

Análisis y operación de sistemas de energía eléctrica

Coordinador: **Antonio Gómez Expósito**

Autores

(por orden alfabético)

Ali Abur	<i>Texas A&M University</i>
Fernando L. Alvarado	<i>University of Wisconsin – Madison</i>
Carlos Álvarez Bel	<i>Universidad Politécnica de Valencia</i>
Claudio Cañizares	<i>University of Waterloo</i>
José Cidrás Pidre	<i>Universidad de Vigo</i>
Antonio J. Conejo Navarro	<i>Universidad de Castilla – La Mancha</i>
Antonio Fernández Otero	<i>Universidad de Vigo</i>
Francisco Galiana García	<i>McGill University</i>
Julio García Mayordomo	<i>Universidad Politécnica de Madrid</i>
Antonio Gómez Expósito	<i>Universidad de Sevilla</i>
José L. Martínez Ramos	<i>Universidad de Sevilla</i>
Juan A. Martínez Velasco	<i>Universidad Politécnica de Cataluña</i>
J. Félix Miñambres Argüelles	<i>Universidad del País Vasco</i>
J. Ignacio Pérez Arriaga	<i>Universidad Pontificia Comillas</i>
Víctor H. Quintana	<i>University of Waterloo</i>
Michel Rivier Abbad	<i>Universidad Pontificia Comillas</i>
Luis Rouco Rodríguez	<i>Universidad Pontificia Comillas</i>
Julio Usaola García	<i>Universidad Carlos III</i>

La perseverancia toda cosa alcanza
Refranero español

Presentación

Me proporciona una gran satisfacción decir unas palabras acerca de esta obra, que ha coordinado Antonio Gómez, nuestro querido compañero en la aventura docente. Tengo múltiples razones para ello. En primer lugar, me halaga, porque al solicitarme esta presentación, cuando en nuestro campo de la energía eléctrica hay tantas personas relevantes y de mucho más mérito, revela que Antonio corresponde al mucho afecto y estimación que yo le tengo. Además, creo sinceramente que soy yo el que más se honra atendiendo a su requerimiento.

Hay también razones objetivas, que son las más importantes. En efecto, esta obra, *Análisis y operación de los sistemas de energía eléctrica*, significa una verdadera revolución, como herramienta docente, en el campo que le es propio. Usualmente, los libros de texto, utilizados en los cursos introductorios a la ingeniería, tienen por finalidad proporcionar una formación básica y general, como capacitación para abordar conocimientos más específicos y profundos, bien en materias que tienen entidad y características para constituir una asignatura propia, bien en los estudios de postgrado, o bien en el ejercicio profesional. Por el contrario, en esta obra que presentamos se rompe con esa actitud tradicional y se tiende a presentar el estado del arte, en la actualidad, de los distintos temas. No en vano, los autores de los distintos capítulos son protagonistas de avances importantes y actuales en las materias que exponen.

Otro motivo de satisfacción es que se haya producido tan estrecha colaboración entre tan diversos autores, dieciocho en total, cada uno aportando sus conocimientos en su ámbito de mayor competencia. Es una experiencia de la que no conozco antecedentes en nuestro campo de la ingeniería eléctrica, al menos en cuanto a una obra de finalidad docente se refiere.

Partiendo del hecho reconocido de que, en la actualidad, la aportación global de autores de lengua española al avance en las diversas parcelas de los sistemas de energía eléctrica, ha alcanzado un volumen significativo, como se aprecia en las publicaciones técnicas más destacadas, la idea que ha presidido la realización de este libro ha sido la de actuar conjuntamente, de forma que cada autor, al exponer los temas en que tiene mayor competencia, pueda proporcionar al lector una información profunda y de vanguardia.

Una consecuencia es clara. Los alumnos se beneficiarán así de una información de primera mano que les proporcionará, sin duda, los matices y reflexiones que sólo se alcanzan cuando se ha trabajado profundamente en un tema y, mucho más, cuando se ha aportado una novedad o avance significativo, como es el caso.

Otra consecuencia va a ser el éxito editorial de la obra. Así lo preveo, tanto en nuestra

patria como en Hispanoamérica. En cuanto a Estados Unidos y Canadá, son válidas las mismas razones que para las naciones de lengua española. Además, la participación, como autores, de algunos profesores de gran prestigio internacional, que ejercen la docencia y la investigación en universidades de estos países, avala también el libro.

De cualquier forma, este libro va a ser un revulsivo en la enseñanza de los sistemas de energía eléctrica. Marcará un hito, habrá un antes y un después. Y mejorará notablemente la capacitación de las nuevas generaciones de ingenieros. Esto es un sueño, un sueño que hemos acariciado por largos años y que esperamos con ilusión ver convertido en realidad.

Consideramos también importantísimo para los estudiantes el ejemplo de colaboración que han dado los dieciocho autores. Aunque nuestros alumnos no reflexionen concretamente sobre ello, siempre operará en su subconsciente el hecho de que resulta ventajosa y de utilidad la colaboración en el trabajo. Y esto es una enseñanza apreciable.

No considero necesario decir más. Si acaso, como resumen, señalar que esta obra pretende ser el vehículo directo para encaminar a nuestros estudiantes de ingeniería eléctrica, y a los profesionales correspondientes, hacia los conocimientos más avanzados en ese campo.

Valentín M. Parra Prieto
Profesor emérito

Contenido

Prólogo	xix
1. Los sistemas de energía eléctrica	1
1.1. Una primera visión	1
1.1.1. El producto electricidad	1
1.1.2. El mayor sistema industrial creado por la Humanidad	2
1.1.3. Evolución histórica: los orígenes	5
1.1.4. Evolución histórica: la organización del sector eléctrico	7
1.1.5. El impacto medioambiental	9
1.1.6. Los puntos de vista tecnológico, económico y regulador	10
1.2. El contexto tecnológico	10
1.2.1. Configuración y estructura de un sistema de energía eléctrica	10
1.2.2. El consumo	12
1.2.3. La producción	21
1.2.4. El transporte	27
1.2.5. La distribución	30
1.2.6. Control y protección	30
1.3. El contexto económico	33
1.3.1. El sector eléctrico y la actividad económica	33
1.3.2. La gestión económica de un sistema eléctrico: planificación y operación del sistema	35
1.3.3. Las funciones de expansión y operación en el contexto tradicional	36
1.3.4. Las funciones de planificación y operación en el nuevo contexto regulador del sector	41
1.4. El contexto regulador	45
1.4.1. Regulación tradicional y regulación en competencia	45
1.4.2. La nueva regulación eléctrica: motivación	46
1.4.3. La nueva regulación eléctrica: en qué consiste	47
1.4.4. Naturaleza de las actividades eléctricas	47
1.4.5. Separación de actividades	49
1.4.6. Las actividades de generación	49
1.4.7. Las actividades de red	51
1.4.8. Las actividades de transacción	56

1.4.9. Actividades complementarias	59
1.4.10. Las actividades de coordinación	59
1.4.11. Completando el nuevo marco regulatorio	61
1.4.12. El nuevo marco regulatorio español	63
1.5. Retos y perspectivas de futuro	66
2. Elementos de los sistemas de energía eléctrica	69
2.1. Modelización de redes de energía eléctrica	69
2.2. Valores por unidad	71
2.2.1. Definición	71
2.2.2. Elección y cambio de base	76
2.3. Líneas eléctricas	77
2.3.1. Parámetros de líneas	77
2.3.2. Cables aislados	89
2.3.3. Modelos de líneas en régimen estacionario sinusoidal	94
2.3.4. Condiciones de funcionamiento de las líneas eléctricas	98
2.3.5. Líneas alimentando a distintos modelos de cargas	100
2.4. Transformadores de potencia	105
2.4.1. Transformador monofásico	105
2.4.2. Transformador trifásico	108
2.4.3. Transformadores de tres devanados	112
2.4.4. Transformadores regulables	114
2.5. La máquina síncrona	117
2.5.1. Máquina síncrona de rotor cilíndrico	117
2.5.2. Condiciones de funcionamiento de la máquina síncrona	123
2.5.3. Máquina síncrona de rotor de polos salientes	126
2.6. La máquina asíncrona o de inducción	128
2.7. Consumos	131
2.7.1. Modelos estacionarios	132
2.7.2. Modelos funcionales	133
2.7.3. Modelos predictivos	134
3. Flujo de cargas	139
3.1. Introducción	139
3.2. Formulación del problema	140
3.3. Métodos iterativos simples	144
3.3.1. Método de Gauss-Seidel	145
3.3.2. Método basado en la matriz de impedancias	146
3.4. Método de Newton-Raphson	147
3.4.1. Formulación polar	148
3.4.2. Formulación rectangular	151
3.5. Método desacoplado rápido	152
3.6. Flujo de cargas en continua	156
3.7. Ajuste de límites y reguladores	158

3.7.1.	Límites de reactiva en nudos PV	159
3.7.2.	Transformadores reguladores	160
3.7.3.	Intercambio entre áreas	161
3.8.	Aplicación a redes de distribución radiales	162
3.9.	Sistemas de gran dimensión	163
4.	Estimación de estado	171
4.1.	Introducción	171
4.2.	Formulación del problema	174
4.2.1.	Modelo de la red y del sistema de medidas	175
4.3.	Solución mediante las ecuaciones normales	179
4.3.1.	Estimador desacoplado rápido	183
4.4.	Análisis de observabilidad	185
4.4.1.	Análisis numérico de observabilidad	186
4.4.2.	Análisis topológico de observabilidad	189
4.5.	Técnicas de solución alternativas	191
4.5.1.	Factorización ortogonal	192
4.5.2.	Utilización de restricciones de igualdad	193
4.5.3.	Matriz aumentada de Hachtel	194
4.6.	Detección e identificación de datos erróneos	195
4.6.1.	Propiedades de los residuos de las medidas	196
4.6.2.	Clasificación de medidas	197
4.6.3.	Detección de datos erróneos	197
4.6.4.	Identificación de datos erróneos	198
4.7.	Estimadores no cuadráticos	201
4.8.	Errores topológicos y en los parámetros	203
4.8.1.	Estimación de parámetros	204
4.8.2.	Estimación de tomas	208
4.8.3.	Errores topológicos	208
5.	Control de frecuencia y de tensiones	217
5.1.	Introducción	217
5.1.1.	Estructura del control	219
5.1.2.	El control como servicio complementario	220
5.2.	Control primario: el generador síncrono	220
5.2.1.	Control de tensión	222
5.2.2.	Control de velocidad	232
5.3.	Control secundario de tensiones	243
5.3.1.	Flujo de cargas extendido	244
5.3.2.	Selección de nudos pilotos	244
5.3.3.	Ley de control	245
5.3.4.	Funcionamiento del control secundario de tensiones	247
5.4.	Control secundario de frecuencia e intercambios	247
5.4.1.	Sistemas multiárea	252

5.4.2.	Modelo de interconexión elástica	254
5.4.3.	Modelo de interconexión rígida	256
5.4.4.	Control en un sistema multiárea	258
5.5.	Control terciario de frecuencia y de tensiones	259
6.	Operación del sistema de generación	261
6.1.	Introducción	261
6.2.	Despacho económico	262
6.2.1.	Despacho económico básico	262
6.2.2.	Despacho económico sin pérdidas y sin límites de generación	263
6.2.3.	Despacho económico sin pérdidas y con límites de generación	267
6.2.4.	Despacho económico con pérdidas	269
6.2.5.	Despacho económico con límites de red	276
6.2.6.	Reparto óptimo de cargas	278
6.3.	Programación horaria y coordinación hidrotérmica	280
6.4.	Explotación competitiva	284
6.5.	Algoritmos de cierre de mercado	285
6.5.1.	Subasta mono-periodo	286
6.5.2.	Subasta multi-periodo	290
6.5.3.	Subasta walrasiana	294
6.5.4.	Gestión de saturaciones y asignación de pérdidas	297
6.6.	La perspectiva del productor	298
6.6.1.	Productor precio-aceptante	298
6.6.2.	Productor fijador de precios	303
6.7.	La perspectiva del comercializador	305
6.8.	La perspectiva del consumidor	307
6.9.	Resumen y conclusiones	309
7.	Operación del sistema de transporte	311
7.1.	Introducción	311
7.2.	Estados del sistema eléctrico	312
7.3.	Evaluación de la seguridad: análisis de contingencias	315
7.3.1.	Análisis de contingencias basado en factores de distribución	318
7.3.2.	Análisis de contingencias basado en flujos de cargas	325
7.4.	Flujos de cargas óptimos	328
7.5.	Operación del sistema de transporte	336
7.5.1.	Operación en estado de emergencia	337
7.5.2.	Operación en estado de alerta	347
7.5.3.	Operación en estado seguro	353
7.5.4.	Operación en estado de reposición	356
7.6.	Operación del transporte en sistemas abiertos a la competencia	357
7.6.1.	Resolución de restricciones técnicas	358
7.6.2.	Tarifas de transporte	368
7.6.3.	Derechos de transporte	368

7.6.4.	Pérdidas en el transporte	369
7.6.5.	Servicios complementarios	373
7.7.	Fiabilidad en sistemas de energía eléctrica	375
7.7.1.	Modelos de los elementos en los análisis de fiabilidad	377
7.7.2.	Estructura jerárquica en los estudios de fiabilidad	379
7.7.3.	Índices de fiabilidad	380
7.7.4.	Cálculo de índices de fiabilidad	381
8.	Análisis de transitorios electromagnéticos	389
8.1.	Procesos transitorios en sistemas eléctricos de energía	389
8.2.	Componentes de un sistema eléctrico de energía	391
8.2.1.	Introducción	391
8.2.2.	Componentes básicos	391
8.3.	Análisis de transitorios electromagnéticos	392
8.3.1.	Introducción	392
8.3.2.	Técnicas analíticas	393
8.3.3.	Técnicas gráficas	399
8.3.4.	Técnicas numéricas	412
8.4.	Representación de componentes	433
8.4.1.	Selección de modelos	433
8.4.2.	Clasificación de frecuencias	437
8.4.3.	Representación de componentes en el cálculo de transitorios	438
8.5.	Sobretensiones en sistemas eléctricos de energía	439
8.5.1.	Clasificación de sobretensiones	439
8.5.2.	Análisis de sobretensiones	440
8.5.3.	Características de las sobretensiones	456
8.5.4.	Limitación de sobretensiones	458
9.	Análisis de faltas y protecciones	463
9.1.	Introducción	463
9.2.	Relación entre los regímenes transitorio y estacionario en cortocircuitos	464
9.3.	Cortocircuitos equilibrados en redes	469
9.4.	Componentes simétricas	472
9.4.1.	Modelo en componentes simétricas de una fuente de tensión trifásica	475
9.4.2.	Modelo en componentes simétricas de líneas	477
9.4.3.	Modelo en componentes simétricas de transformadores	478
9.5.	Cortocircuitos desequilibrados	484
9.5.1.	Falta línea-tierra	485
9.5.2.	Falta línea-línea	487
9.5.3.	Falta línea-línea-tierra	488
9.5.4.	Análisis matricial de cortocircuitos desequilibrados	490
9.6.	Cortocircuitos en redes con máquinas síncronas	491
9.6.1.	Modelo en componentes simétricas de una máquina síncrona	495

9.7.	Cortocircuitos en redes con máquinas asíncronas	498
9.7.1.	Modelo en componentes simétricas de una máquina asíncrona	499
9.8.	Los sistemas de puesta a tierra desde el punto de vista del análisis de cortocircuitos	500
9.9.	Ejemplo de construcción de redes de secuencias y cálculo de cortocircuitos	502
9.10.	Protección ante faltas en redes eléctricas	506
9.10.1.	Necesidad de un sistema de protección	506
9.10.2.	Características funcionales de un sistema de protección	507
9.10.3.	Estructura de un sistema de protección	510
9.10.4.	Elementos de un equipo de protección	512
9.10.5.	Funciones de protección	516
9.11.	Protecciones de sobreintensidad	518
9.11.1.	Redes radiales	520
9.11.2.	Redes malladas	523
9.12.	Protecciones de distancia	523
9.13.	Protecciones diferenciales	533
9.13.1.	Protección diferencial de barras	535
9.14.	Otras protecciones	536
9.15.	Tipos constructivos	537
10.	Estabilidad de ángulo y de tensiones	541
10.1.	Introducción	541
10.2.	Definiciones y clasificaciones del problema de estabilidad	543
10.3.	Modelo simplificado del generador síncrono	544
10.3.1.	Modelo mecánico	544
10.3.2.	Modelo eléctrico	546
10.3.3.	Conexión de los modelos mecánico y eléctrico	547
10.4.	Estabilidad de gran perturbación con modelos simplificados	547
10.4.1.	Generador conectado a un nudo infinito: criterio de las áreas	548
10.4.2.	Generador conectado a un nudo infinito: simulación en el tiempo	559
10.4.3.	Sistema multimáquina: simulación en el tiempo	563
10.5.	Estabilidad de pequeña perturbación con modelos simplificados	569
10.5.1.	Generador conectado a un nudo infinito	570
10.5.2.	Sistema multimáquina	574
10.6.	Modelo detallado del generador	578
10.6.1.	Modelo detallado de la máquina síncrona	579
10.6.2.	Modelo detallado del sistema de excitación	581
10.6.3.	Modelo detallado de la turbina	584
10.7.	Efectos del modelado en la estabilidad de ángulo	586
10.7.1.	Efecto en la estabilidad de gran perturbación	587
10.7.2.	Efecto en la estabilidad de pequeña perturbación	588
10.8.	Métodos de mejora de la estabilidad de ángulo	589
10.8.1.	Métodos de mejora de la estabilidad de gran perturbación	590
10.8.2.	Métodos de mejora de la estabilidad de pequeña perturbación	591

