



MECÁNICA DE FLUIDOS

Elena de Castro Hernández.

1

Dpto. Ing. Aeroespacial y Mecánica de Fluidos. Universidad de Sevilla.



Tema 1

Introducción y principios generales

(2 clases, 2 charlas, 1 vídeo)

Elena de Castro Hernández.

2

Dpto. Ing. Aeroespacial y Mecánica de Fluidos. Universidad de Sevilla.



FÍSICA

Ciencia que estudia las propiedades y el comportamiento de la energía, la materia, el tiempo y el espacio, así como las interacciones entre estos 4 conceptos.



MECÁNICA

Rama de la Física que estudia el movimiento y reposo de cuerpos y su evolución con el tiempo bajo la acción de fuerzas.



MECÁNICA



ESTÁTICA

$$\vec{v} = 0$$

Rama de la Mecánica que estudia sistemas físicos en equilibrio estático.

CINEMÁTICA

$$\vec{v} \neq 0 \text{ y sin } \vec{F}$$

Rama de la Mecánica que estudia el movimiento de los cuerpos sin considerar las fuerzas que lo originan.

DINÁMICA

$$\vec{v} \neq 0 \text{ y con } \vec{F}$$

Rama de la Mecánica que estudia el movimiento de los cuerpos considerando las fuerzas que lo originan.

Características generales de los fluidos

Sólido frente a fluido:

Sólido: Presenta resistencia a la deformación.

Fluido: No presenta resistencia a la deformación en sí, sino a la velocidad de deformación. Dicha resistencia está directamente relacionada con una propiedad del fluido denominada viscosidad. Una fuerza pequeña produce pequeñas velocidades de deformación pero la deformación alcanzada puede ser grande si actúa el tiempo necesario. (Pared, agua/miel, gelatina).

Líquido frente a gas:

Líquido: Densidad constante. Incompresibles. Adoptan la forma del recipiente que lo contiene tomando un volumen compatible con el suyo propio.

$$\rho_{\text{liquido}} \sim 10^3 \rho_{\text{gas}}$$

Gas: Densidad no constante. Compresibles. Ocupan todo el volumen disponible.

Estructura molecular de la materia

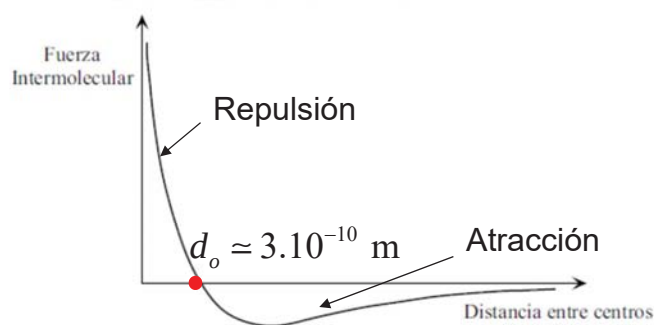


Figura 1.2: Variación de la fuerza intermolecular como función de la distancia entre los centros moleculares. En la figura, la fuerza de repulsión se ha representado con signo positivo.

$$\text{O}_2 \rightarrow \frac{1 \text{ kmol}}{32 \text{ kg}} \frac{6,024 \cdot 10^{26} \text{ molec}}{1 \text{ kmol}} \frac{1,2 \text{ kg}}{\text{m}^3} \approx 2 \cdot 10^{25} \frac{\text{molec}}{\text{m}^3} \rightarrow d \approx \left(2 \cdot 10^{25}\right)^{-1/3} \text{ m} \approx 10 d_0$$

$$\text{H}_2\text{O} \rightarrow \frac{1 \text{ kmol}}{18 \text{ kg}} \frac{6,024 \cdot 10^{26} \text{ molec}}{1 \text{ kmol}} \frac{10^3 \text{ kg}}{\text{m}^3} \approx 3 \cdot 10^{28} \frac{\text{molec}}{\text{m}^3} \rightarrow d \approx \left(3 \cdot 10^{28}\right)^{-1/3} \text{ m} \approx d_0$$

Hipótesis de medio continuo

L : Longitud característica del problema.

d : Distancia típica entre moléculas.

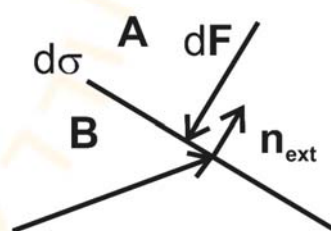
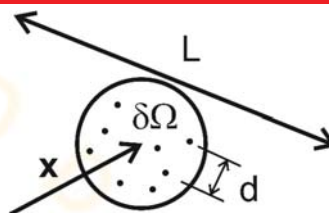
$d \ll (\delta\Omega)^{1/3} \ll L \rightarrow$ En cada instante el fluido ocupa de forma continua una cierta región del espacio (dominio fluido) sobre la que se tienen definidas funciones continuas y derivables de la posición y del tiempo (campos o variables fluidas).

Densidad: $\rho(\vec{x}, t) = \lim_{\delta\Omega \rightarrow 0} \frac{1}{\delta\Omega} \sum_i m_i$ **Velocidad:** $\vec{v}(\vec{x}, t) = \lim_{\delta\Omega \rightarrow 0} \frac{\sum_i m_i \vec{v}_i}{\sum_i m_i}$

Presión: Para un fluido en reposo: $p(\vec{x}, t) = \frac{|d\vec{F}|}{d\sigma}$

Si el fluido está en movimiento:

$$d\vec{F} = -p(\vec{x}, t) \vec{n} d\sigma + d\vec{f}_\mu(\vec{x}, t, \vec{n})$$



Termodinámica de los procesos fluidomecánicos

Termodinámica del equilibrio (antes): Cada elemento material está en equilibrio mecánico y térmico. Las propiedades termodinámicas no varían ni con la posición ni con el tiempo (1^{er} y 2^o Principios).

$$\Delta E = Q + W, \Delta S \geq \delta Q / T$$

Equilibrio termodinámico local (ahora): Si el camino libre medio entre colisiones es pequeño frente a la longitud característica de las no uniformidades macroscópicas y el tiempo entre colisiones es pequeño frente al tiempo necesario para que las variables macroscópicas sufran cambios locales apreciables,

$$\lambda \ll (\delta\Omega)^{1/3} \ll L \text{ y } t_c \ll t_o$$

en cada instante t , las variables termodinámicas en cada punto $\vec{x}$ del fluido están relacionadas entre si como lo estarían si todo el fluido estuviese en equilibrio a la p y T locales.

A partir de ahora emplearemos **variables intensivas** (letra minúscula) definidas por unidad de masa o volumen (alumnos en clase).

**Gases perfectos:**

Ecuación de estado: $pV = nRT \rightarrow p = \frac{1}{V} \frac{m}{M} RT = \rho R_g T$

Constante universal de los gases: $R = 8,314 \frac{J}{mol K}$

Constante del gas: $R_g (\text{aire}) = 287 \frac{J}{kgK}$

Calor específico a volumen y a presión constante: $\begin{cases} c_p - c_v = R_g \\ \frac{c_p}{c_v} = \gamma = 1,4 \text{ (diatómico)} \end{cases}$

Energía interna: $e - e_0 = c_v (T - T_0) \frac{J}{kg}$

Entalpía: $h = e + \frac{p}{\rho}, \quad h - h_0 = c_p (T - T_0) \frac{J}{kg}$

$H = E + pV(J)$

Entropía: $Tds = de + pd\left(\frac{1}{\rho}\right), \quad s - s_0 = c_v \ln \left[\frac{T/T_0}{(\rho/\rho_0)^{\gamma-1}} \right] \frac{J}{kgK}$

$TdS = dE + pdV(J/K)$

**Líquidos perfectos:**

Ecuación de estado: $\rho = cte$

Calor específico: $c(\text{agua}) = 4180 \frac{J}{kgK}$

Energía interna: $e - e_0 = c(T - T_0) \frac{J}{kg}$

Entropía: $Tds = de = cdT, \quad s - s_0 = c \ln \left(\frac{T}{T_0} \right) \frac{J}{kgK}$

Cinemática de los fluidos

Vídeo: Eulerian and Lagrangian descriptions in fluid mechanics.

Especificación del campo fluido: Para la descripción del medio continuo fluido se pueden utilizar 2 alternativas.

1) Descripción Lagrangiana: Cada punto de fluido se identifica mediante su posición inicial y se sigue en el tiempo la evolución de su posición y la de las magnitudes fluidas ligadas al mismo (punto material).

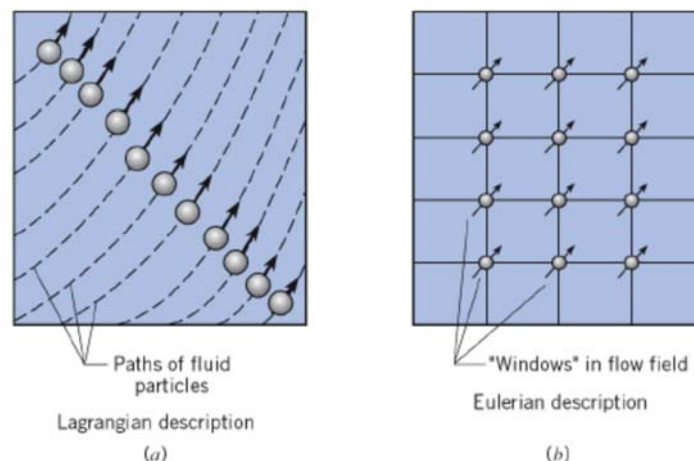
Trayectoria: Posición en sucesivos instantes t del punto material que en el instante t_0 estaba en la posición $\mathbf{x}_0$.

$$\vec{x}_T = \vec{x}_T(\vec{x}_0, t_0, t) \rightarrow \vec{v}(\vec{x}_0, t_0, t) = \frac{\partial \vec{x}_T}{\partial t}, \quad \vec{a}(\vec{x}_0, t_0, t) = \frac{\partial^2 \vec{x}_T}{\partial t^2}$$

2) Descripción Euleriana: No se sigue a los puntos materiales del fluido, sino que se especifican las magnitudes fluidomecánicas en cada punto $\mathbf{x}$ del dominio fluido, fijo respecto al sistema de referencia, y en cada instante t de tiempo.

$\mathbf{x}$ y t son variables independientes.

$\mathbf{v}(\mathbf{x}, t)$ se toma como variable fundamental (cauce río).

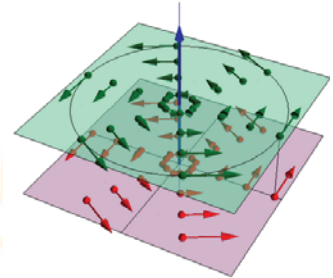


Movimiento estacionario: $\vec{v} \neq f(t)$

Un movimiento puede ser estacionario en un sistema de referencia y no serlo en otro (coche).

Movimiento uniforme: $\vec{v} \neq f(\vec{x})$ **Movimiento plano:** Velocidad perpendicular a una dirección $\mathbf{e}_z$.

$$\vec{v} = v_x(x, y, z, t)\vec{e}_x + v_y(x, y, z, t)\vec{e}_y$$

**Movimiento bidimensional:** Además, la velocidad no varía en dicha dirección $\mathbf{e}_z$.

$$\vec{v} = v_x(x, y, t)\vec{e}_x + v_y(x, y, t)\vec{e}_y$$

Movimiento axilsimétrico: Presenta simetría de revolución con respecto a un eje $\mathbf{e}_z$.

$$\vec{v} = v_r(r, z, t)\vec{e}_r + v_\theta(r, z, t)\vec{e}_\theta + v_z(r, z, t)\vec{e}_z$$

Línea fluida: $L_f(t)$ Conjunto de puntos materiales que inicialmente forman una línea, por continuidad, seguirán formando una línea en instantes posteriores. Si no fuese así, existirían dos velocidades distintas en un mismo punto e instante de tiempo, contradiciendo la hipótesis de medio continuo. Por tanto, si $L_f(t)$ es cerrada en t entonces $L_f(t)$ es cerrada para todo t . Se mueve con la velocidad del fluido, que es la incógnita de nuestro problema.

Superficie fluida: $\Sigma_f(t)$; **Volumen fluido:** $\Omega_f(t)$; **Partícula fluida:** $d\Omega_f(t)$

Líneas de corriente: Tangentes al vector velocidad en cada punto para cada instante de tiempo. No pueden cortarse salvo en puntos de remanso ($\vec{v} = 0$) o puntos singulares ($\vec{v} = \infty$).

$$\frac{dx}{v_x(x, y, z, t)} = \frac{dy}{v_y(x, y, z, t)} = \frac{dz}{v_z(x, y, z, t)}$$

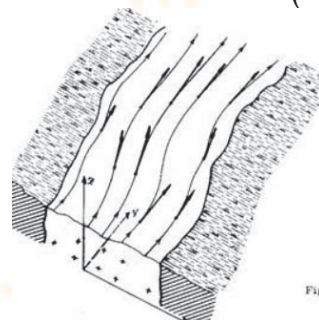


Fig. (Fin)

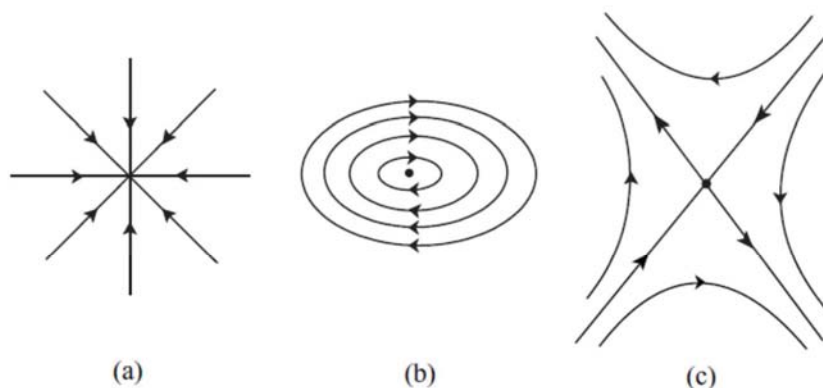


Figura 3.2: Líneas de corriente en torno a puntos singulares o de remanso en un movimiento plano.
a) Nodo o sumidero (fuente si la dirección del flujo es saliente); b) Centro o torbellino; c) Puerto.

Operador Nabla:

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x_i} \vec{e}_i = \frac{\partial}{\partial x_1} \vec{e}_1 + \frac{\partial}{\partial x_2} \vec{e}_2 + \frac{\partial}{\partial x_3} \vec{e}_3$$

Gradiente de un escalar: (vector) $\nabla \phi = \frac{\partial \phi}{\partial x_i} \vec{e}_i = \frac{\partial \phi}{\partial x_1} \vec{e}_1 + \frac{\partial \phi}{\partial x_2} \vec{e}_2 + \frac{\partial \phi}{\partial x_3} \vec{e}_3$

Gradiente de un vector: (tensor) $\nabla \vec{v} = \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \vec{e}_i \vec{e}_j = \begin{pmatrix} \frac{\partial v_1}{\partial x_1} & \frac{\partial v_1}{\partial x_2} & \frac{\partial v_1}{\partial x_3} \\ \frac{\partial v_2}{\partial x_1} & \frac{\partial v_2}{\partial x_2} & \frac{\partial v_2}{\partial x_3} \\ \frac{\partial v_3}{\partial x_1} & \frac{\partial v_3}{\partial x_2} & \frac{\partial v_3}{\partial x_3} \end{pmatrix}$

Divergencia de un vector: (escalar) $\nabla \cdot \vec{v} = \frac{\partial v_i}{\partial x_i} = \frac{\partial v_1}{\partial x_1} + \frac{\partial v_2}{\partial x_2} + \frac{\partial v_3}{\partial x_3}$

Laplaciana de un escalar:
(escalar) $\nabla^2 \phi = \nabla \cdot (\nabla \phi) = \frac{\partial^2 \phi}{\partial x_i^2} = \frac{\partial^2 \phi}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial x_3^2}$

Laplaciana de un vector:
(vector) $\nabla^2 \vec{v} = \nabla^2 v_i \vec{e}_i = \nabla^2 v_1 \vec{e}_1 + \nabla^2 v_2 \vec{e}_2 + \nabla^2 v_3 \vec{e}_3$

Rotacional de un vector:
(vector) $\nabla \times \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ \partial / x_1 & \partial / x_2 & \partial / x_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix}$

Divergencia de una matriz:
(vector) $\nabla \cdot \vec{\tau} = \left(\partial / x_1 \quad \partial / x_2 \quad \partial / x_3 \right) \begin{pmatrix} \tau_{11} & \tau_{12} & \tau_{13} \\ \tau_{21} & \tau_{22} & \tau_{23} \\ \tau_{31} & \tau_{32} & \tau_{33} \end{pmatrix}$

$$\text{rot}[\text{grad}(\phi)] = 0$$

$$\text{div}[\text{rot}(\vec{v})] = 0$$

$$\nabla \cdot \vec{v} = 0 \rightarrow \text{Solenoidal}$$

$$\nabla \wedge \vec{v} = 0 \rightarrow \text{Irrotacional}$$

Notación:

Superficie diferencial: $d\sigma$

Superficie: Σ

Volumen diferencial: $d\varpi$

Volumen: Ω

Superficie o volumen de control: Σ_c y Ω_c

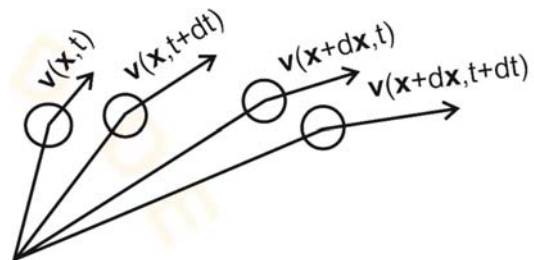
Superficie o volumen fluido: Σ_f y Ω_f

Teorema de Gauss:

$$\begin{aligned}\int_{\Sigma} \phi \vec{n} d\sigma &= \int_{\Omega} \nabla \phi d\varpi \\ \int_{\Sigma} \vec{v} \cdot \vec{n} d\sigma &= \int_{\Omega} \nabla \cdot \vec{v} d\varpi \\ \int_{\Sigma} \vec{n} \wedge \vec{v} d\sigma &= \int_{\Omega} \nabla \wedge \vec{v} d\varpi\end{aligned}$$

Derivada sustancial

Sea $\phi(\mathbf{x}, t)$ una magnitud intensiva cualquiera (escalar o vectorial). Si se sigue a un punto material en su movimiento, la magnitud ϕ asociada a dicho punto variará, en una descripción euleriana, no sólo por cambiar t , sino también por cambiar $\mathbf{x}$.



$$\begin{aligned}d\phi &= \phi(\vec{x} + d\vec{x}, t + dt) - \phi(\vec{x}, t) = \\ &= \cancel{\phi(\vec{x}, t)} + \frac{\partial \phi}{\partial x} dx + \frac{\partial \phi}{\partial y} dy + \frac{\partial \phi}{\partial z} dz + \frac{\partial \phi}{\partial t} dt - \cancel{\phi(\vec{x}, t)} = d\vec{x} \cdot \nabla \phi + \frac{\partial \phi}{\partial t} dt \rightarrow \\ &\rightarrow \boxed{\frac{d\phi}{dt} = \frac{\partial \phi}{\partial t} + \vec{v} \cdot \nabla \phi}\end{aligned}$$

$$\frac{D}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \vec{v} \cdot \nabla$$

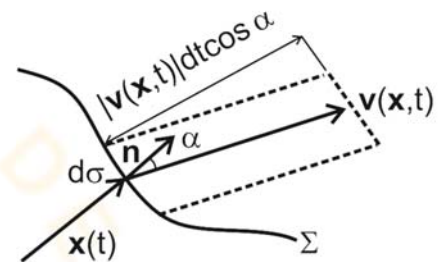
$\frac{\partial}{\partial t}$ → Derivada local
 $\vec{v} \cdot \nabla$ → Derivada convectiva
 $\frac{D}{Dt}$ → Derivada sustancial

$$\rho \rightarrow \frac{D\rho}{Dt} = \frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{v} \cdot \nabla \rho \text{ (escalar)}$$

$$\vec{v} \rightarrow \vec{a} = \frac{D\vec{v}}{Dt} = \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \vec{v} \cdot \nabla \vec{v} \text{ (vector)}$$

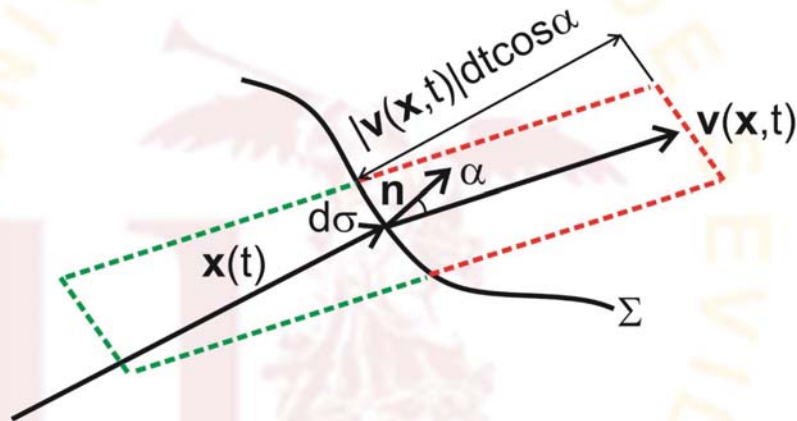
Transporte convectivo

Flujo convectivo de magnitud ϕ a través de la superficie Σ : Cantidad de magnitud ϕ que atraviesa con el fluido (que se mueve con velocidad $\mathbf{v}$) la superficie Σ (de normal exterior $\mathbf{n}$) en la unidad de tiempo.



$$\phi \left(\frac{\text{unidad de } \phi}{m^3} \right)$$

Volumen que atraviesa Σ ?
 Volumen que atraviesa $d\sigma$?



$$|\vec{v}(\vec{x}, t)| dt \text{ (m)}$$

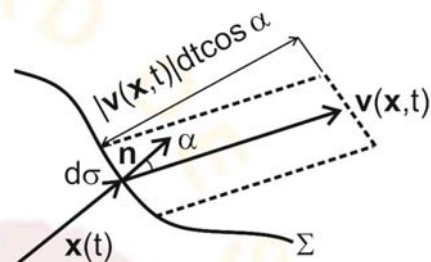
$$|\vec{v}(\vec{x}, t)| dt \cos \alpha = \vec{v} \cdot \vec{n} dt \text{ (m)}$$

$$\vec{v} \cdot \vec{n} dt d\sigma \text{ (m}^3\text{)}$$

$$\vec{v} \cdot \vec{n} d\sigma \text{ (m}^3\text{/s)}$$

$$\phi \vec{v} \cdot \vec{n} d\sigma \left(\frac{\text{unidad de } \phi}{s} \right)$$

$$\text{Flujo convectivo de } \phi = \int_{\Sigma} \phi \vec{v} \cdot \vec{n} d\sigma = \int_{\Omega} \nabla \cdot (\phi \vec{v}) d\varpi \left(\frac{\text{unidad de } \phi}{s} \right)$$



$$\phi = 1 \rightarrow \text{Volumen} \rightarrow \int_{\Sigma} \vec{v} \cdot \vec{n} \, d\sigma = Q \, (m^3 / s)$$

$$\phi = \rho \rightarrow \text{Masa} \rightarrow \int_{\Sigma} \rho \vec{v} \cdot \vec{n} \, d\sigma = G \, (kg / s)$$

$$\phi = \rho \vec{v} \rightarrow \text{Cantidad movimiento} \rightarrow \int_{\Sigma} \rho \vec{v} \vec{v} \cdot \vec{n} \, d\sigma = F \, (Kg \, m / s^2)$$

$$\phi = \rho e \rightarrow \text{Energia} \rightarrow \int_{\Sigma} \rho e \vec{v} \cdot \vec{n} \, d\sigma = W \, (J / s)$$

El transporte convectivo a través de una superficie fija sólida es siempre cero!

Si la superficie Σ se mueve con velocidad $\vec{v}_c$:

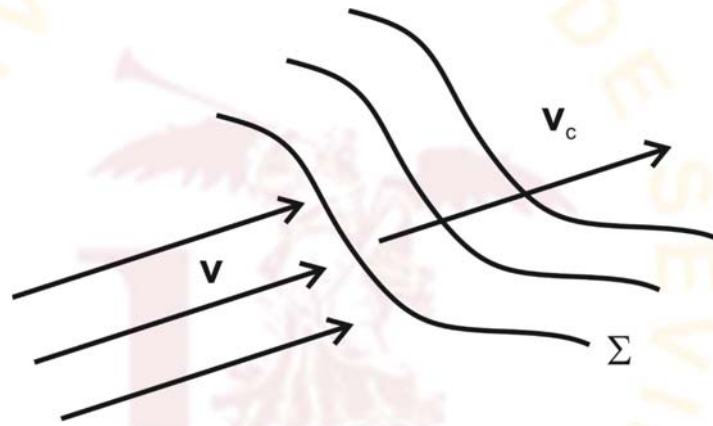
$$\phi = 1 \rightarrow \text{Volumen} \rightarrow \int_{\Sigma} (\vec{v} - \vec{v}_c) \cdot \vec{n} \, d\sigma = Q \, (m^3 / s)$$

$$\phi = \rho \rightarrow \text{Masa} \rightarrow \int_{\Sigma} \rho (\vec{v} - \vec{v}_c) \cdot \vec{n} \, d\sigma = G \, (kg / s)$$

$$\phi = \rho \vec{v} \rightarrow \text{Cantidad movimiento} \rightarrow \int_{\Sigma} \rho \vec{v} (\vec{v} - \vec{v}_c) \cdot \vec{n} \, d\sigma = F \, (Kg \, m / s^2)$$

$$\phi = \rho e \rightarrow \text{Energia} \rightarrow \int_{\Sigma} \rho e (\vec{v} - \vec{v}_c) \cdot \vec{n} \, d\sigma = W \, (J / s)$$

El transporte convectivo a través de una superficie sólida móvil es siempre cero!



Teorema del transporte de Reynolds

Las ecuaciones de la mecánica de fluidos se obtienen aplicando los principios de conservación de la masa, cantidad de movimiento y energía a volúmenes fluidos. Dado que se usará la descripción euleriana para la formulación del movimiento, es necesario obtener expresiones para los valores de cambio de las integrales de las magnitudes fluidas extendidas a volúmenes fluidos o volúmenes de control, que pueden variar con el tiempo de forma arbitraria.

