m_T, M_T]$. Además, se tiene que $m_T \in \sigma(T)$ y $M_T \in \sigma(T)$.

Demostración: Sea $\mu \in \mathbb{R}$, con $\mu > M_T$. Veamos que $\mu \in \rho(T)$.

Tenemos por definición que

$$(Tv, v)_H \leq M_T \|v\|_H^2 \quad \forall v \in H.$$

Por tanto,

$$(\mu v - Tv, v)_H \geq (\mu - M_T) \|v\|_H^2 \quad \forall v \in H, \tag{6.30}$$

con $\mu - M_T > 0$. Teniendo en cuenta (6.30), resulta que la forma bilineal $a_T(\cdot\,,\cdot)$, con

$$a_T(u, v) = (\mu u - Tu, v)_H \quad \forall u, v \in H,$$

es continua y coerciva. Por tanto, en virtud del teorema 3.5, $\mu\mathrm{Id} - T$ es un isomorfismo y, efectivamente, $\mu \in \rho(T)$.

De modo análogo se prueba que todo $\mu \in \mathbb{R}$ con $\mu < m_T$ también verifica $\mu \in \rho(T)$. En consecuencia, $\sigma(T) \subset [m_T, M_T]$.

Veamos ahora que $M_T \in \sigma(T)$. Consideremos la forma bilineal $\tilde{a}_T(\cdot\,,\cdot)$, con

$$\tilde{a}_T(u, v) = (M_T u - Tu, v)_H \quad \forall u, v \in H.$$

Claramente, $\tilde{a}_T(\cdot\,,\cdot)$ es continua, simétrica (porque T es autoadjunto)y no negativa, es decir,

$$\tilde{a}_T(v, v) \geq 0 \quad \forall v \in H.$$

Por tanto,

$$|\tilde{a}_T(u, v)| \leq \tilde{a}_T(u, u)^{1/2} \tilde{a}_T(v, v)^{1/2} \quad \forall u, v \in H,$$

de donde, tomando $v = Mu - Tu$, obtenemos que

$$\|M_T u - Tu\|_H \leq C \tilde{a}_T(u, u)^{1/2} = C(M_T u - Tu, u)_H^{1/2} \quad \forall u \in H. \tag{6.31}$$

Sea $\{u_n\}$ una sucesión de puntos de H tal que $\|u_n\|_H = 1$ para todo n y $(Tu_n, u_n)_H \to M_T$ cuando $n \to \infty$. Se deduce de (6.31) que $\|M_T u_n - Tu_n\|_H \to 0$.

Si fuera $M_T \in \rho(T)$, entonces $M_T\mathrm{Id} - T$ sería un isomorfismo y tendríamos $u_n \to 0$ en H, lo que es imposible. Por tanto, $M_T \in \sigma(T)$. ■

Como consecuencia, tenemos el resultado siguiente:

Corolario 6.2 *Sea $T \in \mathcal{L}(H)$ autoadjunto y supongamos que $\sigma(T) = \{0\}$. Entonces $T = 0$.*

Demostración: Tenemos que

$$(Tv, v)_H = 0 \quad \forall v \in H.$$

Por tanto,

$$(Tu, v)_H = \frac{1}{2}\left[(T(u+v), u+v)_H - (Tu, u)_H - (Tv, v)_H\right] = 0 \quad \forall u, v \in H$$

y en consecuencia $T = 0$. ■

Definición 6.5 *Sea $\{ H_n : n \geq 0 \}$ una familia de subespacios cerrados de H. Se dice que H es la suma de Hilbert de los H_n si*

1. *Los H_n son ortogonales dos a dos, esto es, se tiene que*

$$(v_m, v_n) = \delta_{mn} \quad \forall v_m \in H_m, \quad \forall v_n \in H_n, \quad \forall m, n \geq 1.$$

2. *El espacio vectorial generado por $\cup_{n\geq 0} H_n$ (formado por las combinaciones lineales finitas de puntos de $\cup_{n\geq 0} H_n$) es denso en H.*

Teorema 6.7 *Sea $\{ H_n : n \geq 0 \}$ una familia de subespacios cerrados de H y supongamos que H es la suma de Hilbert de los H_n. Para cada $n \geq 0$, sea $P_n : H \mapsto H_n$ el operador de proyección ortogonal sobre H_n. Entonces*

$$v = \sum_{n\geq 0} P_n v = \lim_{m\to\infty} \sum_{n=0}^{m} P_n v \quad \forall v \in H \tag{6.32}$$

y

$$\|v\|_H^2 = \sum_{n\geq 0} \|P_n v\|_H^2 \quad \forall v \in H \tag{6.33}$$

(igualdad de Parseval generalizada).