10.9. Estabilidad de tensiones	592
10.9.1. Definiciones básicas	593
10.9.2. Bifurcaciones en sistemas de energía eléctrica	602
10.9.3. Técnicas de análisis	612
10.9.4. Aplicaciones prácticas	617
11. Flujo de cargas con armónicos	621
11.1. Introducción	621
11.1.1. Consideraciones previas	622
11.1.2. Armónicos característicos y no característicos	624
11.2. Modelos de elementos de la red lineal	625
11.2.1. Líneas de transporte	626
11.2.2. Generadores	627
11.2.3. Transformadores	628
11.2.4. Carga convencional	628
11.2.5. Filtros y baterías de condensadores	629
11.3. Modelos de cargas no lineales	631
11.3.1. Modelo de rectificador	632
11.3.2. Modelo de horno de arco	637
11.3.3. Modelo de compensador	642
11.3.4. Ajuste del punto de funcionamiento	646
11.3.5. Consideraciones sobre transformadores de rectificadores y hornos	648
11.3.6. Sensibilidades de las corrientes a las tensiones armónicas	648
11.4. Penetración de armónicos	649
11.4.1. Equivalentes de red	650
11.4.2. Resonancia	652
11.5. Interacción armónica	653
11.5.1. Algoritmos de resolución en un sistema monopuerta	654
11.5.2. Algoritmos de resolución en un sistema multipuerta	656
11.6. Flujo de cargas con armónicos	657
11.6.1. Partes constitutivas del flujo de cargas armónico	658
11.6.2. Aplicaciones	661
11.7. Normativa	664
12. Flujo de cargas trifásico	669
12.1. Introducción	669
12.1.1. Estado del arte	670
12.1.2. Formulación basada en residuos de intensidad	671
12.2. Ecuaciones que definen el flujo de cargas	672
12.2.1. Ecuaciones asociadas a los nudos PQ	673
12.2.2. Ecuaciones asociadas a los nudos PV	674
12.3. Solución por el método de Newton-Raphson	675
12.4. Elementos modelados como admitancia constante	678
12.4.1. Condensadores, filtros y cargas de impedancia constante	678

12.4.2. Transformadores	680
12.4.3. Líneas	680
12.5. Elementos con especificaciones de potencia constante	682
12.5.1. Modelos de cargas estructuralmente equilibradas	684
12.5.2. Modelo de carga desequilibrada con neutro	685
12.5.3. Modelo de carga desequilibrada sin neutro	687
12.5.4. Modelo de carga dinámica	688
12.6. Límites de potencia reactiva para los generadores	691
12.7. Ejemplos de aplicación	691
12.7.1. Red IEEE de 14 nudos	692
12.7.2. Red IEEE de 118 nudos	695
12.7.3. Red de gran dimensión	696
12.7.4. Resultados referentes a la convergencia	698
A. Solución de sistemas de ecuaciones lineales	701
A.1. Introducción	701
A.2. Eliminación gaussiana y factorización LU	701
A.3. Árbol de la factorización y vectores dispersos	705
A.4. Inversa dispersa	708
A.5. Modificación de la matriz de coeficientes	710
A.5.1. Refactorización parcial	710
A.5.2. Actualización de factores LU	711
A.6. Reducciones y equivalentes	713
A.6.1. Equivalentes grandes	714
A.6.2. Reducción adaptativa	714
A.6.3. Equivalentes pequeños	716
A.7. Compensación	717
A.8. Factorización QR y rotaciones de Givens	719
B. Programación matemática	725
B.1. Programación lineal	725
B.1.1. Formas estándar y canónica	726
B.1.2. Perspectiva algebraica	728
B.1.3. El mecanismo del Simplex	729
B.1.4. Sensibilidad	731
B.1.5. Dualidad	732
B.2. Programación lineal entera mixta	735
B.2.1. El método de ramificación y cotas	735
B.2.2. Estrategias de ramificación y procesado	737
B.3. Programación no lineal. Condiciones de optimalidad	737
B.3.1. Problemas sin restricciones	738
B.3.2. Problemas con restricciones de igualdad y desigualdad	739
B.4. Problemas sin restricciones. Métodos de solución	742
B.4.1. El método del gradiente	742

B.4.2.	El método de Newton	745
B.4.3.	Métodos cuasi-Newton	746
B.4.4.	Métodos de direcciones conjugadas	746
B.4.5.	Métodos que no requieren derivadas	747
B.5.	Problemas con restricciones. Métodos de solución	747
B.5.1.	Métodos de penalización	748
B.5.2.	Penalización y multiplicadores de Lagrange	749
B.5.3.	Métodos de barrera	750
B.5.4.	Barreras y multiplicadores de Lagrange	751
B.5.5.	Métodos basados en el lagrangiano aumentado	752
B.5.6.	Método primal dual de punto interior	754

Prólogo

La idea de hacer este libro de texto maduró en diversas reuniones mantenidas por un grupo de profesores españoles del área de *Ingeniería Eléctrica*. Después de una dilatada experiencia docente, en algunos casos de varias décadas, y de colaborar con la industria eléctrica en numerosos proyectos de I+D, creímos estar en condiciones de realizar nuestra modesta contribución al vasto y complejo mundo de la literatura técnica, dominada claramente por la lengua inglesa. Por otro lado, reconociendo el peso específico que la comunidad latinoamericana se ha ganado merecidamente en los foros internacionales del área, pensamos desde un principio que este proyecto debería abrirse también a otros colegas de dicho ámbito.

Puestos manos a la obra nos dimos cuenta de que los retos eran notables. En primer lugar, había que aportar un valor añadido al puñado de buenos libros, sobre todo norteamericanos, existentes actualmente sobre esta materia. Afortunadamente, el cumplimiento de este objetivo se ha visto facilitado por la revolución que está viviendo en los últimos años el sector de la energía eléctrica, que ha cambiado o dejado obsoletos muchos conceptos, tal y como se abordan en dichos textos. Las diferencias provienen también del mayor nivel de profundización llevado a cabo en casi todos los capítulos que podríamos llamar clásicos, y de la inclusión de varios capítulos tratados habitualmente en monografías más especializadas.

El segundo y más difícil reto era evitar en la medida de lo posible el tratamiento enciclopédico, tanto en la extensión como en el enfoque. Un libro de texto redactado por 18 autores, cada uno de ellos escribiendo sobre lo que más sabe, puede convertirse fácilmente en un voluminoso compendio de temas inconexos, sólo útil para una minoría de especialistas. Conscientes de este riesgo, hemos hecho un notable esfuerzo para empezar por lo más básico, sin olvidar los temas que todo ingeniero eléctrico debe conocer, incluyendo numerosos ejemplos resueltos y remitiendo al lector a otros capítulos cuando nos ha parecido necesario. Existen algunas redundancias intencionadas, porque creemos que es bueno pedagógicamente recordar al lector ciertos conceptos sin distraerlo buscando en otro lugar. De ese modo, se ha logrado también que bastantes capítulos sean autosuficientes para lectores que ya tienen una formación básica sobre sistemas de energía eléctrica, y simplemente quieren ampliarla.

Por tanto, el espectro de lectores a los que va dirigido este texto es muy amplio, dependiendo su uso del perfil de cada uno. Profesores y alumnos de escuelas técnicas pueden utilizarlo como libro de texto principal. El material puede cubrirse casi totalmente en dos asignaturas anuales, una básica y otra más avanzada, existentes en algunas universidades. Si sólo se dispone de una asignatura anual, o de dos cuatrimestrales, el profesor tendrá que seleccionar los temas que considere más importantes, en función del resto de asignaturas del

currículo. Por ejemplo, si las líneas eléctricas, las protecciones o el análisis de sobretensiones se tratan en otras asignaturas, como ocurre a veces, estas secciones pueden omitirse. Asimismo, dado el avanzado nivel de algunos temas, y el tratamiento, por primera vez en un libro de estas características, de los aspectos regulatorios que están revolucionando el sector, el texto puede servir como manual de consulta para estudiantes de doctorado y profesionales que desean reciclarse. Estos lectores agradecerán sin duda el elevado número de referencias bibliográficas incluidas al final de cada capítulo, que les permitirán profundizar aún más en los temas de su interés. Se espera que el usuario del libro tenga unos conocimientos mínimos de Álgebra (matrices, números complejos, etc.), Cálculo (ecuaciones diferenciales lineales, transformada de Laplace y Fourier, etc.), Física (campos electromagnéticos, dinámica de masas giratorias, etc.), Circuitos (ecuaciones de nudos, corrientes trifásicas, etc.) y, si fuese posible, de Máquinas eléctricas y Teoría económica. Este es el caso, en España, de los estudiantes que se matriculan en cuarto o quinto curso de Ingeniería Industrial y de otras carreras técnicas.

Principalmente por limitaciones de espacio, el libro se concentra fundamentalmente en la *operación de los sistemas de generación y transporte de energía eléctrica*, aunque parte del material (v.g., modelos de algunos componentes, flujos de cargas trifásicos y con armónicos, índices de fiabilidad, protecciones, etc.) es de aplicación también en el estudio de las redes de distribución, que en otros aspectos menos analíticos constituyen sin embargo una tecnología aparte. Por el mismo motivo, no se ha tratado explícitamente el problema de la planificación a largo plazo, pero varios capítulos enteros, y parte de otros (v.g., flujo de cargas, programación de la generación, seguridad, estabilidad y fiabilidad de redes, etc.), presentan herramientas esenciales para estudios de ampliación de capacidad, diseño y comparación de alternativas, que entroncan directamente con la planificación en el corto plazo.

El texto se ha organizado en 12 capítulos y 2 apéndices, que podrían haberse ordenado y estructurado de distintas maneras. Una posibilidad hubiera sido empezar por los capítulos más clásicos o básicos, tratados rutinariamente en los libros de referencia (modelos, flujos de cargas, regulación de frecuencia, despacho económico, cortocircuitos y estabilidad), y terminar con los temas que podríamos etiquetar como más avanzados (estimación de estado, transitorios electromagnéticos, armónicos, etc.). Sin embargo, esta separación hubiera sido un tanto artificiosa, puesto que algunos de esos temas clásicos han sido abordados con más amplitud y con un nuevo enfoque, más acorde a los nuevos tiempos. Por tanto, como criterio alternativo para estructurar el material, hemos recurrido a los distintos regímenes de funcionamiento del propio sistema, que condicionan fuertemente las herramientas de análisis utilizadas y el horizonte de tiempo involucrado.

Los seis capítulos que siguen al capítulo introductorio cubren lo que sería esencialmente el funcionamiento en régimen permanente sinusoidal y equilibrado del sistema de potencia, que más bien deberíamos denominar cuasi-permanente, dado que la paulatina evolución de la demanda provoca pequeños pero continuos cambios en el punto de trabajo. En este contexto, relacionado fundamentalmente con la explotación diaria y en tiempo real del sistema —excepción hecha de algunas secciones de los Capítulos 6 y 7, dedicadas a la programación futura de la operación—, los fasores y las componentes activa y reactiva de la potencia compleja constituyen la herramienta de trabajo sobre la que se construyen los distintos métodos de análisis.

Por otro lado, los últimos cinco capítulos se dedican al análisis del sistema en régimen transitorio y/o no sinusoidal, tanto equilibrado como desequilibrado. Se empieza por los transitorios más rápidos y se continúa con los más lentos, para terminar con el régimen permanente desequilibrado y con armónicos. Nos ha parecido que éste era el orden más lógico, sobre todo porque así el análisis de estabilidad va precedido del análisis de faltas, donde se presentan una serie de conceptos preliminares.

No nos vamos a detener aquí a detallar el contenido de cada uno de los capítulos, suficientemente claro a la vista del índice de materias, pero sí nos parece conveniente comentar brevemente ciertas peculiaridades que distinguen este manual de otros. En primer lugar, el capítulo introductorio presenta una visión resumida y original de lo que son, y han sido, los sistemas de potencia, desde los puntos de vista técnico, económico y regulatorio, destacando como novedad especialmente este último. Constituye por sí mismo un material valioso para divulgar entre aquellos alumnos que en mitad de la carrera no tienen claro qué especialidad elegir, y que erróneamente piensan que los únicos retos tecnológicos se encuentran hoy día en el mundo de las telecomunicaciones y la informática.

El Capítulo 2 presenta, además de los modelos habituales, una breve introducción al modelado de cables, máquinas asíncronas, cuyo interés en este ámbito se ha visto renovado por el espectacular crecimiento de la energía eólica, y técnicas de predicción de la demanda. El Capítulo 3, sobre flujos de carga, es uno de los más clásicos, pero merece la pena destacar el tratamiento que se hace al final sobre sistemas de gran dimensión, complementado con el Apéndice A. El Capítulo 4 suministra más detalles de los habituales en este tipo de libros sobre tópicos avanzados de la estimación de estado, tales como detección de medidas erróneas o errores topológicos. La regulación y control automático de la frecuencia y tensiones se aborda en el Capítulo 5, desde una perspectiva más ambiciosa y sistemática, comenzando por el control local o primario y terminando por el denominado control terciario. El Capítulo 6 comienza con el despacho económico clásico, tratado con rigor y generalidad especialmente en lo concerniente a los factores de pérdidas, y termina con los problemas que se plantean los productores, consumidores y otros agentes en los nuevos mercados de energía. La presencia del Capítulo 7, dedicado enteramente a la operación del subsistema de transporte, resulta inédita en textos de esta naturaleza, pero estimamos que resulta imprescindible para dar una visión de conjunto de las diversas tareas involucradas. Se analiza con cierto detenimiento la problemática que surge con la nueva organización de los sistemas de transporte y distribución, donde el libre acceso a la red crea nuevos retos que es preciso resolver sin que nadie se sienta discriminado.

La segunda parte del libro comienza con el Capítulo 8, ignorado o apenas tratado en muchos textos, donde se explican detalladamente los procedimientos de análisis de transitorios electromagnéticos y se presentan algunas aplicaciones, como el estudio de sobretensiones. El Capítulo 9 engloba dos temas estrechamente relacionados, como son el análisis de faltas, incluyendo una breve mención a los sistemas de puesta a tierra, y el de las protecciones, este último tratado también de forma mucho más exhaustiva de lo habitual. El análisis de estabilidad, en su doble vertiente de ángulos y tensiones, se estudia en el Capítulo 10. Uno de los aspectos que más dudas suscitó, en relación con los Capítulos 9 y 10, fue el nivel de detalle con el que tratar la máquina síncrona. Dado que las diversas máquinas eléctricas son objeto de otras asignaturas de la especialidad, y que el tratamiento riguroso del alternador

en régimen transitorio requiere mucho espacio, se optó finalmente por una presentación sucinta e intuitiva, basada en modelos simples que el alumno conoce de circuitos. Dependiendo del bagaje del lector, esta descripción debe ser suficiente en la mayoría de casos para comprender el comportamiento transitorio del sistema en su conjunto. Los Capítulos 11 y 12 retoman el tema del flujo de cargas en condiciones no sinusoidales y para circuitos desequilibrados, respectivamente. Constituyen tópicos avanzados cuya relevancia aumenta continuamente, dada la proporción cada vez mayor de cargas no lineales. Se ha preferido separar ambos problemas por motivos pedagógicos, dado que en la práctica las cargas no lineales y desequilibradas se suelen presentar simultáneamente.

El libro se cierra con dos apéndices de identidad propia, especialmente importantes en un contexto donde la velocidad de respuesta en el análisis de grandes sistemas resulta muchas veces crucial para que la información que se busca llegue a tiempo. En este sentido, los sistemas de energía eléctrica constituyen quizás un caso único, por su tamaño, complejidad y requerimientos estrictos de control.

Aunque hemos dedicado mucho esfuerzo a localizar y corregir las fatídicas erratas, en un texto con más de 1 200 ecuaciones y cerca de 350 ilustraciones éstas serán inevitables. Rogamos al lector comprensión por ello y le agradecemos cualquier ayuda o comentario al respecto.

En proyectos de estas características intervienen siempre otras personas, generalmente en proporción directa al número de autores, que suelen quedar en el anonimato. En este caso, aun dejando muchos nombres en el tintero, deseamos mostrar nuestro agradecimiento expreso a N. Alguacil, J. M. Arroyo, R. Asensi, J. Contreras, P. Cruz, L. Fernández, A. Hernández, M. Izzeddine, D. Laloux, E. Romero, J. A. Rosendo, J. Riquelme, P. Tejedor, S. de la Torre y M. A. Zorroza.

Antonio Gómez Expósito
Sevilla, marzo de 2002

Capítulo 1

Los sistemas de energía eléctrica

JOSÉ IGNACIO PÉREZ ARRIAGA Y MICHEL RIVIER ABBAD

1.1. Una primera visión

La electricidad se ha convertido hoy en día en los países desarrollados en una forma de energía imprescindible y con infinitud de usos, debido a su gran versatilidad y controlabilidad, a la inmediatez en su utilización y a la limpieza en el punto de consumo. En el ámbito residencial se emplea para proporcionar toda clase de servicios, desde los más básicos hasta los asociados al ocio y a un sinfín de comodidades (luz, refrigeración de alimentos, climatización, cocinado, radio y televisión, ordenadores, infinitud de otros electrodomésticos y equipos, ascensores, etc.). Pero el uso de la electricidad está igualmente extendido en los ámbitos comercial e industrial: alumbrado, climatización, motores eléctricos con multitud de aplicaciones e industrias con una utilización específica e intensiva de la energía eléctrica, como las acerías con horno de arco o las empresas de producción de aluminio, donde la electricidad es una materia prima imprescindible. Es muy difícil de reemplazar en la mayoría de sus usos y aplicaciones, por lo que puede afirmarse que la calidad de vida y el propio funcionamiento de las sociedades desarrolladas depende de una forma significativa de la disponibilidad de la energía eléctrica. La electricidad se ha convertido en estas sociedades en un bien de consumo esencial.

1.1.1. El producto electricidad

En principio la energía eléctrica podría considerarse como un bien de consumo más — como las fresas o los zapatos—, que se produce, se transporta, se comercializa y se consume. Pero es fácil advertir que, en todo caso, se trata de un bien de consumo de características muy peculiares. En primer lugar, la electricidad —a diferencia de la mayor parte de otros bienes de consumo— no es almacenable. La electricidad debe producirse y transportarse en el mismo momento en que es consumida¹. Esta característica, como se apreciará más ade-

¹ Las baterías químicas pueden considerarse una forma de almacenamiento eléctrico, pero su contribución al consumo de electricidad es insignificante. Solamente las centrales hidroeléctricas de bombeo —en las que se

lante, condiciona de forma absoluta la configuración, planificación, operación, organización y gestión de los sistemas de energía eléctrica. También condiciona de forma importante el diseño de los mercados eléctricos, en los países que han optado por liberalizar la producción y la comercialización de este producto tan especial.