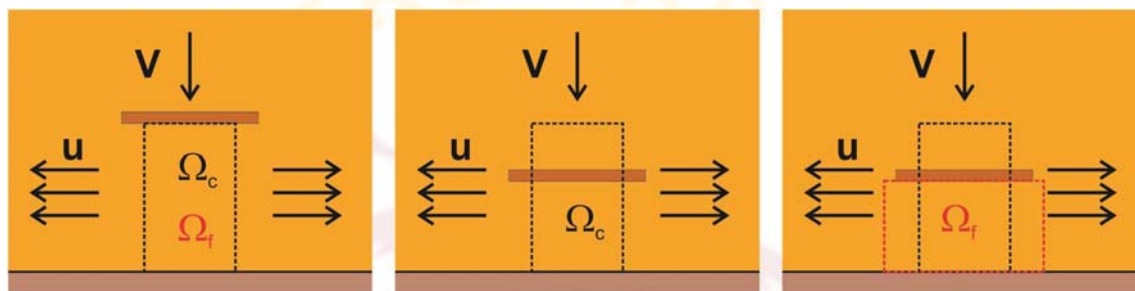
Volumen fluido:

- Partículas que pertenecen a un volumen fluido en un instante pertenecen a dicho volumen fluido en instantes posteriores.
- Se mueve con la velocidad del fluido, incógnita del problema.

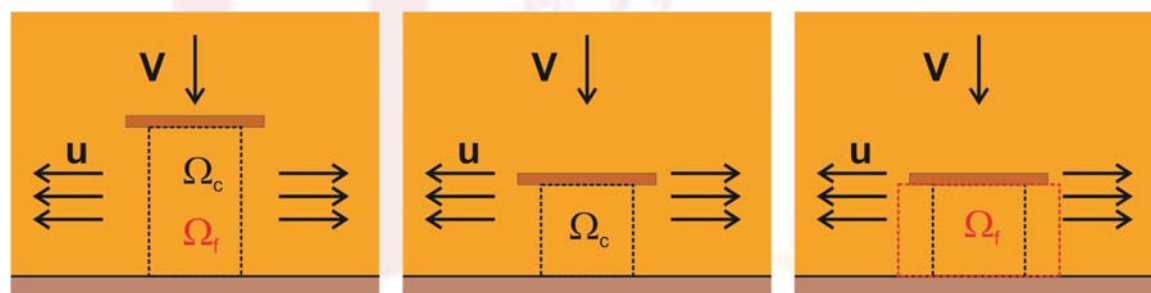
Volumen control:

- Se mueve con la velocidad del volumen de control, elegida por mi (galleta). Puede ser fijo o móvil.
- Sugerencia: tomarlo de forma que sus paredes contengan datos o incógnitas.

Volumen de control fijo:



Volumen de control móvil:



Para un volumen de control:

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega_c(t)} \phi(\vec{x}, t) d\omega = \int_{\Omega_c(t)} \frac{\partial \phi}{\partial t} d\omega + \int_{\Sigma_c(t)} \phi \vec{v}_c \cdot \vec{n} d\sigma$$

Generalización 3D regla Leibniz derivada de integral respecto parámetro.

Variación de ϕ con t

Variación de ϕ por cambio en región de integración

Para un volumen fluido:

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega_f(t)} \phi(\vec{x}, t) d\omega = \int_{\Omega_f(t)} \frac{\partial \phi}{\partial t} d\omega + \int_{\Sigma_f(t)} \phi \vec{v} \cdot \vec{n} d\sigma$$

Flujo convectivo de ϕ a través de Σ fija que en t coincide con $\Sigma_f(t)$

Si en un instante determinado se cumple: $\Omega_c(t) = \Omega_f(t)$ y $\Sigma_c(t) = \Sigma_f(t)$
pero $\Omega_c(t+dt) \neq \Omega_f(t+dt)$ y $\Sigma_c(t+dt) \neq \Sigma_f(t+dt)$ ya que $\vec{v} \neq \vec{v}_c$

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega_c(t)} \phi(\vec{x}, t) d\varpi = \int_{\Omega_c(t)} \frac{\partial \phi}{\partial t} d\varpi + \int_{\Sigma_c(t)} \phi \vec{v}_c \cdot \vec{n} d\sigma$$

(A)

(B)

(C)



$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega_f(t)} \phi(\vec{x}, t) d\varpi = \int_{\Omega_f(t)} \frac{\partial \phi}{\partial t} d\varpi + \int_{\Sigma_f(t)} \phi \vec{v} \cdot \vec{n} d\sigma$$

(D)

(E)

(F)

$$D = E + F = B + F = A - C + F = A + (F - C)$$

$$D = E + F = B + F = A - C + F = A + (F - C)$$

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega_f(t)} \phi(\vec{x}, t) d\varpi = \frac{d}{dt} \int_{\Omega_c(t)} \phi(\vec{x}, t) d\varpi + \int_{\Sigma_c(t)} \phi(\vec{v} - \vec{v}_c) \cdot \vec{n} d\sigma$$



Flujo convectivo de ϕ a través de $\Sigma_c(t)$



MECÁNICA DE FLUIDOS

Elena de Castro Hernández.

1

Dpto. Ing. Aeroespacial y Mecánica de Fluidos. Universidad de Sevilla.



Tema 2

Ecuaciones de conservación de la masa
y de la cantidad de movimiento

(2 clases, 4 problemas, 1 charlas, 1 vídeo)

Elena de Castro Hernández.

2

Dpto. Ing. Aeroespacial y Mecánica de Fluidos. Universidad de Sevilla.

Ecuación integral de conservación de la masa. Ecuación de continuidad

Forma integral, aplicada a un volumen fluido:

Volumen fluido $\Omega_f(t)$: Conjunto de puntos materiales que inicialmente forman un volumen, por continuidad, seguirán formando parte de dicho volumen en instantes posteriores. Sino fuese así, existirían dos velocidades distintas en un mismo punto e instante de tiempo, contradiciendo la hipótesis de medio continuo.

La masa contenida en un volumen fluido es constante.

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega_f(t)} \rho(\vec{x}, t) d\varpi = 0$$

↓
Variación de masa en Ω_f

Forma integral, aplicada a un volumen de control:

Aplicando el teorema del transporte de Reynolds

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega_f(t)} \phi(\vec{x}, t) d\varpi = \frac{d}{dt} \int_{\Omega_c(t)} \phi(\vec{x}, t) d\varpi + \int_{\Sigma_c(t)} \phi(\vec{v} - \vec{v}_c) \cdot \vec{n} d\sigma$$

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega_f(t)} \rho(\vec{x}, t) d\varpi = \frac{d}{dt} \int_{\Omega_c(t)} \rho(\vec{x}, t) d\varpi + \int_{\Sigma_c(t)} \rho(\vec{v} - \vec{v}_c) \cdot \vec{n} d\sigma = 0$$

↓
Variación de masa en Ω_c

↓
Transporte convectivo de masa a través de las superficies que encierran a Ω_c

**Forma diferencial:**

Aplicando el teorema del transporte de Reynolds a un volumen fluido

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega_f(t)} \phi(\vec{x}, t) d\varpi = \int_{\Omega_f(t)} \frac{\partial \phi}{\partial t} d\varpi + \int_{\Sigma_f(t)} \phi \vec{v} \cdot \vec{n} d\sigma$$

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega_f(t)} \rho(\vec{x}, t) d\varpi = 0 \rightarrow \int_{\Omega_f} \frac{\partial \rho}{\partial t} d\varpi + \int_{\Sigma_f} \rho \vec{v} \cdot \vec{n} d\sigma = 0 \rightarrow$$

$$\rightarrow \int_{\Omega_f} \frac{\partial \rho}{\partial t} d\varpi + \int_{\Omega_f} \nabla \cdot (\rho \vec{v}) d\varpi = 0 \rightarrow \int_{d\Omega_f} \frac{\partial \rho}{\partial t} d\varpi + \int_{d\Omega_f} \nabla \cdot (\rho \vec{v}) d\varpi = 0 \rightarrow$$



$$\rightarrow \int_{\Omega_f} \frac{\partial \rho}{\partial t} d\varpi + \int_{\Omega_f} \nabla \cdot (\rho \vec{v}) d\varpi = 0 \rightarrow \int_{d\Omega_f} \frac{\partial \rho}{\partial t} d\varpi + \int_{d\Omega_f} \nabla \cdot (\rho \vec{v}) d\varpi = 0 \rightarrow$$

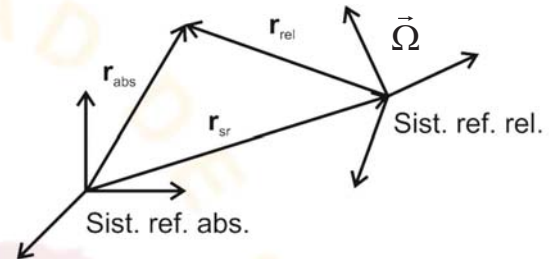
$$\rightarrow \frac{\partial \rho}{\partial t} d\varpi + \nabla \cdot (\rho \vec{v}) d\varpi = 0 \rightarrow \boxed{\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \vec{v}) = 0} \rightarrow$$

$$\rightarrow \overbrace{\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \rho \cdot \vec{v}} + \rho \nabla \cdot \vec{v} = \boxed{\frac{D\rho}{Dt} + \rho \nabla \cdot \vec{v} = 0}$$

Nota: Sistemas de referencia inerciales y no inerciales

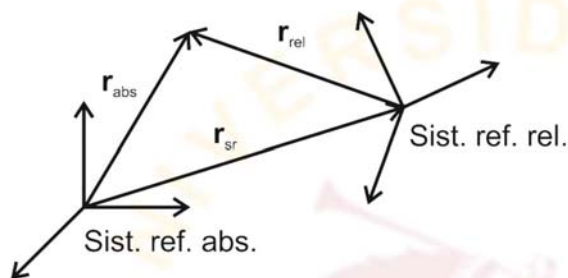
$$\left. \frac{d\vec{\phi}_{rel}}{dt} \right|_{abs} = \left. \frac{d\vec{\phi}_{rel}}{dt} \right|_{rel} + \vec{\Omega} \wedge \vec{\phi}_{rel}$$

$$\vec{r}_{abs} = \vec{r}_{sr} + \vec{r}_{rel} \rightarrow \vec{v}_{abs} = \vec{v}_{sr} + \vec{v}_{rel} + \vec{\Omega} \wedge \vec{r}_{rel}$$



$$\vec{a}_{abs} = \vec{a}_{sr} + \left(\vec{a}_{rel} + \vec{\Omega} \wedge \vec{v}_{rel} \right) + \frac{d\vec{\Omega}}{dt} \wedge \vec{r}_{rel} + \vec{\Omega} \wedge \left(\vec{v}_{rel} + \vec{\Omega} \wedge \vec{r}_{rel} \right) =$$

$$= \vec{a}_{sr} + \vec{a}_{rel} + \underbrace{\frac{d\vec{\Omega}}{dt} \wedge \vec{r}_{rel}}_{\text{Angular}} + \underbrace{\vec{\Omega} \wedge \vec{\Omega} \wedge \vec{r}_{rel}}_{\text{Centrípeta}} + \underbrace{2\vec{\Omega} \wedge \vec{v}_{rel}}_{\text{Coriolis}}$$



$$m\vec{a}_{abs} = \sum \vec{F}_{ext} \rightarrow$$

$$\rightarrow m\vec{a}_{rel} = \sum \vec{F}_{ext} - m \left(\vec{a}_{sr} + \frac{d\vec{\Omega}}{dt} \wedge \vec{r}_{rel} + \vec{\Omega} \wedge \vec{\Omega} \wedge \vec{r}_{rel} + 2\vec{\Omega} \wedge \vec{v}_{rel} \right)$$

Ecuación integral de conservación de la cantidad de movimiento

6 Incógnitas: ρ (1), p (1), $\mathbf{v}$ (3) y T (1).

6 Ecuaciones: Masa (1), cantidad movimiento (3), energía (1) y ecuación de estado (1).

Derivadas temporales: condiciones iniciales.

Derivadas espaciales: condiciones de contorno.

$$2^{\text{a}} \text{ Ley de Newton: } \frac{d(m\vec{v})}{dt} = \sum \vec{F}_{\text{ext}}$$

$$\text{Fuerzas de volumen: } \vec{F}_v = \int_{\Omega_f} \vec{f}_v d\varpi = \int_{\Omega_f} \rho \vec{f}_m d\varpi$$

$$\vec{f}_m = \vec{g} - \left(\vec{a}_o + \frac{d\vec{\Omega}}{dt} \wedge \vec{x} + \vec{\Omega} \wedge \vec{\Omega} \wedge \vec{x} + 2\vec{\Omega} \wedge \vec{v} \right)$$

Fuerzas de superficie:

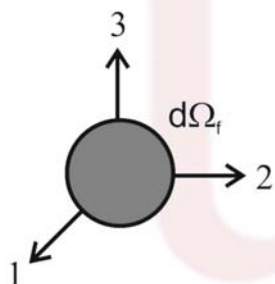
$$\vec{F}_s = \int_{\Sigma_f} \vec{f}_s(\vec{x}, t, \vec{n}) d\sigma = \int_{\Sigma_f} \vec{n} \cdot \vec{\tau} d\sigma$$

Tensor de esfuerzos:
(simétrico, diagonalizable ortogonalmente)

$$\vec{\tau} = \begin{pmatrix} \tau_{11} & \tau_{12} & \tau_{13} \\ \tau_{12} & \tau_{22} & \tau_{23} \\ \tau_{13} & \tau_{23} & \tau_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \lambda_2 & \\ & & \lambda_3 \end{pmatrix}$$

Hemos introducido 3 nuevas incógnitas? No!

1) Si fluidoestática ($\mathbf{v}=0$): $\rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \lambda$

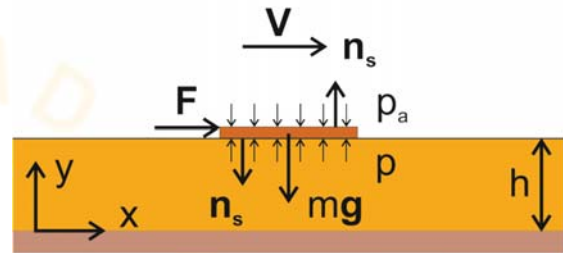


$$\begin{cases} \lambda > 0 \rightarrow \text{Expansión} \rightarrow \text{NO!} \\ \lambda < 0 \rightarrow \text{Compresión} \rightarrow \end{cases}$$

$$\vec{f}_s = -p\vec{n}, \quad \vec{\tau} = -p\vec{I}$$

$\vec{n}$ exterior al volumen fluido o de control

2) Si NO fluidoestática ($\mathbf{v} \neq 0$):
Experimento: Galleta que movemos horizontalmente con velocidad constante, sobre una lámina de miel vertida sobre la mesa de la cocina.



$$\vec{V} = cte \rightarrow \sum \vec{F}_{ext} = 0 \rightarrow \vec{F} - mg\vec{e}_z + \vec{F}_{f \rightarrow s} = 0 \rightarrow$$

$$\rightarrow F\vec{e}_x - mg\vec{e}_z + (p - p_a)S\vec{e}_z = 0 \rightarrow F = 0 \rightarrow \text{NO!} \rightarrow$$

$$\rightarrow \vec{f}_s = -p\vec{n} + \vec{f}_\mu$$

Experimentalmente: $\vec{f}_\mu = \mu \frac{V}{h} S \vec{e}_x \rightarrow \vec{f}_s = -p\vec{n} + \vec{\tau}' \cdot \vec{n}, \vec{\tau}' = -p\vec{I} + \vec{\tau}$

Coeficiente de viscosidad: $\mu(T)$

Tensor de esfuerzos viscosos: $\vec{\tau}'$

Ley de Navier-Poisson: $\vec{\tau}' = 2\mu\vec{\gamma} - \frac{2}{3}\mu\nabla \cdot \vec{v} \vec{I} + \mu_v \nabla \cdot \vec{v} \vec{I}$
(Experimental para fluidos newtonianos)

Coeficiente volumétrico de viscosidad: μ_v

Tensor de velocidades de deformación: $\vec{\gamma} = \frac{1}{2} [\nabla \vec{v} + (\nabla \vec{v})^T]$

Si líquidos ($\rho = \text{cte}$):

$$\frac{D\rho}{Dt} + \rho \nabla \cdot \vec{v} = 0 \rightarrow \nabla \cdot \vec{v} = 0$$

$$\vec{\tau} = 2\mu\vec{\gamma} \quad \text{y} \quad \nabla \cdot \vec{\tau} = \mu \nabla^2 \vec{v}$$

$$\vec{\tau} = 2\mu\vec{\gamma} = \mu \begin{pmatrix} 2\frac{\partial v_x}{\partial x} & \frac{\partial v_x}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial x} & \frac{\partial v_x}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial x} \\ & 2\frac{\partial v_y}{\partial y} & \frac{\partial v_y}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial y} \\ & & 2\frac{\partial v_z}{\partial z} \end{pmatrix}$$

Ecuación de conservación de cantidad de movimiento, forma integral, aplicada a un volumen fluido:

$$\text{Segunda ley de Newton} \rightarrow \frac{d}{dt}(m\vec{v}) = \sum \vec{F}_{ext}$$

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega_f} \rho \vec{v} d\omega = \int_{\Sigma_f} -p \vec{n} d\sigma + \int_{\Sigma_f} \vec{n} \cdot \vec{\tau} d\sigma + \int_{\Omega_f} \rho \vec{f}_m d\omega$$

Variación de cantidad de movimiento en Ω_f

Resultante de las fuerzas másicas sobre Ω_f

Resultante de las fuerzas de viscosidad sobre las superficies que encierran a Ω_f

Resultante de las fuerzas de presión sobre las superficies que encierran a Ω_f

Forma integral, aplicada a un volumen de control:

Aplicando el teorema del transporte de Reynolds

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega_f(t)} \phi(\vec{x}, t) d\varpi = \frac{d}{dt} \int_{\Omega_c(t)} \phi(\vec{x}, t) d\varpi + \int_{\Sigma_c(t)} \phi(\vec{v} - \vec{v}_c) \cdot \vec{n} d\sigma$$

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega_f} \rho \vec{v} d\varpi = \frac{d}{dt} \int_{\Omega_c} \rho \vec{v} d\varpi + \int_{\Sigma_c} \rho \vec{v} (\vec{v} - \vec{v}_c) \cdot \vec{n} d\sigma \rightarrow$$

$$\rightarrow \frac{d}{dt} \int_{\Omega_c} \rho \vec{v} d\varpi + \int_{\Sigma_c} \rho \vec{v} (\vec{v} - \vec{v}_c) \cdot \vec{n} d\sigma = \int_{\Sigma_c} -p \vec{n} d\sigma + \int_{\Sigma_c} \vec{n} \cdot \vec{\tau} d\sigma + \int_{\Omega_c} \rho \vec{f}_m d\varpi$$

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega_c} \rho \vec{v} d\varpi + \int_{\Sigma_c} \rho \vec{v} (\vec{v} - \vec{v}_c) \cdot \vec{n} d\sigma = \int_{\Sigma_c} -p \vec{n} d\sigma + \int_{\Sigma_c} \vec{n} \cdot \vec{\tau} d\sigma + \int_{\Omega_c} \rho \vec{f}_m d\varpi$$

Variación de cantidad de movimiento en Ω_c

Transporte convectivo de cantidad de movimiento a través de las superficies que encierran a Ω_c

Resultante de las fuerzas másicas sobre Ω_c

Resultante de las fuerzas de viscosidad sobre las superficies que encierran a Ω_c

Resultante de las fuerzas de presión sobre las superficies que encierran a Ω_c

Forma diferencial:

Aplicando el teorema del transporte de Reynolds a un volumen fluido

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_{\Omega_f(t)} \phi(\vec{x}, t) d\omega &= \int_{\Omega_f(t)} \frac{\partial \phi}{\partial t} d\omega + \int_{\Sigma_f(t)} \phi \vec{v} \cdot \vec{n} d\sigma \\ \frac{d}{dt} \int_{\Omega_f} \rho \vec{v} d\omega &= \int_{\Sigma_f} -p \vec{n} d\sigma + \int_{\Sigma_f} \vec{n} \cdot \vec{\tau} d\sigma + \int_{\Omega_f} \rho \vec{f}_m d\omega \rightarrow \\ \rightarrow \int_{\Omega_f} \frac{\partial(\rho \vec{v})}{\partial t} d\omega + \int_{\Sigma_f} \rho \vec{v} \cdot \vec{n} d\sigma &= \int_{\Sigma_f} -p \vec{n} d\sigma + \int_{\Sigma_f} \vec{n} \cdot \vec{\tau} d\sigma + \int_{\Omega_f} \rho \vec{f}_m d\omega \rightarrow \\ \rightarrow \int_{\Omega_f} \frac{\partial(\rho \vec{v})}{\partial t} d\omega + \int_{\Omega_f} \nabla \cdot (\rho \vec{v} \vec{v}) d\omega &= \int_{\Omega_f} -\nabla p d\omega + \int_{\Omega_f} \nabla \cdot \vec{\tau} d\omega + \int_{\Omega_f} \rho \vec{f}_m d\omega \rightarrow \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \rightarrow \int_{d\Omega_f} \frac{\partial(\rho \vec{v})}{\partial t} d\omega + \int_{d\Omega_f} \nabla \cdot (\rho \vec{v} \vec{v}) d\omega &= \int_{d\Omega_f} -\nabla p d\omega + \int_{d\Omega_f} \nabla \cdot \vec{\tau} d\omega + \int_{d\Omega_f} \rho \vec{f}_m d\omega \rightarrow \\ \rightarrow \frac{\partial(\rho \vec{v})}{\partial t} d\Omega_f + \nabla \cdot (\rho \vec{v} \vec{v}) d\Omega_f &= -\nabla p d\Omega_f + \nabla \cdot \vec{\tau} d\Omega_f + \rho \vec{f}_m d\Omega_f \rightarrow \\ \rightarrow \frac{\partial(\rho \vec{v})}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \vec{v} \vec{v}) &= -\nabla p + \nabla \cdot \vec{\tau} + \rho \vec{f}_m \rightarrow \\ \rightarrow \cancel{\frac{\partial \rho}{\partial t}} \vec{v} + \rho \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + [\cancel{\nabla \cdot (\rho \vec{v})}] \vec{v} + \rho \vec{v} \cdot \nabla \vec{v} &= \rho \frac{D\vec{v}}{Dt} = -\nabla p + \nabla \cdot \vec{\tau} + \rho \vec{f}_m \end{aligned}$$



Viscosidad dinámica:

$$\mu \text{ (Pa.s)}$$

$$1 \text{ cp} = 10^{-3} \text{ Pa.s}$$

$$\mu_{\text{water}} = 1 \text{ cp}$$

$$\mu_{\text{air}} = 1.8 \cdot 10^{-5} \text{ Pa.s}$$

Viscosidad cinemática:

$$\nu = \frac{\mu}{\rho} \text{ (m}^2/\text{s)}$$

$$1 \text{ cSt} = 10^{-6} \text{ (m}^2/\text{s)}$$

$$\rho_{\text{water}} = 1000 \text{ (kg/m}^3)$$

$$\rho_{\text{air}} \sim 1 \text{ (kg/m}^3)$$



MECÁNICA DE FLUIDOS

Elena de Castro Hernández.

1

Dpto. Ing. Aeroespacial y Mecánica de Fluidos. Universidad de Sevilla.



Tema 3 Fluidoestática

(2 clases, 5 problemas, 1 charlas)

Elena de Castro Hernández.

2

Dpto. Ing. Aeroespacial y Mecánica de Fluidos. Universidad de Sevilla.

Fluidoestática:

El fluido se encuentra en reposo respecto a **algún** sistema de referencia ($\mathbf{v}=0$).

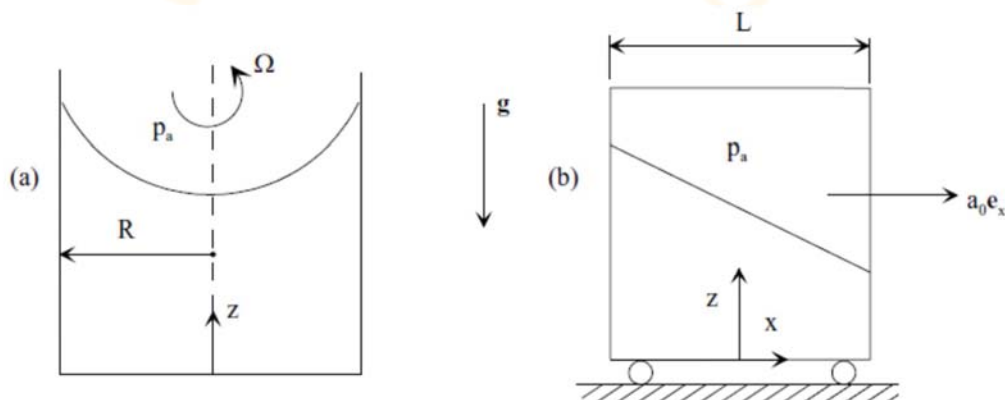


Figura 4.5: Equilibrio mecánico de un líquido en un recipiente en movimiento: (a) de rotación y (b) uniformemente acelerado.