Por otra parte, si los v_n con $n \geq 0$ son dados y tenemos $v_n \in H_n$ para cada n y $\sum_{n\geq 0} \|v_n\|^2 < +\infty$, entonces la serie $\sum_{n\geq 0} v_n$ converge en H hacia un $v \in H$ que verifica $P_n v = v_n$ para todo $n \geq 0$.

Demostración: Para cada $k \geq 1$, pongamos

$$S_k = \sum_{n=0}^{k} P_n.$$

Sea $v \in H$. Entonces $S_k v = \sum_{n=0}^{k} P_n v$ y $\|S_k v\|_H^2 = \sum_{n=0}^{k} \|P_n v\|_H^2$. Veamos que $\lim_{k\to\infty} \|v - S_k v\|_H = 0$ y $\lim_{k\to\infty} \|S_k v\|_H^2 = \|v\|_H^2$, lo cual probará (6.32) y (6.33).

Denotemos F al subespacio generado por $\cup_{n\geq 0} H_n$; sabemos que F es denso en H. Por otra parte,

$$\|S_k w\|_H \leq \|w\|_H \quad \forall w \in H \tag{6.34}$$

para cada $k \geq 1$.

Sea $\varepsilon > 0$. Entonces existe $v_\varepsilon \in F$ tal que $\|v - v_\varepsilon\|_H \leq \varepsilon/2$. Existe k_ε tal que v_ε es suma de puntos de H_0, H_1, …, H_{k_ε}; por tanto,

$$S_k v_\varepsilon = v_\varepsilon \quad \forall k \geq k_\varepsilon. \tag{6.35}$$

En consecuencia, si $k \geq k_\varepsilon$ tenemos que

$$\|v - S_k v\|_H \leq \|v - v_\varepsilon\|_H + \|S_k v_\varepsilon - S_k v\|_H \leq \varepsilon.$$

Esto prueba que $\lim_{k\to\infty} \|v - S_k v\|_H = 0$.

Teniendo en cuenta que

$$\|v - S_k v\|_H^2 = \|v\|_H^2 - \sum_{n=0}^{k} \|P_n v\|_H^2 = \|v\|_H^2 - \|S_k v\|_H^2,$$

se deduce también que $\lim_{k\to\infty} \|S_k v\|_H^2 = \|v\|_H^2$.

Recíprocamente, supongamos que $v_n \in H_n$ para cada n y $\sum_{n\geq 0} \|v_n\|^2 < +\infty$. Entonces, para $m > k \geq 0$ tenemos que

$$\|\sum_{n=0}^{m} v_n - \sum_{n=0}^{k} v_n\|_H^2 = \sum_{n=k+1}^{m} \|v_n\|_H^2 \to 0$$

cuando $k, m \to \infty$. Por tanto, la serie $\sum_{n\geq 0} v_n$ converge en H hacia un v que, evidentemente, verifica las igualdades $P_n v = v_n$ para cada n. ■

El resultado principal de este parágrafo es el teorema siguiente, generalmente conocido como *teorema de Hilbert-Schmidt:*

Teorema 6.8 *Sea H un espacio de Hilbert separable y sea $T \in \mathcal{K}(H)$ un operador autoadjunto. Entonces existe una base ortonormal de H formada por autovectores de T.*

Demostración: Supongamos de momento que el conjunto $\sigma(T) \setminus \{0\}$ es numerable y sea $\{\mu_n\}$ una enumeración de éste, con

$$|\mu_1| > |\mu_2| > \cdots > |\mu_n| > \cdots, \quad \mu_n \to 0.$$

Pongamos $\mu_0 = 0$ y $H_n = N(T - \mu_n \mathrm{Id})$ para cada $n \geq 0$. Entonces H es la suma de Hilbert de los H_n.