Otro aspecto peculiar de la electricidad es que su transporte no se puede dirigir por caminos específicos², sino que la energía eléctrica fluye por las líneas u otras instalaciones de acuerdo a unas leyes concretas de la física —las leyes de Kirchhoff—, al contrario de otros bienes que se transportan por carreteras o tuberías sin ambigüedad alguna respecto al trayecto recorrido. Dichas leyes imponen además una estrecha interdependencia entre las distintas vías de transporte de forma que cualquier perturbación en una línea u equipo de transporte provoca efectos colaterales significativos e inmediatos en los demás caminos alternativos. Por todo ello la electricidad “se inyecta” en la red o “se extrae” de la red en múltiples puntos, pero no es posible establecer una relación bilateral entre lo inyectado en un punto y lo extraído en otro por lo que el concepto de “transporte por la red” debe emplearse siempre con precaución. Sólo las redes de gas o de transmisión hidrostática presentan particularidades parecidas.

La enorme utilidad de esta forma de energía ha impulsado la puesta a punto de gigantescos y sofisticados (debido a estas peculiaridades que presenta) sistemas industriales, orientados a la producción, el transporte y el consumo de la electricidad: *los sistemas de energía eléctrica*.

1.1.2. El mayor sistema industrial creado por la Humanidad

Imaginémonos sobrevolando el territorio de un país cualquiera, y pongamos nuestra atención en las instalaciones eléctricas que encontremos³. Las que antes captarán nuestra atención, pues son claramente visibles en el paisaje, son las líneas de alta tensión, con sus inconfundibles torres y que típicamente se extienden decenas o centenas de kilómetros. Solamente en España existían cerca de 15 000 km de líneas de 400 kV y más de 16 000 km de líneas de 220 kV en el año 2000. Estas líneas, que se conectan entre sí en las subestaciones o nudos de interconexión, constituyen la red de transporte, que puede verse como la columna vertebral o punto principal de encuentro del sistema eléctrico.

A la red de transporte se conectan las grandes centrales de producción de energía eléctrica, también claramente distinguibles en el paisaje, ya se trate de centrales hidroeléctricas

utiliza energía eléctrica para acumular agua en un embalse elevado para su utilización posterior en producir de nuevo electricidad—, pueden considerarse un medio eficaz de almacenamiento. Pero, de nuevo, su relevancia cuantitativa en la producción de energía eléctrica es muy reducida. En España —uno de los países que hace mayor uso de esta tecnología— en el año 2000 existían 24 centrales de bombeo, con una capacidad instalada total de bombeo de unos 1 900 MW, sobre una capacidad total instalada de todas las tecnologías de cerca de 50 000 MW.

² Las redes de transporte son malladas, y no es posible dirigir el flujo eléctrico por uno u otro camino (equipos electrónicos modernos, denominados FACTS, han aportado cierta flexibilidad a esta restricción). Algo distinto ocurre en las redes de distribución, típicamente radiales, en las que el camino de transporte es único.

³ De acuerdo, habría otras cosas más interesantes o hermosas que contemplar, pero el lector ha de comprender que se trata de un libro sobre sistemas de energía eléctrica.

—con sus embalses y presas de contención—, o de centrales de combustibles fósiles —carbón, fuel-oil o gas, principalmente— o nucleares, con sus torres de refrigeración características. Grandes transformadores se encargan de elevar la tensión a la que la energía eléctrica es generada —entre 6 kV y 20 kV, típicamente— a las tensiones más altas de transporte. En España existen actualmente cerca de 500 centrales de generación de potencia nominal superior a los 5 MW, con una potencia total instalada de más de 50 000 MW. Frecuentemente los mejores emplazamientos para estas centrales se encuentran alejados de los grandes centros de carga, lo que requiere el desarrollo de buena parte de la red de transporte.

A la red de transporte se conectan directamente algunas grandes instalaciones de consumo, y también los transformadores que reducen la tensión a valores más adecuados —tales como 132 kV, 66 kV o 45 kV—, para su distribución a otros grandes consumidores o a una red de subestaciones transformadoras a niveles de carga inferiores. Este proceso continúa progresivamente, dando lugar a una red capilar de tensiones inferiores —tales como 30 kV, 20 kV, 10 kV, 6 kV, 3 kV, 1 kV, 380 V (aunque no todas estas tensiones se utilizan simultáneamente en una misma red)— que alcanza a todas las instalaciones industriales, comerciales, residenciales o de otro tipo que consumen energía eléctrica. A esta red se encuentran conectadas instalaciones generadoras de menor envergadura que las conectadas a la red de transporte y de naturaleza diversa: generadores eólicos, instalaciones industriales con cogeneración —que a veces exportan energía a la red y otras veces la importan—, pequeñas centrales hidráulicas, pequeñas centrales térmicas que utilizan la biomasa u otros residuos como combustible, alguna central solar térmica cuya energía primaria es la radiación directa del sol y, a nivel más disperso —residencial o comercial—, pequeños generadores que utilizan combustibles fósiles e instalaciones fotovoltaicas, que alimentan demandas locales y ocasionalmente inyectan energía a la red.

Si pudiésemos observar las indicaciones de los numerosos aparatos de medida que supervisan el comportamiento del sistema, observaríamos que las magnitudes características —forma sinusoidal de las curvas de tensión e intensidad, frecuencia de variación y valor eficaz de estas magnitudes— son habitualmente de una regularidad sorprendente. ¿Cómo se controla este complejo sistema, de forma que se mantengan estables las características básicas del producto entregado —electricidad— en cada uno de los niveles de tensión? Una mirada más atenta a las citadas instalaciones nos revelaría una multiplicidad de medios de comunicación —tales como fibra óptica que acompaña a los cables de alta tensión, radioenlaces, microondas, telefonía en sus diversas variantes, así como diversas señales superpuestas a la tensión e intensidad principales en los cables de alta tensión—, que hacen llegar estas señales a potentes ordenadores en sofisticados centros de gestión de la energía, donde se elaboran las decisiones de control correspondientes, que a su vez son dirigidas a los transformadores que regulan las tensiones o a las plantas generadoras de electricidad, para adaptar continuamente la respuesta del sistema a las condiciones siempre cambiantes. Pero en otras ocasiones la señal se recibe directamente en las instalaciones individuales —reguladores de los generadores, tomas de los transformadores y los innumerables dispositivos de protección—, que pueden también disponer de recursos locales de cálculo y ejecutan determinadas acciones de control, o simplemente desconectan las instalaciones cuando las desviaciones de las magnitudes eléctricas con respecto a sus valores habituales pueden ponerlas en peligro.

Sobrevolando más bajo, puede advertirse que el nivel de complejidad de cada una de

las instalaciones es, a su vez, notable. Las subestaciones de interconexión y transformación cuentan con sofisticados dispositivos de medida, protección y maniobra —en su mayor parte telemandados— que permiten modificar en forma flexible la configuración de la subestación ante variadas circunstancias, ya sean programadas o intempestivas. Por otro lado, las grandes centrales de generación eléctrica son unas instalaciones industriales complejas, dotadas de elaborados centros de control de la producción, con los medios técnicos adecuados para convertir la correspondiente energía primaria en energía eléctrica, así como de responder a las distintas solicitudes que el sistema eléctrico requiera para el control adecuado de la frecuencia o la tensión.

Pero los diversos sistemas de supervisión y control no se basan solamente en las medidas que obtienen directamente de las diferentes magnitudes eléctricas en distintos puntos del sistema. Todo este conjunto de medidas brutas alimenta diversos modelos de cálculo que las verifican y contrastan, que detectan y eliminan las que consideran erróneas, y que permiten predecir el comportamiento del sistema bajo condiciones de funcionamiento distintas de las existentes. Hay modelos que estiman la demanda en los distintos nudos de la red con minutos, horas, días o meses de anticipación. Otros determinan la generación que dará cobertura a esta demanda. Otros calculan el flujo por cada una de las líneas y transformadores del sistema y las tensiones en los nudos de la red, bajo diversas hipótesis de funcionamiento o fallo de los diversos componentes, y determinan las mejores acciones a seguir en cada caso. Incluso otros examinan el comportamiento dinámico del sistema eléctrico ante diferentes tipos de perturbaciones. Algunos modelos no sólo tratan de determinar la acción de control más adecuada cuando el problema ocurre, sino también anticipar la posible ocurrencia, modificando —en su caso— las condiciones de funcionamiento del sistema de forma que no sea vulnerable ante las contingencias más probables.

Excepto en las situaciones de clara emergencia, donde cualquier respuesta que permita eliminar o aislar una perturbación puede darse por buena, los mecanismos de gestión económica y técnica de los medios de producción tratan de compaginar la seguridad con la economía. La inmensa mayoría del tiempo el sistema se encuentra en condiciones normales, y hay tiempo suficiente para tomar decisiones que no solamente mantienen las condiciones de seguridad, sino que son también las más económicas. Así, cuando la demanda crece durante el día en forma previsible, es deseable responder con los grupos más económicos que aún tienen capacidad sin utilizar. El objetivo es conseguir la cobertura de la curva de carga diaria con la generación de más bajos costes variables que esté disponible.

Todo lo anterior conduce a una dimensión nueva en el funcionamiento de los sistemas eléctricos. Como se explicará más adelante, las decisiones económicas y de seguridad se encuentran profundamente imbricadas en todas las escalas de tiempo: desde el despacho horario de los grupos de producción hasta la selección de qué grupos deben arrancar y parar y cuándo, pasando por la utilización de las reservas hidroeléctricas, la programación del mantenimiento de los grupos y también las decisiones de inversión en nuevas instalaciones. Todas estas decisiones se toman bajo incertidumbre: respecto a la demanda futura a cubrir, respecto a la disponibilidad de las instalaciones, respecto a los precios de los diversos *inputs* del proceso de producción —los combustibles en particular—, e incluso respecto a la normativa regulatoria vigente en el periodo en el que la decisión se va a aplicar.

1.1.3. Evolución histórica: los orígenes

Los primeros sistemas de luz eléctrica nacieron entorno al año 1870 y consistían en generadores individuales, que alimentaban la instalación eléctrica —lámparas de arco— de una única residencia. Thomas Edison descubrió la lámpara de incandescencia alrededor de 1880 y tuvo además la idea de aumentar la escala del proceso, utilizando un único generador para alimentar muchas más lámparas. En 1882 el primer generador de Edison —movido por una turbina a vapor y situado en la calle Pearl de la zona baja de Manhattan en Nueva York— consiguió alimentar en corriente continua y una tensión de 100 V a una carga de 400 lámparas de unos 80 W cada una, en edificios de oficinas y residencias de Wall Street. Poco después entra en funcionamiento la central de 60 kW de Holborn Viaduct en Londres, que también generaba una tensión de 100 V en corriente continua para propósitos de iluminación. Rápidamente este esquema de generación y distribución local de pequeño tamaño es adoptado, siempre exclusivamente con fines de iluminación, en numerosas comunidades urbanas y rurales por todo el mundo.

Con la invención del transformador en Francia en los años 1883-84, se puso de manifiesto la ventaja de la corriente alterna, que permitía elevar cómodamente la tensión para reducir las pérdidas y las caídas de tensión en el transporte a largas distancias, y así aumentar la escala de la producción y el transporte. Ya en 1884 se realizó el primer transporte en corriente alterna monofásica a 18 kV. El 24 de agosto de 1891, en Alemania, se transmitió por primera vez corriente trifásica entre la central hidroeléctrica de Lauffen y la Exposición Internacional de Francfort, situada a 175 km. El ingeniero suizo Brown —fundador en ese mismo año de la empresa Brown-Boveri, BBC, junto con Boveri, otro ingeniero suizo— proyectó el alternador trifásico y el transformador en baño de aceite que se utilizaron en la central. El Institute of Electrical and Electronic Engineers, IEEE, tomó en 1990 el acuerdo de fijar la fecha del 24 de agosto de 1891 como el comienzo de la utilización industrial de la corriente alterna y de su transporte.

La capacidad de transporte en corriente alterna de las líneas aumenta proporcionalmente con el cuadrado de la tensión, mientras que el coste por unidad de potencia transportada decrece con la misma (obsérvese que por ejemplo los derechos de paso serán similares para distintas tensiones). Es por tanto claro el interés en superar las barreras tecnológicas que limitan el uso de tensiones más elevadas. En 1910 ya se habían alcanzado los 150 kV y en 1922 se puso en servicio la primera línea a 245 kV. Desde entonces las tensiones máximas de utilización en corriente alterna no han dejado de aumentar, como se muestra en la Figura 1.1. Sin embargo la corriente continua nunca ha dejado de utilizarse, pues presenta ventajas sobre la alterna en determinadas aplicaciones, tales como la tracción eléctrica y, particularmente, el transporte de electricidad —ya sea con líneas aéreas o subterráneas— cuando las distancias son excesivas para el uso de corriente alterna. La Figura 1.1 también indica el progreso que han experimentado con el tiempo las tensiones máximas utilizables en corriente continua.

La frecuencia de la tensión alterna en estos sistemas era otro de los parámetros básicos de diseño. La utilización de frecuencias más elevadas permite que los equipos de generación y consumo sean más compactos (lo que implica menos peso, menos volumen, menos pérdidas en el material ferromagnético empleado, menos coste de material) pero, por otro lado,

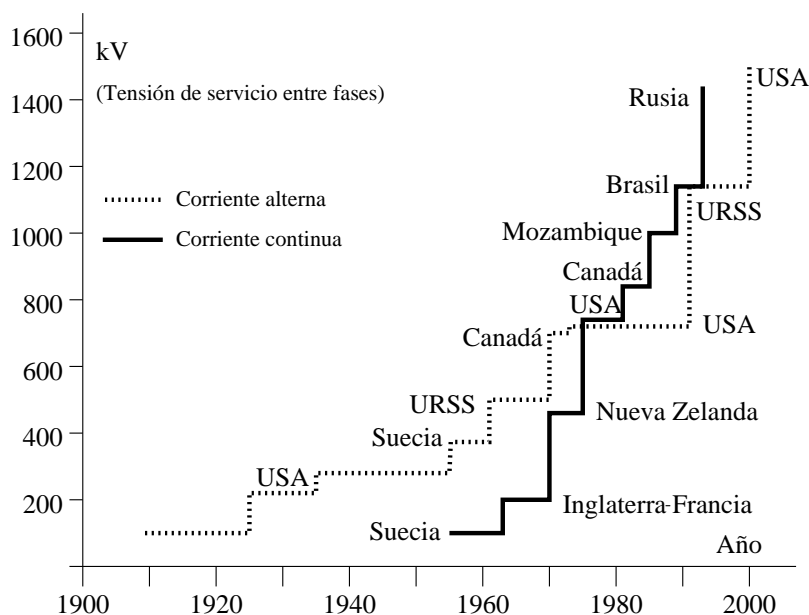


Figura 1.1. Evolución con el tiempo de las tensiones máximas de transporte (fuente [1]).

aumenta las caídas de tensión en las líneas de transporte y distribución. Algunos países —entre los que se encuentran EEUU, Canadá, los países de América Central y los más septentrionales de América del Sur— adoptaron la frecuencia de 60 Hz, mientras que en el resto de los países de América del Sur, en Europa y África se adoptaron los 50 Hz. En 1906 se creó la Comisión Electrotécnica Internacional, con el objetivo de normalizar en lo posible los equipos eléctricos. Sin embargo, no fueron capaces de unificar la frecuencia, que actualmente sigue dividiendo a los países en dos bloques.

Las ventajas de conectar entre sí los distintos pequeños sistemas eléctricos aislados se hicieron pronto patentes. La fiabilidad de cada uno de los sistemas individuales aumenta, por el apoyo que puede recibir de los demás en caso de emergencia. Se reduce la necesidad de contar con capacidad de generación en reserva, ya que se puede contar con las reservas de todos los demás sistemas. Las interconexiones permiten además utilizar en cada momento las plantas de producción que más económicamente pueden cubrir la demanda, lo que es particularmente interesante cuando las demandas máximas de los distintos sistemas no coinciden en el tiempo y cuando la mezcla de tecnologías de generación —por ejemplo, hidroeléctrica y térmica— no es la misma en cada sistema. Ya en 1926 el Parlamento inglés crea la *Central Electricity Board*, con el objetivo de conectar entre sí las 500 mayores centrales de producción entonces en funcionamiento mediante una red de alta tensión.

En España, el P. José Ignacio Martín Artajo fue el promotor intelectual de la creación de la red nacional de alta tensión [3]. Las fechas de puesta en servicio en España de líneas a los distintos niveles de tensión han sido las siguientes: 30 kV (1904, la más elevada de Europa en aquel tiempo), 50 kV (1905), 66 kV (1909), 80 kV (1913), 110 kV (1914), 132 kV (1923), 220 kV (1951) y 400 kV (1964), que permitió el acoplamiento a la red europea de alta tensión. La Figura 1.2 muestra la red de 400 kV y 220 kV en España, en construcción



Figura 1.2. Red española de 400 kV y 220 kV en el año 2000 (fuente [8]).

y programada, en el año 2000, de acuerdo a Red Eléctrica de España. Un trabajo reciente sobre la historia de la industria eléctrica en España, con referencias relevantes, es [2].