Continuidad:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \vec{v}) = 0 \rightarrow \rho = \rho(\vec{x}), \text{ a lo sumo.}$$

Cantidad de movimiento:

$$\rho \frac{D\vec{v}}{Dt} = -\nabla p + \nabla \cdot \vec{\tau} + \rho \vec{f}_m \rightarrow -\nabla p + \rho \vec{f}_m = 0 \rightarrow$$

donde:

$$\vec{f}_m = \vec{g} - \left(\vec{a}_o + \frac{d\vec{\Omega}}{dt} \wedge \vec{x} + \vec{\Omega} \wedge \vec{\Omega} \wedge \vec{x} + 2\vec{\Omega} \wedge \vec{v} \right)$$

$$-\nabla p + \rho \vec{f}_m = 0 \rightarrow \rho \vec{f}_m \text{ deriva de un potencial.}$$

Como $\rho = \rho(\vec{x}) \rightarrow \vec{f}_m = -\nabla U$, U potencial de fuerzas másicas.

$$\rightarrow \nabla p + \rho \nabla U = 0$$

donde:

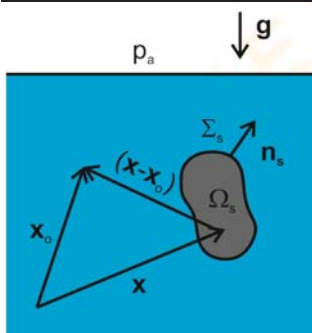
$$U = -\vec{g} \cdot \vec{x} + \vec{a}_o \cdot \vec{x} - \frac{1}{2} (\vec{\Omega} \wedge \vec{x})^2$$

Condición necesaria para tener fluidoestática: $\frac{d\vec{\Omega}}{dt} = 0$

Hidrostática

$$\text{Hidrostática} \equiv \text{líquido} \rightarrow \rho = cte \rightarrow \nabla(p + \rho U) = 0 \rightarrow p + \rho U = c(t)$$

Fuerzas y momentos sobre cuerpos sumergidos

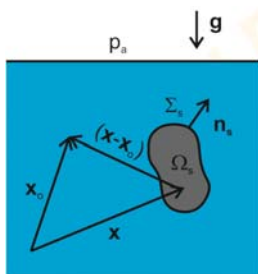


Empuje de Arquímedes: Un cuerpo total o parcialmente sumergido en un fluido en reposo experimenta un empuje vertical hacia arriba igual al peso del fluido desalojado.

$$\begin{aligned} \vec{F}_{f \rightarrow s} &= \int_{\Sigma_s} -p \vec{n}_s d\sigma + \int_{\Sigma_c} \vec{n}_s \cdot \vec{t} d\sigma = \int_{\Omega_s} -\nabla p d\varpi = \\ &= \int_{\Omega_s} -\rho \vec{f}_m d\varpi = -\rho \vec{f}_m \Omega_s = \rho g \Omega_s \vec{e}_z = \vec{E} \end{aligned}$$

Si $\rho \vec{f}_m = cte$ Si $\vec{f}_m = \vec{g}$

Fuerzas y momentos sobre cuerpos sumergidos

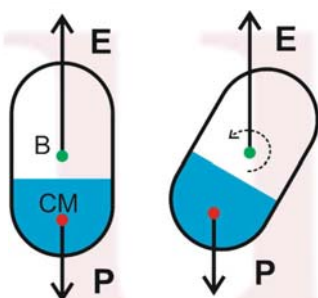


$$\begin{aligned}\vec{M}_{f \rightarrow s} &= \int_{\Sigma_s} (\vec{x} - \vec{x}_0) \wedge (-p \vec{n}_s) d\sigma = \int_{\Sigma_s} \vec{n}_s \wedge p (\vec{x} - \vec{x}_0) d\sigma = \int_{\Omega_s} \nabla \wedge [p (\vec{x} - \vec{x}_0)] d\varpi = \\ &= \int_{\Omega_s} \nabla p \wedge (\vec{x} - \vec{x}_0) d\varpi = \int_{\Omega_s} (\vec{x} - \vec{x}_0) \wedge (-\nabla p) d\varpi = \int_{\Omega_s} (\vec{x} - \vec{x}_0) \wedge (-\rho \vec{f}_m) d\varpi = \\ &= \int_{\Omega_s} (\vec{x} - \vec{x}_0) d\varpi \wedge (-\rho \vec{f}_m) = (\vec{x}_B - \vec{x}_0) \Omega_s \wedge -\rho \vec{f}_m = (\vec{x}_B - \vec{x}_0) \wedge \vec{E} \quad \text{Si } \rho \vec{f}_m = cte \\ &\quad \text{Si } \vec{f}_m = \vec{g}\end{aligned}$$

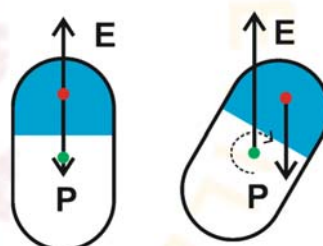
$$\vec{x}_{CM} = \frac{\int \rho \vec{x} d\varpi}{M}, \quad \vec{x}_B = \frac{\int \vec{x} d\varpi}{\Omega} \rightarrow \text{Si } \rho = cte \rightarrow \vec{x}_{CM} = \vec{x}_B$$

$$\text{Fluidoestática} \rightarrow \sum \vec{F}_{ext} = 0 \text{ y } \sum \vec{M}_{ext} = 0 \rightarrow (\vec{x}_{CM} - \vec{x}_B) \parallel \vec{g}$$

Par restaurador



Par perturbador



Atmósfera estándar

Fluidoestática de gases:

$$\rightarrow \vec{v} = 0 \rightarrow -\nabla p + \rho \vec{f}_m = 0$$

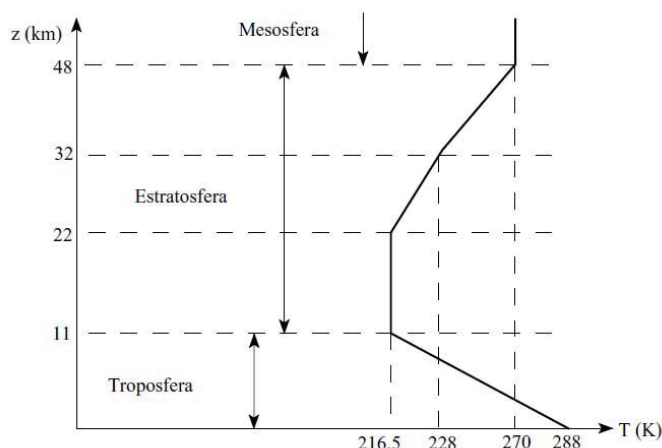
Hipótesis:

1) Gas ideal bajo la acción de las fuerzas de gravedad:

$$p = \rho R_g T \quad \text{y} \quad \vec{f}_m = \vec{g}$$

2) $T(z)$, $p(z)$ y $\rho(z)$

3) En troposfera $T(z) = T_o - \alpha z$, $T_o = 288K$, $\alpha = 6.5K/km$ y $p_o = 10^5 Pa$



$$\rightarrow -\frac{\partial p}{\partial z} - \rho g = 0 \rightarrow \frac{R_g T}{p} \frac{\partial p}{\partial z} = -g \rightarrow \int_{p_o}^p \frac{dp}{p} = \int_0^z \frac{-g dz}{R_g (T_o - \alpha z)} \rightarrow$$

$$\rightarrow \ln \frac{p}{p_o} = \ln \left(\frac{T_o - \alpha z}{T_o} \right)^{g/R_g \alpha} \rightarrow \frac{p}{p_o} = \left(\frac{T_o - \alpha z}{T_o} \right)^{g/R_g \alpha} \quad \text{y} \quad \frac{\rho}{\rho_o} = \left(\frac{T_o - \alpha z}{T_o} \right)^{(g/R_g \alpha) - 1}$$

Condición necesaria para atmósfera estable:

$$\rho < \rho_o \rightarrow (g/R_g \alpha) - 1 > 0 \rightarrow \alpha < \frac{g}{R_g} \approx 35 \frac{K}{km}$$

$\alpha \downarrow \rightarrow$ atmósfera más estable.

Inversión térmica y estratosfera $\alpha < 0 \rightarrow$ contaminantes peligrosos.

Porqué troposfera no es estable? $\vec{v} \neq 0$ y $p, \rho, T = f(x, y, z)$



MECÁNICA DE FLUIDOS

Elena de Castro Hernández.

1

Dpto. Ing. Aeroespacial y Mecánica de Fluidos. Universidad de Sevilla.



Tema 4

Movimiento de líquidos ideales

(2 clases, 6 problemas)

Elena de Castro Hernández.

2

Dpto. Ing. Aeroespacial y Mecánica de Fluidos. Universidad de Sevilla.

Ecuaciones de Navier-Stokes (por ahora):

Continuidad:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \vec{v}) = 0$$

Cantidad de movimiento:

$$\rho \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \rho \vec{v} \cdot \nabla \vec{v} = -\nabla p + \nabla \cdot \vec{\tau} + \rho \vec{f}_m$$

4 Ecuaciones

5 Incógnitas: p, $\vec{v}$ y ρ

- ❖ Si líquido $\rightarrow \rho = \text{cte} \rightarrow$ Problema resuelto. Problemas mecánico y térmico desacoplados.
- ❖ Si gas $\rightarrow$ Ecuación energía $\rightarrow$ Incógnita adicional: T $\rightarrow$ Ecuación de estado.

Problema complejo, hay que simplificar.

Ecuaciones de Navier-Stokes para líquidos (por ahora):

Continuidad:

$$\nabla \cdot \vec{v} = 0$$

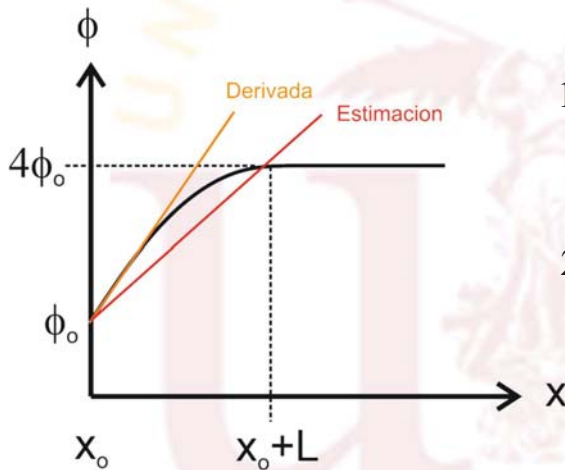
Cantidad de movimiento:

$$\rho \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \rho \vec{v} \cdot \nabla \vec{v} = -\nabla p + \mu \nabla^2 \vec{v} + \rho \vec{f}_m$$

Sigue siendo un problema complejo, hay que simplificar más.

Estimación de órdenes de magnitud

$$\left. \frac{d\phi}{dx} \right|_{x_0} \approx \frac{\Delta\phi}{\Delta x} \quad \text{con } \Delta x \text{ tal que } \Delta\phi \text{ varíe del orden de ella misma en } \Delta x.$$

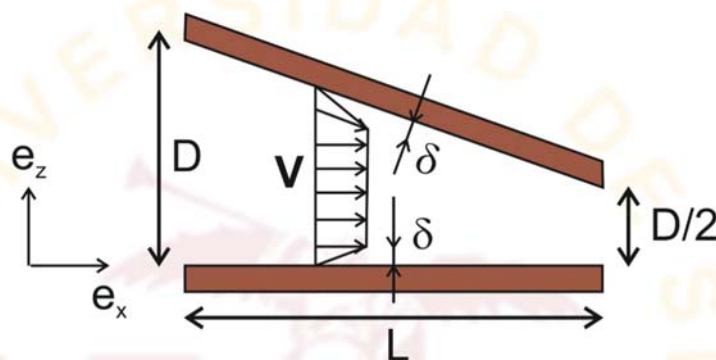


$$1) \left. \frac{d\phi}{dx} \right|_{x_0} \approx \frac{3\phi_0}{L} \approx \frac{\phi_0}{L}$$

$$2) \left. \frac{d^2\phi}{dx^2} \right|_{x_0} = \frac{d}{dx} \left(\left. \frac{d\phi}{dx} \right|_{x_0} \right) \approx \frac{3\phi_0}{L^2} \approx \frac{\phi_0}{L^2} \neq \frac{\phi_0^2}{L^2} !!!$$

$$\vec{V} = u\vec{e}_x + v\vec{e}_z$$

$$D \ll L$$



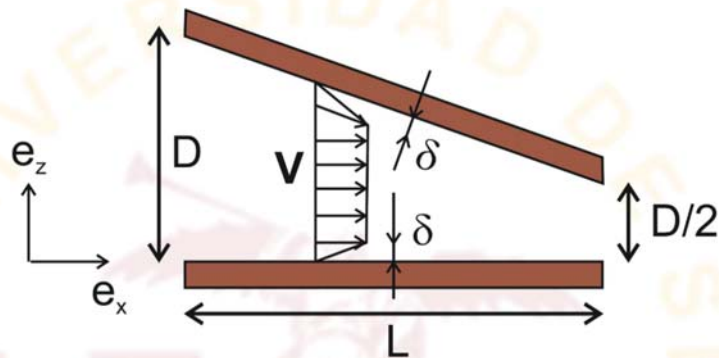
$$1) \frac{\partial u}{\partial x} \approx \frac{u_0}{L}, \text{ pasa de } u_0 \text{ a } 2u_0 \text{ en } L.$$

$$2) \frac{\partial u}{\partial z} \approx \frac{u_0}{\delta}, \text{ pasa de } 0 \text{ a } u_0 \text{ en } \delta.$$

$$3) \frac{\partial v}{\partial z} \approx \frac{v_0}{D}, \text{ pasa de } 0 \text{ (pared inferior) a } v_0 \text{ en } D \text{ (pared superior).}$$

$$\vec{V} = u\vec{e}_x + v\vec{e}_z$$

$$D \ll L$$



❖ Ecuación de continuidad para líquidos:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial z} = 0 \rightarrow \frac{u_o}{L} \sim \frac{v_o}{D} \rightarrow v_o \sim u_o \frac{D}{L} \ll u_o \equiv \text{Casi - unidireccional}$$

Cantidad de movimiento para líquidos: $\rho \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \rho \vec{v} \cdot \nabla \vec{v} = -\nabla p + \mu \nabla^2 \vec{v} + \rho \vec{f}_m$

$$\frac{\rho \vec{v} \cdot \nabla \vec{v}}{\mu \nabla^2 \vec{v}} \sim \frac{\rho u_o u_o / D}{\mu u_o / D^2} = \frac{\rho u_o D}{\mu} = \text{Re}_D \quad \left\{ \begin{array}{l} \downarrow \downarrow \rightarrow \text{Laminar} \\ \uparrow \uparrow \rightarrow \text{Turbulento} \end{array} \right.$$

Número de Reynolds (Fzas Inercia/Fzas viscosas)

Cantidad de movimiento para líquidos: $\rho \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \rho \vec{v} \cdot \nabla \vec{v} = -\nabla p + \mu \nabla^2 \vec{v} + \rho \vec{f}_m$

$$\frac{\rho \vec{v} \cdot \nabla \vec{v}}{\rho \vec{f}_m} \sim \frac{\rho u_o u_o / D}{\rho g} = \frac{u_o^2}{Dg} = Fr$$

Número de Froude $\gg 1 \rightarrow \vec{f}_m \approx 0$
(Fzas Inercia/Fzas másicas)

Cantidad de movimiento para líquidos: $\rho \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \rho \vec{v} \cdot \nabla \vec{v} = -\nabla p + \mu \nabla^2 \vec{v} + \rho \vec{f}_m$

$$\frac{\rho \frac{\partial \vec{v}}{\partial t}}{\rho \vec{v} \cdot \nabla \vec{v}} \sim \frac{\rho u_o / t_o}{\rho u_o u_o / D} = \frac{t_R}{t_o} = St$$

Número de Strouhal $\ll 1 \rightarrow$ cuasiestacionario $\rightarrow$
(t residencia/t característico)
 $\rightarrow \partial / \partial t \approx 0$ pero $f(t)$

Cantidad movimiento para líquidos:

$$\rho \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \rho \vec{v} \cdot \nabla \vec{v} = -\nabla p + \mu \nabla^2 \vec{v} + \rho \vec{f}_m$$

❖ Si además $Re \gg 1$:

$$\rho \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \rho \vec{v} \cdot \nabla \vec{v} = -\nabla p + \rho \vec{f}_m$$

❖ Si además $\vec{f}_m = -\nabla U$:

$$\rho \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \rho \vec{v} \cdot \nabla \vec{v} = -\nabla (p + \rho U) \quad \text{donde} \quad \rho \vec{v} \cdot \nabla \vec{v} = \rho \nabla \left(\frac{v^2}{2} \right) - \rho \vec{v} \wedge (\nabla \wedge \vec{v}) \rightarrow$$

$$\rightarrow \rho \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \rho \nabla \left(\frac{v^2}{2} \right) - \rho \vec{v} \wedge (\nabla \wedge \vec{v}) + \nabla (p + \rho U) = 0$$

❖ Si proyectamos sobre la línea de corriente de vector unitario $\vec{e}_s$ tal que $\vec{v} \cdot \vec{e}_s = v$

$$\rho \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} \cdot \vec{e}_s + \rho \nabla \left(\frac{v^2}{2} \right) \cdot \vec{e}_s - \rho \vec{v} \wedge (\nabla \wedge \vec{v}) \cdot \vec{e}_s + \nabla (p + \rho U) \cdot \vec{e}_s = 0 \rightarrow$$

$$\rightarrow \rho \frac{\partial v}{\partial t} + \rho \frac{\partial}{\partial s} \left(\frac{v^2}{2} \right) + \frac{\partial}{\partial s} (p + \rho U) = \rho \frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial s} \left(p + \rho \frac{v^2}{2} + \rho U \right) = 0$$

Si $\left\{ \begin{array}{l} \text{Líquido} \\ Re \gg 1 \\ \vec{f}_m = -\nabla U \end{array} \right. \rightarrow \boxed{\rho \frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial s} \left(p + \rho \frac{v^2}{2} + \rho U \right) = 0}$ Ecuación Euler-Bernoulli general

$St \ll 1$ $D \text{ cte}$ $Fr \gg 1$



MECÁNICA DE FLUIDOS

Elena de Castro Hernández.

1

Dpto. Ing. Aeroespacial y Mecánica de Fluidos. Universidad de Sevilla.



Tema 5

Análisis dimensional y semejanza física

(2 clases, 4 problemas)

Elena de Castro Hernández.

2

Dpto. Ing. Aeroespacial y Mecánica de Fluidos. Universidad de Sevilla.



Análisis dimensional

El **análisis dimensional** se basa en el principio de que las relaciones funcionales entre las variables que intervienen en un fenómeno físico dado son independientes del sistema de unidades elegido. Permite expresar toda la información contenida en las relaciones entre las variables físicas de un problema en términos de un número menos de variables adimensionales obtenidas a partir de las originales. Representa enormes ventajas desde el punto de vista analítico y experimental.

Una cantidad es **dimensional** si su valor numérico depende de la escala usada en su medida: longitud, tiempo, fuerza, etc. Una cantidad es **adimensional** si su valor numérico es independiente del sistema de unidades de medida: Reynolds, Strouhal, Froude, etc.

Un conjunto de cantidades físicas son **dimensionalmente dependientes**, si las dimensiones físicas de una de ellas se pueden expresar mediante alguna combinación de las restantes; en caso contrario son **dimensionalmente independientes**.



$[p] = [\rho][v]^2$ p , ρ y v dimensionalmente dependientes.

$[\mu] = [\rho][v][L]$ μ , ρ y L dimensionalmente independientes.

Problema geométrico: $[L] \rightarrow N - 1$ variables

Problema cinemático: $[L]$ y $[T] \rightarrow N - 2$ variables

Problema dinámico: $[L]$, $[T]$ y $[M] \rightarrow N - 3$ variables

Problema térmico: $[L]$, $[T]$, $[M]$ y $[\theta] \rightarrow N - 4$ variables

Si $\Sigma(\mathbf{x}, l, l_1, \dots, l_n)$ es la ecuación o conjunto de ecuaciones que definen la superficie de un objeto de longitudes características : $l, l_1, \dots, l_n$, dos objetos definidos por la misma ecuación o conjunto de ecuaciones y con valores iguales de los cocientes: $l_1/l \dots, l_n/l$, se denominan **geométricamente semejantes**.

Ejemplo:

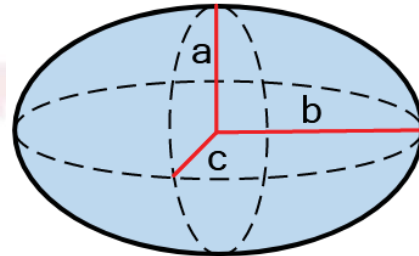
Los dos elipsoides

$$\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 + \left(\frac{z}{c}\right)^2 = 1$$

y

$$\left(\frac{x}{a'}\right)^2 + \left(\frac{y}{b'}\right)^2 + \left(\frac{z}{c'}\right)^2 = 1$$

son geométricamente semejantes si se cumple: $\frac{a}{c} = \frac{a'}{c'}$ y $\frac{b}{c} = \frac{b'}{c'}$



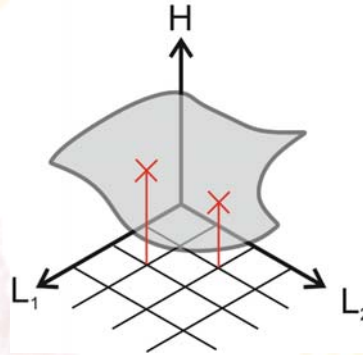
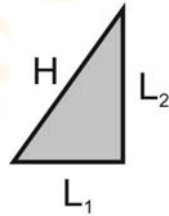
Si la geometría es semejante y están gobernados por las mismas ecuaciones, condiciones de contorno y condiciones iniciales, ambos problemas son **físicamente semejantes**, lo que permite trasladar la solución de uno de ellos al otro.

La semejanza entre dos problemas fluidomecánicos requiere:

- 1) Igualdad de las ecuaciones $\longrightarrow$ Igualdad de los parámetros adimensionales.
- 2) Igualdad de las C.C y C.I $\longrightarrow$ Semejanza geométrica.

Teorema II o de Vaschy-Buckingham mediante ejemplos

Ejemplo: Teorema de Pitágoras.



Para calcular $H=f(L_1, L_2)$ necesitamos $10L_1 \times 10L_2 = 100$ experimentos.

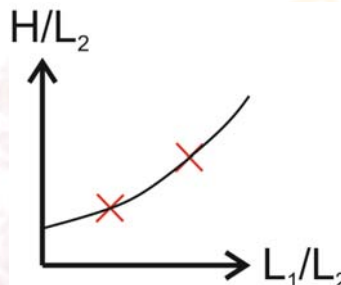
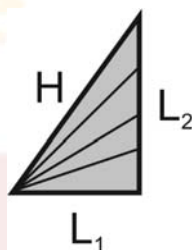
Aplicamos el teorema II.

Al ser un problema geométrico se adimensionaliza con una $[L] = L_2$.

$$H = f(L_1, L_2) \rightarrow \frac{H}{L_2} = \frac{1}{L_2} f(L_1, L_2) = \frac{1}{L_2} f\left(\frac{L_1}{L_2} L_2, L_2\right) = g\left(\frac{L_1}{L_2}, L_2\right)$$

$$\frac{H}{L_2} \text{ adimensional, } \frac{L_1}{L_2} \text{ adimensional y } L_2 \text{ dimensional} \rightarrow \boxed{\frac{H}{L_2} = g\left(\frac{L_1}{L_2}\right)}$$

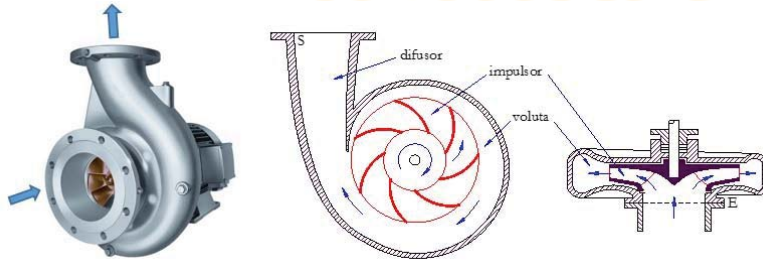
Necesitamos $10 \frac{L_1}{L_2}$ experimentos para obtener la misma información.



Como conocemos el teorema de Pitágoras podemos comprobar la validez del teorema Pi

$$H^2 = L_1^2 + L_2^2 \rightarrow \left(\frac{H}{L_2}\right)^2 = \frac{1}{L_2^2} (L_1^2 + L_2^2) = \left(\frac{L_1}{L_2}\right)^2 + 1$$

Ejemplo: Cálculo de la altura proporcionada por una bomba centrífuga.



$$gH = f(\rho, \mu, Q, \omega, D, D_i, b, b_i, \alpha_i, \beta_i) \rightarrow$$

$$[M] \uparrow \quad [T] \uparrow \quad [L] \uparrow$$

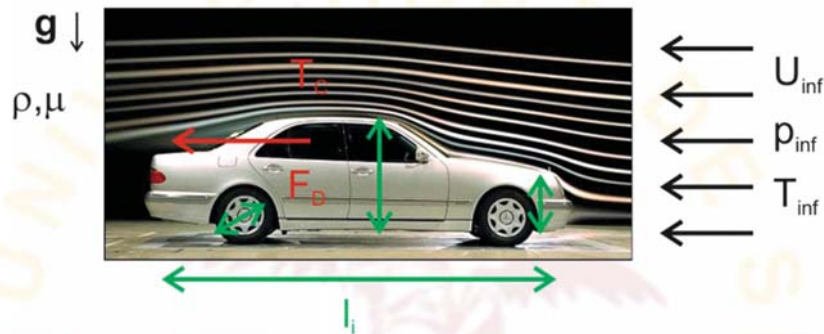
$$\rightarrow \frac{gH}{\omega^2 D^2} = f\left(\frac{\rho}{\mu}, \text{Re}, \frac{Q}{\omega D^3}, \frac{D_i}{D}, \frac{b}{D}, \frac{b_i}{D}, \alpha_i, \beta_i\right) \rightarrow$$

$$\rightarrow \frac{gH}{\omega^2 D^2} = f\left(\text{Re}, \frac{Q}{\omega D^3}, \frac{D_i}{D}, \frac{b}{D}, \frac{b_i}{D}, \alpha_i, \beta_i\right)$$

Si máquinas geoméricamente semejantes y $\text{Re} \gg 1$:

$$\Pi_H = \frac{gH}{\omega^2 D^2} = f\left(\Pi_Q = \frac{Q}{\omega D^3}\right)$$

Ejemplo: Cálculo de la fuerza de resistencia aerodinámica sobre un coche.



$$F_D = f(\rho, \mu, g, U_{\text{inf}}, p_{\text{inf}}, T_{\text{inf}}, T_c, l, l_i) \rightarrow$$

$[M] \uparrow \quad [T] \uparrow \quad [\theta] \uparrow \quad [L] \uparrow$

$$\rightarrow \frac{F_D}{\rho U_{\text{inf}}^2 l^2} = f\left(\rho, \text{Re}, \text{Fr}, U_{\text{inf}}, \frac{p_{\text{inf}}}{\rho U_{\text{inf}}^2}, \frac{T_{\text{inf}}}{T_c}, \frac{T_c}{T_{\text{inf}}}, \frac{l}{l_i}, \frac{l_i}{l}\right) \rightarrow$$

$$\rightarrow \frac{F_D}{\rho U_{\text{inf}}^2 l^2} = f\left(\text{Re}, \text{Fr}, \frac{p_{\text{inf}}}{\rho U_{\text{inf}}^2}, \frac{T_{\text{inf}}}{T_c}, \frac{l}{l_i}\right)$$

Si coches geoméricamente semejantes, variaciones de presión y temperatura despreciables y $\text{Fr} \gg 1$:

$$c_D = \frac{F_D}{\frac{1}{2} \rho U_{\text{inf}}^2 A_f} = f(\text{Re})$$

También pueden aparecer otros números ya estudiados como St o incluso números adimensionales introducidos por nosotros que tengan sentido físico.