En efecto, los H_n son ortogonales dos a dos: si $v_n \in H_n$ y $v_m \in H_m$ con $n \neq m$, entonces

$$\mu_n (v_n, v_m)_H = (T v_n, v_m)_H = (v_n, T v_m)_H = \mu_m (v_n, v_m)_H,$$

de donde $(v_n, v_m)_H = 0$. Por otra parte, si llamamos F al espacio generado por $\cup_{n\geq 0} H_n$, tenemos que $F^\perp = \{0\}$ (de donde F es denso en H).

Para probar esta última afirmación, razonaremos como sigue. En primer lugar, observamos que $T(F) \subset F$ (porque $T(H_n) \subset H_n$ para cada n); por tanto, también se tiene que $T(F^\perp) \subset F^\perp$. Así, $T_* = T|_{F^\perp}$ está bien definido como operador de $\mathcal{L}(F^\perp)$ y es autoadjunto y compacto en $F^\perp$.

Si $\sigma(T_*)$ contuviera un número real $\mu \neq 0$, tendríamos $\mu \in \mathrm{VP}(T_*) \setminus \{0\}$ y entonces

$$T_* v_* = \mu v_*$$

para algún $v_* \in F^\perp$, $v_* \neq 0$. Pero esto significa que $v_* \in F$ y por tanto conduce al absurdo de que $F^\perp \cap F \neq \{0\}$. Luego $\sigma(T_*) = \{0\}$.

En virtud del corolario 6.2, obtenemos que $T_* = 0$, de donde $F^\perp \subset N(T) \subset F$ y, finalmente, $F^\perp = \{0\}$.

Dado que H es la suma de Hilbert de los H_n, eligiendo en cada uno de estos espacios una base ortonormal, obtenemos fácilmente una base ortonormal de H. Esto prueba el teorema cuando $\sigma(T) \setminus \{0\}$ es numerable.

Cuando $\sigma(T)\setminus\{0\}$ es un conjunto finito, la demostración es análoga (e incluso más sencilla). ■

Observación 6.8 En la demostración precedente, los H_n con $n \geq 1$ son espacios de dimensión finita. El único H_n que puede ser de dimensión infinita es H_0. (ahora todos los H_n son de dimensión finita). De hecho, la separabilidad de H se usa sólo para poder asegurar que H_0 posee una base ortonormal.

Observación 6.9 En el caso particular en que T es inyectivo, el espacio $H_0 = \{0\}$ y H es la suma de Hilbert de los H_n con $n \geq 1$ (todos de dimensión finita). Si además T es positivo, es decir,

$$(Tv, v)_H \geq 0 \quad \forall v \in H,$$

entonces todos los valores propios de T son estrictamente positivos.

6.7 El espectro de un operador elíptico autoadjunto. Consecuencias

En esta sección, aplicaremos los resultados precedentes en el caso en que T es el operador que permite obtener la solución débil de un problema elíptico similar a (3.46). A continuación, deduciremos algunas consecuencias.

En lo que sigue, $\Omega \in \mathbb{R}^N$ es un abierto conexo acotado no vacío. Supondremos dados los coeficientes

$$a_{ij} = a_{ji} \in L^\infty(\Omega) \quad (i, j = 1, \ldots, N), \quad c \in L^\infty(\Omega)$$

y utilizaremos la notación

$$Lv = -\sum_{i,j=1}^{N} \partial_i(a_{ij}\partial_j v) + cv. \tag{6.36}$$

Definición 6.6 *Sea $\lambda \in \mathbb{R}$. Se dice que λ es un autovalor del operador L en Ω (con condiciones de Dirichlet) si el problema*

$$\begin{cases} -\displaystyle\sum_{i,j=1}^{N} \partial_i(a_{ij}\partial_j u) + cu = \lambda u, & x \in \Omega, \\ u = 0, & x \in \partial\Omega, \end{cases} \tag{6.37}$$

posee soluciones débiles no triviales. En tal caso, éstas soluciones se llaman autofunciones asociadas a λ. El conjunto de todos los autovalores de L en Ω se denomina espectro de L.