1.1.4. Evolución histórica: la organización del sector eléctrico

¿Cómo se organiza el sector encargado de planificar, operar y mantener los sistemas de energía eléctrica? ¿Quién toma en cada caso las decisiones y en base a qué criterios? La respuesta a esta pregunta ha ido evolucionando con el tiempo, en gran medida adaptándose a los condicionantes impuestos por el desarrollo tecnológico, aunque también dependiendo de las teorías económicas predominantes en cada momento y lugar. Las primeras aplicaciones industriales de la electricidad fueron de carácter estrictamente local, con un generador alimentando un conjunto de cargas de iluminación situadas en las inmediaciones. Así se fueron desarrollando, por iniciativa privada o municipal pública, numerosos sistemas aislados, fundamentalmente dedicados a la iluminación urbana y, posteriormente, al funcionamiento de motores eléctricos con muy diversas aplicaciones. El concepto de empresa eléctrica verticalmente integrada —esto es, que produce, transporta, distribuye y comercializa la electricidad— surgió de forma natural y así se ha mantenido en la mayoría de los países hasta muy recientemente. El enorme desarrollo del consumo eléctrico, las fuertes economías de escala en la producción de electricidad y el aumento de la capacidad de transmisión de las líneas a tensiones elevadas propiciaron el desarrollo de la red de transporte —frecuentemente bajo la tutela de los Estados— para conectar los sistemas aislados, dando lugar a verdaderos sistemas nacionales. La especialización técnica y el gran volumen de recursos necesarios

para construir las grandes centrales de generación llevaron a que en muchos países hayan convivido empresas locales de distribución —con escasa o ninguna capacidad de producción— junto con grandes empresas verticalmente integradas que, además, venden energía eléctrica al por mayor a las pequeñas distribuidoras.

Las características especiales de la electricidad han motivado que su suministro haya sido considerado un servicio público en la mayoría de los países, propiciando la intervención del Estado para garantizar una calidad y precio razonables. Esta intervención en unos casos se ha concretado en la nacionalización de la industria eléctrica, como ha sido el caso en la mayor parte de los países europeos hasta los años noventa. En los casos restantes, la intervención ha consistido en imponer a las empresas la regulación típica de un monopolio —esto es, niveles mínimos obligatorios de calidad de servicio y precios regulados que remuneran los costes incurridos, incluyendo una rentabilidad razonable del capital invertido—, pues así se entendía que había que regular a este sector industrial. Tanto en uno como en otro caso no se cuestionó la estructura de integración vertical de las empresas.

Desde el comienzo de los años noventa ha comenzado a ganar terreno una visión radicalmente distinta del negocio eléctrico, que precisamente ha puesto en tela de juicio la estructura de integración vertical de la empresa eléctrica, y que se está imponiendo rápidamente en el mundo entero. La fuerte capacidad de interconexión de la red de transporte en la mayoría de los países, y también entre países distintos, permite que generadores situados en cualquier nudo de la red puedan competir entre sí por suministrar electricidad en cualquier otro nudo de la red. Así pues es posible separar las actividades de red —estrictamente monopolistas— de las de generación y comercialización, que pueden realizarse en régimen de competencia.

Bajo esta nueva concepción del negocio eléctrico, la operación y la planificación de los sistemas de energía eléctrica cobran una dimensión diferente. Cada empresa de generación decide individualmente cuándo y cuánto producir, la gestión del agua en sus embalses y los programas de mantenimiento de sus plantas. Las decisiones de inversión en nuevas centrales de producción no se toman centralizadamente por ninguna entidad o empresa responsable de garantizar el suministro, sino por inversores privados que consideran que su inversión resultará rentable y que no son responsables de la garantía de suministro global. La actividad de distribución no es modificada significativamente por este cambio regulatorio, excepto por el hecho de que debe segregarse de la actividad de comercialización, que ahora pasa a ser realizada en competencia. Por el contrario, la actividad de transporte está siendo sujeta a una importante revisión, por su crítica importancia en determinar las condiciones de competencia de los agentes en el mercado mayorista.

El peso de los aspectos regulatorios —sin descuidar por ello los aspectos tecnológicos y económicos— se hace comparativamente mayor cuando aumenta el ámbito geográfico y político de los sistemas eléctricos, particularmente en un entorno de libre competencia. Éste es el caso, cada vez más extendido, de los sistemas eléctricos regionales o supranacionales, ya que hay que sentar las bases de mercados internacionales que antes apenas existían. Un caso paradigmático, en el que España está directamente involucrada, es el del Mercado Interior de la Electricidad de la Unión Europea, que comprende 17 países —los 15 de la Unión Europea más Noruega y Suiza—. Otros mercados regionales, en diferentes estados de implantación, son el Mercado Nacional Australiano —que incluye varios estados de este país—, Mercosur

—que integra a Argentina, Brasil, Paraguay y Uruguay—, el Mercado Eléctrico Centroamericano —aún en proyecto—, o las *Regional Transmission Organizations* norteamericanas, que engloban diversas compañías eléctricas aunque son gestionadas centralizadamente.

La motivación fundamental para el establecimiento de estos mercados regionales es la económica: reducción de los costes de mantener la seguridad del propio sistema en aislamiento y aprovechamiento de las transacciones económicas mutuamente beneficiosas entre los distintos sistemas. La interconexión de sistemas eléctricos presenta interesantes problemas tecnológicos —tales como la cooperación para mantener la frecuencia común a todo el sistema, el mantenimiento de los intercambios comerciales estipulados entre los distintos países, el apoyo en situaciones de emergencia, el análisis y control global de ciertos fenómenos de estabilidad de las redes, o la gestión de las restricciones de red resultantes del comercio internacional— que han sido fundamentalmente resueltos o se han mantenido bajo control en el citado contexto de empresas eléctricas verticalmente integradas, con reglas bien establecidas de apoyo en casos de emergencia, con un clima de cooperación y escasa competencia y con un número reducido de intercambios comerciales [4].

Estos problemas técnicos se han agudizado —y su complejidad ha crecido al añadirse consideraciones económicas y regulatorias— en el reciente contexto de apertura a la competencia, pues las transacciones internacionales proliferan y se plantean en forma totalmente descentralizada, al ser promovidas por los agentes individuales —compradores y vendedores— con derecho de acceso a la red regional completa. A los anteriores problemas tecnológicos deben ahora añadirse los de armonizar y compatibilizar las regulaciones de los distintos países, la organización y el diseño de las reglas de funcionamiento de los mercados regionales, la determinación de los peajes a aplicar a las transacciones internacionales por el uso de las redes, la búsqueda de eficiencia económica en la asignación de las capacidades limitadas de red y en la resolución de restricciones técnicas, así como el planteamiento de los mecanismos regulatorios adecuados para conseguir una expansión eficiente (en costes y fiabilidad) de la red de transporte.

1.1.5. El impacto medioambiental

Aunque no sea el objeto específico de este libro, es imperativo al menos citar el aspecto medioambiental como un factor cada vez más relevante e importante y condicionante de la evolución y operación de los sistemas de energía eléctrica. Es una tendencia que sin ninguna duda irá a más en el futuro.

Sin duda el mayor impacto ambiental de los sistemas de energía eléctrica es el asociado a la actividad de generación y, en particular, el relativo a las emisiones de las grandes instalaciones de combustión y a los residuos radioactivos de media y alta actividad⁴. En España en 1999 las emisiones procedentes de las grandes instalaciones de combustión existentes⁵ ascendieron a 271 kt de NO_x y a 1 136 kt de SO₂. El sector eléctrico es responsable del

⁴ El informe “Información básica de los sectores de la energía” de la Comisión Nacional de Energía, CNE, 1999, contiene información sobre el volumen de residuos radioactivos que se encuentran almacenados en las centrales españolas, así como sobre la capacidad de almacenamiento de cada una de ellas.

⁵ Aquellas cuya potencia térmica es igual o superior a 50 MW y hayan sido autorizadas antes del 1 de julio de 1987.

90 % de estas emisiones. Por actividades y respecto de las emisiones totales derivadas de todo tipo de instalaciones y fuentes, grandes y pequeñas, el sector transporte es el más contaminante en NO_x (61.2 % del total), seguido por las centrales térmicas (19.7 %). En cuanto a las emisiones de SO_2 las centrales térmicas generan casi el 62 % del total. En lo que respecta a las emisiones de CO_2 , asociadas al cambio climático por causa del efecto invernadero, el primer lugar en España en 1999 lo ocupan las centrales térmicas (31 %) y el transporte (26 %).

También las grandes líneas áreas que cruzan mesetas, sistemas montañosos, valles, costas y circundan las grandes ciudades tienen un impacto medioambiental, al menos visual, que cada vez se tiene más en cuenta. Ello tiene consecuencias importantes, ya que los permisos medioambientales y los derechos de paso están restringiendo muy fuertemente la expansión de la red de transporte, lo que frecuentemente hace imprescindible optar por soluciones alternativas, aunque mucho más costosas, como el enterramiento de líneas en los lugares con elevada densidad de población.

1.1.6. Los puntos de vista tecnológico, económico y regulador

A lo largo de toda la descripción anterior podemos advertir cómo nuestra atención ha ido progresivamente derivando desde *el contexto tecnológico* de los sistemas eléctricos —esto es, el comportamiento físico del sistema en conjunto y de sus componentes— hacia *el contexto económico* —que atiende a la gestión eficiente de los recursos materiales y humanos involucrados en la producción, transporte, distribución, comercialización y consumo de la electricidad—, concluyendo con *el contexto regulador* —que establece el marco normativo o legal en el que todas las actividades anteriores han de desarrollarse—.

En efecto, la operación y planificación de sistemas de energía eléctrica es una actividad que sólo puede ser plenamente comprendida, y desde luego desarrollada, desde un contexto que supera el meramente tecnológico. El presente texto está dirigido a ingenieros, ya sean profesionales en ejercicio o estudiantes de los últimos cursos de carrera, por lo que su contenido es especializado y desarrolla preferentemente los aspectos tecnológicos que deben conocerse para operar y planificar correctamente un sistema de producción, transporte y distribución de electricidad. El presente capítulo introductorio, sin embargo, muestra los sistemas eléctricos desde una perspectiva más amplia, ya que la gran mayoría de los profesionales que trabajan en este sector industrial se encuentran confrontados, en un momento u otro, con estos tres puntos de vista complementarios: tecnológico, económico y regulador.

1.2. El contexto tecnológico

1.2.1. Configuración y estructura de un sistema de energía eléctrica

Los sistemas de energía eléctrica han evolucionado de forma parecida en todos los países, convergiendo hacia una estructura y configuración técnica muy similar. Esto no es de extrañar si se tienen en cuenta las características tan particulares del producto electricidad. Como ya se ha mencionado, los procesos de producción, transporte, distribución y consumo de electricidad están irremediablemente condicionados por el hecho de que tiene que

existir un equilibrio instantáneo y permanente entre la generación y la demanda. Son sistemas en equilibrio dinámico de enorme tamaño (probablemente el mayor sistema dinámico ideado y construido por el ser humano a día de hoy) en el que los condicionantes técnicos adquieren una especial relevancia. Cualquier contratiempo puede poner en peligro el equilibrio dinámico del conjunto, extendiéndose las consecuencias negativas a todo el sistema por efecto dominó y poniendo en peligro el abastecimiento de electricidad en extensas zonas geográficas que a veces pueden abarcar varias regiones de un país. Quizás sea por eso que en el ámbito técnico sean los sofisticados sistemas de control, supervisión y seguimiento en tiempo real y los elementos de protección los que diferencian mayormente la configuración y estructura de un sistema de energía eléctrica respecto al de otras actividades industriales. Las funciones propias de cualquier industria, como la planificación y organización de la producción y el transporte, también adquieren aquí una elevada especialización.

A semejanza de cualquier otro sector, los sistemas de energía eléctrica se estructuran en centros de producción (la generación), de transporte (la red de alta tensión), de distribución (la red de media y baja tensión), y de consumo, además de los sistemas asociados de protección y control. La configuración y estructura de un sistema responden más formalmente al esquema representado en la Figura 1.3. Las centrales de producción generan electricidad a tensiones de algunos kilovoltios —entre 6 y 20 kV, típicamente— e inmediatamente la transforman a tensiones que alcanzan los centenares de kilovoltios —132, 220, 400, 500, 700 kV son valores bastante comunes— para optimizar su transporte por las líneas eléctricas hasta los grandes centros de consumo. La elevación de la tensión permite trasladar grandes cantidades de energía eléctrica —por ejemplo, todo lo generado por un grupo nuclear— a grandes distancias con una tecnología de cables razonablemente barata y sin grandes pérdidas de energía. La red de transporte conecta entre sí todos los grandes centros de producción y consumo adoptando normalmente una configuración muy mallada que garantiza una gran fiabilidad, existiendo caminos alternativos para evacuar y recibir energía eléctrica en el caso de que fallen algunas líneas. Desde los grandes centros neurálgicos que conectan entre sí estas autopistas del transporte de energía eléctrica y que se denominan subestaciones eléctricas salen redes de ámbito regional, llamadas redes de reparto, que trabajan a menor tensión —en España 132, 66, 45 kV— y que a su vez abastecen redes locales, denominadas redes de distribución, que acercan a los consumidores la energía eléctrica a tensiones menos peligrosas y adaptadas al consumo —20 000, 15 000, 6 600, 380, 220 V—. Las subestaciones se encargan de transformar sucesivamente la tensión de trabajo, además de centralizar los equipos de medida y protección de todo el sistema de transporte. Estas redes suelen presentar una configuración mucho más radial a semejanza de tentáculos que tratan de llegar hasta los lugares de consumo más recónditos. Al desagregarse más y más, las líneas de estas redes transportan mucha menos energía, siendo aceptable que funcionen a menores tensiones. Los consumidores, dependiendo de su tamaño en cuanto a consumo de energía eléctrica, se conectarán al nivel de tensión que les corresponda, de acuerdo al principio ya mencionado de que a menor tensión, menor es la capacidad de proporcionar energía eléctrica. Así encontramos grandes consumidores —siderurgias, acerías, empresas de aluminio, el ferrocarril, etc.— conectados directamente a la red de alta tensión, medianos consumidores —grandes fábricas— conectados a la red de media tensión y los pequeños consumidores —domésticos, comercios, pequeñas fábricas— conectados a la red de baja tensión. Por su

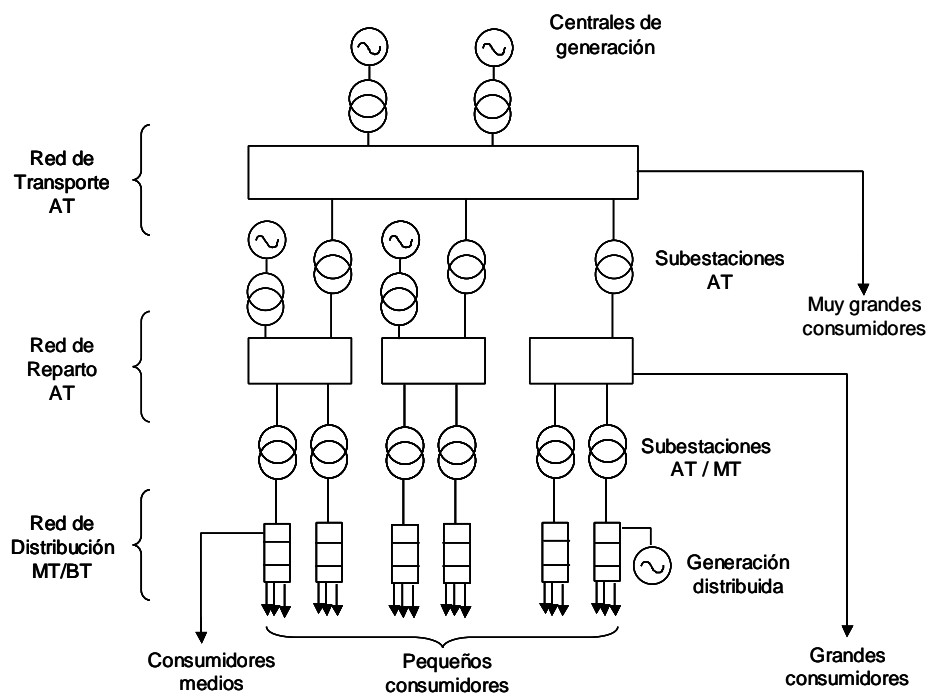


Figura 1.3. Configuración y estructura de un sistema de energía eléctrica.

parte y de forma simétrica también existen centros de generación, que por su pequeña capacidad de producción no necesitan estar conectados a la red de alta tensión, sino que vuelcan su energía eléctrica directamente a la red de reparto o de distribución. Estos generadores suelen corresponder a pequeñas centrales hidráulicas, a grupos fotovoltaicos o eólicos, a industrias cogeneradoras o a otros tipos diversos de generación distribuida, siendo todos ellos clasificados en la Ley Eléctrica Española como generación en régimen especial.

Dedicaremos seguidamente nuestra atención de forma individualizada a cada uno de estos grandes elementos que componen los sistemas de energía eléctrica: el consumo, la producción, el transporte, la distribución y los sistemas de protección y control.

1.2.2. El consumo

La demanda eléctrica ha experimentado un crecimiento sostenido y pronunciado desde el comienzo de la utilización práctica de esta forma de energía. Sin duda la creación de estándares para el “producto” electricidad (tensiones, frecuencia, potencias) ha permitido la enorme explosión del consumo eléctrico. Permitted una estandarización de los equipos alimentados eléctricamente (bombillas, motores, ordenadores, etc.) abaratando espectacularmente los costes de fabricación e incrementando su versatilidad ya que son equipos válidos para ser alimentados desde cualquier punto geográfico.

Los índices de consumo eléctrico constituyen uno de los elementos más indicativos del desarrollo industrial de un país, siendo significativo su paralelismo con los índices de crecimiento del PIB. Y es que son pocos los procesos productivos o los sectores involucrados

en la creación de riqueza que no requieran el uso de la electricidad: los motores eléctricos mueven grúas, ascensores, trenes, cintas, bombas, electrodomésticos, regadíos, y un sinnúmero de otras aplicaciones, la electricidad alimenta ordenadores, sistemas de comunicaciones y procesamiento de datos, procesos químicos, equipos de soldadura, fundiciones, alumbrado, sistemas de señalización, robots... Pero también se han utilizado los índices de consumo de electricidad como una señal del desarrollo social de un país. El grado de consumo eléctrico *per cápita* y sobre todo el nivel de electrificación de un país son claras señales del nivel de bienestar. No es sorprendente, ya que aspectos tan básicos y esenciales como el alumbrado, el acceso al agua potable, los frigoríficos, y los electrodomésticos dependen del acceso a la electricidad. Las gráficas que se reproducen en la Figura 1.4 reflejan claramente el crecimiento del consumo eléctrico en relación con otros indicadores básicos, como son el producto interno bruto, la población o el consumo energético. La tasa de crecimiento es obviamente más elevada en aquellos países con un nivel bajo de consumo de electricidad pero con un alto nivel de crecimiento económico [5].