MECÁNICA DE FLUIDOS

Elena de Castro Hernández.

1

Dpto. Ing. Aeroespacial y Mecánica de Fluidos. Universidad de Sevilla.



Tema 6

Movimiento estacionario y unidireccional de líquidos

(3 clases, 6 problemas, 1 vídeo)

Elena de Castro Hernández.

2

Dpto. Ing. Aeroespacial y Mecánica de Fluidos. Universidad de Sevilla.

Ecuaciones generales

1) Estacionario $\longrightarrow \frac{\partial}{\partial t} = 0$

2) Unidireccional $\longrightarrow \vec{v} = v_x \vec{e}_x, \quad v_y = v_z = 0$

3) Líquido y continuidad $\longrightarrow \nabla \cdot \vec{v} = 0 \rightarrow \frac{\partial v_x}{\partial x} = 0 \rightarrow v_x = v_x(y, z)$

$$\vec{v} = v_x(y, z) \vec{e}_x$$

4) Si además $\vec{f}_m = -\nabla U$ la ecuación de cantidad de movimiento queda:

$$\rho \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \rho \vec{v} \cdot \nabla \vec{v} = -\nabla(p + \rho U) + \mu \nabla^2 \vec{v} \rightarrow$$

$$\rho \vec{v} \cdot \nabla \vec{v} \Big|_x = \rho v_x \vec{e}_x \cdot \left(\frac{\partial v_x}{\partial x} \vec{e}_x + \frac{\partial v_x}{\partial y} \vec{e}_y + \frac{\partial v_x}{\partial z} \vec{e}_z \right) = 0$$

$$\rightarrow 0 = -\nabla(p + \rho U) + \mu \nabla^2 \vec{v} \rightarrow \begin{cases} 0 = -\frac{\partial(p + \rho U)}{\partial x} + \mu \left(\frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial z^2} \right) \\ 0 = \frac{\partial(p + \rho U)}{\partial y} = \frac{\partial(p + \rho U)}{\partial z} \rightarrow \end{cases}$$

$$\rightarrow p + \rho U = f(x) \rightarrow \frac{\partial(p + \rho U)}{\partial x} = f(x)$$

$$v_x = f(y, z) \rightarrow \mu \left(\frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial z^2} \right) = f(y, z)$$

$$\frac{\partial(p + \rho U)}{\partial x} = \mu \left(\frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial z^2} \right) = cte$$

Movimiento estacionario y unidireccional de líquidos:
Subconjunto de movimiento de líquidos con fuerzas de viscosidad dominantes.

$$\vec{v} = v_x(y, z) \vec{e}_x$$

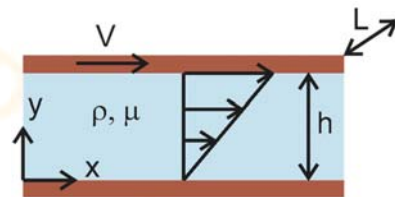
$$\frac{\partial(p + \rho U)}{\partial x} = \mu \left(\frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial z^2} \right) = cte$$

Corriente de Couette

Bidimensional $\longrightarrow \neq f(z)$

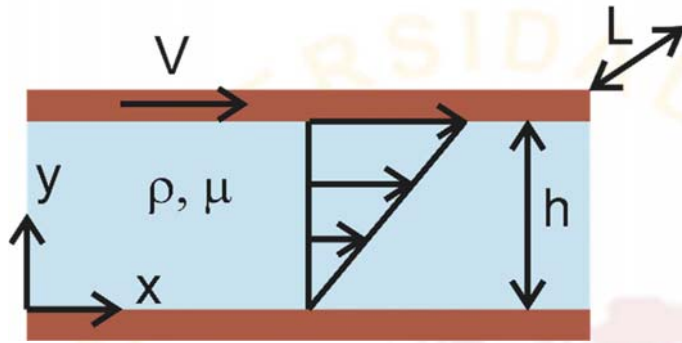
$$\frac{\partial(p + \rho U)}{\partial x} = 0 \rightarrow \mu \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} = 0 \rightarrow v_x = ay + b$$

$$CC \begin{cases} v_x(y=0) = 0 \rightarrow b = 0 \\ v_x(y=h) = V \rightarrow a = \frac{V}{h} \end{cases} \longrightarrow \vec{v}_C = \frac{V}{h} y \vec{e}_x$$



$$Q = \int_{\Sigma} \vec{v} \cdot \vec{n} d\sigma = \int_0^L dz \int_0^h v_x dy = qL$$

$$q = \int_0^h v_x dy = \int_0^h \frac{V}{h} y dy = \frac{V}{h} \left(\frac{y^2}{2} \right) \Big|_0^h = \frac{Vh}{2} = q_C$$



$$\vec{v}_C = \frac{V}{h} y \vec{e}_x$$

$$q_C = \frac{Vh}{2}$$

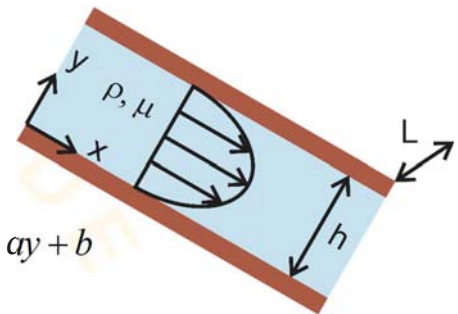
Corriente bidimensional de Hagen-Poiseuille

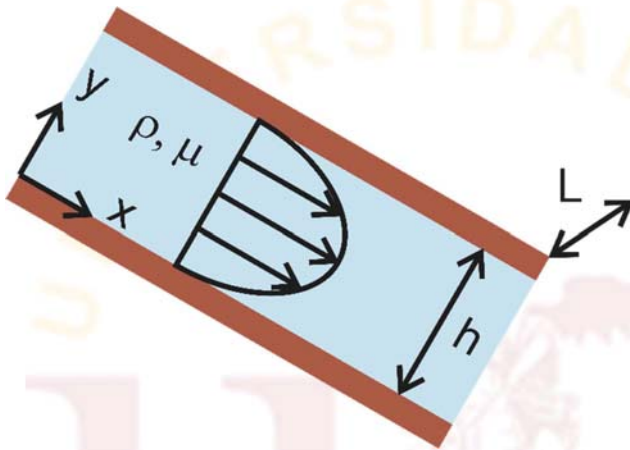
Bidimensional $\longrightarrow \neq f(z)$

$$\frac{\partial(p + \rho U)}{\partial x} = \mu \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} = cte \longrightarrow v_x = \frac{1}{\mu} \frac{\partial(p + \rho U)}{\partial x} \frac{y^2}{2} + ay + b$$

$$CC \begin{cases} v_x(y=0) = 0 \rightarrow b = 0 \\ v_x(y=h) = 0 \rightarrow a = -\frac{1}{\mu} \frac{\partial(p + \rho U)}{\partial x} \frac{h}{2} \end{cases} \longrightarrow \vec{v}_P = -\frac{1}{2\mu} \frac{\partial(p + \rho U)}{\partial x} y(h-y) \vec{e}_x$$

$$q = \int_0^h v_x dy = -\frac{1}{2\mu} \frac{\partial(p + \rho U)}{\partial x} \left(h \frac{y^2}{2} - \frac{y^3}{3} \right) \Big|_0^h = -\frac{h^3}{12\mu} \frac{\partial(p + \rho U)}{\partial x} = q_P$$





$$\vec{v}_p = -\frac{1}{2\mu} \frac{\partial(p + \rho U)}{\partial x} y(h-y) \vec{e}_x$$

$$q_p = -\frac{h^3}{12\mu} \frac{\partial(p + \rho U)}{\partial x}$$

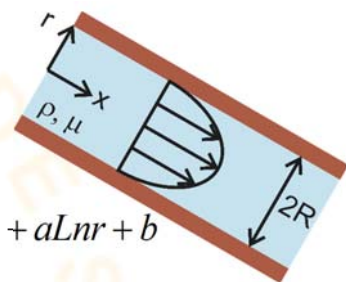
Corriente de Hagen-Poiseuille en un conducto de sección circular constante

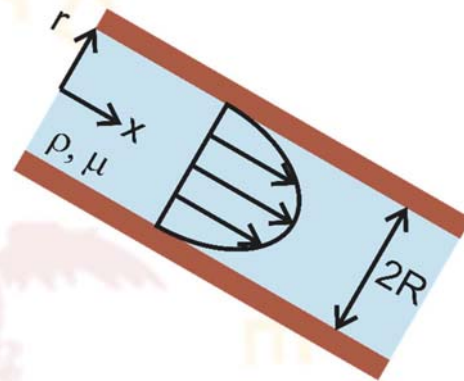
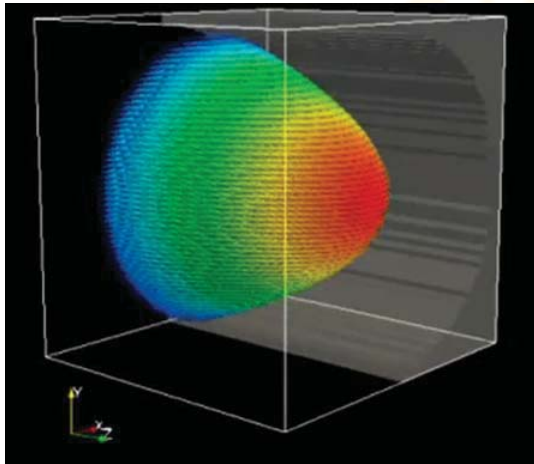
Axialsimétrico $\longrightarrow \neq f(\theta)$

$$\frac{\partial(p + \rho U)}{\partial x} = \frac{\mu}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial v_x}{\partial r} \right) = cte \longrightarrow v_x = \frac{1}{4\mu} \frac{\partial(p + \rho U)}{\partial x} r^2 + a \ln r + b$$

$$CC \begin{cases} v_x(r=0) \neq \infty \rightarrow a=0 \\ v_x(r=R) = 0 \rightarrow b = \frac{-1}{4\mu} \frac{\partial(p + \rho U)}{\partial x} R^2 \end{cases} \longrightarrow \vec{v}_{HP} = -\frac{1}{4\mu} \frac{\partial(p + \rho U)}{\partial x} (R^2 - r^2) \vec{e}_x$$

$$Q = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^R r v_x dr = -\frac{2\pi}{4\mu} \frac{\partial(p + \rho U)}{\partial x} \left(R^2 \frac{r^2}{2} - \frac{r^4}{4} \right) \Big|_0^R = -\frac{\pi D^4}{128\mu} \frac{\partial(p + \rho U)}{\partial x} = Q_{HP}$$





$$\vec{v}_{HP} = -\frac{1}{4\mu} \frac{\partial(p + \rho U)}{\partial x} (R^2 - r^2) \vec{e}_x$$

$$Q_{HP} = -\frac{\pi D^4}{128\mu} \frac{\partial(p + \rho U)}{\partial x}$$

Esfuerzo en la pared $\vec{\tau}_p = \vec{F}_{f \rightarrow s} / L_x L_y$

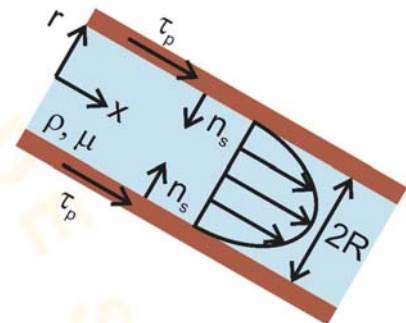
$$\vec{\tau}_p = \vec{n}_s \cdot \vec{\bar{\tau}}$$

$$\vec{n}_s = n_y \vec{e}_y + n_z \vec{e}_z$$

$$\vec{v} = v_x(y, z) \vec{e}_x \rightarrow \vec{\bar{\tau}} = \begin{pmatrix} \tau'_{xx} & \tau'_{xy} & \tau'_{xz} \\ \tau'_{xy} & \tau'_{yy} & \tau'_{yz} \\ \tau'_{xz} & \tau'_{yz} & \tau'_{zz} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \tau'_{xy} & \tau'_{xz} \\ \tau'_{xy} & 0 & 0 \\ \tau'_{xz} & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\vec{\tau}_p = (n_y \tau'_{xy} + n_z \tau'_{xz}) \vec{e}_x = \left[n_y \mu \left(\frac{\partial v_x}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial x} \right) + n_z \mu \left(\frac{\partial v_x}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial x} \right) \right] \vec{e}_x =$$

$$= (\vec{n}_s \cdot \mu \nabla v_x) \vec{e}_x = \vec{\tau}_p$$



Esfuerzo en la pared corriente de Couette

$$\vec{v}_C = \frac{V}{h} y \vec{e}_x$$

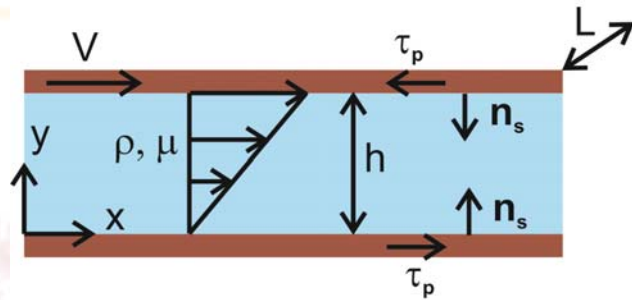
$$\nabla v_x = \frac{V}{h} \vec{e}_y$$

Sobre la pared $y=0$:

$$\vec{\tau}_p = (\vec{n}_s \cdot \mu \nabla v_x) \vec{e}_x = \left(\vec{e}_y \cdot \mu \frac{V}{h} \vec{e}_y \right) \vec{e}_x = \mu \frac{V}{h} \vec{e}_x \quad (> 0)$$

Sobre la pared $y=h$:

$$\vec{\tau}_p = (\vec{n}_s \cdot \mu \nabla v_x) \vec{e}_x = \left(-\vec{e}_y \cdot \mu \frac{V}{h} \vec{e}_y \right) \vec{e}_x = -\mu \frac{V}{h} \vec{e}_x \quad (< 0)$$



Esfuerzo en la pared corriente bidimensional de Hagen-Poiseuille

$$\vec{v}_p = -\frac{1}{2\mu} \frac{\partial(p + \rho U)}{\partial x} y(h-y) \vec{e}_x$$

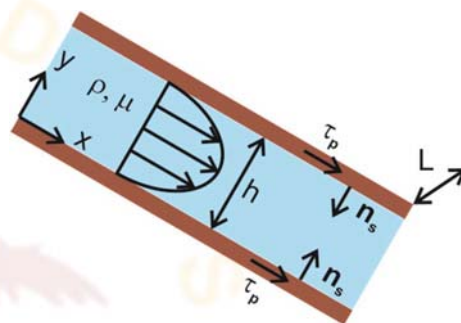
$$\nabla v_x = -\frac{1}{2\mu} \frac{\partial(p + \rho U)}{\partial x} (h-2y) \vec{e}_y$$

Sobre la pared $y=0$:

$$\vec{\tau}_p = (\vec{n}_s \cdot \mu \nabla v_x) \vec{e}_x = \left(\vec{e}_y \cdot \mu \frac{-1}{2\mu} \frac{\partial(p + \rho U)}{\partial x} h \vec{e}_y \right) \vec{e}_x = -\frac{1}{2} \frac{\partial(p + \rho U)}{\partial x} h \vec{e}_x \quad (> 0)$$

Sobre la pared $y=h$:

$$\vec{\tau}_p = (\vec{n}_s \cdot \mu \nabla v_x) \vec{e}_x = \left(-\vec{e}_y \cdot \mu \frac{-1}{2\mu} \frac{\partial(p + \rho U)}{\partial x} (-h) \vec{e}_y \right) \vec{e}_x = -\frac{1}{2} \frac{\partial(p + \rho U)}{\partial x} h \vec{e}_x \quad (> 0)$$



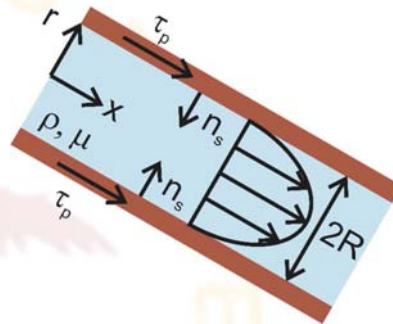
Esfuerzo en la pared corriente de Hagen-Poiseuille en un conducto de sección circular constante

$$\vec{v}_{HP} = -\frac{1}{4\mu} \frac{\partial(p + \rho U)}{\partial x} (R^2 - r^2) \vec{e}_x$$

$$\nabla v_x = \frac{1}{2\mu} \frac{\partial(p + \rho U)}{\partial x} r \vec{e}_r$$

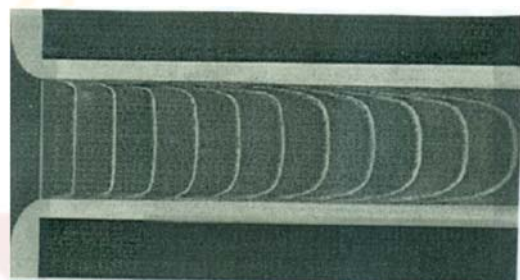
Sobre la pared $r=R$:

$$\vec{\tau}_p = (\vec{n}_s \cdot \mu \nabla v_x) \vec{e}_x = \left(-\vec{e}_r \cdot \mu \frac{1}{2\mu} \frac{\partial(p + \rho U)}{\partial x} R \vec{e}_r \right) \vec{e}_x = -\frac{1}{2} \frac{\partial(p + \rho U)}{\partial x} R \vec{e}_x \quad (> 0)$$



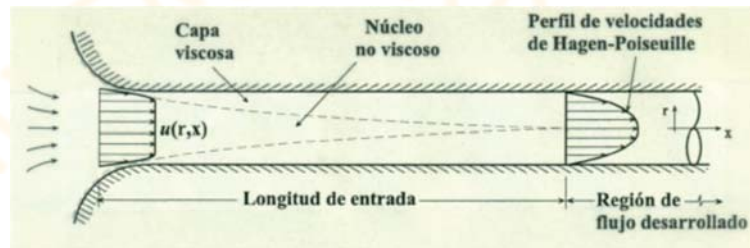
Región de entrada

Si la entrada está bien diseñada, la velocidad justo en la sección de entrada del conducto es prácticamente uniforme salvo en una capa muy delgada en la pared del conducto. El espesor de esta capa va creciendo aguas abajo debido a que el efecto de frenado de las paredes se va difundiendo por viscosidad.



Mientras que el espesor de esa capa no alcance el eje del conducto existirá un núcleo no viscoso donde la velocidad es uniforme. La constancia del caudal en cada sección del conducto y el hecho de que la capa viscosa, donde la velocidad del líquido es menor, crezca aguas abajo son responsables de que el líquido del núcleo viscoso se acelere y la presión disminuya aguas abajo. Como consecuencia, la inercia del líquido disminuye y el perfil de velocidades se aproxima asintóticamente a uno de Hagen-Poiseuille.

Región de entrada



En la región de entrada los términos de aceleración convectiva son tan importantes como los viscosos:

$$\rho \vec{v} \cdot \nabla \vec{v} \sim \mu \nabla^2 \vec{v} \rightarrow \rho U \frac{U}{L_e} \sim \mu \frac{U}{D^2} \rightarrow L_e \sim \text{Re}_D D$$

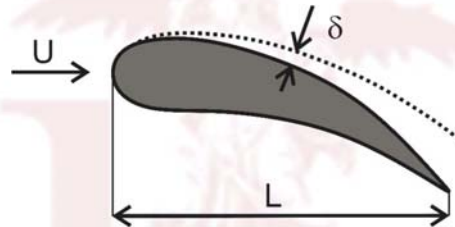
Capa límite

La teoría de fluidos ideales, basada en el hecho de que la viscosidad de los fluidos más comunes (agua y aire) es muy pequeña, resulta inapropiada para la determinación de la resistencia al avance de un obstáculo moviéndose en el seno de un fluido en reposo, ya que predice que es nula (paradoja de d'Alambert) en contraposición a los resultados experimentales. El origen de la discrepancia es debida a la viscosidad, independientemente de cuan pequeño sea su valor.

Prandtl introduce la idea de capa límite (1904) y establece que cerca de las paredes sólidas los efectos viscosos son siempre importantes y son los responsables de que se cumpla la condición de velocidad nula sobre el obstáculo. Si el coeficiente de viscosidad, μ , es pequeño y los esfuerzos viscosos tangenciales, $\mu \partial U / \partial n$, son importantes cerca de la pared, necesariamente el gradiente de velocidades debe ser grande en esa región, lo que requiere que la velocidad varíe en distancias muy pequeñas desde el valor cero que tiene en la pared hasta su valor exterior.

Vídeo: [Fundamentals of boundary layers](#)

La idea de Prandtl (flujo a alto número de Reynolds) consiste en dividir el flujo en dos regiones: una región exterior sin efectos viscosos o de conducción donde el fluido se puede considerar ideal y otra adyacente a las superficies sólidas, de espesor muy pequeño, donde los efectos viscosos son importantes, no porque el coeficiente de viscosidad sea mayor en esta zona (se supone que μ no varía), sino porque los gradientes de velocidad en la dirección normal a la superficie son muy acusados por ocurrir esta variación en una capa muy delgada.



$$\rho \vec{v} \cdot \nabla \vec{v} \sim \mu \nabla^2 \vec{v} \rightarrow \rho U \frac{U}{L} \sim \mu \frac{U}{\delta^2} \rightarrow \delta \sim \text{Re}_L^{-1/2} L$$



MECÁNICA DE FLUIDOS

Elena de Castro Hernández.

1

Dpto. Ing. Aeroespacial y Mecánica de Fluidos. Universidad de Sevilla.



Tema 7

Movimiento turbulento de líquidos en conductos

(4 clases, 6 problemas, 1 charla, 2 vídeos)

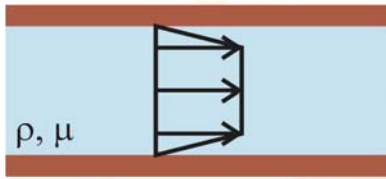
Elena de Castro Hernández.

2

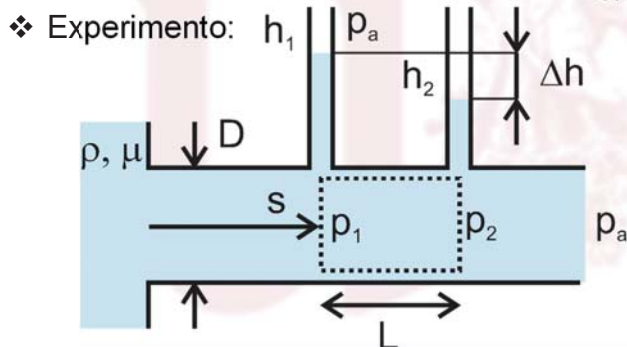
Dpto. Ing. Aeroespacial y Mecánica de Fluidos. Universidad de Sevilla.

Introducción

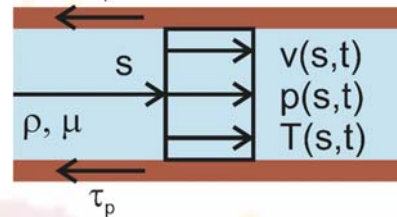
Realidad



Perfil de velocidad plano excepto en capa límite.



Modelo



Perfil de velocidad plano más esfuerzo en la pared para tener en cuenta que el fluido no desliza. ¿Cómo lo medimos?

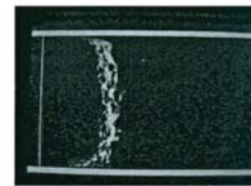
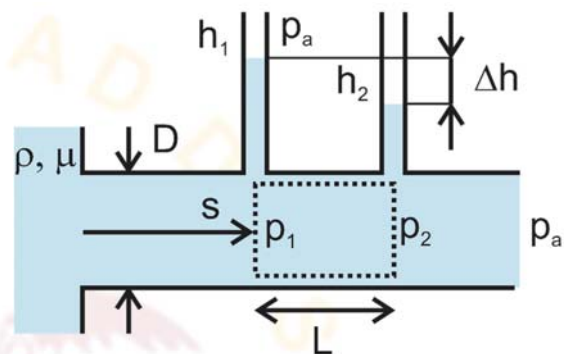


Figura 16.3. Superposición de perfiles instantáneos de velocidad en la sección de un conducto. Obsérvese que puede distinguirse un perfil de velocidades media al que se superponen las fluctuaciones de velocidad.