Obviamente, λ es un autovalor de L en Ω y u es una autofunción asociada si y sólo si

$$\left\{ \begin{array}{l} \displaystyle\int_\Omega (\sum_{i,j=1}^N a_{ij}\,\partial_j u\,\partial_i v + c\,u\,v)\,dx = \lambda \int_\Omega u\,v\,dx \\ \forall v \in H_0^1(\Omega), \quad u \in H_0^1(\Omega). \end{array} \right. \tag{6.38}$$

El conjunto de todas las autofunciones correspondientes a un autovalor λ es obviamente un subespacio vectorial de $L^2(\Omega)$ que se denomina *subespacio propio* asociado a λ.

El primer objetivo de esta sección es probar la existencia de autovalores y autofunciones de L. Esto es consecuencia de un resultado de carácter general que presentaremos a continuación. Necesitaremos la definición siguiente:

Definición 6.7 *Sean V y H dos espacios de Hilbert. Se dice que (V, H) es un par de Lions si V es un subespacio denso de H y la inyección $V \hookrightarrow H$ es continua.*

Teorema 6.9 *Sean V y H dos espacios de Hilbert separables de dimensión infinita. Supongamos que (V, H) es un par de Lions tal que la inyección $V \hookrightarrow H$ es compacta, es decir que todo acotado de V es relativamente compacto en H. Sea $a(\cdot\,,\cdot)$ una forma bilineal continua, simétrica y coerciva sobre V:*

$$a(v, v) \geq \alpha \|v\|_V^2 \quad \forall v \in V, \quad \alpha > 0. \tag{6.39}$$

Entonces existe una sucesión $\{\lambda_n\}$ de números reales y una base ortonormal $\{\, e_n : n \geq 1 \,\}$ de H que verifican

$$\left\{ \begin{array}{l} a(e_n, v) = \lambda_n (e_n, v)_H \quad \forall v \in V, \quad e_n \in V, \\ 0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \cdots, \quad \lim_{n\to\infty} \lambda_n = +\infty \end{array} \right. \tag{6.40}$$

Además, $\{\, \frac{1}{\sqrt{\lambda_n}} e_n : n \geq 1 \,\}$ es una base ortonormal de V para el producto escalar $a(\cdot\,,\cdot)$.

Demostración: Vamos a aplicar el teorema 6.8 a un operador lineal compacto apropiado. Este operador se construye como sigue.

Dado que la inyección $V \hookrightarrow H$ es continua, existe $C > 0$ tal que

$$\|v\|_H \leq C \|v\|_V \quad \forall v \in V. \tag{6.41}$$

Por tanto, para cada $f \in H$, $v \mapsto (f, v)_H$ es una forma lineal continua sobre V y en virtud del teorema 3.5 existe un único u_f que verifica:

$$a(u_f, v) = (f, v)_H \quad \forall v \in V, \quad u_f \in V. \tag{6.42}$$

Consideremos la aplicación $S : H \mapsto V$ definida por

$$Sf = u_f \quad \forall f \in H.$$

Es fácil comprobar que $S \in \mathcal{L}(H; V)$. Además, combinando (6.39), (6.42) y (6.41), obtenemos

$$\|Sf\|_V \leq \frac{C}{\alpha} \|f\|_H \quad \forall f \in H.$$

El operador T deseado es la composición de S con la inyección de V en H.

Gracias a la proposición 6.3, T es un operador lineal compacto: $T \in \mathcal{K}(H)$. Además, dado que $a(\cdot\,,\cdot)$ es simétrica y coerciva, deducimos que T es autoadjunto y positivo. En efecto, tenemos por una parte que

$$(Tf, g)_H = (g, Tf)_H = a(u_g, u_f) = a(u_f, u_g) = (f, Tg)_H \quad \forall f, g \in H,$$

mientras que

$$(Tf, f)_H = a(u_f, u_f) \geq \|u_f\|_V^2 \quad \forall f \in H.$$

El operador T es también inyectivo puesto que, si $Tf = 0$, entonces

$$(f, v)_H = a(u_f, v) = 0 \quad \forall v \in V$$

y entonces f es ortogonal a V (que es denso en H), de donde $f = 0$.