El nivel de electrificación (es decir, porcentaje de la población con servicio eléctrico) en distintas partes del mundo es muy desigual, así como el consumo de electricidad *per cápita*. La Tabla 1.1 proporciona una muestra suficientemente significativa de estas diferencias [6]. De los seis mil millones de personas que habitamos la Tierra, la tercera parte no tiene acceso a la electricidad [7].

Cuadro 1.1. Consumo de electricidad *per cápita* (kWh), 1980-1996.

REGIÓN	1980	1985	1990	1996
América del Norte	8 986	9 359	20 509	11 330
OCDE	5 686	6 227	7 177	8 053
Asia del Este	243	314	426	624
Asia del Sur	116	157	228	313
África Subsahariana	444	440	448	439
Medio Oriente	485	781	925	1166
China	253	331	450	687
Economías en transición	2 925	3 553	3 823	2 788
Países menos desarrollados	74	66	60	83
Mundo	1 576	1 741	1 927	2 027

Es significativo que algunos países fuertemente endeudados y en claro crecimiento económico hayan liberalizado y privatizado su sector eléctrico en busca de capital privado e internacional con el que afrontar las cuantiosas inversiones en centrales de generación eléctrica que los crecimientos previstos de consumo eléctrico exigen, conscientes de que la falta de abastecimiento eléctrico supone una importantísima traba al desarrollo económico y social del país.

Pero el crecimiento de consumo eléctrico no es sólo característico de los países en desarrollo. Los países desarrollados evidencian una cierta saturación en el crecimiento pero en ningún caso un estancamiento. Es verdad que la mentalidad consumista puede estar en parte en el origen de este crecimiento, pero también es cierto que la electricidad encuentra cada vez mayores aplicaciones. En estos países la generalización del uso de equipos de aire

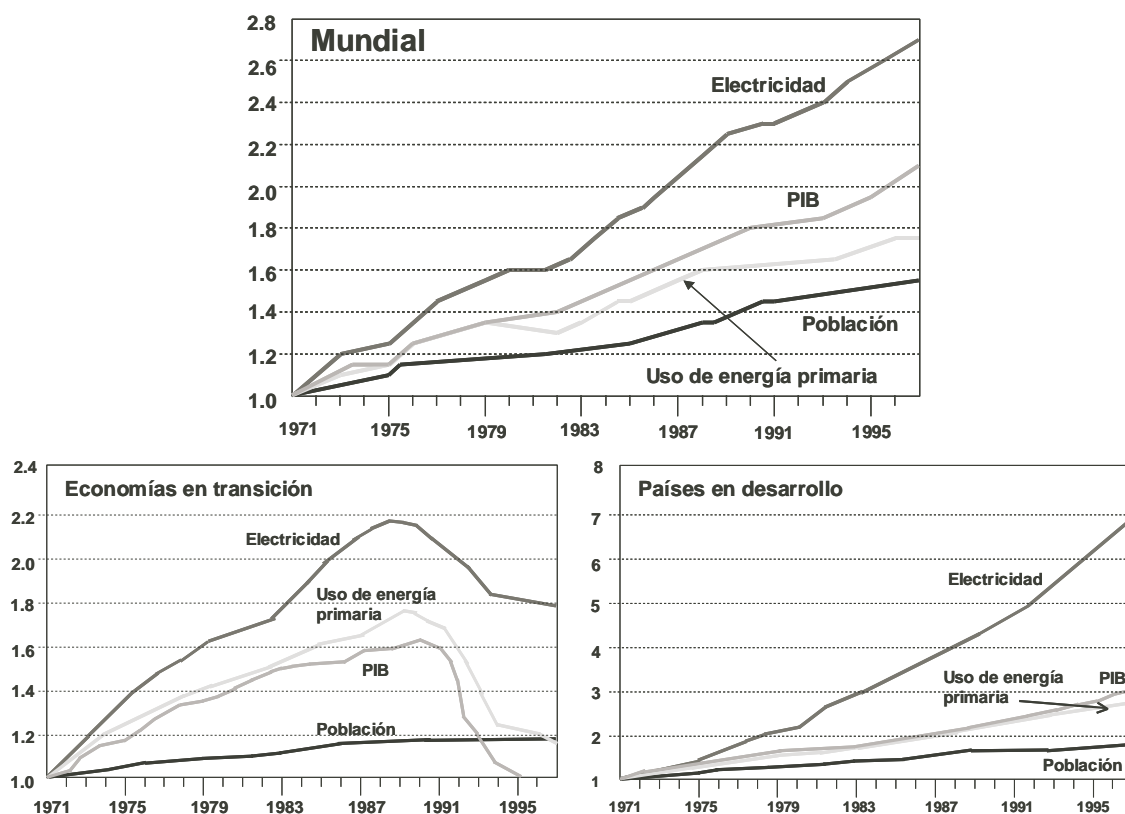


Figura 1.4. Crecimiento del consumo eléctrico en relación con otros indicadores básicos (fuente [5]).

acondicionado constituye un claro ejemplo, llegándose a modificar de forma radical el perfil de las curvas de consumo estacional como se explica más adelante.

Además, los crecimientos sostenidos del consumo eléctrico existen a pesar de las importantes mejoras en la eficiencia de la mayoría de los equipos y procesos que utilizan la energía eléctrica y que reducen de forma unitaria el consumo de kWh para un igual servicio prestado. Cada vez se escuchan más voces a favor de la necesidad de racionalizar el consumo eléctrico, así como el de cualquier otro consumo energético, conscientes del impacto medioambiental causado y de la ingente cantidad de recursos naturales quemados, que apelan muy acertadamente a una solidaridad intergeneracional que permita legar a las generaciones venideras un mundo ecológicamente aceptable y con recursos energéticos no agotados.

De ahí la importancia del concepto de gestión de la demanda (DSM: *Demand Side Management* en la terminología anglosajona) acuñado en Estados Unidos y que agrupa todas las técnicas y acciones encaminadas a racionalizar el consumo de energía eléctrica. Se ha realizado un significativo esfuerzo de investigación y desarrollo en estas técnicas, financiado en gran parte por fondos recaudados a través de la tarifa eléctrica. La DSM se presenta como un medio eficaz para neutralizar el crecimiento natural del consumo eléctrico sin por ello perder prestaciones en los servicios que proporciona la electricidad, tratando así de reducir y

controlar el impacto medioambiental. Se trata, por ejemplo, de sustituir enormes inversiones en centrales de generación eléctrica y cuantiosas horas de producción quemando carbón, gas, fuel-oil o acumulando residuos radioactivos, por el uso más eficiente del consumo existente. La gestión de la demanda debería por tanto estar presente de forma muy activa en el futuro de los sistemas de energía eléctrica, como síntoma de que se está tratando de internalizar los costes medioambientales tantas veces ignorados. El papel y la correcta reglamentación de este tipo de actividad son uno de los retos que tendrá que afrontar la nueva organización y regulación del sector eléctrico nacidas del proceso de liberalización.

En este sentido puede ser importante que las sofisticadas señales económicas que los procesos de desregulación están permitiendo hacer llegar a los distintos agentes que participan en el sector eléctrico —productores, transportistas, distribuidores, comercializadores— también alcancen al último y principal eslabón de la cadena que es el consumidor. Señales de precios que transmitan al consumidor el verdadero coste (económico y medioambiental) de cubrir su consumo, teniendo presente su pauta de consumo (perfil horario y cantidad), deberían provocar a medio plazo unos hábitos domésticos, comerciales e industriales orientados a vigilar el consumo eléctrico y a controlarlo activamente, como por ejemplo tenemos costumbre de hacer con el teléfono en casa, en el que tarifas diferenciadas por horas nos han acostumbrado a esperar después de las 22 horas para realizar llamadas internacionales o interprovinciales que no sean urgentes. Del mismo modo seguramente los propios consumidores reducirían voluntariamente su consumo eléctrico, renunciando al consumo más superfluo, en aquellas horas en las que unos precios elevados estuvieran indicando la utilización de recursos caros o un margen muy estrecho entre la demanda y la oferta de energía eléctrica.

La capacidad de respuesta de la demanda al precio suele caracterizarse por medio de un parámetro denominado elasticidad de la demanda. La elasticidad de la demanda se define como el porcentaje de variación del consumo respecto a una variación unitaria del precio de la electricidad. La demanda eléctrica en general se caracteriza por presentar una elasticidad muy reducida en el corto plazo, es decir, que reacciona poco al precio, aunque sería necesario matizar mucho más esta aseveración distinguiendo por tipo de consumidores. Este hecho está sin duda relacionado con su papel de fuente de energía insustituible y que cubre necesidades básicas, viéndose muchos consumidores en la “obligación” de consumir casi a cualquier precio, pero es ciertamente también la consecuencia del papel absolutamente pasivo que la demanda eléctrica ha jugado hasta ahora en el sector eléctrico. La regulación tradicional del sector ha entendido siempre la demanda de electricidad como un factor externo al sector, respecto al cual existía una obligación de proporcionar servicio. Los consumidores eran meros receptores del servicio, con la seguridad de ser abastecidos a un precio más o menos estable. De hecho es sintomático cómo las empresas eléctricas identificaban al consumidor como abonado y nunca como cliente.

Los procesos liberalizadores de los sectores eléctricos y energéticos emprendidos en buena parte de la geografía mundial van a cambiar radicalmente el rol del consumo. No va a ser sencillo e inmediato que la demanda eléctrica en su conjunto cambie su mentalidad. Seguramente viviremos en los próximos años un proceso de maduración y de activación del papel jugado por la demanda en el sector eléctrico, convirtiéndose en un agente más, con tanta relevancia como los generadores. Es de esperar que la demanda reaccione al precio,

que se preocupe de la seguridad de su abastecimiento a futuro, que trate de cubrirse del riesgo en el precio de compra, firmando para ello todo tipo de contratos con generadores, con aseguradoras o con agentes comercializadores. La elasticidad aumentará, aunque previsiblemente una buena parte de la demanda permanezca todavía muy insensible al precio por muchos años.

El consumo eléctrico también se particulariza por su importante dependencia del clima. Las temperaturas muy bajas o muy altas disparan los consumos ya que muchos equipos eléctricos cumplen una función asociada al calentamiento o la refrigeración.

Técnicamente existen varios conceptos que caracterizan al consumo. Seguramente los más importantes son los de potencia y energía. La potencia, medida en Vatios (W), es la energía (Wh) requerida por unidad de tiempo. La potencia es por tanto el valor instantáneo de la energía consumida. Dado que la energía eléctrica no se almacena, toda instalación eléctrica debe estar preparada para soportar el máximo valor instantáneo de energía consumida, es decir, que debe estar concebida para aguantar la máxima potencia que a lo largo de todo el ciclo de consumo va a demandar la instalación. Así, va a ser especialmente relevante para caracterizar cada consumo no sólo conocer la energía eléctrica que requiere, sino saber el perfil del consumo a lo largo del tiempo. Estos perfiles, conocidos como curvas de carga, representan la potencia consumida en función del tiempo. La integral de dichas curvas representa la energía. Es fácil deducir que para una misma energía consumida le pueden corresponder muy diversos perfiles de potencia. Algunos serán planos, indicando un consumo de energía eléctrica muy constante en el tiempo, otros presentarán uno o varios picos y valles muy marcados, caracterizando una demanda muy variable en el tiempo. Una industria de aluminio trabajando ininterrumpidamente durante las 24 horas al día, los 365 días del año y una fábrica cualquiera funcionando a pleno rendimiento en horario diurno y días laborables, pueden ser dos ejemplos representativos de ambos tipos de perfiles.

Es común que el perfil de una carga presente ciclos repetitivos en el tiempo. Así normalmente los días laborables de la semana son muy semejantes entre sí y las semanas de una misma estación también. Por ello y en función del tiempo que se esté considerando se trabajará con perfiles de carga diarios, semanales, mensuales, estacionales, anuales e incluso hiperanuales.

El perfil de carga tiene también una relevancia económica, como se explica con más detalle más adelante. Para una misma energía demandada es más barato cubrir una curva de carga de perfil plano que de perfil apuntado. De ahí que las metodologías de fijación de tarifas para consumidores consideren como uno de los parámetros más relevantes el perfil de cada tipo de consumo.

Agregando las curvas de consumo individuales para el conjunto de toda la demanda de un sistema eléctrico, se obtendrán igualmente curvas de carga diarias, semanales, mensuales, estacionales, anuales e hiperanuales, cada cual con un perfil de potencia característico y de gran importancia. En las Figuras 1.5 a 1.7 se han reproducido las curvas de demanda del día 25 de enero de 2000, del mes de enero de 2000, y del año 2000 respectivamente para la demanda total del sistema español. Se aprecian claramente las puntas y los valles que en cada una de ellas marcan unos máximos y mínimos cíclicos de potencia demandada. Información detallada sobre datos relativos al sistema español se puede encontrar actualizada en los informes que mensualmente y anualmente elabora REE y en su página Web [8].

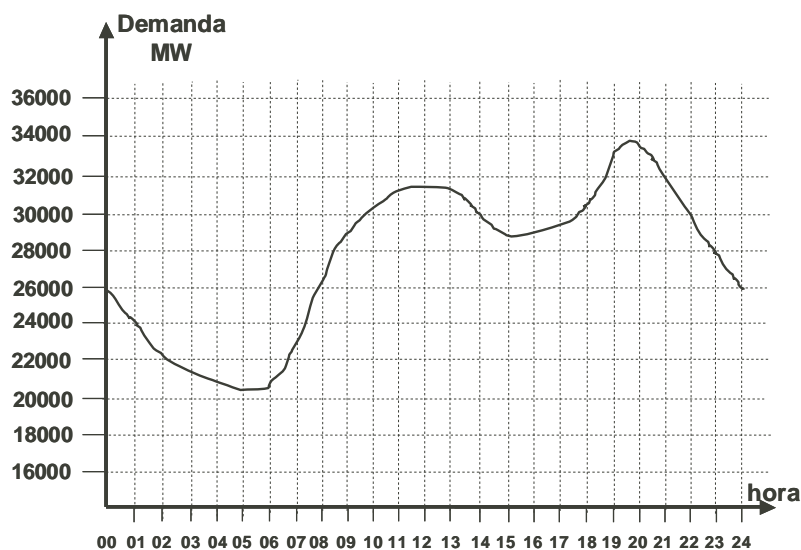


Figura 1.5. Evolución de la demanda eléctrica del sistema español el día 25 de enero de 2000 (fuente [8]).

Es claro que la demanda agregada del sistema deberá ser cubierta con la generación eléctrica producida por las distintas centrales. Será el perfil desigual de la curva de demanda agregada del sistema lo que justifique económicamente la existencia de distintas tecnologías de generación para cubrir la demanda.

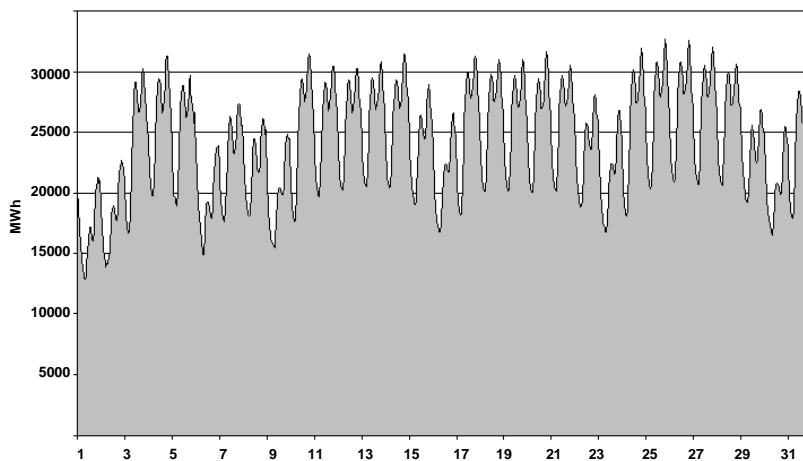


Figura 1.6. Evolución de la demanda eléctrica horaria del sistema español en el mes de enero de 2000 (fuente [8]).

Tratemos de justificarlo intuitivamente. Para cumplir con su cometido de generar electricidad, una central eléctrica habrá incurrido en dos tipos de costes claramente distintos. Por un lado el coste de inversión para construir la central, también llamado coste fijo, y por otro el coste del combustible empleado para generar la energía producida, también llamado coste de operación o coste variable. El segundo depende obviamente de la cantidad

de energía producida o, dicho de otra forma, del número de horas de funcionamiento de la central, mientras que el primero es independiente del uso realizado de la central. Siempre que exista un abanico de tecnologías de generación que presenten unos costes de inversión y unos costes de operación cruzados, es decir, algunas tecnologías con alto coste fijo y bajo coste de operación —por ejemplo la tecnología nuclear— y otras en cambio con bajo coste de inversión y alto coste de operación —por ejemplo las centrales de fuel-oil o de gas de ciclo abierto—, algunas de entre ellas serán económicamente las más indicadas para cubrir una determinada parte de la curva de carga del sistema. En efecto parece claro que por el perfil de la curva de carga y fijándose en la parte inferior de dicha curva, será necesario contar con centrales que funcionen todo el año y para las cuales lo primordial es que presenten un coste de operación barato, aun teniendo un coste fijo caro. Fijándose ahora en la parte superior de la curva de carga será también necesario disponer de centrales que van a funcionar muy pocas horas al año y para las cuales lo primordial será por tanto tener un coste de inversión muy barato aunque presenten un coste de operación caro. Y siguiendo la misma lógica la parte intermedia de la curva deberá ser cubierta, con criterio económico, por generación adaptada a un funcionamiento medio en horas, es decir, con tecnologías de coste de inversión y de operación intermedios. En definitiva, la mezcla óptima de tecnologías en cada país viene determinada por el perfil de la curva de carga propia del país. Esto es a lo que con terminología inglesa se suele denominar el *mix* tecnológico económicamente óptimo. Por supuesto si existiera una tecnología que presentara a la vez el menor coste de inversión y de operación, desplazaría a todas las demás para cualquier rango de funcionamiento. Esto es lo que está ocurriendo en buena parte con la tecnología del ciclo combinado debido a las prestaciones que presenta: un elevadísimo rendimiento en la operación y un razonable coste de inversión. El precio del gas es el que finalmente determinará en cada país la ventaja económica de esta tecnología frente a las demás alternativas tecnológicas.