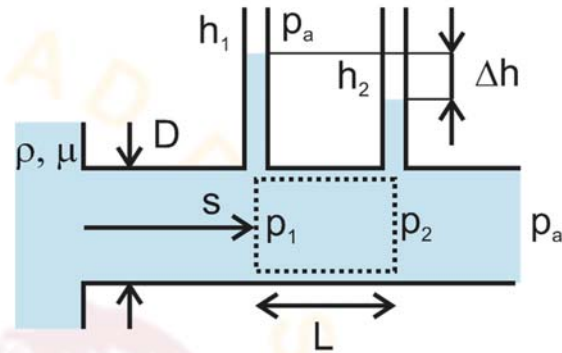
1) $L \gg D \rightarrow$ Unidireccional

2) Permanente $\rightarrow$ Fluidoestática en tubos verticales

$$\rightarrow p_1 = p_a + \rho g h_1, p_2 = p_a + \rho g h_2 \rightarrow p_1 - p_2 = \rho g \Delta h$$

❖ Continuidad:

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega} \rho d\omega + \int_{\Sigma_c} \rho (\vec{v} - \vec{v}_c) \cdot \vec{n} d\sigma = 0 \rightarrow -v_1 A + v_2 A = 0 \rightarrow v_1 = v_2$$



❖ Cantidad de movimiento proyectada sobre $\mathbf{e}_s$:

$$\left(\frac{d}{dt} \int_{\Omega_c} \rho \vec{v} d\omega + \int_{\Sigma_f} \rho \vec{v} (\vec{v} - \vec{v}_c) \cdot \vec{n} d\sigma = \int_{\Sigma_c} -p \vec{n} d\sigma + \int_{\Sigma_c} \vec{n} \cdot \vec{\tau} d\sigma + \int_{\Omega_c} \rho \vec{f}_m d\omega \right) \cdot \vec{e}_s \rightarrow$$

$$\rightarrow (p_1 - p_2) A \vec{e}_s - \tau_p P_m L \vec{e}_s = 0 \rightarrow \frac{(p_1 - p_2)}{L} = \frac{\tau_p}{A / P_m} = \frac{\tau_p}{r_h}$$

❖ **Radio hidráulico:**

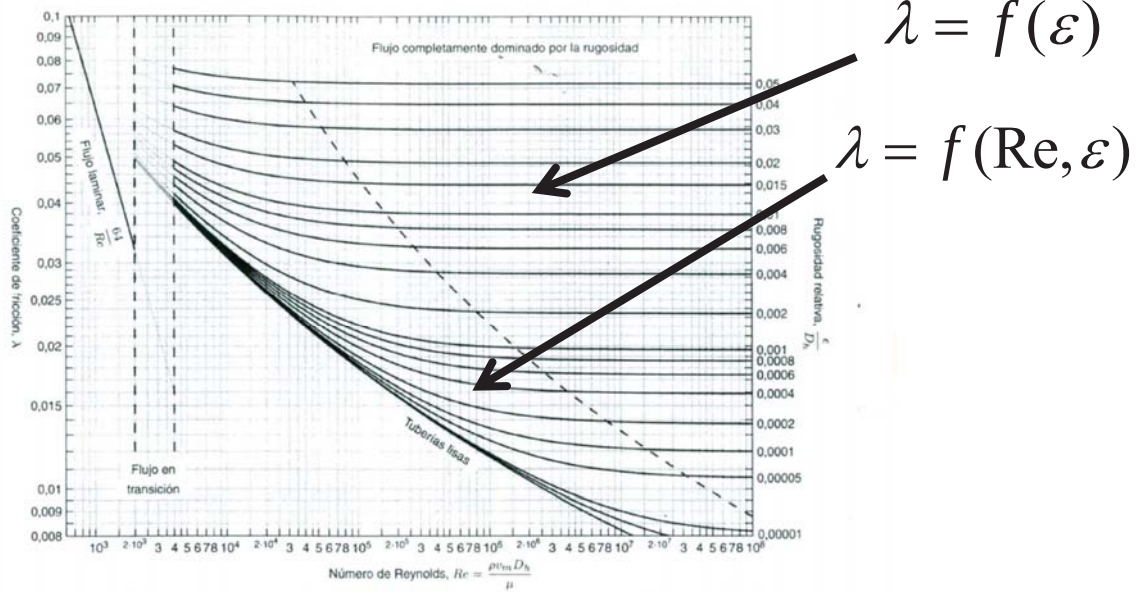
$$r_h = \frac{A}{P_m} = \frac{\pi D^2 / 4}{\pi D} = \frac{D}{4} = \frac{R}{2} \quad \text{si circular.}$$

$$\frac{p_1 - p_2}{L} \left\{ \begin{array}{ll} \frac{128 \mu Q}{\pi D^4} & \text{si laminar (proporcional a } Q). \\ \frac{\tau_p}{r_h} = \frac{\lambda \rho v^2}{8 r_h} = \frac{\lambda \rho v^2}{2 D} & \text{si turbulento (proporcional a } Q^2). \end{array} \right.$$

❖ **Coeficiente de fricción:** $c_f = \frac{\tau_p}{\rho v^2 / 2}$

❖ **Factor de fricción:** $\lambda = 4 c_f = \frac{8 \tau_p}{\rho v^2}$

❖ Ábaco de Moody:



Vídeos: Experimento de Reynolds y perfil laminar/turbulento

❖ Laminar: $Re \leq Re_{cr} \approx 2300$

$$Q = \frac{-\pi D^4}{128\mu} \frac{\partial(p + \rho U)}{\partial x} = \frac{\pi D^2}{4} V \rightarrow -\frac{\partial(p + \rho U)}{\partial x} = \frac{32\mu V}{D^2}$$

$$\tau_p = \frac{-D}{4} \frac{\partial(p + \rho U)}{\partial x} = \frac{8\mu V}{D} \rightarrow \lambda = \frac{8\tau_p}{\rho V^2} = \frac{64}{Re}$$

❖ Turbulento: $Re \geq 5000$

$$\lambda = f(Re, \varepsilon)$$

$$\text{Si } Re \gg 1 \rightarrow \lambda = f(\varepsilon) \text{ por } \delta \sim Re^{-1/2} L$$

Movimiento turbulento de fluidos en conductos de sección lentamente variable

❖ Lentamente variable:

Si $\Delta A \sim A$ en $\Delta s \sim L \gg A^{1/2} \rightarrow$

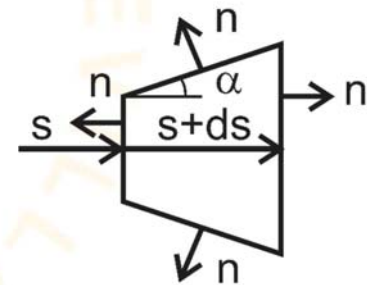
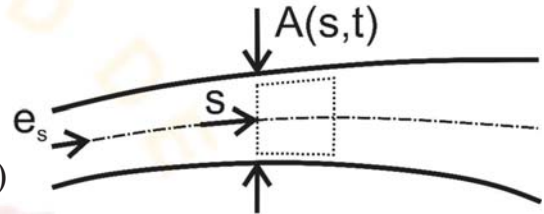
$\rightarrow$ casi unidireccional $\rightarrow v(s,t), p(s,t), T(s,t)$

❖ Continuidad:

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega_c} \rho d\varpi + \int_{\Sigma_e \cup \Sigma_s \cup \Sigma_l} \rho (\vec{v} - \vec{v}_c) \cdot \vec{n} d\sigma = 0 \rightarrow$$

$$\rightarrow \frac{\partial}{\partial t} (\rho A ds) - (\cancel{\rho v A}) + (\cancel{\rho v A}) + \frac{\partial}{\partial s} (\rho v A) ds = 0 \rightarrow$$

$$\rightarrow \boxed{\frac{\partial}{\partial t} (\rho A) + \frac{\partial}{\partial s} (\rho v A) = 0}$$



❖ Cantidad de movimiento proyectada sobre $\mathbf{e}_s$:

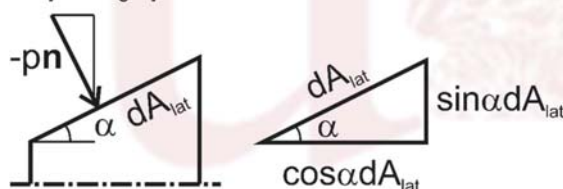
$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega_c} \rho \vec{v} \cdot \vec{e}_s d\varpi + \int_{\Sigma_f} \rho \vec{v} \cdot \vec{e}_s (\vec{v} - \vec{v}_c) \cdot \vec{n} d\sigma = \int_{\Sigma_c} -p \vec{n} \cdot \vec{e}_s d\sigma + \int_{\Sigma_c} \vec{n} \cdot \vec{\tau} \cdot \vec{e}_s d\sigma$$

$$+ \int_{\Omega_c} \rho \vec{f}_m \cdot \vec{e}_s d\varpi \rightarrow$$

$$\rightarrow \frac{\partial}{\partial t} (\rho v A ds) - (\cancel{\rho v^2 A}) + (\cancel{\rho v^2 A}) + \frac{\partial}{\partial s} (\rho v^2 A) ds = \cancel{pA} - \cancel{pA} - \frac{\partial}{\partial s} (pA) ds +$$

$$+ p \frac{\partial A}{\partial s} ds - \tau_p P_m ds + \rho f_{ms} A ds \rightarrow$$

$$-p \mathbf{n} \cdot \mathbf{e}_s = p \sin \alpha$$



$$\int_{\Sigma_l} -p \vec{n} \cdot \vec{e}_s d\sigma = p \sin \alpha dA_{lat} = p \frac{\partial A}{\partial s} ds$$

$$\begin{aligned} &\rightarrow \frac{\partial}{\partial t}(\rho v A) + \frac{\partial}{\partial s}(\rho v^2 A) = -A \frac{\partial p}{\partial s} - \tau_p \frac{A}{r_h} - \rho A \frac{\partial U}{\partial s} \rightarrow \\ &\rightarrow \rho A \frac{\partial v}{\partial t} + v \frac{\partial}{\partial t}(\rho A) + \rho v A \frac{\partial v}{\partial s} + v \frac{\partial}{\partial s}(\rho v A) = -A \frac{\partial p}{\partial s} - \tau_p \frac{A}{r_h} - \rho A \frac{\partial U}{\partial s} \rightarrow \\ &\rightarrow \boxed{\rho \frac{\partial v}{\partial t} + \rho \frac{\partial v^2 / 2}{\partial s} + \frac{\partial p}{\partial s} + \rho \frac{\partial U}{\partial s} = -\frac{\lambda \rho v^2}{8 r_h}} \end{aligned}$$

❖ Si líquidos:

$$\boxed{\frac{\partial A}{\partial t} + \frac{\partial(vA)}{\partial s} = 0 \text{ y } \rho \frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial s} \left(p + \frac{\rho v^2}{2} + \rho U \right) = -\frac{\lambda \rho v^2}{8 r_h}}$$

❖ Si además $A \neq f(t)$:

$$\boxed{\frac{\partial(vA)}{\partial s} = \frac{\partial Q}{\partial s} = 0 \text{ y } \rho \frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial s} \left(p + \frac{\rho v^2}{2} + \rho U \right) = -\frac{\lambda \rho v^2}{8 r_h}}$$

❖ Si además $A \neq f(s)$ y circular:

$$\boxed{\frac{\partial v}{\partial s} = 0 \text{ y } \rho \frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial s} (p + \rho U) = -\frac{\lambda \rho v^2}{2 D}}$$

❖ Si $\frac{\text{fricción}}{\text{inercia}} \sim \frac{\lambda \rho v^2 / 2 D}{\rho v^2 / 2 L} = \frac{\lambda L}{D} \ll 1 \rightarrow$ Fluidos ideales
Ecuación Euler-Bernoulli

Movimiento turbulento de líquidos en conductos de sección circular constante cuando las fuerzas másicas son exclusivamente las gravitatorias

$$\frac{\partial v}{\partial s} = 0 \quad \text{y} \quad \rho \frac{\partial v(t)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial s} [p(s) + \rho g z(s)] = -\frac{\lambda \rho v^2(t)}{2D}$$

❖ Integrando entre $s=0$ y un s genérico:

$$\rho \dot{v} s + [p(s) + \rho g z(s)] - [p(0) + \rho g z(0)] = -\frac{\lambda \rho v^2 s}{2D} \rightarrow$$

$$\rightarrow p(0) - p(s) = \rho \dot{v} s + \rho g [z(s) - z(0)] + \frac{\lambda \rho v^2 s}{2D}$$

La caída de presión entre $s=0$ y s , se invierte en acelerar el fluido, elevar su cota y vencer la fricción.

Repaso: magnitudes de remanso para líquidos perfectos

Se obtienen decelerando el fluido desde su velocidad $\mathbf{v}$ hasta velocidad nula de forma estacionaria, isentrópica y sin fuerzas másicas.

Por definición: $s_o = s$ y $h_o + \cancel{\frac{v_o^2}{2}} = h + \frac{v^2}{2} = h_o$

$$s - s_o = c \ln \left(\frac{T}{T_o} \right) \rightarrow T_o = T \quad \rho = cte \rightarrow \rho_o = \rho$$

$$e - e_o = c(T - T_o) \rightarrow e_o = e$$

$$h = e + \frac{p}{\rho} \rightarrow h - h_o = \cancel{e - e_o} + \frac{p}{\rho} - \frac{p_o}{\rho_o} \rightarrow p_o = p + \frac{\rho v^2}{2}$$

- ❖ **Condición de contorno a la salida:** La presión a la salida, en el caso de un líquido es la del ambiente al que descargan.



Fig. 116. Flow through a nozzle.

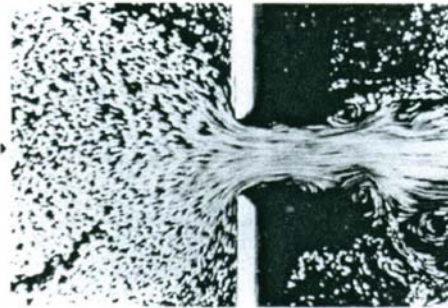
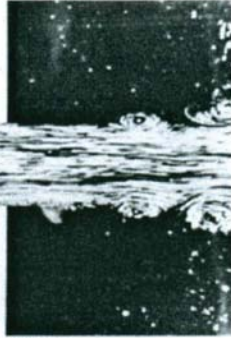


Fig. 117. Flow through an orifice (water, velocity = 14 cm/s, width of opening = 30 mm, $Re = 4.3 \times 10^3$, hydrogen bubble method).

$$p_s = p_{\text{ambiente-descarga}}$$

- ❖ **Condición de contorno a la entrada:**

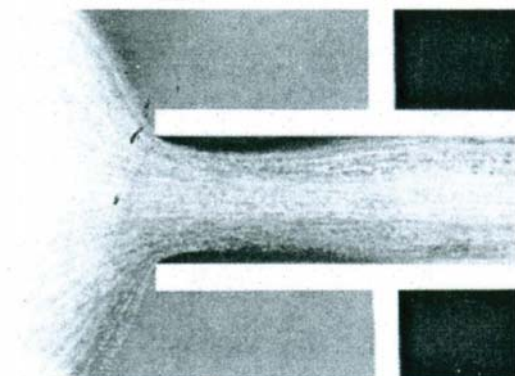


Fig. 103. Water, velocity = 3.4 cm/s, passage width = 20 mm, $Re = 500$, hydrogen bubble method.

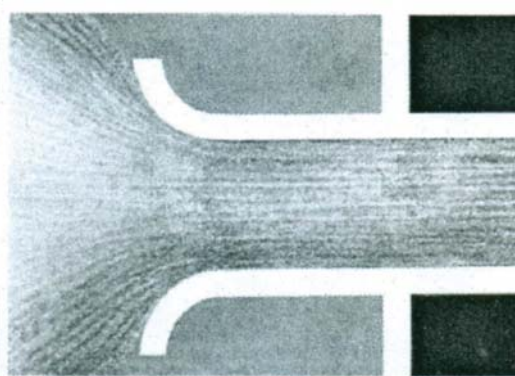
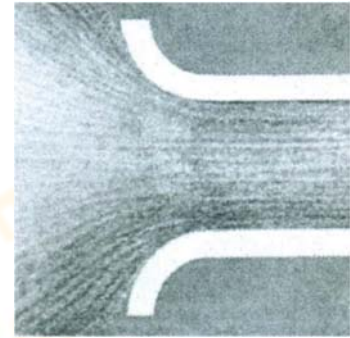


Fig. 104. Water, velocity = 3.4 cm/s, passage width 20 mm, $Re = 600$, hydrogen bubble method.

$$p(0)?$$

$$\rho \frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial s} \left(p + \frac{\rho v^2}{2} + \rho U \right) = - \frac{\lambda \rho v^2}{2D}$$

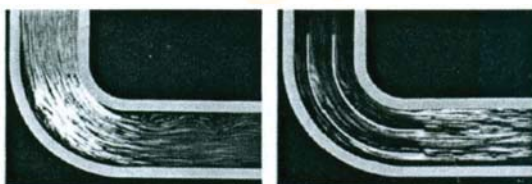
$$St = \frac{L_b / v_c}{t_o} \ll 1 \quad Fr = \frac{v_c^2}{gL_b} \gg 1 \quad \frac{\lambda L_b}{D} \ll 1 \quad Re = \frac{\rho v_c L_b}{\mu} \gg 1$$



$$p_o(0,t) = p_{od}(t) \rightarrow p(0,t) + \frac{\rho v^2(0,t)}{2} = p_d(t) + \frac{\rho v_d^2(t)}{2} \rightarrow p(0,t) = p_d(t) - \frac{\rho v^2(0,t)}{2}$$

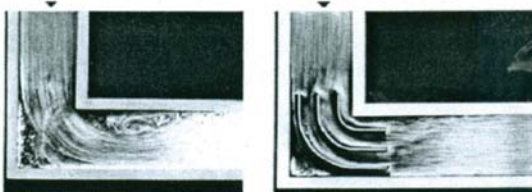
$$p_o(0,t) = p_{od}(t) - k \frac{\rho v^2(0,t)}{2} \rightarrow p(0,t) = p_d(t) - (1+k) \frac{\rho v^2(0,t)}{2}$$

❖ Idem para codos, válvulas, etc.



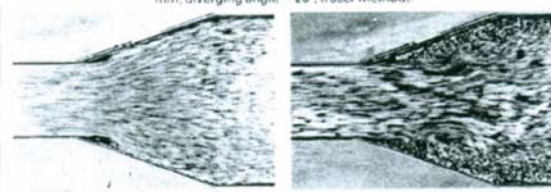
Figs. 108 and 109. Flow through a turning passage with and without guide vanes (water, velocity = 10 cm/s, passage width = 20 mm, $Re = 2 \times 10^3$, surface tracer method).

Figs. 110 and 111. Passages connected in right angle with and without guide vanes (water, velocity = 10 cm/s, passage width = 20 mm, $Re = 2 \times 10^3$, surface tracer method).



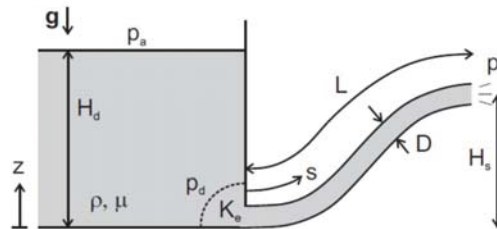
Figs. 112 and 113. Flow through sudden contraction and enlargement (water, velocity = 15 cm/s (112), 20 cm/s (113), width of narrower passage = 400 mm, tracer method).

Figs. 114 and 115. Slow and fast diverging flow (water, velocity = 3 - 4 cm/s (114), 15 - 20 cm/s (115), width of narrower passage = 600 mm, diverging angle = 20°, tracer method).



$$p_o(\text{antes}) - p_o(\text{despues}) = K \frac{\rho v^2(\text{despues})}{2}$$

Un depósito cilíndrico de grandes dimensiones abierto a la atmósfera a la presión p_a , se encuentra lleno de un líquido de densidad ρ y viscosidad μ hasta una altura H_d . El depósito, de diámetro D_d , descarga a la atmósfera mediante una tubería de diámetro $D \ll D_d$ y longitud L , cuya salida se encuentra a una cota H_s . Sabiendo que el factor de pérdida de carga a la entrada de la tubería es K_e y que el factor de fricción, λ , es conocido e independiente del número de Reynolds, se pide:



1. Calcular el caudal para el régimen estacionario, Q_{est} .
2. Si inicialmente, $t = 0$, el conducto está cerrado y lleno de líquido y se abre de forma súbita, calcular la evolución del caudal, $Q(t)$, a partir de dicho instante.
3. Para el régimen cuasiestacionario se cumple que el diámetro del depósito, D_d , es tal que $St = t_R/t_0 = LD^2/[(H_0 - H_s)D_d^2] \ll 1$ y la altura del mismo es función del tiempo, $H_d = H(t)$. Sabiendo que inicialmente $H(t = 0) = H_0$, calcular la evolución de $H(t)$ en esta situación.

❖ Caso estacionario:

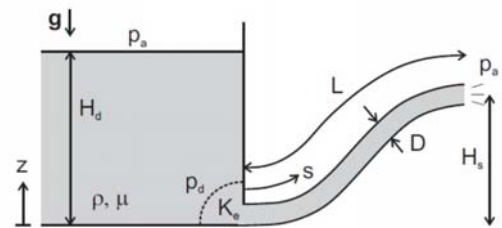
Depósito de grandes dimensiones ($v_d=0$ y $H=\text{cte}$)

$$\rho \frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial s} \left(p + \frac{\rho v^2}{2} + \rho g z \right) = - \frac{\lambda \rho v^2}{2D} \rightarrow$$

$$\rightarrow p(L) - p(0) + \rho g [z(L) - z(0)] + \frac{\lambda \rho v^2 L}{2D} = 0 \rightarrow$$

$$p(0) = p_a + \rho g H - (1 + K_e) \frac{\rho v^2}{2} \quad \text{y} \quad p(L) = p_a$$

$$\rightarrow v_{est} = \sqrt{\frac{2g(H - H_s)}{1 + K_e + \lambda L/D}}$$



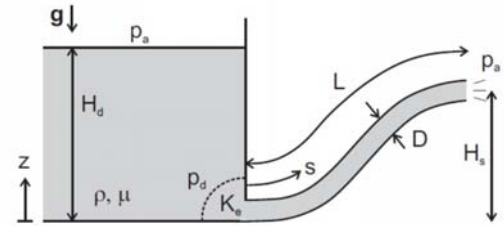
❖ Caso no estacionario:

Depósito de grandes dimensiones ($v_d=0$ y $H=cte$)

$$\rho \frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial s} \left(p + \frac{\rho v^2}{2} + \rho g z \right) = - \frac{\lambda \rho v^2}{2D} \rightarrow$$

$$\rightarrow \rho \frac{\partial v}{\partial t} L + p(L) - p(0) + \rho g [z(L) - z(0)] + \frac{\lambda \rho v^2 L}{2D} = 0 \rightarrow$$

$$p(0) = p_a + \rho g H - (1 + K_e) \frac{\rho v^2}{2} \quad \text{y} \quad p(L) = p_a$$

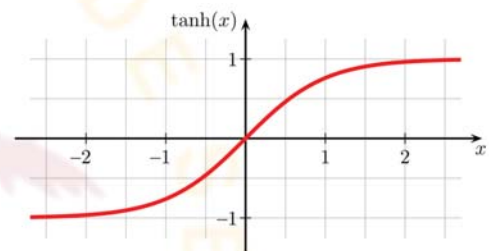


$$\rightarrow \frac{\partial v}{\partial t} = \frac{g(H - H_s)}{L} - \frac{1}{2L} \left(1 + K_e + \frac{\lambda L}{D} \right) v^2 = c_2 - c_1 v^2 \rightarrow$$

$$\int_0^v dv \quad \text{y} \quad \int_0^t dt$$

$$\rightarrow v = \sqrt{\frac{c_2}{c_1}} \tanh \left(\sqrt{c_1 c_2} t \right) = v_c \tanh \left(\frac{t}{t_c} \right)$$

$$v_c = \sqrt{\frac{2g(H - H_s)}{\left(1 + K_e + \frac{\lambda L}{D} \right)}} = v_{est} \quad \text{y} \quad t_c = \sqrt{\frac{2L^2}{g(H - H_s) \left(1 + K_e + \frac{\lambda L}{D} \right)}}$$

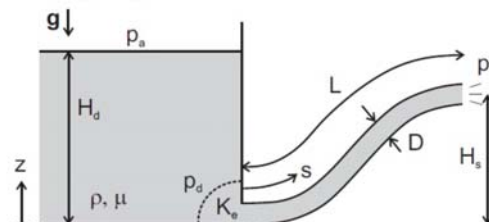


❖ Caso cuasi-estacionario:

Depósito NO de grandes dimensiones pero $A_d H_s \gg A_c L$ y $A_d \gg A_c$ ($v_d=0$)

$$Q(t) = v(t) A_c = -A_d \frac{dH(t)}{dt} \rightarrow$$

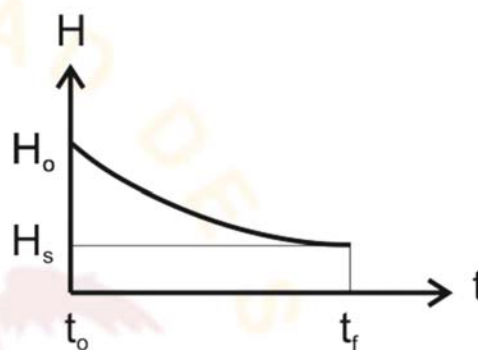
$$\rightarrow \frac{L}{t_R} A_c \sim A_d \frac{H_s}{t_o} \rightarrow St = \frac{t_R}{t_o} = \frac{L A_c}{H_s A_d} \ll 1 \rightarrow$$



$$\rightarrow \partial / \partial t \approx 0 \text{ pero } v(t)$$

$$\rho \frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial s} \left(p + \frac{\rho v^2}{2} + \rho g z \right) = -\frac{\lambda \rho v^2}{2D} \rightarrow v(t) = \sqrt{\frac{2g[H(t) - H_s]}{1 + K_e + \lambda L / D}}$$

$$\left. \begin{aligned} Q(t) &= v(t) A_c = -A_d \frac{dH(t)}{dt} \\ v(t) &= \sqrt{\frac{2g[H(t) - H_s]}{1 + K_e + \lambda L / D}} \\ \int_{H_o}^H dH &\text{ y } \int_{t_o}^t dt \end{aligned} \right\}$$



$$\rightarrow H(t) = H_s + \left[\sqrt{H_o - H_s} + \frac{1}{2} \sqrt{\frac{2g}{1 + K_e + \lambda L / D}} \frac{A_c}{A_d} (t_o - t) \right]^2$$



MECÁNICA DE FLUIDOS

Elena de Castro Hernández.

1

Dpto. Ing. Aeroespacial y Mecánica de Fluidos. Universidad de Sevilla.



Tema 8

Ecuación de conservación de
la energía. Turbomáquinas.

(3 clases, 3 problemas, 1 charla)

Elena de Castro Hernández.

2

Dpto. Ing. Aeroespacial y Mecánica de Fluidos. Universidad de Sevilla.