Por el teorema 6.8 y la observación 6.9, el conjunto de los valores propios de T puede escribirse como una sucesión $\{\mu_m\}$ de números reales positivos que decrece estrictamente a cero. Consideremos la nueva sucesión $\{\mu_n\}$, donde hemos contado cada μ_m tantas veces como indica su multiplicidad y pongamos

$$\lambda_n = \frac{1}{\mu_n} \quad \forall n \geq 1.$$

Entonces $\{\lambda_n\}$ es una sucesión no decreciente de números reales positivos que tiende a $+\infty$.

Eligiendo una base ortonormal en cada uno de los espacios $N(T - \mu_m \mathrm{Id})$, conseguimos una base ortonormal $\{e_n\}$ de H.

Es claro que los $e_n \in V$. En efecto, cada e_n verifica $Te_n = \mu_m e_n$ para algún m, con $\mu_m \neq 0$. Teniendo en cuenta las definiciones de T y de los λ_n, obtenemos además que

$$a(e_n, v) = \lambda_n a(Te_n, v) = \lambda_n (e_n, v)_H \quad \forall n \geq 1.$$

Por tanto, para terminar la demostración del teorema, sólo queda probar que $\{\frac{1}{\sqrt{\lambda_n}} e_n\}$ es una base ortonormal de V para el producto escalar $a(\cdot\,,\cdot)$.

Que los $\frac{1}{\sqrt{\lambda_n}} e_n$ son ortonormales para este producto escalar es inmediato. Por otra parte, si $v \in V$ y

$$a(e_n, v) = 0 \quad \forall n \geq 1,$$

entonces

$$(e_n, v)_H = \frac{1}{\lambda_n} a(e_n, v) = 0 \quad \forall n \geq 1,$$

de donde $v = 0$. Luego $\{\frac{1}{\sqrt{\lambda_n}} e_n\}$ es efectivamente una base ortonormal. ∎

También utilizaremos el resultado siguiente, conocido como *teorema de Rellich*, cuya demostración puede encontrarse por ejemplo en [3]:

Teorema 6.10 *La inyección* $H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^2(\Omega)$ *es compacta.*

Como consecuencia de este resultado, $(H_0^1(\Omega), L^2(\Omega))$ es un par de Lions que cumple las condiciones del teorema 6.9.

Teorema 6.11 *Se considera el operador L definido en (6.36). Se supone que los coeficientes a_{ij} y c verifican las condiciones siguientes:*

$$\begin{cases} a_{ij} = a_{ji} \in L^\infty(\Omega) \quad (i,j = 1,\dots,N), \\ \displaystyle\sum_{i,j=1}^{N} a_{ij}(x)\xi_i\xi_j \geq \alpha|\xi|^2 \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^N, \quad c.p.d. \text{ en } \Omega, \quad \alpha > 0, \end{cases} \tag{6.43}$$

$$c \in L^\infty(\Omega), \quad c \geq 0 \quad c.p.d. \text{ en } \Omega. \tag{6.44}$$

Entonces el espectro de L está constituido por los puntos λ_n de una sucesión no decreciente de números positivos que tiende a $+\infty$. Además, existe una base ortonormal $\{\,\varphi_n : n \geq 1\,\}$ de $L^2(\Omega)$ formada por autofunciones asociadas a los autovalores λ_n. Los correspondientes $\frac{1}{\sqrt{\lambda_n}}\varphi_n$ constituyen una base ortonormal de $H_0^1(\Omega)$ para el producto escalar $a(\cdot\,,\cdot)$ definido por los a_{ij} y c:

$$a(u,v) = \int_\Omega \Big(\sum_{i,j=1}^{N} a_{ij}\,\partial_j u\,\partial_i v + c\,u\,v\Big)\,dx \quad \forall u,v \in H_0^1(\Omega). \tag{6.45}$$

En consecuencia, para cada $f \in L^2(\Omega)$, la correspondiente solución débil del problema de Dirichlet

$$\begin{cases} -\displaystyle\sum_{i,j=1}^{N} \partial_i(a_{ij}\partial_j u) + cu = f, & x \in \Omega, \\ u = 0, & x \in \partial\Omega, \end{cases} \tag{6.46}$$

está dada por

$$u = \sum_{n\geq 1} \frac{1}{\lambda_n}(f,\varphi_n)_{L^2}\varphi_n, \tag{6.47}$$

donde la serie converge en $H_0^1(\Omega)$.