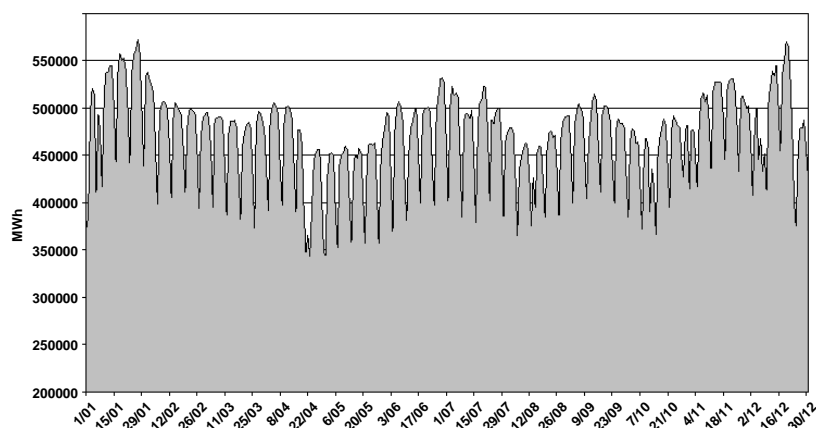


Figura 1.7. Evolución de la demanda eléctrica diaria del sistema español en el año 2000 (fuente [8]).

Existe otra forma de representar la curva agregada del consumo eléctrico, especialmente útil para ciertas aplicaciones y estudios, denominada la *curva monótona de carga*. Se trata de representar el valor de potencia demandada superado para una duración determinada. Así, como se aprecia en la Figura 1.8 donde el trazo grueso representa la curva monótona

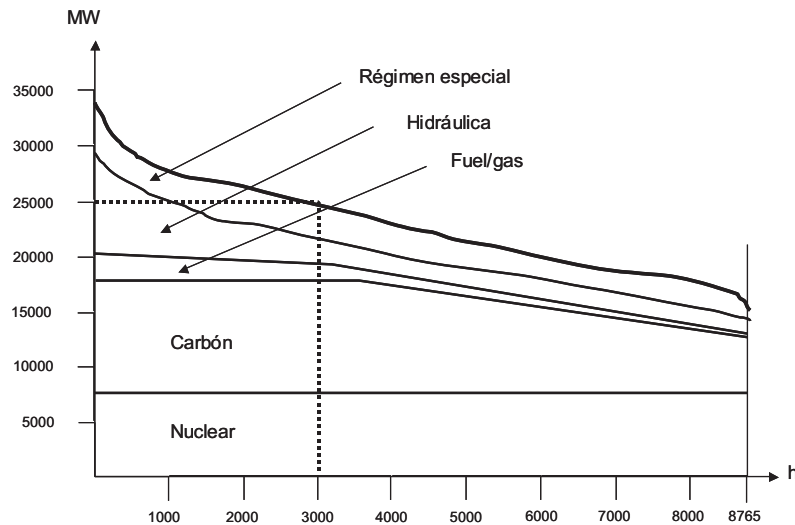


Figura 1.8. Curva monótona de carga del año 2000 para la demanda del sistema español (fuente: Informe de REE).

de carga aproximada del sistema español para el año 2000, cada valor de la curva indica el tiempo (valor de su abscisa, en este caso 3 000 h para el punto indicado en la figura) para el cual la demanda (en potencia) del sistema es mayor que la potencia correspondiente al valor de su ordenada, en este caso 25 000 MW. La monótona de carga se puede construir directamente a partir de la curva de carga cronológica ordenando los valores de demanda de mayor a menor. De nuevo la integral de la monótona de carga representa la energía consumida para el horizonte de tiempo contemplado. Obsérvese sin embargo que a una curva de carga le corresponde una única monótona de carga mientras que lo contrario no es cierto. La monótona de carga pierde la información cronológica de la curva de carga, pero por su sencillez su utilización es muy extendida. Cuando se realizan estudios de cara al futuro y es necesario trabajar con previsiones de demanda sujetas a un cierto grado de incertidumbre, es común utilizar una monótona de carga probabilista en la que en el eje de abscisas se representa la probabilidad de superar la demanda.

De forma equivalente a las curvas de carga con perfil cronológico, se pueden representar monótonas de carga diarias, semanales, mensuales, estacionales, anuales o hiperanuales. Asimismo, al estar las demandas ordenadas de mayor a menor es mucho más directo identificar las horas de funcionamiento necesarias para cubrir cada tramo de potencia demandada, por lo que resulta ilustrativo y sencillo representar el *mix* tecnológico utilizado para generar la electricidad demandada. En la Figura 1.8 se ha representado de una forma aproximada cómo las distintas tecnologías han cubierto la demanda eléctrica en España en el año 2000.

Aparte de las características potencia/energía sobre las que nos hemos extendido largamente, existen factores adicionales técnicos que caracterizan cada uno de los consumos. Así, es necesario tener en cuenta que a la par del consumo de potencia y energía activa, la demanda consume o genera potencia reactiva (la mayoría de las demandas consumen potencia reactiva ya que las máquinas asíncronas que constituyen la inmensa mayoría de los motores

siempre absorben potencia reactiva), dando lugar al factor de potencia (relación entre la potencia activa consumida y la energía aparente) por el que el consumo se ve penalizado en la tarifa por provocar circulaciones de intensidad improductivas (y por tanto pérdidas óhmicas, saturación de las capacidades de las líneas de transporte, reparto y distribución). Los consumos pueden depender de las condiciones de alimentación (tensión, frecuencia), ser estáticos o dinámicos, variar con el tiempo de conexión por efectos de calentamiento u otros y todo ello deberá ser tenido en cuenta a la hora de modelar el consumo.

El consumo de energía eléctrica puede ser muy sensible a las condiciones técnicas con las que se le alimenta eléctricamente. Muchos equipos funcionan mal o simplemente no funcionan si la onda de tensión eléctrica no es una senoidal perfecta, de frecuencia y magnitud constante y estable en el tiempo. La precisión, la calidad, las prestaciones y el correcto servicio que prestan muchos de los equipos eléctricos dependen de la calidad de la onda de tensión con los que se les alimenta. Son también conocidos los problemas en casi cualquier tipo de equipamiento eléctrico provocados por tensiones de alimentación demasiado bajas o altas (sobretensiones). Ordenadores, motores y electrodomésticos funcionan deficientemente, incluso hasta el punto de averiarse, cuando las tensiones de alimentación caen o son excesivamente altas. La mayoría de los equipos están dotados de sistemas de protección (fusibles, interruptores automáticos, diferenciales, etc.) para evitar daños provocados por excursiones de la tensión fuera de los márgenes aceptables, en especial aquellos equipos especialmente caros o que se consideran vitales para el funcionamiento correcto y seguro de procesos de todo tipo. Así por ejemplo los motores que accionan las bombas de refrigeración de las centrales nucleares están provistos de protecciones contra subtensiones y sobretensiones que incluso disparan la central por ser elementos vitales para su funcionamiento seguro. Por último está claro que cortes en el suministro de pequeña o gran duración provocan grandes perjuicios en el servicio. Quién no ha sufrido cortes de luz que le han hecho perder varias horas de trabajo en el ordenador por la pérdida de información aún no almacenada. Y qué decir de ciertos procesos industriales que no pueden permitirse una pausa, a riesgo de unas grandes pérdidas económicas, como por ejemplo las fundiciones o algunos procesos químicos o mecánicos. La falta de suministro y la calidad del mismo han adquirido tal importancia que muchos consumidores han invertido en equipos que les salvaguarden temporalmente de cortes y desvíos de la tensión llamados UPS (*uninterruptible power supply*), y que automáticamente actúan al detectar cualquier incidencia o corte en el suministro eléctrico.

Una vez garantizado el suministro universal de electricidad, los países desarrollados le prestan cada vez más atención a la calidad del suministro, exigiendo a las empresas que proporcionan el servicio una mejor calidad, como se hace con cualquier otro producto comercial. El consumo y los consumidores serán cada vez más exigentes en esta materia y los encargados de la regulación del sector eléctrico lo introducen ya con asiduidad en las leyes y normativas que establecen. El saber diseñar señales correctas que sepan conjugar adecuadamente un servicio económicamente eficiente y a la vez de calidad, es uno de los retos importantes de las nuevas regulaciones, ya que son objetivos muchas veces antagónicos y difíciles de comparar entre sí en una única escala de valoración.

Sin entrar en muchos detalles, se citan brevemente a continuación aquellos aspectos que caracterizan y definen básicamente la calidad técnica del suministro eléctrico:

- *Los cortes de suministro.* Las interrupciones en el suministro pueden ser gravemente perjudiciales para el consumo. Estas interrupciones pueden ser de muy corta duración, llamadas también microcortes, muchas veces provocadas por reenganches de interruptores después de un cortocircuito transitorio, o de larga duración. Normalmente el perjuicio ocasionado aumenta no linealmente con la duración del corte de suministro.
- *Los huecos de tensión.* Son bajadas transitorias de la tensión de alimentación provocadas por cortocircuitos y fallos en el sistema hasta que son despejados, o por el arranque cercano de motores que al consumir mucha intensidad en ese momento provoca caídas de tensión en las redes de alimentación. Hay equipos particularmente sensibles a estas bajadas de tensión, entre ellos los propios motores cuyo par electromagnético varía con el cuadrado de la tensión de alimentación.
- *Los armónicos en la onda de tensión.* Distorsiones en la forma puramente sinusoidal de la onda de tensión (armónicos) provocada por las saturaciones de los materiales ferromagnéticos (por ejemplo en los transformadores del sistema o los generadores) o por las propias cargas, pueden ser también perjudiciales para los dispositivos de consumo.
- *Los fenómenos de flicker.* Son oscilaciones en la amplitud de la tensión provocadas normalmente por cierto tipo de cargas. Los hornos de arco y los equipos electrónicos con tiristores suelen provocar este efecto, que perjudica el correcto funcionamiento de otras cargas. Es un problema delicado de resolver, ya que no depende del suministrador sino de las propias cargas.
- *Las sobretensiones.* Aumentos de la tensión provocados por cortocircuitos, faltas, rayos, o cualquier otro fenómeno pueden dañar gravemente a los elementos de consumo.

Finalmente es importante señalar que el consumo eléctrico puede ser extremadamente variable dependiendo de la temperatura o de acontecimientos imprevistos. Lo relevante es que, como se ha indicado, esa demanda ha de ser servida instantáneamente de forma que el sistema de alimentación eléctrico (centrales, transporte, distribución) debe estar preparado para detectar y responder de forma inmediata a estas variaciones. El sistema tiene que estar provisto de sofisticados elementos de medida, control, supervisión, y debe tener siempre disponible generación de reserva lista para producir. Cuando en nuestras casas, oficinas o fábricas pulsamos el interruptor para encender una luz o poner en marcha un equipo, seguramente ni sospechamos que se ponen en marcha multitud de sistemas, servicios y procesos que garantizan el servicio que requerimos.

1.2.3. La producción

La electricidad necesaria para satisfacer este consumo se genera en centros de producción comúnmente denominados centrales eléctricas. Se encargan de transformar una fuente primaria de energía en energía eléctrica de características bien definidas. En concreto se genera un sistema trifásico sinusoidal de tensiones, con una frecuencia (50 Hz en Europa y buena parte de Sudamérica y 60 Hz en América del Norte y Central y en Brasil) y amplitud de onda estrictamente estandarizadas y controladas.

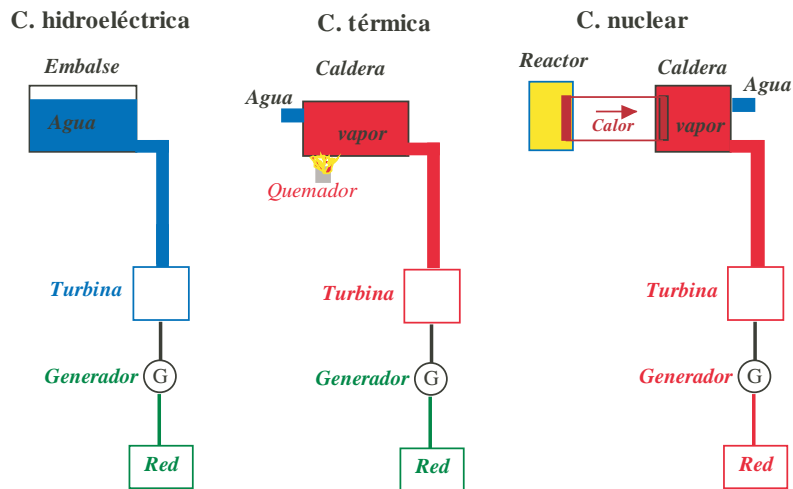


Figura 1.9. Centrales eléctricas convencionales.

Existen muy diversas tecnologías de generación, normalmente asociadas al tipo de combustible. De este modo, las centrales convencionales se agrupan en hidráulicas, térmicas y nucleares [9] cuyo funcionamiento se esquematiza en la Figura 1.9. Una detallada descripción de su funcionamiento y de los equipos que las componen también se puede encontrar en [10, 11].

Las centrales hidráulicas o hidroeléctricas utilizan como fuente de energía primaria el agua, que energéticamente se expresa en términos de caudal y velocidad. La energía hidráulica, gracias a la denominada turbina hidráulica, se transforma en mecánica que se manifiesta por un par mecánico y una velocidad en un eje de acoplamiento del generador eléctrico. De este modo, la energía hidráulica se convierte en energía eléctrica en el generador y se manifiesta en forma de tensión e intensidad en bornes del generador. Por el tipo de fuente primaria, las centrales hidroeléctricas son las que presentan menor contaminación. Sin embargo, requieren una fuerte inversión en su construcción y necesitan, para su regulación y captación de recursos, la inundación de grandes superficies geográficas de embalse. Una ventaja de este tipo de centrales, además del coste del combustible y no contaminación, es su flexibilidad para su conexión y desconexión, lo cual las hace muy adecuadas como centrales de regulación para ajustar la producción a las necesidades de la demanda. No obstante, al estar sujetas a las precipitaciones de la zona su funcionamiento tiene una considerable componente aleatoria.

En las centrales térmicas la energía primaria es un combustible fósil (carbón, fuel-oil o gas), denominándose centrales de carbón, de fuel o de gas, respectivamente. El principio de funcionamiento de este tipo de centrales es básicamente el siguiente: i) el combustible es quemado en la caldera donde se produce vapor de agua; ii) el vapor a alta presión es transformado a través de la turbina de vapor en energía mecánica, y iii) la energía mecánica, como en el caso de una central hidráulica, se convierte en energía eléctrica gracias al generador. De este modo, en las centrales térmicas se presentan las conversiones de energía térmica-mecánica-eléctrica y, por tanto, su eficiencia energética dependerá fundamentalmente del

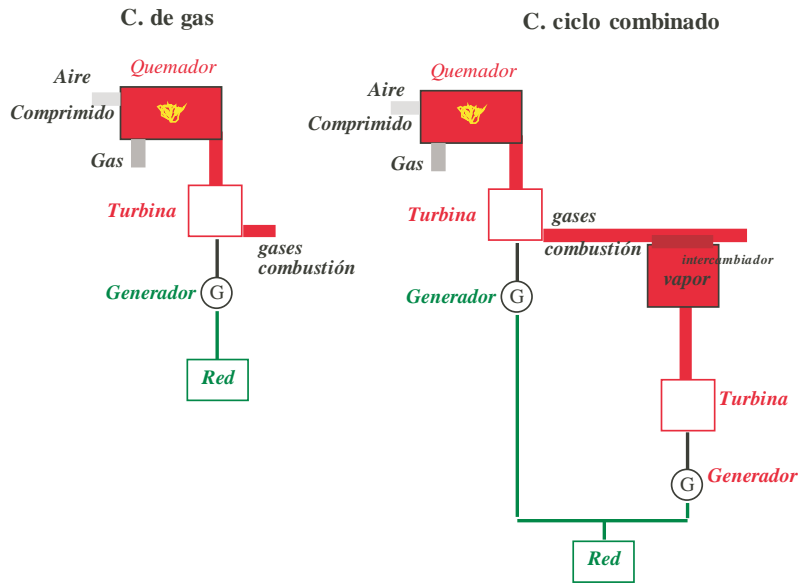


Figura 1.10. Centrales eléctricas de gas y de ciclo combinado.

poder calorífico del combustible. El rendimiento del ciclo no supera en cualquier caso el 45 %. Por la inercia térmica de la caldera, en torno a siete horas, estas centrales presentan cierta rigidez en su conexión y desconexión, que las hace poco flexibles en su utilización. Por ello, las centrales térmicas son objeto de estudios de arranque-parada para elaborar sus órdenes de funcionamiento y, en ocasiones, operan en caliente (standby) sin producción. Aunque el combustible puede estar sujeto a variabilidad en su precio, dependiendo del país, éste puede considerarse como disponible y, por tanto, este tipo de centrales puede utilizarse para regulación, siempre considerándose su inercia de conexión.

Dentro del grupo de las centrales térmicas existen otros dos tipos de tecnologías que utilizan el gas como combustible. Por un lado son las centrales de turbinas de gas, en las que, a modo de los reactores en los aviones, se utiliza la combustión del gas con aire a presión para alimentar la turbina y conseguir la energía mecánica con la que alimentar el alternador. Y por otro lado las centrales de ciclo combinado que combinan un ciclo de turbina de vapor con un ciclo de turbina de gas para conseguir rendimientos mucho más elevados. Su funcionamiento se esquematiza en la Figura 1.10.