Repaso magnitudes de remanso

Magnitudes de remanso: Se obtienen decelerando el fluido de forma adiabática y reversible (isentrópica), estacionariamente y sin fuerzas másicas desde una velocidad v hasta velocidad nula.



$$s_o = s, \quad h_o = h + \frac{v^2}{2}$$

❖ Líquidos:

$$\rho = \text{cte} \rightarrow \rho = \rho_o$$

$$Tds = de + pd\left(\frac{1}{\rho}\right) \rightarrow s - s_o = cLn \frac{T}{T_o} \rightarrow T = T_o \rightarrow e = e_o$$

$$h = e + \frac{p}{\rho} = cT + \frac{p}{\rho} \rightarrow h_o = cT_o + \frac{p_o}{\rho_o} = cT + \frac{p}{\rho} + \frac{v^2}{2} = cT_o + \frac{p}{\rho_o} + \frac{v^2}{2} \rightarrow$$

$$\rightarrow p_o = p + \rho \frac{v^2}{2}$$

❖ Gases

$$s_o = s, \quad h_o = h + \frac{v^2}{2} \rightarrow c_p T_o = c_p T + \frac{v^2}{2} \rightarrow T_o = T + \frac{v^2}{2c_p}$$

$$\frac{p}{\rho^\gamma} = \frac{p_o}{\rho_o^\gamma} \rightarrow \frac{p_o}{p} = \left(\frac{\rho_o}{\rho}\right)^\gamma = \left(\frac{p_o / R_g T_o}{p / R_g T}\right)^\gamma \rightarrow \left(\frac{p_o}{p}\right)^{1-\gamma} = \left(\frac{T_o}{T}\right)^{-\gamma} \rightarrow \frac{p_o}{p} = \left(\frac{T_o}{T}\right)^{\gamma/(\gamma-1)}$$

$$\left(\frac{\rho_o}{\rho}\right)^\gamma = \left(\frac{T_o}{T}\right)^{\gamma/(\gamma-1)} \rightarrow \frac{\rho_o}{\rho} = \left(\frac{T_o}{T}\right)^{1/(\gamma-1)}$$

$p = \rho R_g T$

**Ecuación de la energía**

❖ Primer principio de la Termodinámica: $\Delta E = Q + W \rightarrow \div \Delta t \rightarrow$

❖ Forma integral aplicada a un volumen fluido:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_{\Omega_f} \rho \left(e + \frac{v^2}{2} \right) d\varpi &= \int_{\Omega_f} \frac{\partial}{\partial t} \left[\rho \left(e + \frac{v^2}{2} \right) \right] d\varpi + \int_{\Sigma_f} \left[\rho \left(e + \frac{v^2}{2} \right) \right] \vec{v} \cdot \vec{n} d\sigma = \\ &= \int_{\Sigma_f} -p \vec{n} \cdot \vec{v} d\sigma + \int_{\Sigma_f} \vec{n} \cdot \vec{\tau} \cdot \vec{v} d\sigma + \int_{\Omega_f} \rho \vec{f}_m \cdot \vec{v} d\varpi + \int_{\Omega_f} (Q_r + Q_q) d\varpi - \int_{\Sigma_f} \vec{q} \cdot \vec{n} d\sigma \end{aligned}$$

1

Q_r y Q_q : Calores recibidos por radiación y por reacción química por unidad de tiempo y volumen (W/m^3).

❖ Ley de Fourier: $\vec{q} = -K \nabla T$

$\vec{q}$: Vector flujo de calor, K : Coeficiente de conductividad térmica (W/mK)



$\alpha = K / \rho c_p$ (m^2/s) Coeficiente de difusión térmica. Mide la velocidad a la que cambia la temperatura de un material al ser puesto en contacto con una fuente de calor.

$$Pr = \frac{\nu}{\alpha} = \frac{\mu c_p}{K}$$

❖ Número de Prandtl. Compara los transportes difusivos de cantidad de movimiento y calor. Para gases $Pr \sim 1$ y para agua $Pr \sim 8$.

❖ Forma integral aplicada a un volumen de control:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_{\Omega_c} \rho \left(e + \frac{v^2}{2} \right) d\varpi + \int_{\Sigma_c} \left[\rho \left(e + \frac{v^2}{2} \right) \right] (\vec{v} - \vec{v}_c) \cdot \vec{n} d\sigma = \\ = \int_{\Sigma_c} -p \vec{n} \cdot \vec{v} d\sigma + \int_{\Sigma_c} \vec{n} \cdot \vec{\tau} \cdot \vec{v} d\sigma + \int_{\Omega_c} \rho \vec{f}_m \cdot \vec{v} d\varpi + \int_{\Omega_c} (Q_r + Q_q) d\varpi + \int_{\Sigma_c} K \nabla T \cdot \vec{n} d\sigma \end{aligned}$$

2

❖ Otra forma integral, aplicada a un volumen de control (mixta):

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_{\Omega_c} \rho \left(e + \frac{v^2}{2} \right) d\varpi + \int_{\Sigma_c} \left[\rho \left(e + \frac{v^2}{2} \right) \right] (\vec{v} - \vec{v}_c) \cdot \vec{n} d\sigma = \\ = \int_{\Sigma_c} -p \vec{n} \cdot \vec{v} d\sigma + \int_{\Sigma_c} \vec{n} \cdot \vec{\tau}' \cdot \vec{v} d\sigma + \int_{\Omega_c} \rho \vec{f}_m \cdot \vec{v} d\varpi + \int_{\Omega_c} (Q_r + Q_q) d\varpi + \int_{\Sigma_c} K \nabla T \cdot \vec{n} d\sigma \end{aligned} \quad (2)$$

Sumando y restando $\int_{\Sigma_c} p \vec{n} \cdot \vec{v}_c d\sigma$ y teniendo en cuenta que $h = e + \frac{p}{\rho}$ resulta

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_{\Omega_c} \rho \left(e + \frac{v^2}{2} \right) d\varpi + \int_{\Sigma_c} \rho \left(h + \frac{v^2}{2} \right) (\vec{v} - \vec{v}_c) \cdot \vec{n} d\sigma = \\ = \int_{\Sigma_c} -p \vec{n} \cdot \vec{v}_c d\sigma + \int_{\Sigma_c} \vec{n} \cdot \vec{\tau}' \cdot \vec{v} d\sigma + \int_{\Omega_c} \rho \vec{f}_m \cdot \vec{v} d\varpi + \int_{\Omega_c} (Q_r + Q_q) d\varpi + \int_{\Sigma_c} K \nabla T \cdot \vec{n} d\sigma \end{aligned} \quad (3)$$

❖ Forma diferencial :

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_{\Omega_f} \rho \left(e + \frac{v^2}{2} \right) d\varpi = \int_{\Omega_f} \frac{\partial}{\partial t} \left[\rho \left(e + \frac{v^2}{2} \right) \right] d\varpi + \int_{\Sigma_f} \left[\rho \left(e + \frac{v^2}{2} \right) \right] \vec{v} \cdot \vec{n} d\sigma = \\ = \int_{\Sigma_f} -p \vec{n} \cdot \vec{v} d\sigma + \int_{\Sigma_f} \vec{n} \cdot \vec{\tau}' \cdot \vec{v} d\sigma + \int_{\Omega_f} \rho \vec{f}_m \cdot \vec{v} d\varpi + \int_{\Omega_f} (Q_r + Q_q) d\varpi + \int_{\Sigma_f} -\vec{q} \cdot \vec{n} d\sigma \end{aligned} \quad (1)$$

$$\int_{\Sigma_f} \rightarrow \int_{\Omega_f} \text{ y } \Omega_f \rightarrow d\Omega_f$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \left[\rho \left(e + \frac{v^2}{2} \right) \right] + \nabla \cdot \left[\rho \left(e + \frac{v^2}{2} \right) \vec{v} \right] = \\ = \left(e + \frac{v^2}{2} \right) \frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho \frac{\partial}{\partial t} \left(e + \frac{v^2}{2} \right) + \left(e + \frac{v^2}{2} \right) \nabla \cdot (\rho \vec{v}) + \rho \vec{v} \cdot \nabla \left(e + \frac{v^2}{2} \right) = \end{aligned}$$

X Continuidad D / Dt

$$= \rho \frac{D}{Dt} \left(e + \frac{v^2}{2} \right) = -\nabla \cdot (p\vec{v}) + \nabla \cdot (\vec{\tau} \cdot \vec{v}) + \rho \vec{f}_m \cdot \vec{v} + Q_r + Q_q + \nabla \cdot (K\nabla T) \quad (A)$$

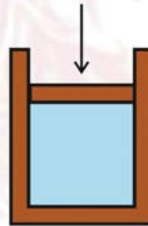
$$\nabla \cdot (K\nabla T) = K\nabla^2 T \text{ si } K \text{ cte}$$

$$\nabla \cdot (p\vec{v}) = \nabla p \cdot \vec{v} + p\nabla \cdot \vec{v}$$

$\nabla p \cdot \vec{v}$: Trabajo mecánico de las fuerzas de presión



$p\nabla \cdot \vec{v}$: Trabajo de compresión



❖ Otra forma integral, aplicada a un volumen fluido (entalpía remanso):

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_{\Omega_f} \rho \left(e + \frac{v^2}{2} \right) d\varpi &= \int_{\Omega_f} \frac{\partial}{\partial t} \left[\rho \left(e + \frac{v^2}{2} \right) \right] d\varpi + \int_{\Sigma_f} \left[\rho \left(e + \frac{v^2}{2} \right) \right] \vec{v} \cdot \vec{n} d\sigma = \\ &= \int_{\Sigma_f} -p\vec{n} \cdot \vec{v} d\sigma + \int_{\Sigma_f} \vec{n} \cdot \vec{\tau} \cdot \vec{v} d\sigma + \int_{\Omega_f} \rho \vec{f}_m \cdot \vec{v} d\varpi + \int_{\Omega_f} (Q_r + Q_q) d\varpi - \int_{\Sigma_f} \vec{q} \cdot \vec{n} d\sigma \end{aligned} \quad (1)$$

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_f} \frac{d}{dt} \left[\rho \left(e + \frac{v^2}{2} \right) \right] d\varpi + \int_{\Sigma_f} \rho \left(h + \frac{v^2}{2} \right) \vec{v} \cdot \vec{n} d\sigma &= \\ = \int_{\Sigma_f} \vec{n} \cdot \vec{\tau} \cdot \vec{v} d\sigma + \int_{\Omega_f} \rho \vec{f}_m \cdot \vec{v} d\varpi + \int_{\Omega_f} (Q_r + Q_q) d\varpi + \int_{\Sigma_f} K\nabla T \cdot \vec{n} d\sigma \end{aligned} \quad (4)$$

❖ Forma diferencial de la entalpía de remanso :

$$\begin{aligned}
 & \int_{\Omega_f} \frac{d}{dt} \left[\rho \left(e + \frac{v^2}{2} \right) \right] d\varpi + \int_{\Sigma_f} \rho \left(h + \frac{v^2}{2} \right) \vec{v} \cdot \vec{n} d\sigma = \\
 & = \int_{\Sigma_f} \vec{n} \cdot \vec{\tau}' \cdot \vec{v} d\sigma + \int_{\Omega_f} \rho \vec{f}_m \cdot \vec{v} d\varpi + \int_{\Omega_f} (Q_r + Q_q) d\varpi + \int_{\Sigma_f} K \nabla T \cdot \vec{n} d\sigma \\
 & \int_{\Sigma_f} \rightarrow \int_{\Omega_f} \text{ y } \Omega_f \rightarrow d\Omega_f \\
 & \frac{\partial}{\partial t} \left[\rho \left(e + \frac{v^2}{2} \right) \right] + \nabla \cdot \left[\rho \left(h + \frac{v^2}{2} \right) \vec{v} \right] = \nabla \cdot (\vec{\tau}' \cdot \vec{v}) + \rho \vec{f}_m \cdot \vec{v} + Q_r + Q_q + \nabla \cdot (K \nabla T)
 \end{aligned}$$

Sumando y restando $\frac{\partial p}{\partial t}$

(4)

$$\begin{aligned}
 & \frac{\partial}{\partial t} \left[\rho \left(h + \frac{v^2}{2} \right) \right] + \nabla \cdot \left[\rho \left(h + \frac{v^2}{2} \right) \vec{v} \right] = \\
 & = \left(h + \frac{v^2}{2} \right) \frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho \frac{\partial}{\partial t} \left(h + \frac{v^2}{2} \right) + \left(h + \frac{v^2}{2} \right) \nabla \cdot (\rho \vec{v}) + \rho \vec{v} \cdot \nabla \left(h + \frac{v^2}{2} \right) = \\
 & \quad \text{X Continuidad} \quad \quad \quad \text{D / Dt}
 \end{aligned}$$

$$= \rho \frac{D}{Dt} \left(h + \frac{v^2}{2} \right) = \frac{\partial p}{\partial t} + \nabla \cdot (\vec{\tau}' \cdot \vec{v}) + \rho \vec{f}_m \cdot \vec{v} + Q_r + Q_q + \nabla \cdot (K \nabla T)$$

(B)

$$\frac{\rho \vec{v} \cdot \nabla \left(h + \frac{v^2}{2} \right)}{\nabla \cdot (K \nabla T)} \sim \frac{\rho u_o \frac{1}{L} c_p \Delta T}{\frac{1}{L} K \frac{\Delta T}{L}} = \frac{\rho u_o L c_p \mu}{\mu K} = \text{Re}_L \text{Pr} = \text{Pe} \quad \text{Número de Peclet}$$

❖ Si $St \ll 1$, $Re \gg 1$, $Q_r = Q_q = 0$, $RePr \gg 1$ y $Fr \gg 1$:

$$\nabla \left(h + \frac{v^2}{2} \right) = 0 \rightarrow \frac{\partial}{\partial s} \left(h + \frac{v^2}{2} \right) = 0$$



Si gas $St \ll 1$, $Re \gg 1$, $Q_r = Q_q = 0$, $RePr \gg 1$ $\rightarrow$
análoga a Euler-Bernoulli pero para gases $\rightarrow$
a lo largo de una línea de corriente: $h + v^2 / 2 = cte$

NO CONFUNDIR!!!

LÍQUIDOS

$$Re \gg 1 \text{ y } \vec{f}_m = -\nabla U$$

$$\rho \frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial s} \left(p + \rho \frac{v^2}{2} + \rho U \right) = 0$$

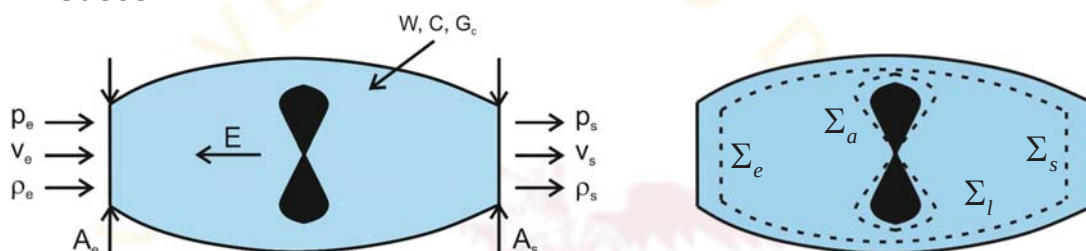
GASES

$$Re \gg 1, St \ll 1, Q_r = Q_q = 0 \text{ y } RePr \gg 1$$

$$\frac{\partial}{\partial s} \left(h + \frac{v^2}{2} \right) = 0$$

Turbomáquinas

❖ Gases:



$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega_c} \rho \left(e + \frac{v^2}{2} \right) d\varpi + \int_{\Sigma_c} \rho \left(h + \frac{v^2}{2} \right) (\vec{v} - \vec{v}_c) \cdot \vec{n} d\sigma =$$

$$= \int_{\Sigma_c} -p \vec{n} \cdot \vec{v}_c d\sigma + \int_{\Sigma_c} \vec{n} \cdot \vec{\tau} \cdot \vec{v} d\sigma + \int_{\Omega_c} \rho \vec{f}_m \cdot \vec{v} d\varpi + \int_{\Omega_c} (Q_r + Q_q) d\varpi + \int_{\Sigma_c} KVT \cdot \vec{n} d\sigma$$



$$\begin{aligned}
 & \textcircled{1} = 0 \text{ x } T \text{ o } x St \ll 1 \quad \textcircled{2} \left\{ \begin{array}{l} \Sigma_l \cup \Sigma_a = 0 \text{ x pared} \\ \Sigma_e \cup \Sigma_s = G(h_{os} - h_{oe}) \end{array} \right. \\
 & \textcircled{3} \left\{ \begin{array}{l} \Sigma_e \cup \Sigma_s \cup \Sigma_l = 0 \text{ x } \vec{v}_c = 0 \\ \Sigma_a = X' \text{ (parte de } W) \end{array} \right. \quad \textcircled{4} \left\{ \begin{array}{l} \Sigma_e \cup \Sigma_s = 0 \text{ x } \vec{v} \text{ uniforme o } x Re \gg 1 \\ \Sigma_l = 0 \text{ x } \vec{v} = 0 \\ \Sigma_a = Y' \text{ (parte de } W) \end{array} \right. \\
 & \textcircled{5} = 0 \text{ x } Fr \gg 1 \quad \textcircled{6} = G_c C \quad \textcircled{7} = 0 \text{ x } RePr \gg 1 \text{ o incluido en } \eta
 \end{aligned}$$

$$\rightarrow W + G_c C = G(h_{os} - h_{oe})$$



A) Turbocompresor: $p_s > p_e, w > 0$

$$W_{ideal} = G(h_{os} - h_{oe}) \approx G(h_s - h_e) = Gc_p T_e \left(\frac{T_s}{T_e} - 1 \right) = Gc_p T_e \left[\left(\frac{p_s}{p_e} \right)^{(\gamma-1)/\gamma} - 1 \right]$$

$h_o = h + \frac{v^2}{2}$

$$\text{Ideal=Isentrópico} \rightarrow \frac{p_s}{\rho_s^\gamma} = \frac{p_e}{\rho_e^\gamma} \rightarrow \frac{p_s}{(p_s/T_s)^\gamma} = \frac{p_e}{(p_e/T_e)^\gamma} \rightarrow \frac{T_s}{T_e} = \left(\frac{p_s}{p_e} \right)^{(\gamma-1)/\gamma}$$

$$\rightarrow W_{real} = \frac{1}{\eta} W_{ideal} = \frac{1}{\eta} Gc_p T_e \left[\left(\frac{p_s}{p_e} \right)^{(\gamma-1)/\gamma} - 1 \right]$$

B) Turbina: $p_s < p_e$, $w < 0$

$$W_{real} = \eta W_{ideal} = \eta G_c T_e \left[1 - \left(\frac{p_s}{p_e} \right)^{(\gamma-1)/\gamma} \right]$$

❖ **Líquidos:**

En gases $Fr \gg 1$, pero en líquidos no $\longrightarrow$

$$\begin{aligned} \rightarrow \int_{\Omega_c} \rho \vec{f}_m \cdot \vec{v} d\varpi &= - \int_{\Omega_c} \rho \nabla U \cdot \vec{v} d\varpi = - \int_{\Omega_c} \nabla \cdot (\rho U \vec{v}) d\varpi = - \int_{\Sigma_c} \rho U \vec{v} \cdot \vec{n} d\sigma = \rho Q (U_e - U_s) \\ \uparrow \quad \quad \quad \uparrow \quad \quad \quad \uparrow \\ \vec{f}_m = -\nabla U \quad \quad \nabla \cdot \vec{v} = 0, \rho = cte \quad \quad \text{Transporte convectivo de } \rho U \\ &= 0 \text{ sobre } \Sigma_l \cup \Sigma_a \text{ x pared} \end{aligned}$$

A) Bomba: $p_s > p_e, w > 0$

$$W_{ideal} = G(h_{os} - h_{oe}) + \rho Q(U_s - U_e) \approx$$

$$h_o = e_o + \frac{p_o}{\rho_o} = cT_o + \frac{p_o}{\rho_o} = cT + \frac{p_o}{\rho}$$

$$\approx Q[(p_{os} - p_{oe}) + \rho C(T_s - T_e) + \rho(U_s - U_e)] \approx Q[(p_s - p_e)]$$

$$p_o = p + \rho \frac{V^2}{2}$$

$$\Delta T \approx 0$$

$$\Delta U \approx 0$$



$$W_{real} = \frac{1}{\eta} W_{ideal} = \frac{1}{\eta} Q(p_s - p_e)$$

B) Turbina: $p_s < p_e, w < 0$

$$W_{real} = \eta W_{ideal} = \eta Q(p_e - p_s)$$

**NO ES MATERIA DE EXAMEN**

- ❖ Ecuación energía mecánica en forma diferencial:
Multiplicando escalarmente por $\vec{v}$ la ecuación de cantidad de movimiento

$$\rho \frac{D\vec{v}}{Dt} = -\nabla p + \nabla \cdot \vec{\tau} + \rho \vec{f}_m \rightarrow$$

$$\rightarrow \rho \frac{D(v^2/2)}{Dt} = -\nabla p \cdot \vec{v} + (\nabla \cdot \vec{\tau}) \cdot \vec{v} + \rho \vec{f}_m \cdot \vec{v}$$

- ❖ Ecuación energía interna en forma diferencial:
- ❖ Si a la ecuación de la energía total le restamos la ecuación de la energía mecánica.

$$\rho \frac{D}{Dt} \left(e + \frac{v^2}{2} \right) = -\nabla \cdot (p\vec{v}) + \nabla \cdot (\vec{\tau} \cdot \vec{v}) + \rho \vec{f}_m \cdot \vec{v} + Q_r + Q_q + \nabla \cdot (K\nabla T) \rightarrow$$

$$\rightarrow \rho \frac{De}{Dt} = -p\nabla \cdot \vec{v} + \vec{\tau} : \nabla \vec{v} + Q_r + Q_q + \nabla \cdot (K\nabla T)$$



- ❖ Ecuación entropía en forma diferencial:

$$Tds = de + pd\left(\frac{1}{\rho}\right) = de - \frac{p}{\rho^2} d\rho \rightarrow \rho T \frac{Ds}{Dt} = \rho \frac{De}{Dt} - \frac{p}{\rho} \frac{D\rho}{Dt} =$$

$$= -\cancel{p\nabla \cdot \vec{v}} + \vec{\tau} : \nabla \vec{v} + Q_r + Q_q + \nabla \cdot (K\nabla T) - \cancel{\frac{p}{\rho} \left(\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{v} \cdot \nabla \rho \right)} \rightarrow$$

$$\rightarrow \rho T \frac{Ds}{Dt} = \vec{\tau} : \nabla \vec{v} + Q_r + Q_q + \nabla \cdot (K\nabla T)$$

Condiciones iniciales y de contorno

❖ Condiciones iniciales:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} \rightarrow \rho_o = \rho(\vec{x}, t_o)$$

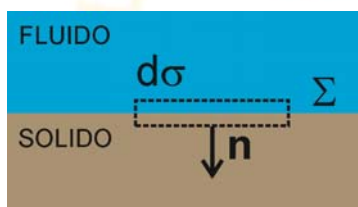
$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} \rightarrow \vec{v}_o = \vec{v}(\vec{x}, t_o)$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} \rightarrow T_o = T(\vec{x}, t_o)$$

❖ Condiciones de contorno:

$$\frac{\partial p}{\partial \vec{x}}, \frac{\partial^2 \vec{v}}{\partial \vec{x}^2}, \frac{\partial^2 T}{\partial \vec{x}^2} \rightarrow$$

A) Sólido-fluido

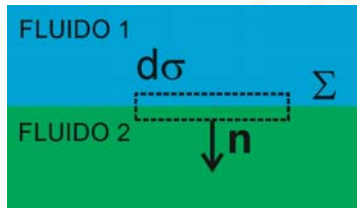


Sobre Σ : $\vec{v} = \vec{v}_s, T = T_s$

Además, si $Q_r = Q_q = 0$:

$$\vec{q} \cdot \vec{n} = \vec{q}_s \cdot \vec{n} \rightarrow K \frac{\partial T}{\partial n} \Big|_{\Sigma} = K_s \frac{\partial T_s}{\partial n} \Big|_{\Sigma}$$

B) Fluido-fluido



$$\Sigma \equiv z_s = f(x, y, t) \rightarrow F = z_s - f(x, y, t) = 0$$

En un instante t: $F(\vec{x}_s, t) = 0$

En un instante t+dt: $F(\vec{x}_s + \vec{v}(\vec{x}_s, t)dt, t + dt) = 0$

Restando y dividiendo entre dt:

$$\frac{DF}{Dt} = \frac{\partial F}{\partial t} + \vec{v}(\vec{x}_s, t) \cdot \nabla F = 0$$

Sobre Σ : $\vec{v}_1(\vec{x}_s) = \vec{v}_2(\vec{x}_s), T_1(\vec{x}_s) = T_2(\vec{x}_s)$

Además, si $Q_r = Q_q = 0$: $\vec{q}_1 \cdot \vec{n} = \vec{q}_2 \cdot \vec{n} \rightarrow K_1 \frac{\partial T_1}{\partial n} \Big|_{\Sigma} = K_2 \frac{\partial T_2}{\partial n} \Big|_{\Sigma}$

Balance de fuerzas: $\vec{n} \cdot \vec{\tau}_1 d\sigma - \vec{n} \cdot \vec{\tau}_2 d\sigma = 0$

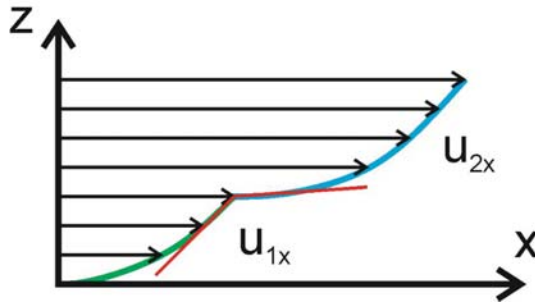
Componente normal: $-p_1 + p_2 + (\vec{n} \cdot \vec{\tau}_1) \cdot \vec{n} - (\vec{n} \cdot \vec{\tau}_2) \cdot \vec{n} = 0$

Si $Re \gg 1$ y tensión superficial despreciable

$$p_1 \approx p_2$$

Componente tangencial (total-normal): $\vec{n} \cdot (\vec{\tau}_1 - \vec{\tau}_2) - \vec{n} [\vec{n} \cdot (\vec{\tau}_1 - \vec{\tau}_2) \cdot \vec{n}] = 0$

Si líquidos unidireccionales ($u_{1z}=u_{2z}=0$):



$$\mu_1 \frac{\partial u_{1x}}{\partial z} = \mu_2 \frac{\partial u_{2x}}{\partial z}$$

$$\nabla \cdot \vec{v} = 0 \rightarrow \frac{\partial u_{1x}}{\partial x} + \frac{\partial u_{1z}}{\partial z} = 0 \rightarrow \frac{\partial u_{1x}}{\partial x} = 0$$

$$\vec{\tau}_1 = \begin{pmatrix} 2\mu_1 \frac{\partial u_{1x}}{\partial z} & \mu_1 \left(\frac{\partial u_{1x}}{\partial z} + \frac{\partial u_{1z}}{\partial x} \right) \\ 2\mu_1 \frac{\partial u_{1z}}{\partial z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \mu_1 \frac{\partial u_{1x}}{\partial z} \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$(\vec{\tau}_1 - \vec{\tau}_2) \cdot \vec{n} = \begin{pmatrix} 0 & \mu_1 \frac{\partial u_{1x}}{\partial z} - \mu_2 \frac{\partial u_{2x}}{\partial z} \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \mu_1 \frac{\partial u_{1x}}{\partial z} - \mu_2 \frac{\partial u_{2x}}{\partial z} \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \rightarrow \mu_1 \frac{\partial u_{1x}}{\partial z} = \mu_2 \frac{\partial u_{2x}}{\partial z}$$



MECÁNICA DE FLUIDOS

Elena de Castro Hernández.