Demostración: Casi todo es inmediato, en virtud de los teoremas 6.9 y 6.10. Lo único relativamente nuevo es que debemos probar que la solución débil de (6.46), donde $f \in L^2(\Omega)$, está dada por (6.47).

Pero esto es consecuencia de las propiedades de las φ_n. En efecto, como $\{\frac{1}{\sqrt{\lambda_n}}\varphi_n\}$ es una base ortonormal de $H_0^1(\Omega)$ para el producto escalar (6.45), la serie que aparece en (6.47) converge en $H_0^1(\Omega)$ hacia la única función u que verifica

$$a(u,\varphi_n) = (f,\varphi_n)_{L^2} \quad \forall n \geq 1, \quad u \in H_0^1(\Omega).$$

Pero ésta es la solución de (6.46). ■

Como primera aplicación del resultado precedente (usado en combinación con el teorema 6.4), analizaremos a continuación la existencia de pares (λ, u) que resuelven el problema

$$\begin{cases} -\displaystyle\sum_{i,j=1}^{N} \partial_i(a_{ij}\partial_j u) + cu = \lambda u + f, & x \in \Omega, \\ u = 0, & x \in \partial\Omega, \end{cases} \tag{6.48}$$

donde $f \in L^2(\Omega)$. Naturalmente, diremos que (λ, u) es solución de (6.48) si se verifica lo siguiente:

$$\begin{cases} \displaystyle\int_\Omega (\sum_{i,j=1}^N a_{ij}\, \partial_j u\, \partial_i v + c\, u\, v)\, dx = \lambda \int_\Omega u\, v\, dx + \int_\Omega f\, v\, dx \\ \forall v \in H_0^1(\Omega), \quad u \in H_0^1(\Omega), \quad \lambda \in \mathbb{R}. \end{cases} \tag{6.49}$$

Gracias al teorema 3.5, sabemos que, para cada $\lambda \leq 0$, existe una única u tal que (λ, u) es solución de (6.48). Cuando $\lambda > 0$, la situación es más compleja, como muestra el resultado siguiente:

Teorema 6.12 *Sea $\lambda \in \mathbb{R}$, con $\lambda > 0$.*

1. *Si λ no es autovalor de L en Ω, para cada $f \in L^2(\Omega)$ existe una única función u tal que (λ, u) es solución de* (6.48).
2. *Por el contrario, si λ es autovalor de L en Ω, dada $f \in L^2(\Omega)$ existe u tal que (λ, u) es solución de* (6.48) *si y sólo si*

$$(f, v)_{L^2} = 0 \quad \forall v \in E(\lambda),$$

donde $E(\lambda)$ es el subespacio propio asociado a λ. En tal caso, el conjunto de todas estas u es una variedad afín de $L^2(\Omega)$ de espacio soporte $E(\lambda)$.

La demostración de este resultado es inmediata a partir de los teoremas precedentes y del teorema 6.4 (recuérdese la interpretación que se dio de la ecuación (6.11) tras la demostración del teorema 6.4).

El teorema 6.11 puede también ser aplicado a la resolución (al menos formal) de problemas de Cauchy-Dirichlet para las EDPs del calor y de ondas N-dimensionales. Una vez conocida la estructura del espectro del operador $-\Delta$, la construcción de la candidata a solución es casi inmediata en ambos casos por el método de separación de variables (como en el caso unidimensional, para resolver verdaderamente estos problemas, deberemos en una etapa posterior estudiar la convergencia de la serie encontrada).