Por ser la tecnología hoy en día más solicitada, los ciclos combinados merecen una mención aparte. Como su nombre indica, se combinan dos tipos de ciclos. El ciclo principal lo constituye una turbina de gas. Un compresor acoplado al eje de la turbina se encarga de absorber aire a presión atmosférica, comprimirlo y dirigirlo a una cámara de combustión donde se inyecta el gas que desencadena la combustión. El gas resultante se expande en los álabes de la turbina consiguiendo una primera transformación a energía mecánica. El gas expulsado, todavía a alta temperatura, se aprovecha para calentar un circuito de agua-vapor que permitirá transformar la energía calorífica aún latente en el gas en energía mecánica por medio de una turbina de vapor. Uno o dos alternadores conectados al eje común o separado de cada una de las turbinas genera finalmente la electricidad. Los rendimientos

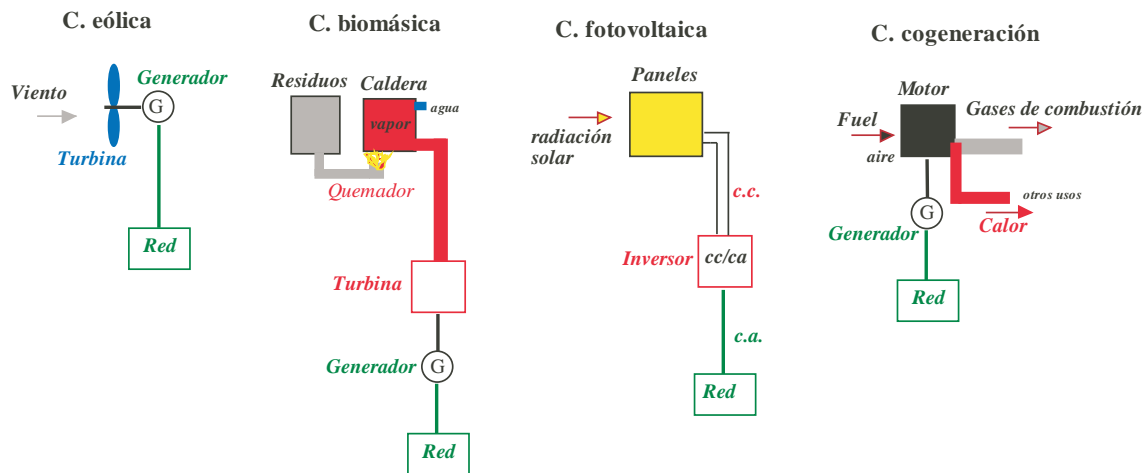


Figura 1.11. Centrales eléctricas alternativas.

de estos ciclos, gracias a los últimos avances en la tecnología de cerámicas que protegen los álabes de las altísimas temperaturas, son netamente superiores a los ciclos abiertos de las turbinas de gas o los ciclos de las turbinas de vapor, alcanzándose el 60% en algunos equipos. Esto, junto con unas tasas de emisiones contaminantes netamente inferiores, a una gran modularidad y a unos costes de inversión razonables, hace de esta tecnología una de las más competitivas, llegando a desplazar al resto prácticamente para cualquier franja de utilización (base, punta) dependiendo del precio del gas como combustible.

Las centrales nucleares o también denominadas termonucleares son siempre centrales base y raramente operan en regulación. Ello se debe al peligro que se presenta cuando se cambian las condiciones de refrigeración del reactor nuclear. Básicamente las centrales nucleares constan de un reactor nuclear, donde por el proceso de fisión del material nuclear (uranio) se produce una gran cantidad de calor. Este calor es transferido a un fluido (dióxido de carbono, sodio líquido) que a su vez, mediante un intercambiador, se transfiere a un circuito con agua. De este modo, como en el caso de las centrales térmicas, el vapor de agua se transforma primero en energía mecánica, gracias a la turbina de vapor, y después en energía eléctrica, mediante el generador eléctrico. Este tipo de centrales nucleares presentan dos inconvenientes de difícil solución que las hacen poco aceptables socialmente: el elevado riesgo de un posible fallo y la dificultad en la eliminación de sus residuos. Por ello, existen países que han impuesto una moratoria nuclear que no permite la construcción de nuevas centrales nucleares.

En las redes de energía eléctrica, la producción masiva actualmente se realiza en las denominadas centrales convencionales descritas. No obstante, existe otro tipo de centrales que están empezando a tener, dependiendo de las zonas y países, cierta relevancia; estas son las centrales complementarias o alternativas, muchas de ellas denominadas de energía renovable por el reducido impacto ambiental que provocan: eólicas, biomásicas, fotovoltaicas y de cogeneración. En la Figura 1.11 se muestra esquemáticamente este tipo de centrales.

La conversión de energía que tiene lugar en las centrales fotovoltaicas es directa desde la energía solar a energía eléctrica en forma de corriente continua [12, 13]. Las demás requieren una transformación intermedia: eólica-mecánica-eléctrica para la eólica, térmica-mecánica-eléctrica para la biomasa y térmica-mecánica-eléctrica para la cogeneración.

La existencia de tecnologías tan diversas, todas ellas operando en la mayoría de los países, tiene muchas y variadas justificaciones. En primer lugar, retomando lo esbozado en el apartado dedicado al consumo, existe una justificación puramente económica que se deriva de la curva de perfil de carga de la demanda. El rango de costes fijos de inversión para construir la central y de costes de operación para generar con la central varía mucho de una tecnología a otra. Así, las centrales nucleares requieren unos altísimos costes de inversión, pero sin embargo presentan unos costes de operación (derivados del precio del combustible, en este caso el uranio, y del rendimiento del proceso de transformación energética) comparativamente muy reducidos, lo que convierte a la nuclear en una tecnología atractiva desde el punto de vista que aquí se comenta para cubrir la franja de la curva de demanda que se extiende las 8760 horas del año. En el otro extremo la tecnología basada en las turbinas de gas es de las más caras en costes de operación pero muy barata en costes de inversión, por lo que es un tipo de generación muy atractivo para cubrir las puntas de demanda durante las pocas horas del año en las que tienen lugar. En un punto intermedio se encuentran las centrales térmicas convencionales. Obviamente las hipótesis en las que se apoyan los análisis económicos que permiten justificar la convivencia de distintas tecnologías siempre contienen un cierto nivel de incertidumbre, como por ejemplo el perfil futuro de la curva de la demanda, el coste de los combustibles, el funcionamiento concreto de cada central de producción, los costes de capital, las decisiones de los reguladores o en su caso el valor de los precios del mercado, etc.

Pero no sólo pesan razones económicas, sino también y mucho, razones de política estratégica y medioambiental, para explicar la variedad tecnológica en materia de generación eléctrica. Asegurarse el abastecimiento de combustible con la mayor independencia posible de las crisis políticas y económicas, ya sean de carácter internacional, como las crisis en el precio del petróleo, o de carácter nacional, como una huelga del sector de la minería, exige adoptar estrategias de diversificación. Asimismo, criterios económicos de internalización de los costes medioambientales y planteamientos de medio y largo plazo de sostenibilidad medioambiental, exigen la adopción de medidas regulatorias para la promoción de tecnologías de producción con menor impacto ambiental.

La mayor parte de la generación eléctrica suele actualmente tener lugar en grandes centros de producción repartidos a lo largo de toda la geografía del país, frecuentemente lejos de los grandes centros de consumo. Parece natural que las centrales se instalen cerca del lugar de abastecimiento de combustible (es decir, cerca de minas y puertos para el carbón, cerca de las refinerías para el fuel-oil, cerca de regasificadoras y de la red de gas para las centrales de gas, en los ríos de gran caudal o salto para las centrales hidráulicas) y además cerca de la costa o de los ríos, ya que el agua es un elemento vital para la refrigeración de las grandes centrales térmicas. En general se procura situar las grandes centrales de producción térmica lejos de los grandes núcleos de población, a causa de los problemas de contaminación y de los riesgos de un eventual accidente nuclear. Es la red de transporte la encargada de trasladar la electricidad generada hasta los centros de consumo. El gran tamaño que han ido

Cuadro 1.2. Capacidad instalada y energía producida por tecnologías en el sistema eléctrico español en el año 2000.

Tecnología	Capacidad instalada		Energía producida	
	MW	%	GWh	%
Hidráulica	16 525	29.74	27 844	12.70
Nuclear	7 799	14.04	62 206	28.38
Carbón	12 052	21.69	79 846	36.43
Fuel/Gas	10 674	19.21	17 627	8.04
Total régimen ordinario	47 050	84.68	187 522	85.56
Régimen especial	8 513	15.32	27 210	12.41
Intercambios internacionales			4 440	2.02
Total	55 563	100.00	219 174(*)	100.00

(*) de los cuales 8 569 GWh corresponden a consumos propios de las centrales de generación y 4 907 GWh a consumos de centrales de bombeo.

alcanzando las centrales de producción de electricidad es una consecuencia de la economía en costes que se ha venido consiguiendo al aumentar el tamaño de las centrales hasta alcanzar los que son actualmente habituales. Este efecto, denominado *economía de escala*, ha favorecido por ejemplo la aparición de centrales nucleares de hasta 1 000 MW, o de carbón o fuel-oil de 500 MW o más, al ser más competitivas que pequeñas centrales de las mismas tecnologías. La aparición de la tecnología de los ciclos combinados de gas ha cambiado esta tendencia pues, al ser mucho más modular, permite construir centrales competitivas de menor tamaño. Las próximas décadas verán posiblemente un desarrollo espectacular de generación mucho más distribuida y cercana al consumo, apoyada por medidas regulatorias de diversificación, ahorro energético (por ejemplo, cogeneración) y reducción del impacto ambiental.

En España la diversidad de tecnologías es amplia como se ilustra en la Tabla 1.2, en la que se aprecia el peso de cada una de ellas en el año 2000 tanto en potencia instalada como en energía producida, y en la Figura 1.12, en la que se representa la evolución histórica⁶ de la potencia instalada por tecnologías. Como es lógico las tecnologías de base presentan un ratio en energía mucho mayor que en potencia, a la inversa de lo que le ocurre por ejemplo a una tecnología de punta, como es el fuel-oil. A tono con la tendencia internacional, es de esperar en el futuro próximo un fuerte incremento de los ciclos combinados de gas y de las energías renovables. Una amplísima información sobre el sistema español puede encontrarse en los informes de REE, del OMEL y de la CNE y en sus respectivas páginas Web [8, 15, 16].

La actividad de producción de energía eléctrica con grandes centrales se caracteriza económicamente por requerir unas inversiones muy elevadas y amortizables a muy largo plazo (25-30 años) después de varios años de construcción (hasta 5-10 años o incluso más para centrales nucleares o centrales hidráulicas de gran tamaño). El elevado riesgo económico que lo anterior supone sólo es asumible por entidades de propiedad pública o por la iniciativa

⁶ Es interesante observar el gran desarrollo de la tecnología nuclear 10 años después (básicamente el tiempo de construcción) de la gran crisis de los años setenta en los precios del petróleo. Las centrales de carbón sufrieron entonces también un fuerte impulso.

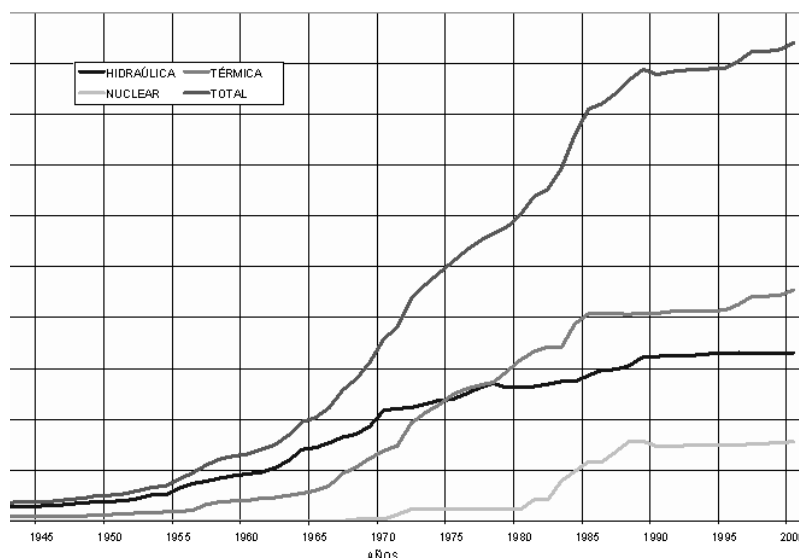


Figura 1.12. Evolución histórica de la potencia instalada por tecnologías en España (fuente [8])

privada cuando existe una garantía estatal suficiente, que asegure la recuperación de los costes de inversión y operación por medio de unas tarifas reguladas al efecto. La irrupción de la tecnología de los ciclos combinados de gas ha modificado sustancialmente las condiciones de contorno, al disminuir el riesgo significativamente (centrales más flexibles, modulares y competitivas, de tamaño más reducido y con menor tiempo de construcción). Lo anterior ha facilitado grandemente la necesaria inversión privada tras los recientes cambios regulatorios para introducir libre competencia en el sector eléctrico.

1.2.4. El transporte

La red de transporte es la encargada de conectar los grandes centros de producción, geográficamente muy dispersos, con los grandes núcleos de demanda, normalmente ubicados cerca de ciudades y zonas industriales, así como de mantener la cohesión global del sistema eléctrico, funcionando en sincronismo⁷. Esta red ha de transportar grandes cantidades de energía a largas distancias y por ello debe funcionar a muy alta tensión, en España a 220 y 400 kV. La red de transporte vertebrado todo el sistema eléctrico, interconectando entre sí todos sus centros neurálgicos. Es un elemento clave en el equilibrio dinámico entre la producción y el consumo, y por ello adopta una configuración típicamente muy mallada, permitiendo que todas las centrales puedan servirse de respaldo entre ellas para cubrir eventuales fallos, y se le dota de sofisticados equipos de medida, protección y control para que las faltas (cortocircuitos, rayos, falsas maniobras, fallos de equipos) no comprometan el correcto funcionamiento de todo el sistema. La red de transporte ha adquirido una relevancia

⁷ Existen sistemas eléctricos interconectados por líneas en corriente continua que no mantienen entre sí el sincronismo de frecuencia. En todo caso están unidos también por líneas de transporte.

especial en el nuevo marco regulatorio abierto a la competencia, pues es el elemento facilitador del mercado mayorista, el punto de encuentro entre los agentes del mercado, como se comentará más adelante. El desarrollo de la conectividad de las redes de transporte y de su capacidad, tanto en el interior de los países como en las interconexiones entre los mismos, ha permitido el planteamiento de mercados eléctricos de dimensión regional o internacional.

Los grandes centros de consumo ubicados en la red de transporte pueden ser grandes industrias intensivas en el uso de energía eléctrica directamente conectadas a esta red, o bien grandes centros de interconexión llamados subestaciones de los que cuelgan redes de carácter más regional o local (redes de distribución) que alimentan con tensiones progresivamente menores al conjunto de consumidores medios y pequeños. Las redes de distribución presentan unas configuraciones bien distintas, adaptadas a sus funciones.

Los principales elementos que componen la red de transporte son las líneas y las subestaciones. Las subestaciones cumplen tres funciones principales: son los centros de interconexión de todas las líneas entre sí, son los centros de transformación desde los que se alimentan las redes de distribución que llegan hasta el consumo, y son los centros donde se instalan los elementos de protección, corte y maniobra del sistema [14]. Típicamente a ellas llegan varias líneas de alta tensión y, tras una transformación de la tensión, salen de ella las líneas de la red de distribución o red de reparto. Físicamente la subestación se articula en torno a unas gruesas barras a las que se conectan las diferentes líneas. Equipos de apertura y cierre de las líneas aseguran las conexiones o desconexiones que sean necesarias para maniobras, cambios de configuración o el aislamiento de las líneas o elementos en situación de fallo. Existen muy diversas configuraciones de subestaciones. El número de barras (subestación de barra simple, partida, doble, triple, de transferencia o de apoyo, en anillo) y el número de equipos de corte y maniobra por cada línea de salida o de entrada fijan el tipo de configuración. Aumentar el número de estos equipos aumenta asimismo los costes de la subestación pero también la seguridad de la misma, evitando por ejemplo cortes transitorios de suministro aguas abajo del sistema por una simple maniobra. Una configuración bastante extendida en la red de transporte española es la denominada de interruptor y medio (doble barra y tres equipos de corte por cada dos líneas de entrada o salida, de ahí el nombre), ya que representa un equilibrio razonable entre coste y seguridad.

Dejando para más adelante una breve descripción de los equipos de corte y maniobra, el equipo tecnológico más representativo de las subestaciones es el transformador encargado de reducir, o elevar, según se mire, la tensión. La transformación se realiza electromagnéticamente por medio de dos juegos de bobinas (de alta y baja tensión) enrolladas en torno a un material ferromagnético y todo ello sumergido en una cuba de aceite que garantiza un mejor aislamiento de los conductores. Son equipos voluminosos, costosos y pesados, de muy alto rendimiento, que presentan una tasa de fallo muy reducida.

Las líneas de la red de transporte son cables de aluminio (el alma del cable es de acero) que descansan sobre torres de soporte. El diseño de las líneas [1] tiene una fuerte componente mecánica y eléctrica. El diseño de las torres, con estructura típicamente en celosía y muy distintas formas, tiene que prever el considerable peso que tienen que soportar (el peso de gruesos cables con un importante coeficiente de seguridad para aguantar las capas de hielo y nieve que en invierno se pueden instalar sobre ellos, así como el efecto del viento) y tiene que asegurar distancias mínimas de seguridad entre todos los cables y de éstos con

la torre para reducir la posibilidad de cortocircuitos. Asimismo la distancia entre torres y la tensión mecánica de los cables requiere diseñar correctamente el vano formado por el cable desde una torre a la siguiente. En su punto más bajo el cable debe mantener una distancia mínima de seguridad con el suelo. Evidentemente la orografía del terreno juega un papel muy relevante en estos cálculos. Pueden existir varias líneas que compartan la misma torre, aprovechando así la misma estructura metálica y los mismos derechos de paso. Los anclajes sujetan los cables a la torre por medio de una cadena de aisladores muy visibles. Los aisladores se diseñan en forma de campana para sortear el efecto conductor de la lluvia y cada aislante de la cadena aguanta un diferencial de tensión en torno a los 12 a 18 kV, por lo que líneas de 400 kV requieren del orden de 20 a 25 aisladores en la cadena aislante.