1

Dpto. Ing. Aeroespacial y Mecánica de Fluidos. Universidad de Sevilla.



Tema 9

Movimiento de gases en
toberas y carga/descarga de
depósitos

(6 clases, 7 problemas, 1 vídeo)

Elena de Castro Hernández.

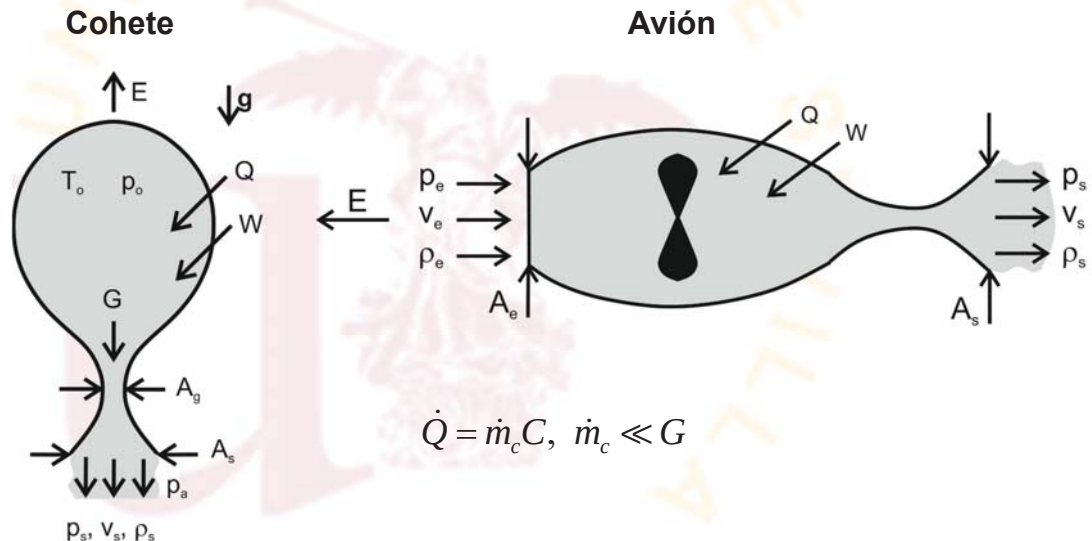
2

Dpto. Ing. Aeroespacial y Mecánica de Fluidos. Universidad de Sevilla.

Introducción

❖ **Tobera:** Tubo corto, $D/L \ll 1$, cuya área es variable, $A(s)$.

❖ **Aplicaciones:**



❖ **2ª Ley Newton aplicada al cohete:**

$$(m_{ch} + m_f) \frac{dv_{ch}}{dt} = E_{ch} - (m_{ch} + m_f)g - \frac{1}{2} \rho_a v_{ch}^2 A_{f,ch} C_{D,ch}$$

$$E_{ch} = Gv_s + (p_s - p_a)A_s$$

❖ **2ª Ley Newton aplicada al avión:**

$$(m_{av} + m_f) \frac{dv_{av}}{dt} = E_{av} - \frac{1}{2} \rho_a v_{av}^2 A_{f,av} C_{D,av}$$

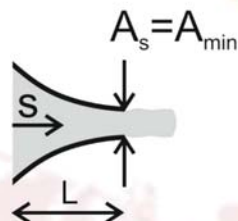
$$E_{av} = G(v_s - v_e) + (p_s - p_a)A_s - (p_e - p_a)A_e$$

Velocidades en un sistema de referencia ligado a la tobera.

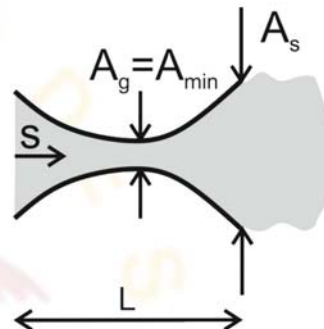
E lo mayor posible $\longrightarrow$ **v_s** lo mayor posible $\longrightarrow$ tobera

❖ Tipos de toberas:

Convergentes



Convergentes-Divergentes



❖ Velocidad del sonido:

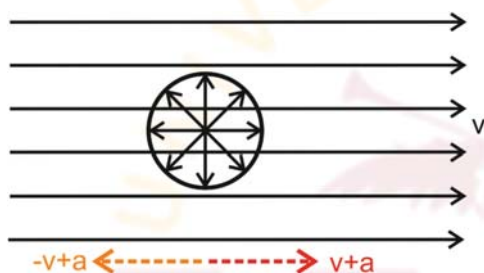
$$a^2 \doteq \left. \frac{\partial p}{\partial \rho} \right|_s, \quad s = c_v \ln \frac{p}{\rho^\gamma} \rightarrow ds = c_v \left(\frac{dp}{p} - \gamma \frac{d\rho}{\rho} \right) = 0 \rightarrow a^2 = \gamma \frac{p}{\rho} = \gamma R_g T$$

$$a_{air} \sim 340 \text{ m/s}$$

$$a_{water} \sim 1500 \text{ m/s}$$

❖ Número de Mach:

$$M = \frac{v}{a}$$



$M < 1$: Flujo **subsónico**, la información se propaga aguas abajo y aguas arriba.

$M = 1$: Flujo **sónico**

$M > 1$: Flujo **supersónico**, la información sólo se propaga aguas abajo

$$p = \rho R_g T \rightarrow \ln p = \ln \rho + \ln R_g + \ln T \rightarrow \frac{d\rho}{\rho} = \frac{dp}{p} - \frac{dT}{T} \sim \frac{\rho v^2}{p} - \frac{\Delta T}{T} =$$

$$= \gamma M^2 - \frac{\Delta T}{T} \rightarrow M^2 \ll 1 \text{ y } \frac{\Delta T}{T} \ll 1 \rightarrow \text{Incompresible} \rightarrow \text{gas} \sim \text{liquido}$$

Vídeo: Channel flow in a compressible fluid

Ecuaciones

❖ Hipótesis:

1) $D/L \ll 1 \rightarrow$ Casi-unidireccional.

2) $Re_L = \frac{\rho v L}{\mu} \gg 1 \rightarrow$ Turbulento $\rightarrow p, T, \rho, v$ uniformes $\forall s$.

3) $St = \frac{t_R}{t_o} = \frac{L/v}{t_o} \ll 1 \rightarrow \frac{\partial}{\partial t} \approx 0$ pero $p, T, \rho, v = f(s, t)$.

4) $Fr = \frac{v^2}{gL} \gg 1 \rightarrow g$ despreciable.

5) $Re_L Pr \gg 1 \rightarrow K$ despreciable.

6) $\frac{\lambda L}{D} \ll 1 \rightarrow$ Fricción despreciable.

❖ Continuidad:

$$\cancel{\frac{\partial}{\partial t}(\rho A)} + \frac{\partial}{\partial s}(\rho v A) = 0 \rightarrow \boxed{\rho(s, t) v(s, t) A(s, t) = G(t) \neq f(s)} \quad (1)$$

❖ Cantidad de movimiento:

$$\cancel{\rho \frac{\partial v}{\partial t}} + \rho \frac{\partial (v^2/2)}{\partial s} + \frac{\partial p}{\partial s} + \cancel{\rho \frac{\partial \mathcal{U}}{\partial s}} = -\cancel{\frac{\lambda \rho v^2}{8r_h}} \rightarrow \boxed{\frac{\partial (v^2/2)}{\partial s} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial s}} \quad (2)$$

❖ Energía:

$$\frac{\partial}{\partial s} \left(h + \frac{v^2}{2} \right) = 0 \rightarrow \boxed{h_o(t) \neq f(s)} \quad (3)$$

❖ **Ecuación de estado:**

$$p(s,t) = \rho(s,t) R_g T(s,t) \quad (4)$$

Tenemos 4 ecuaciones para las 4 incógnitas: p , T , ρ y v .

$$h_o = h + \frac{v^2}{2} = \frac{\gamma}{\gamma-1} \frac{p}{\rho} + \frac{v^2}{2} \quad (2)$$

$$(3) \rightarrow \frac{\partial h_o}{\partial s} = 0 \rightarrow \frac{\partial(v^2/2)}{\partial s} = \frac{-\gamma}{\gamma-1} \frac{\partial(p/\rho)}{\partial s} = \frac{-\gamma}{\gamma-1} \left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial s} - \frac{p}{\rho^2} \frac{\partial \rho}{\partial s} \right) \downarrow = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial s} \rightarrow$$

$$\rightarrow \frac{-1}{\gamma-1} \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial s} = \frac{-\gamma}{\gamma-1} \frac{p}{\rho^2} \frac{\partial \rho}{\partial s} \rightarrow \frac{1}{p} \frac{\partial p}{\partial s} = \gamma \frac{1}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial s} \rightarrow \frac{\partial \ln p}{\partial s} = \gamma \frac{\partial \ln \rho}{\partial s} \rightarrow$$

$$\rightarrow \frac{\partial}{\partial s} \left(\ln \frac{p}{\rho^\gamma} \right) = 0 \rightarrow \frac{p}{\rho^\gamma} = Cte \rightarrow S = Cte \rightarrow$$

Podemos sustituir la ecuación de cantidad de movimiento por:

$$s(t) = s_o(t) \neq f(s) \rightarrow \frac{p(s,t)}{\rho(s,t)^\gamma} = \frac{p_o(t)}{\rho_o(t)^\gamma} \neq f(s) \quad (2')$$

- ❖ Dado que tenemos 2 magnitudes de remanso independientes constantes con s (entalpía y entropía), todas las magnitudes de remanso son constantes con s . Se determinan a partir de las anteriores mediante sus relaciones termodinámicas.
- ❖ Conocidas $p_o(t)$, $\rho_o(t)$, $T_o(t)$ y $A(s)$, podemos calcularlo todo? No! Hay una incógnita escondida en el gasto G : la condición de contorno en presión en la descarga, p_a .
- ❖ Un movimiento sin adición de calor de un fluido ideal conserva la entropía. Si además es estacionario y se pueden despreciar las fuerzas másicas, la magnitud $h+v^2/2$ se conserva a lo largo de una línea de corriente.
- ❖ **Magnitudes de remanso:** Aquellas que se obtienen decelerando un fluido de forma isentrópica, estacionaria y sin fuerzas másicas desde la velocidad v hasta velocidad nula.

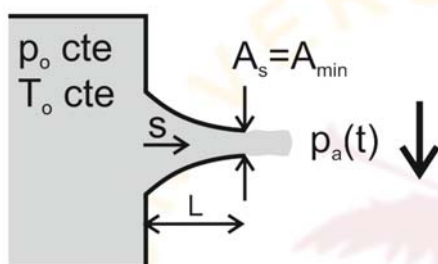
Repaso: magnitudes de remanso para gases perfectos

$$s_o = s, \quad h_o = h + \frac{v^2}{2} \rightarrow c_p T_o = c_p T + \frac{v^2}{2} \rightarrow T_o = T + \frac{v^2}{2c_p}$$

$$\frac{p}{\rho^\gamma} = \frac{p_o}{\rho_o^\gamma} \rightarrow \frac{p_o}{p} = \left(\frac{\rho_o}{\rho} \right)^\gamma = \left(\frac{p_o / R_g T_o}{p / R_g T} \right)^\gamma \rightarrow \left(\frac{p_o}{p} \right)^{1-\gamma} = \left(\frac{T_o}{T} \right)^{-\gamma} \rightarrow \frac{p_o}{p} = \left(\frac{T_o}{T} \right)^{\gamma/(\gamma-1)}$$

$$\left(\frac{\rho_o}{\rho} \right)^\gamma = \left(\frac{T_o}{T} \right)^{\gamma/(\gamma-1)} \rightarrow \frac{\rho_o}{\rho} = \left(\frac{T_o}{T} \right)^{1/(\gamma-1)}$$

Experimento:



$$\begin{aligned} T_s &\neq T_a \\ \rho_s &\neq \rho_a \\ p_s &=? \end{aligned}$$

- ❖ Si $\frac{p_a}{p_o} > \Pi_c \rightarrow v_s < a_s \rightarrow M_s < 1 \rightarrow$ Ondas acústicas pueden viajar aguas arriba informando al fluido del valor de $p_a \rightarrow p_s = p_a$
- ❖ Si $\frac{p_a}{p_o} \leq \Pi_c \rightarrow v_s \geq a_s \rightarrow M_s \geq 1$ (veremos que $M_s = 1$) $\rightarrow p_s = \Pi_c p_o > p_a$
- ❖ Dada la importancia de M a la hora de imponer la CC a la salida, reescribiremos las 4 ecuaciones que resuelven nuestro problema en función de M y de las magnitudes de remanso.

$$h_o = h + \frac{v^2}{2} \rightarrow c_p T_o = c_p T + \frac{v^2}{2} \rightarrow T_o = T + \frac{v^2}{2c_p} \rightarrow \frac{T_o}{T} = 1 + \frac{v^2}{2c_p T} = 1 + \frac{M^2 \gamma R_g T}{2c_p T} =$$

$$= 1 + \frac{\gamma - 1}{2} M^2 \rightarrow \frac{T_o(t)}{T(s,t)} = 1 + \frac{\gamma - 1}{2} M(s,t)^2 \quad (1)$$

$$\frac{p_o}{p} = \left(\frac{T_o}{T} \right)^{\gamma/(\gamma-1)} \rightarrow \frac{p_o(t)}{p(s,t)} = \left[1 + \frac{\gamma - 1}{2} M(s,t)^2 \right]^{\gamma/(\gamma-1)} \quad (2)$$

$$\frac{\rho_o}{\rho} = \left(\frac{T_o}{T} \right)^{1/(\gamma-1)} \rightarrow \frac{\rho_o(t)}{\rho(s,t)} = \left[1 + \frac{\gamma - 1}{2} M(s,t)^2 \right]^{1/(\gamma-1)} \quad (3)$$

$$M = \frac{v}{a} \rightarrow v^2 = a^2 M^2 = \frac{a^2}{a_o^2} a_o^2 M^2 = \frac{\gamma R_g T}{\gamma R_g T_o} a_o^2 M^2 \rightarrow v = a_o M \left(\frac{T_o}{T} \right)^{-1/2} \rightarrow$$

$$\rightarrow \frac{v(s,t)}{a_o(t)} = M(s,t) \left[1 + \frac{\gamma - 1}{2} M(s,t)^2 \right]^{-1/2} \quad (4)$$

$$G = \rho v A = \frac{\rho}{\rho_o} \rho_o \frac{v}{a_o} a_o A \rightarrow G(t) = \rho_o(t) a_o(t) A(s,t) M(s,t) \left[1 + \frac{\gamma - 1}{2} M(s,t)^2 \right]^{\frac{-(\gamma+1)}{2(\gamma-1)}} \quad (5)$$

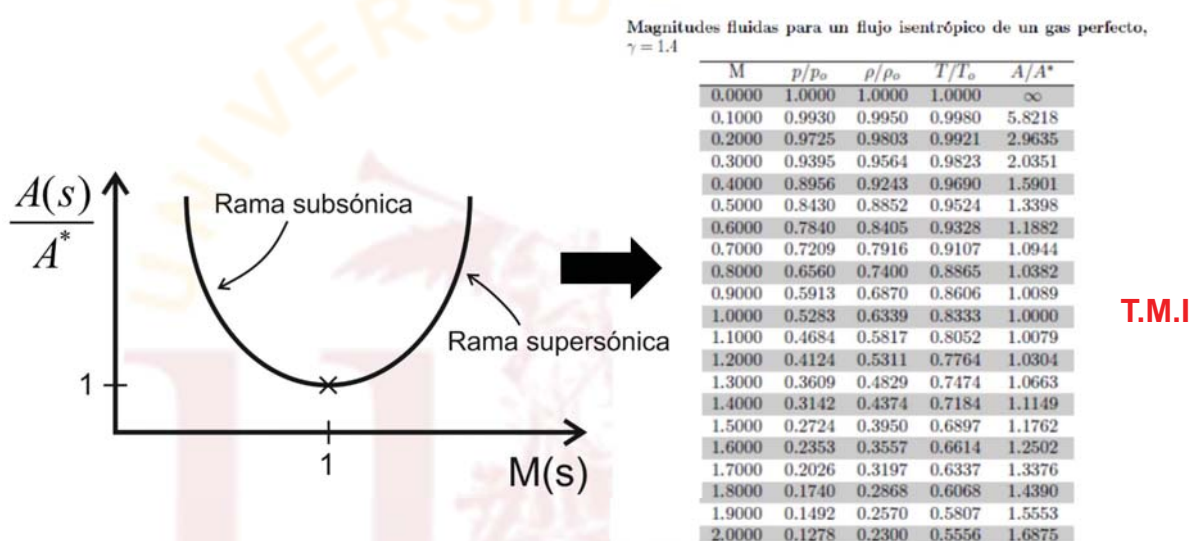
- ❖ Las expresiones (1)-(4) son adimensionales, la (5) no. Para adimensionalizarla se define el área crítica, $A(t)^*$, como aquel valor del área de la tobera (real o ficticia) que da el mismo valor de G cuando $M=1$.

$$G(t) = \rho_o(t) a_o(t) A(t)^* \left[1 + \frac{\gamma-1}{2} \right]^{\frac{-(\gamma+1)}{2(\gamma-1)}} = G(t) = 0.58 \rho_o(t) a_o(t) A(t)^* \quad (6)$$

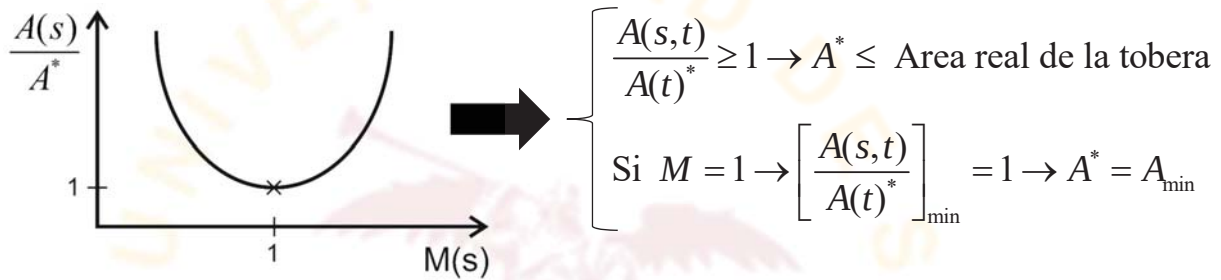
Dividiendo (5) entre (6):

$$\frac{A(s,t)}{A(t)^*} = \frac{1}{M(s,t)} \left(\left[1 + \frac{\gamma-1}{2} M(s,t)^2 \right] \frac{2}{\gamma+1} \right)^{\frac{(\gamma+1)}{2(\gamma-1)}} \quad (7)$$

- ❖ La representación gráfica de (7) proporciona:

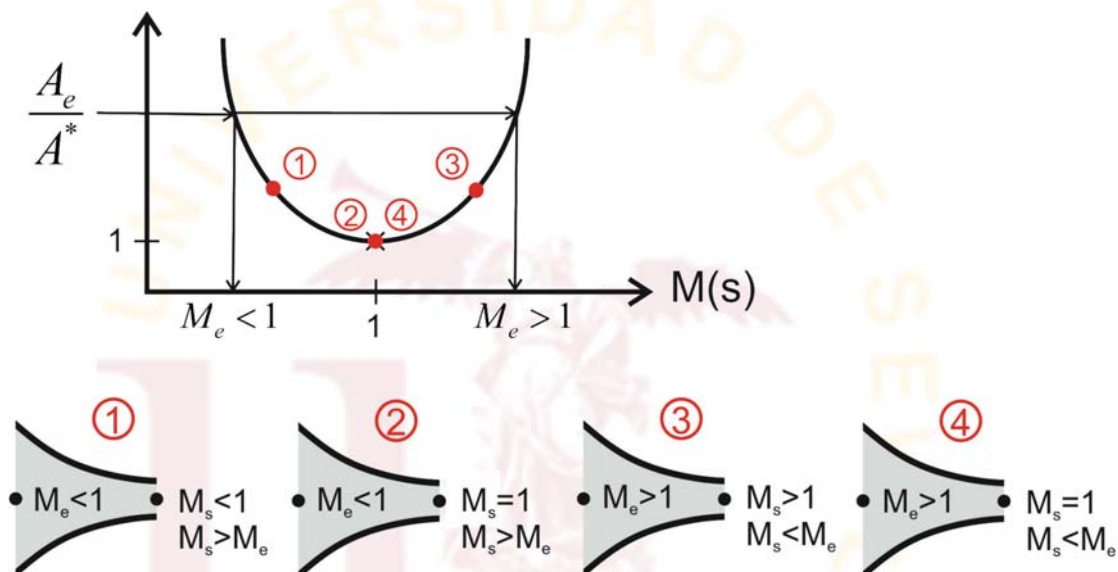


Conocidas A^* y $A(s)$ con la tabla de movimiento isentrópico podemos obtener $M(s)$, $p(s)$, $\rho(s)$, $T(s)$ y, por tanto $v(s)$.



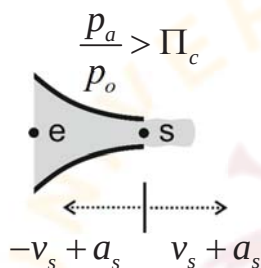
- ❖ **Tobera bloqueada:** Existe un s tal que $M(s)=1$ y $A^*=A_{\min}$ (A_s si Convergente, A_g si Convergente-Divergente).
- ❖ **Tobera desbloqueada:** $M(s)<1$ para todo s y A^* no tiene porqué coincidir con ningún área real de la tobera.

Toberas Convergentes



Los casos (3) y (4) no interesan puesto que disminuye la velocidad a la salida y las toberas se emplean justo para lo contrario.

Tobera Convergente desbloqueada



$$\bullet M_e < 1 \rightarrow M_s < 1$$

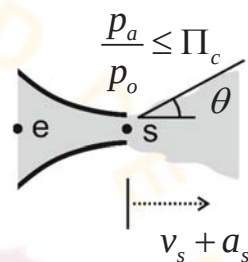
$$\bullet p_s = p_a$$

$$\bullet E = Gv_s$$

$$\Pi_c = \frac{p_a}{p_o} = \left[1 + \frac{\gamma - 1}{2} \right]^{-\gamma/(\gamma - 1)} = 0.53$$

Tiramos la mitad (0.53) de p_o y por este motivo se recurre a las toberas Convergentes-Divergentes.

Tobera Convergente bloqueada



$$\bullet M_e < 1 \rightarrow M_s = 1$$

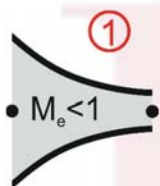
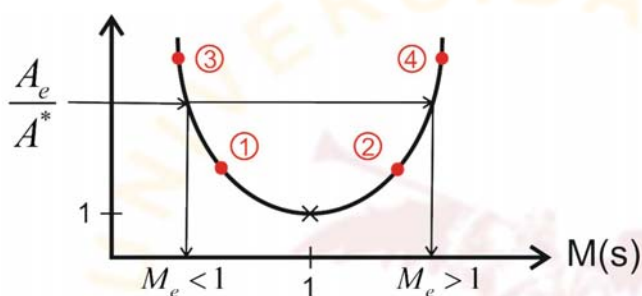
$$\bullet p_s = \Pi_c p_o \geq p_a$$

$$\bullet A^* = A_{\min} = A_s$$

$$\bullet G = G^* = 0.58 \rho_o a_o A^*$$

$$\bullet E = G^* v_s + (\Pi_c p_o - p_a) A^*$$

Toberas Convergentes-Divergentes



$$\frac{A}{A^*} \downarrow \rightarrow M, v \uparrow \rightarrow$$

$$\rightarrow p, \rho, T \downarrow \sim \text{liquido}$$



$$\frac{A}{A^*} \downarrow \rightarrow M, v \downarrow \rightarrow$$

$$\rightarrow p, \rho, T \uparrow \neq \text{liquido}$$



$$\frac{A}{A^*} \uparrow \rightarrow M, v \downarrow \rightarrow$$

$$\rightarrow p, \rho, T \uparrow \sim \text{liquido}$$



$$\frac{A}{A^*} \uparrow \rightarrow M, v \uparrow \rightarrow$$

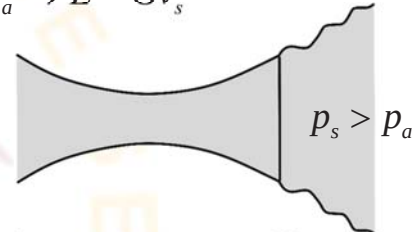
$$\rightarrow p, \rho, T \downarrow \neq \text{liquido}$$

- ❖ Tobera Convergente-Divergente: Combinación de los casos (1) y (4) nos proporciona la mayor v_s posible y, por tanto, el mayor Empuje.

$$E = Gv_s + (p_s - p_a)A_s$$

- ❖ **Tobera adaptada:** Empuje óptimo, $M_s > 1$ y $p_s = p_a \rightarrow E = Gv_s$

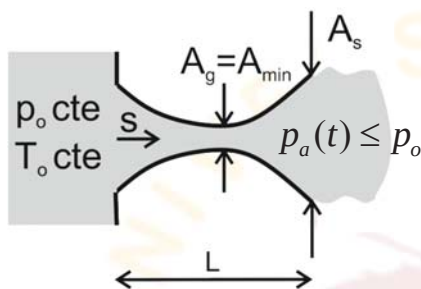
- ❖ **Tobera Subexpandida:** Desaprovecha p_s .