Por ejemplo, consideremos el problema

$$\begin{cases} u_t - \Delta u = 0, & (x,t) \in \Omega \times (0,T), \\ u(x,t) = 0, & (x,t) \in \partial\Omega \times (0,T), \\ u(x,0) = u_0(x), & x \in \Omega, \end{cases} \tag{6.50}$$

donde $u_0 \in L^2(\Omega)$. Por analogía con el caso unidimensional, es natural buscar la solución de (6.50) de la forma

$$u(x,t) = \sum_{n\geq 1} a_n e^{-\lambda_n t} \varphi_n(x), \tag{6.51}$$

donde los λ_n son los autovalores de $-\Delta$ en Ω y las φ_n son autofunciones asociadas, por comodidad elegidas con norma unidad en $L^2(\Omega)$. En otras palabras, se supone aquí que

$$\begin{cases} -\Delta \varphi_n = \lambda \varphi_n, & x \in \Omega, \\ \varphi_n = 0, & x \in \partial\Omega \end{cases}$$

y $(\varphi_n, \varphi_m)_{L^2} = \delta_{nm}$ para $n, m \geq 1$.

Dado que $\{\, \varphi_n : n \geq 1 \,\}$ es una base ortonormal de $L^2(\Omega)$, tenemos

$$u_0(x) \sim \sum_{n \geq 1} (u_0, \varphi_n)_{L^2}\, \varphi_n(x) \quad \text{en} \quad \Omega$$

(con convergencia en $L^2(\Omega)$). Por razones que ahora son obvias, si existen unos a_n tales que la solución de (6.50) puede escribirse como en (6.51), ha de tenerse $a_n = (u_0, \varphi_n)_{L^2}$ para cada $n \geq 1$. Por tanto, la candidata a solución es

$$u(x,t) = \sum_{n \geq 1} (u_0, \varphi_n)_{L^2}\, e^{-\lambda_n t} \varphi_n(x). \tag{6.52}$$

Como hemos dicho antes, para resolver rigurosamente (6.50), es preciso llevar a cabo ahora un análisis de la convergencia de esta serie.

Bibliografía

[1] Adams, R.A. *Sobolev spaces.* Academic Press, 1975.

[2] Barbu, V. *Partial differential equations and boundary value problems.* Kluwer Academic Publishers, 1998.

[3] Brezis, H. *Análisis Funcional. Teoría y aplicaciones.* Alianza Editorial, 1984.

[4] Cañada, A. *Series y tranformada de Fourier y aplicaciones.* Publicaciones de la Universidad de Granada, 1994.

[5] Casas, E. *Introducción a las ecuaciones en derivadas parciales.* Publicaciones de la Universidad de Cantabria (Santander), 1992.

[6] Corduneanu, C. *Principles of differential and integral equations.* Chelsea Publishing Company, 1977.

[7] Dautray, R.; Lions, J.L. *Analyse Mathématique et Calcul Numérique pour les sciences et les techniques.* Masson, 1985.

[8] Ekeland, I.; Témam, R. *Analyse Convexe et Inéquations Varationnelles.* Dunod, Gauthiers-Villars, ????.

[9] Gilbarg, D.; Trudinger, N.S.. *Elliptic partial differential equations of second order, 2nd Ed.* Springer-Verlag, 1983.

[10] Hochstadt, H. *Integral equations.* John Wiley & Sons, 1973.

[11] John, F. *Partial differential equations, 4th Ed.* Springer-Verlag, ????.

[12] Kreyszig, E. *Introductory Functional Analysis with applications.* John Wiley & Sons, 1978.

[13] Kufner, A. y otros. *Function Spaces.* Noordhoff International Publishing, 1977.

[14] Lang, S. *Real Analysis.* Addison-Wesley, 1969.

[15] Nečas, J. *Les méthodes directes en théorie des équations elliptiques.* Masson, 1967.

[16] Peral, I. *Primer curso de ecuaciones en derivadas parciales.* Addison-Wesley (Universidad Autónoma de Madrid), 1995.

[17] SNEDDON, I.N. *Elements of partial differential equations*, MacGraw & Hill Book Co. Inc., 1957.

[18] TRENOGIN, V.A. Y OTROS. *Problemas y ejercicios de Análisis Funcional.* Mir, 1987.

[19] WEINBERGER, H.F. *Ecuaciones diferenciales en derivadas parciales.* Reverté, 1970.

[20] VLADIMIROV, V.S. *Recueil de problémes d'equations de physique mathématique.* Mir, 1976.