- ❖ **Tobera Sobre-expandida:** $(p_s - p_a)A_s < 0 \rightarrow E \downarrow$



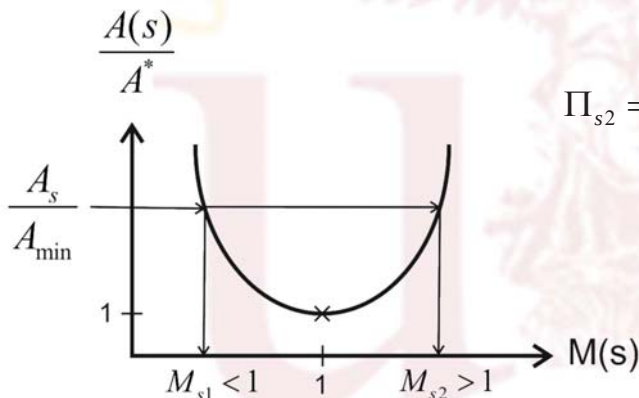
- ❖ La tobera tiene una geometría dada y aunque se diseña para unas condiciones de crucero también funciona en otras condiciones ya que p_a/p_o varía con el tiempo.



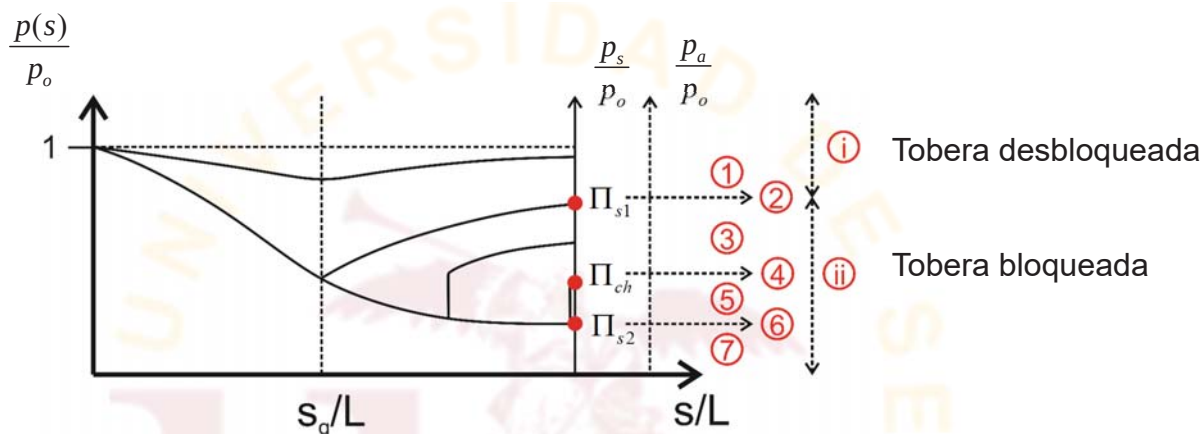
- ❖ Cuáles son los valores de p_a/p_o para los que la tobera está bloqueada?
Si la tobera está bloqueada $A^* = A_{min}$.

$$\Pi_{s1} = \frac{p_s(M_s = M_{s1})}{p_o} = \left[1 + \frac{\gamma-1}{2} M_{s1}^2 \right]^{-\gamma/(\gamma-1)}$$

$$\Pi_{s2} = \frac{p_s(M_s = M_{s2})}{p_o} = \left[1 + \frac{\gamma-1}{2} M_{s2}^2 \right]^{-\gamma/(\gamma-1)}$$



- ❖ Nótese que M_{s1} , M_{s2} , Π_{s1} , Π_{s2} y Π_{ch} son funciones sólo y exclusivamente del cociente de áreas A_s/A_{min} .



- 1) Tobera desbloqueada
- 2) Tobera bloqueada por primera/última vez
- 3) Onda choque normal
- 4) Onda choque salida
- 5) Onda choque oblicua
- 6) Tobera adaptada
- 7) Abanico expansión Prandtl-Meyer

- ❖ Si $p_a/p_o = \Pi_{s1}$ ó Π_{s2} tobera bloqueada, no existen ondas de choque, evolución isentrópica, tramo Convergente no cambia, tramo Divergente distinto.
 - ❖ Si $p_a/p_o = \Pi_{s1}$: Subsónico $M, v \downarrow p, \rho, T \uparrow$
 - ❖ Si $p_a/p_o = \Pi_{s2}$: Supersónico $M, v \uparrow p, \rho, T \downarrow$
- ❖ $\Pi_{s1} > \Pi_c = 0.53$: Es más fácil bloquear una tobera Convergente-Divergente.
- ❖ $p_a/p_o > \Pi_{s1}$: Tobera desbloqueada.
- ❖ $p_a/p_o \leq \Pi_{s1}$: Tobera bloqueada. Tramo Convergente no cambia.

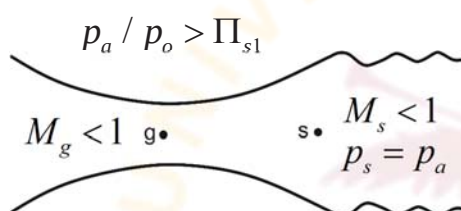
En cuanto $p_a/p_0 < \Pi_{s1}$ el gas evoluciona supersónicamente y, por tanto, se acelera en el tramo Divergente de la tobera. Para poder cumplir con la condición de contorno en presión a la salida, p_a , ha de comprimirse supersónicamente.

Esta compresión supersónica se realiza a través de una onda de choque, discontinuidad que implica una pérdida de presión de remanso y una evolución no isentrópica. Tanto antes como después de la onda de choque la evolución si es isentrópica y las magnitudes de remanso se conservan.

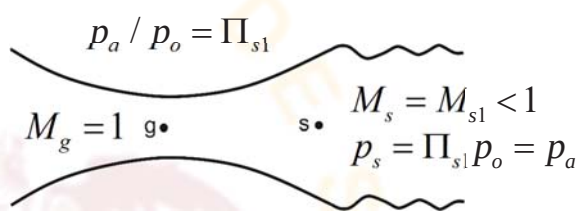
- ❖ Si $p_a/p_o \leq \Pi_{ch}$ Nada cambia dentro de la tobera. El gas se adapta a la presión p_a fuera de la tobera, ya sea mediante ondas de choque oblicuas o mediante un abanico de ondas de expansión de Prandtl-Meyer.

Resumen de toberas Convergentes-Divergentes

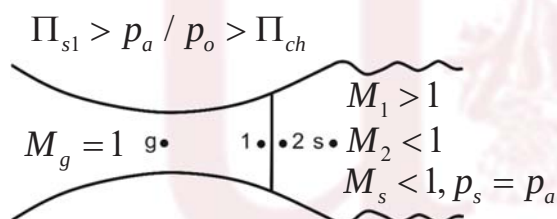
1 Tobera desbloqueada



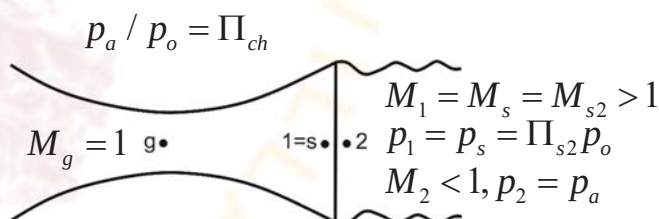
2 Tobera bloqueada



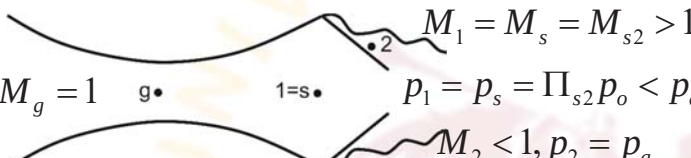
3 Onda choque normal



4 Onda choque normal salida



5 Onda choque oblicua

$$\Pi_{ch} > p_a / p_o > \Pi_{s2}$$


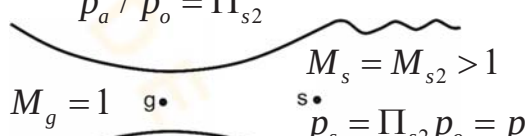
$$M_1 = M_s = M_{s2} > 1$$

$$M_g = 1 \quad g \bullet \quad 1=s \bullet$$

$$p_1 = p_s = \Pi_{s2} p_o < p_a$$

$$M_2 < 1, p_2 = p_a$$

6 Tobera adaptada

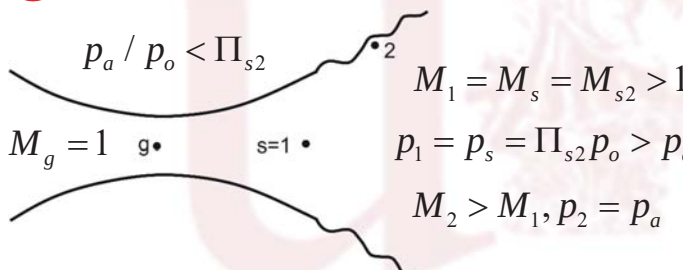
$$p_a / p_o = \Pi_{s2}$$


$$M_s = M_{s2} > 1$$

$$M_g = 1 \quad g \bullet \quad s \bullet$$

$$p_s = \Pi_{s2} p_o = p_a$$

7 Expansión Prandtl-Meyer

$$p_a / p_o < \Pi_{s2}$$


$$M_1 = M_s = M_{s2} > 1$$

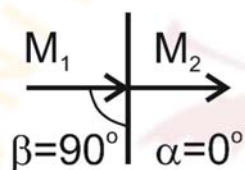
$$M_g = 1 \quad g \bullet \quad s=1 \bullet$$

$$p_1 = p_s = \Pi_{s2} p_o > p_a$$

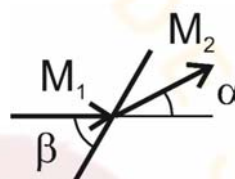
$$M_2 > M_1, p_2 = p_a$$

Relaciones de Rankine-Hugoniot

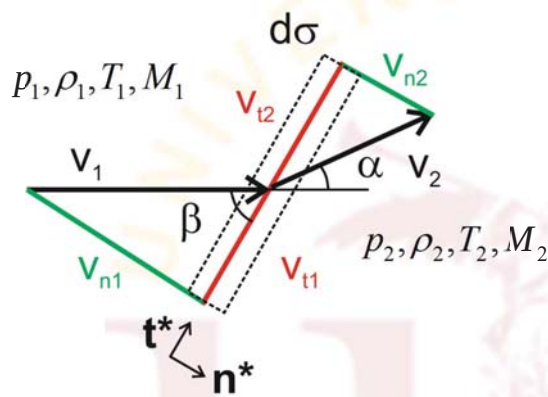
Onda choque normal



Onda choque oblicua



β : Ángulo de incidencia α : Ángulo de deflexión



Por trigonometría:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{v_{n1}}{v_{t1}} = \tan \beta \quad \frac{v_{n2}}{v_{t2}} = \tan(\beta - \alpha) \\ v_{n1} = v_1 \sin \beta \quad v_{n2} = v_2 \sin(\beta - \alpha) \\ M_{n1} = M_1 \sin \beta \quad M_{n2} = v_2 \sin(\beta - \alpha) \end{array} \right.$$

Para la aplicación de las ecuaciones de conservación tomaremos un sistema de referencia solidario a la onda de choque.

❖ Continuidad:

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega_c} \rho(\vec{x}, t) d\omega + \int_{\Sigma_c} \rho(\vec{v} - \vec{v}_c) \cdot \vec{n} d\sigma = 0 \rightarrow -\rho_1 v_{n1} d\sigma + \rho_2 v_{n2} d\sigma = 0 \rightarrow$$

$$St \ll 1 \rightarrow \boxed{\rho_1 v_{n1} = \rho_2 v_{n2}}$$

❖ Cantidad de movimiento:

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega_c} \rho \vec{v} d\omega + \int_{\Sigma_f} \rho \vec{v} (\vec{v} - \vec{v}_c) \cdot \vec{n} d\sigma = \int_{\Sigma_c} -p \vec{n} d\sigma + \int_{\Sigma_c} \vec{n} \cdot \vec{\tau} d\sigma + \int_{\Omega_c} \rho \vec{f}_m d\omega \rightarrow$$

$$St \ll 1 \quad Re \gg 1 \quad Fr \gg 1$$

$$\rightarrow -\rho_1 v_{n1} (v_{n1} \vec{n}^* + v_{t1} \vec{t}^*) d\sigma + \rho_2 v_{n2} (v_{n2} \vec{n}^* + v_{t2} \vec{t}^*) d\sigma = p_1 \vec{n}^* d\sigma - p_2 \vec{n}^* d\sigma \rightarrow$$

$$\rightarrow \boxed{p_1 + \rho_1 v_{n1}^2 = p_2 + \rho_2 v_{n2}^2 \quad y \quad v_{t1} = v_{t2}}$$

❖ Energía:

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega_c} \rho \left(e + \frac{v^2}{2} \right) d\omega + \int_{\Sigma_c} \rho \left(h + \frac{v^2}{2} \right) (\vec{v} - \vec{v}_c) \cdot \vec{n} d\sigma =$$

$$St \ll 1$$

$$= \int_{\Sigma_c} -p \vec{n} \cdot \vec{x}_c d\sigma + \int_{\Sigma_c} \vec{n} \cdot \vec{\tau} \cdot \vec{v} d\sigma + \int_{\Omega_c} \rho \vec{f}_m \cdot \vec{v} d\omega + \int_{\Omega_c} (Q_r + Q_q) d\omega + \int_{\Sigma_c} K \nabla T \cdot \vec{n} d\sigma \rightarrow$$

$$Re \gg 1 \quad Fr \gg 1 \quad RePr \gg 1$$

$$\rightarrow -\rho_1 v_{n1} h_{o1} d\sigma + \rho_2 v_{n2} h_{o2} d\sigma = 0 \rightarrow h_{o1} = h_{o2} \rightarrow T_{o1} = T_{o2} \rightarrow a_{o1} = a_{o2}$$

$$\rho_{o1} \neq \rho_{o2} \text{ y } p_{o1} \neq p_{o2} \text{ ya que } s_2 - s_1 > 0$$

$$\uparrow h_o = c_p T_o \quad \uparrow a_o = \sqrt{\gamma R g T_o}$$

$$G_1 = G_2 \rightarrow \rho_{o1} A_1^* = \rho_{o2} A_2^* \rightarrow \frac{A_2^*}{A_1^*} = \frac{\rho_{o1}}{\rho_{o2}} = \frac{p_{o1}}{p_{o2}}$$

Salto de magnitudes fluidas a través de una onda de choque para un gas perfecto, $\gamma = 1.4$

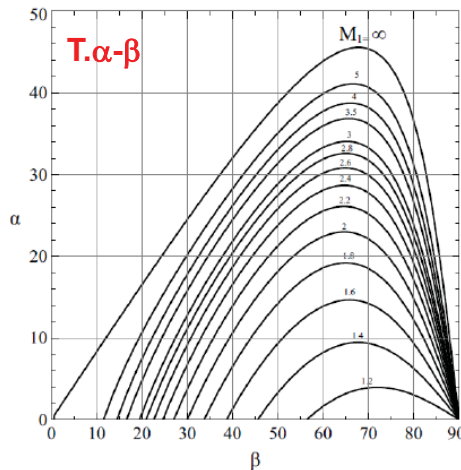
M_{n1}	M_{n2}	p_2/p_1	ρ_2/ρ_1	T_2/T_1	p_{o2}/p_{o1}	A_2^*/A_1^*
1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
1.1000	0.9118	1.2450	1.1691	1.0649	0.9989	1.0011
1.2000	0.8422	1.5133	1.3416	1.1280	0.9928	1.0073
1.3000	0.7860	1.8050	1.5157	1.1909	0.9794	1.0211
1.4000	0.7397	2.1200	1.6897	1.2547	0.9582	1.0436
1.5000	0.7011	2.4583	1.8621	1.3202	0.9298	1.0755
1.6000	0.6684	2.8200	2.0317	1.3880	0.8952	1.1171
1.7000	0.6405	3.2050	2.1977	1.4583	0.8557	1.1686
1.8000	0.6165	3.6133	2.3592	1.5316	0.8127	1.2305
1.9000	0.5956	4.0450	2.5157	1.6079	0.7674	1.3032
2.0000	0.5774	4.5000	2.6667	1.6875	0.7209	1.3872
2.1000	0.5613	4.9783	2.8119	1.7705	0.6742	1.4832
2.2000	0.5471	5.4800	2.9512	1.8569	0.6281	1.5920
2.3000	0.5344	6.0050	3.0845	1.9468	0.5833	1.7144
2.4000	0.5231	6.5533	3.2119	2.0403	0.5401	1.8514
2.5000	0.5130	7.1250	3.3333	2.1375	0.4990	2.0039
2.6000	0.5039	7.7200	3.4490	2.2383	0.4601	2.1733
2.7000	0.4956	8.3383	3.5590	2.3429	0.4236	2.3608
2.8000	0.4882	8.9800	3.6636	2.4512	0.3895	2.5676
2.9000	0.4814	9.6450	3.7629	2.5632	0.3577	2.7954
3.0000	0.4752	10.3333	3.8571	2.6790	0.3283	3.0456

T.O.Ch

Ángulo onda choque oblicua

$$v_{t1} = v_{t2} \rightarrow \frac{v_{n1}}{\tan \beta} = \frac{v_{n2}}{\tan(\beta - \alpha)} \rightarrow \frac{\tan(\beta - \alpha)}{\tan \beta} = \frac{v_{n2}}{v_{n1}} = \frac{2 + (\gamma - 1)M_1^2 \sin^2 \beta}{(\gamma + 1)M_1^2 \sin^2 \beta}$$

Relación entre ángulo incidente, β , y ángulo de deflexión, α , para una onda de choque oblicua, $\gamma = 1.4$



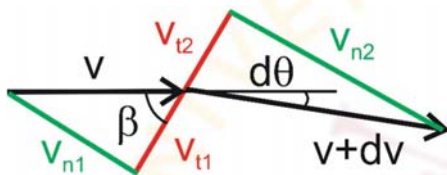
$$\beta = \frac{\pi}{2} \equiv O.Ch.Normal$$

$$\alpha = 0 \rightarrow \sin \beta = \frac{1}{M_1} \rightarrow M_{n1} = 1 \rightarrow T.O.Ch \rightarrow$$

$$\frac{p_2}{p_1} = 1, \frac{p_{o2}}{p_{o1}} = 1 \text{ y } s_2 = s_1 \equiv \text{Onda Mach}$$

- ❖ Onda Mach: O.Ch.Oblicua muy débil, degenerada.
- ❖ Abanico expansión Prandtl-Meyer: Sucesión continua ondas de Mach

Ángulo onda Mach



$$v_{t1} = v_{t2} \rightarrow v \cos \beta = (v + dv) \cos(\beta + d\theta) \rightarrow$$

$$\rightarrow \frac{v + dv}{v} = \frac{\cos \beta}{\cos(\beta + d\theta)} = 1 + \frac{dv}{v} = \frac{\cos \beta}{\cos \beta \cos d\theta - \sin \beta \sin d\theta} =$$

$$= \frac{\cos \beta}{\cos \beta - d\theta \sin \beta} = \frac{1}{1 - d\theta \tan \beta} \approx 1 + \theta \tan \beta \rightarrow \frac{dv}{v} = d\theta \tan \beta = \frac{d\theta}{\sqrt{M^2 - 1}} \quad (1)$$

$$(1 + \varepsilon)^\alpha \approx 1 + \alpha \varepsilon \text{ si } \varepsilon \ll 1$$

$$\sin \beta = 1 / M_1$$

$$v = a_o M \left[1 + \frac{\gamma - 1}{2} M^2 \right]^{-1/2} \rightarrow \ln v = \ln a_o + \ln M - \frac{1}{2} \ln \left[1 + \frac{\gamma - 1}{2} M^2 \right] \rightarrow$$

Función de Prandtl-Meyer para un gas perfecto, $\gamma = 1.4$

M	ν
1.0000	0.0000
1.1000	0.0233
1.2000	0.0621
1.3000	0.1077
1.4000	0.1569
1.5000	0.2078
1.6000	0.2594
1.7000	0.3108
1.8000	0.3617
1.9000	0.4117
2.0000	0.4604
2.2000	0.5538
2.4000	0.6413
2.6000	0.7228
2.8000	0.7984
3.0000	0.8684
3.5000	1.0220
4.0000	1.1480
4.5000	1.2540
5.0000	1.3430
6.0000	1.4830
7.0000	1.5880
8.0000	1.6690
9.0000	1.7330
10.0000	1.7860
20.0000	2.0280
30.0000	2.1770

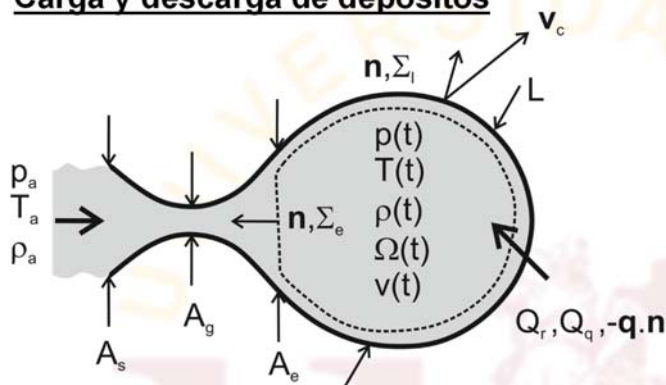
T.P-M

$$\rightarrow dLnv = \frac{dv}{v} = \frac{dM}{M} - \frac{1}{2} \left[\frac{(\gamma-1)M dM}{1 + \frac{\gamma-1}{2} M^2} \right] \quad (2)$$

$$\textcircled{1} + \textcircled{2} \rightarrow d\theta = f(M)dM \rightarrow$$

$$\rightarrow \theta = \int_{M_1=M_{s_2}}^{M_2} f(M)dM = \nu(M_2) - \nu(M_{s_2})$$

Carga y descarga de depósitos



❖ Hipótesis:

$$1) L^2 \gg A_p \rightarrow v(t) \sim v_0 \ll v_e$$

$$2) M_o^2 \ll 1 \rightarrow p(t) \text{ uniforme y } v(t) \simeq 0$$

$$3) \frac{\Delta_L T}{T_o} \ll 1 \rightarrow T(t) \text{ uniforme}$$

$\rightarrow \rho(t)$ uniforme

❖ Continuidad:

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega_c} \rho(\vec{x}, t) d\varpi + \int_{\Sigma_c} \rho(\vec{v} - \vec{v}_c) \cdot \vec{n} d\sigma = 0 \rightarrow \frac{d}{dt} [\rho(t)\Omega(t)] = G(t)$$

$\Sigma_c = \Sigma_e \cup \Sigma_f(t)$

❖ Energía:

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dt} \int_{\Omega_c} \rho \left(e + \frac{v^2}{2} \right) d\varpi + \int_{\Sigma_c} \rho \left(h + \frac{v^2}{2} \right) (\vec{v} - \vec{v}_c) \cdot \vec{n} d\sigma = \\ & = \underbrace{\int_{\Sigma_c} -p \vec{n} \cdot \vec{v}_c d\sigma}_{(C) \quad x \text{ v} = 0 \text{ o uniforme}} + \underbrace{\int_{\Sigma_c} \vec{n} \cdot \vec{v} d\sigma}_{(B)} + \underbrace{\int_{\Omega_c} \rho \vec{f}_m \cdot \vec{x} d\varpi}_{Fr \gg 1} + \underbrace{\int_{\Sigma_c} (Q_r + Q_q) d\varpi + \int_{\Sigma_c} K \nabla T \cdot \vec{n} d\sigma}_{(D)} \rightarrow \end{aligned}$$

(A) En el depósito, no en la tobera: $e = c_v T \sim 10^3 \cdot 300 \gg \frac{v^2}{2} \sim 1 \rightarrow$

$$\rightarrow e = c_v T = \frac{c_v}{R_g} \frac{p}{\rho} = \frac{1}{\gamma - 1} \frac{p}{\rho} \rightarrow \frac{d}{dt} \int_{\Omega_c} \rho \left(e + \frac{v^2}{2} \right) d\varpi = \frac{1}{\gamma - 1} \frac{d}{dt} [p(t)\Omega(t)]$$

(B) $\int_{\Sigma_c = \Sigma_e \cup \Sigma_f(t)} \rho \left(h + \frac{v^2}{2} \right) (\vec{v} - \vec{v}_c) \cdot \vec{n} d\sigma = -G(t)h_{oe}(t)$

x Pared

(C) $\int_{\Sigma_c = \Sigma_e \cup \Sigma_f(t)} -p \vec{n} \cdot \vec{v}_c d\sigma = -p(t) \frac{d\Omega(t)}{dt}$

x Fija

(D) $\dot{Q}$

Carga:

$$\frac{d}{dt}[\rho(t)\Omega(t)] = G(t) \quad (1)$$

$$\frac{1}{\gamma-1} \frac{d}{dt}[p(t)\Omega(t)] = G(t) \underset{\substack{\uparrow \\ h_a}}{h_{oe}(t)} - p(t) \frac{d\Omega(t)}{dt} + \dot{Q}(t) \quad (2)$$

Descarga:

$$\frac{d}{dt}[\rho(t)\Omega(t)] = -G(t) \quad (1)$$

$$\frac{1}{\gamma-1} \frac{d}{dt}[p(t)\Omega(t)] = -G(t) \underset{\substack{\uparrow \\ h_d}}{h_{oe}(t)} - p(t) \frac{d\Omega(t)}{dt} + \dot{Q}(t) \quad (2)$$

❖ Si $Q=0$ la descarga es isentrópica:

$$(1) \rightarrow \frac{d\rho}{dt}\Omega + \frac{d\Omega}{dt}\rho = -G$$

$$h_{oe} = h_{od} = h_d = c_p T = \frac{c_p}{R_g} \frac{p}{\rho} = \frac{\gamma}{\gamma-1} \frac{p}{\rho}$$

$$(2) \rightarrow \frac{1}{\gamma-1} \left(\frac{dp}{dt}\Omega + p \frac{d\Omega}{dt} \right) = \left(\frac{d\rho}{dt}\Omega + \frac{d\Omega}{dt}\rho \right) \frac{\gamma}{\gamma-1} \frac{p}{\rho} - p \frac{d\Omega}{dt} \rightarrow$$

$$\rightarrow \frac{\Omega}{\gamma-1} \frac{dp}{dt} = \frac{\gamma}{\gamma-1} \frac{p\Omega}{\rho} \frac{d\rho}{dt} \rightarrow \frac{dp}{p} = \gamma \frac{d\rho}{\rho} \rightarrow \boxed{\frac{p(t)}{\rho(t)^\gamma} = \frac{p(0)}{\rho(0)^\gamma}}$$