Eléctricamente la sección de los cables marca el límite de la intensidad que pueden transportar. La capacidad de transporte es limitada por la dilatación del cable a causa de su calentamiento, que a su vez es consecuencia de las pérdidas por efecto Joule. La dilatación del cable viene limitada por el máximo vano permitido para cumplir con las distancias de seguridad con el terreno. Para disminuir el denominado efecto corona (ruptura de la capacidad aislante del aire en torno a los cables, a causa de los elevados campos eléctricos, lo que ocasiona pérdidas de energía y perturbaciones electromagnéticas que pueden provocar interferencias con los sistemas de comunicación) se suelen dividir las líneas (cada fase) en dos o tres cables (dúplex, tríplex). Uno de los parámetros importantes de la línea, su inductancia, depende de forma importante de la posición geométrica relativa de las tres fases sobre la torre (en línea, en forma de triángulo, distancias, etc.). Asimismo las líneas provocan un efecto capacitivo con tierra que fija el valor de su capacitancia a tierra. De esta forma cuando las líneas están cargadas el efecto inductivo predomina, siendo la línea consumidora de energía reactiva, y cuando están descargadas (típicamente de noche) es el efecto capacitivo el preponderante, convirtiendo la línea en generadora de energía reactiva.

En un sistema mallado como la red de transporte los flujos de energía se distribuyen por las líneas en función de sus impedancias, cumpliendo las leyes de Kirchhoff. Las largas distancias, y las importantes potencias transmitidas, pueden reducir la capacidad de la red para mantener el funcionamiento conjunto del sistema, lo que favorece la aparición de fenómenos de inestabilidad que pueden hacer peligrar el equilibrio dinámico de la generación y la demanda. Esto puede limitar la capacidad de transporte de las líneas por debajo de su límite térmico natural.

Por razones de impacto medioambiental es cada vez más difícil ampliar y reforzar el sistema de transporte, por lo que es necesario aprovechar cada vez más la capacidad de las instalaciones existentes. Esto plantea importantes retos, ya que los márgenes de seguridad se tienen que estrechar y es necesario afinar cada vez mejor en las lógicas de protección, medida y control. Con el desarrollo de la electrónica de potencia están surgiendo diversos equipos que tratan de incrementar la capacidad real de las líneas y dirigir los flujos hacia las líneas más descargadas. Estos equipos toman el nombre genérico de FACTS (acrónimo en inglés de *Flexible Alternating Current Transmission Systems*) y deberán tener en el futuro un papel cada vez más relevante.

Algunas líneas de transporte, pocas en muy alta tensión pero la mayoría en redes urbanas de menor tensión, son subterráneas. Se instalan, convenientemente aisladas, en zanjas. Requieren una tecnología muy cara para el caso de la muy alta tensión ya que los materiales

aislantes han de ser muy eficaces al no disponerse de mucha distancia entre el conductor y el terreno. Este tipo de líneas presenta un efecto capacitivo mucho más marcado que las aéreas.

1.2.5. La distribución

Desde las subestaciones de la red de alta tensión se ramifican redes de menor tensión, que de forma tentacular acaban llegando hasta los sitios más recónditos para conseguir suministrar cualquier punto de demanda. Esta red, denominada genéricamente red de distribución, se configura de una forma bien distinta a la de transporte. En un primer nivel y a nivel regional se extiende una red, todavía de alta tensión (típicamente 132, 66, 45 kV), llamada red de reparto y que puede tener aún una estructura mallada. Desde subestaciones transformadoras de esta red cuelga a su vez una red de media tensión (típicamente 20, 15, 6.6 kV) que se acerca ya al consumo más desagregado. Esta red por razones económicas presenta una estructura a veces algo mallada pero se opera siempre radialmente. Desde esta red se vuelve a disminuir la tensión (en centros de transformación) para alimentar en baja tensión (380, 220 V) a los consumidores domésticos, comerciales, etc. De acuerdo al tamaño de su consumo, las demandas estarán conectadas a uno u otro nivel de tensión.

A otra escala los componentes técnicos de estas redes son los mismos que los de la red de transporte. Líneas aéreas, subterráneas, subestaciones, transformadores, torres, aisladores, equipos de medida, corte y maniobra están igualmente presentes [14].

Estas redes recorren miles de kilómetros y están sometidas a fallos más frecuentes que las líneas de transporte, teniendo por otra parte una configuración menos redundante, por lo que los fallos en las redes de distribución son causantes de la mayoría de los cortes de suministro en los consumidores finales. En términos de inversión estas redes suponen una parte muy importante de los costes totales del sistema y superan normalmente en varias veces los costes de inversión de la red de transporte.

1.2.6. Control y protección

Se acabará la revisión de los principales aspectos tecnológicos de un sistema eléctrico describiendo brevemente los sistemas y equipos de control, protección y maniobra. Se ha resaltado varias veces el papel e importancia de estos elementos para sostener en pie todo el sistema. Son muchos y variados por lo que aquí sólo podrán enumerarse. Se organizan en varios niveles o capas.

En un primer nivel, los elementos que componen el esqueleto principal del sistema (centros de generación, redes de alta tensión, grandes subestaciones de consumo) se vigilan y controlan centralizadamente desde un centro de control que supervisa en tiempo real el estado del sistema (generación de las centrales, flujos por las líneas, niveles de tensión, frecuencia de la onda de tensión, etc.) mediante medidas teletransmitidas y convenientemente procesadas (todo este sistema de supervisión y control recibe el nombre de SCADA). Estos centros de control⁸ velan por la seguridad del sistema pudiendo transmitir consignas de producción

⁸ A veces un solo centro de control es suficiente para un país. Sin embargo, cuando el tamaño del país así lo exige, se establece una jerarquía de centros de control en dos niveles: un centro de control principal

de energía activa y reactiva a las centrales, ordenando maniobras en la red, cambiando las tomas de los transformadores o conectando bancos de condensadores, todo ello a la vista de los datos del sistema, basándose en la experiencia de los operadores o apoyándose en sofisticados modelos que analizan diversas condiciones de operación y determinan los flujos por las líneas o las tensiones en los nudos, en caso de hipotéticas contingencias.

En un segundo nivel están los sistemas de control instalados en las centrales de producción. Dos son los más importantes: el regulador de velocidad y el regulador de tensión. El regulador de velocidad se encarga de mantener el equilibrio instantáneo entre generación y consumo en el conjunto del sistema. Cualquier incremento o disminución de la demanda debe ser compensado inmediatamente por la generación. Asimismo el disparo fortuito de grupos que estén generando en ese momento (en el caso de una central nuclear podemos estar hablando de 1 000 MW) provoca un desequilibrio instantáneo entre la energía generada y la consumida que es necesario compensar sustituyendo inmediatamente al generador fallado por otro. Cuando la energía generada no coincide con la demandada, la energía sobrante o faltante se almacena o se extrae respectivamente de la energía cinética almacenada en el giro de los alternadores. Éstos tienden por tanto a acelerarse o desacelerarse, provocando un cambio en la velocidad de giro, y una alteración en la frecuencia de la onda eléctrica generada, puesto que ésta mantiene una relación directa con aquélla. Las centrales están equipadas con un regulador de velocidad que detecta variaciones en la velocidad de giro de sus alternadores o en la frecuencia de la onda generada y que automáticamente actúan sobre la correspondiente válvula (bien de vapor, de agua o de gas) para modificar en el sentido adecuado la generación de la central. Esto constituye la llamada regulación primaria en el control frecuencia-potencia. La respuesta, por ejemplo ante un déficit de potencia provocado por el fallo de una central, es solidaria para todo el sistema interconectado (en el caso español el resto de Europa aporta la mayor parte de la generación faltante), y evita que la frecuencia del sistema siga cayendo, pero no consigue restablecerla exactamente a su valor nominal. Tampoco los intercambios de potencia con los sistemas vecinos se mantienen en sus valores prefijados, debido a su contribución necesaria para mantener la frecuencia. Es un segundo lazo de control —el denominado AGC, del inglés *Automatic Generation Control*— el que se encarga de restablecer la frecuencia a su valor nominal y los intercambios a sus valores iniciales. Constituye la denominada regulación secundaria que también suele ser automática, y en la que no participan todos los generadores, en particular ninguno de los pertenecientes a sistemas vecinos. La nueva generación necesaria se redistribuye entre las centrales deseadas (en el caso anterior, los generadores españoles incrementarán su producción para volver a restablecer cuanto antes el flujo por la interconexión con Francia a los valores previos al fallo). Con ello también se regenera la llamada reserva primaria, de forma que el proceso pueda seguir sin paralizarse porque los grupos alcancen sus límites de generación. Finalmente se puede plantear un control terciario, éste ya no es automático, en el que con más tiempo el centro de control modifica las consignas de generación de los grupos, siguiendo criterios de tipo más económico y reponiendo la denominada reserva secundaria, como lo hacía el control secundario con la reserva primaria.

que coordina un segundo nivel de centros de control satélites, cada uno a cargo de una zona concreta del sistema.

Las centrales están equipadas con un segundo sistema de control relacionado con las tensiones del sistema. Es importante para la seguridad del sistema y para garantizar una razonable calidad en la entrega del suministro el que las tensiones del sistema permanezcan dentro de ciertos márgenes permitidos. El nivel de tensiones de un sistema de energía eléctrica está estrechamente relacionado con el balance de potencias reactivas. Un fuerte consumo de reactiva (por ejemplo, en las líneas cargadas o en los motores) tiende a hundir las tensiones del sistema y por el contrario una aportación de reactiva (por ejemplo, en las líneas descargadas o en los bancos de condensadores) tiende a levantar las tensiones del sistema. Por ello las centrales, que tienen el grado de libertad de producir o consumir energía reactiva con su alternador (se trata de máquinas síncronas), son candidatas ideales para vigilar y corregir desviaciones peligrosas de las tensiones. El sistema de control mide la tensión en bornas del generador o en puntos seleccionados del sistema, la compara con un valor de referencia, y actúa correspondientemente sobre la corriente de excitación del alternador (que es la que controla la reactiva entregada o absorbida por la máquina).

Por supuesto las centrales están dotadas de sistemas de protección que las protegen de potenciales daños. El alternador, las bombas, las turbinas, y cualquier elemento vital para la central estará dotado de sistemas de medida, relés de disparo, y las alarmas que correspondan.

En tercer lugar y por último existen equipos de control, protección y maniobra en las redes y en concreto en las subestaciones. Éstos están básicamente orientados a proteger el sistema de los cortocircuitos en las líneas o en las barras de las subestaciones. El cortocircuito es el contacto (casi siempre por medio de un arco) entre dos conductores o entre algún conductor y tierra (es el caso más común). Las causas pueden ser de origen eléctrico (la alteración de algún aislante), de origen mecánico (la rotura de algún conductor o aislador, el contacto con algún cuerpo extraño como una rama o el pico de una excavadora en cables subterráneos), de origen atmosférico (un rayo, el hielo, la niebla), o provocadas por alguna falsa maniobra. Los cortocircuitos provocan la circulación de elevadísimas intensidades que dañan los cables y los equipos de maniobra y corte. Por tanto es necesario despejar (anular la intensidad) lo antes posible estos cortocircuitos y aislarlos (para poder reparar el componente dañado), si no se quiere poner en peligro el conjunto del sistema. Para ello se dispone de aparatos de corte. Existen tres tipos básicamente, que se distinguen por su funcionalidad y su capacidad de corte. Abrir un circuito por el que circulan intensidades muy importantes no es una tarea fácil y requiere equipos altamente especializados y caros.

Los más sofisticados y caros son los interruptores automáticos, que son capaces de abrir un circuito (una línea en este caso) en condiciones de circulación de una sobreintensidad provocada por algún cortocircuito. Los equipos de medida detectan la sobreintensidad y con una adecuada lógica deciden qué líneas es necesario abrir para eliminarla (esto se llama despejar la falta). Constructivamente existen muchos tipos, aunque los más modernos son los que están bañados en hexafluoruro de azufre para altas tensiones y grandes potencias. Normalmente requieren la ayuda de algún mecanismo para eliminar el arco que se forma al abrir el circuito, bien intentando ampliar el recorrido del arco hasta su extinción (es el caso de los interruptores neumáticos de aire comprimido o de soplado magnético empleados para potencias y tensiones reducidas), bien sumergiendo el punto de corte en un dieléctrico más eficaz que el aire que dificulte la continuidad del arco que se forma (es el caso de los

interruptores en baño de aceite, los interruptores de pequeño volumen de aceite, o los ya mencionados interruptores de baño de hexafluoruro). Una característica particular de estos equipos es su capacidad de abrir dos veces seguidas de inmediato. Muchas faltas son de corta duración porque la causa del corto desaparece sola (puede ser el caso de una rama que ha tocado un cable pero luego no mantiene el contacto o un pájaro que se quema al cortocircuitarse y también desaparece) y por ello se suele intentar un reenganche automático del interruptor por si acaso ha desaparecido el origen de la falta. En caso contrario el interruptor volverá a abrir. Es de resaltar que por construcción no suele distinguirse a simple vista si el interruptor se encuentra en posición abierta o cerrada.

Una vez despejada e identificada la falta es necesario aislar eléctricamente la zona dañada para volver a conectar el resto de los elementos cortados inicialmente por el interruptor. Para ello se emplean los seccionadores. Los seccionadores son equipos que se utilizan para abrir o cerrar una línea cuando no circula intensidad por ella. No tienen por tanto una función de cortar intensidad, sino simplemente de aislar de forma bien visible una sección de línea, un aparato, una máquina, una barra de subestación o cualquier otro elemento de manera que sea posible manipularlos para fines de reparación o mantenimiento sin peligro. El operario es el que manualmente realiza las operaciones de apertura y cierre (nunca telemandado desde el centro de control) una vez se ha asegurado que el interruptor ha funcionado correctamente y ha dejado sin tensión a toda la zona. Existen también diversos tipos de seccionadores (de menor a mayor tensión: seccionadores de cuchillas giratorias, de cuchillas deslizantes, de columnas giratorias y de pantógrafo).

Finalmente existen interruptores orientados más bien hacia maniobras en la red que tienen capacidad de corte limitada a la intensidad nominal del circuito o de la línea que tienen que abrir o cerrar. No pueden por tanto abrir en condiciones de cortocircuito. Pueden ser interruptores aéreos, autoneumáticos, con autoformación de gases, de soplado magnético, o bañados en aceite o hexafluoruro.

Existen hoy en día subestaciones que se diseñan sumergidas enteras en hexafluoruro. Aunque son más caras, permiten reducir considerablemente las distancias entre barras, conductores y cables, siendo especialmente atractivas para los entornos urbanos donde el coste del metro cuadrado es muy elevado. Además son muy seguras.

1.3. El contexto económico

1.3.1. El sector eléctrico y la actividad económica

Con el incremento en transacciones comerciales que ha traído consigo el reciente proceso de reestructuración y liberalización del sector eléctrico en un número creciente de países, la electricidad será pronto el producto comercial con un mayor volumen de transacciones en el mundo [17]. El consumo eléctrico viene a suponer cerca de un 15 % del consumo total mundial de energía, siendo el uso directo del petróleo un 41 %, el del gas natural un 16 %, el de los renovables y de los residuos un 17 % y el del carbón un 11 % [17].

En España durante 1999 la energía eléctrica utilizada como energía final en términos físicos representó el 19 % del total de la energía consumida. Las otras fuentes energéticas se repartieron la restante participación en el balance energético: el petróleo supuso el 65 %, el

gas el 13 % y el carbón el 3 %⁹.

Las inversiones —gasto en adquisición de inmovilizado material e inmaterial— de los principales grupos empresariales eléctricos representaron el 5.2 % de la formación bruta de capital fijo total de la economía, como media del periodo comprendido entre 1995 y 1999. En el periodo comprendido entre 1988 y 1998 las inversiones realizadas en el sector eléctrico español se dirigieron fundamentalmente a las actividades de transporte y distribución: 58 %, el 10 % se dedicaron a centrales nucleares ya existentes, el 16.5 % a centrales térmicas, el 5 % a centrales hidráulicas y el 10.5 % a otras inversiones materiales.

Los sectores de electricidad, agua y gas en España, intensivos en capital, absorben un bajo porcentaje del empleo total ya que, conjuntamente con la industria extractiva, emplearon al 5.4 % de los trabajadores de la industria, equivalentes al 1 % del empleo total de la economía.

En 1998 entorno al 74 % de la energía eléctrica distribuida fue consumida por los sectores productivos de la economía, correspondiendo el 44 % y el 36 % del total de la energía eléctrica distribuida a las actividades relacionadas con la industria y los servicios, respectivamente.

Los ingresos de las empresas eléctricas españolas durante 1999 por tarifas reguladas ascendieron a 10 760 M€, y por peajes a los consumidores cualificados a 1 200 M€, arrojando un total de ingresos de 11 960 M€. El precio medio de la electricidad para las ventas a tarifa integral fue de 77.23 €/MWh, de los que el coste de generación —incluyendo renovables y autoprodutores— supone 44.71 €/MWh, el coste de transporte y distribución 20.55 €/MWh y el de comercialización 1.56 €/MWh. Por otra parte hay un conjunto de cargos regulatorios adicionales: los “costes de a la competencia” o CTC, que ascienden a 6.07 €/MWh, diversas cuotas (por las compensaciones a los sistemas extrapeninsulares y el coste de las instituciones: Operadores del Mercado y del Sistema y Comisión Reguladora) que suponen 0.90 €/MWh y los costes de diversificación (moratoria nuclear o tratamiento de los residuos nucleares) el 3.42 €/MWh. Como media desde 1996 a 1999, la factura eléctrica representó en España un 2.66 % del gasto total de las familias.

Los precios de la electricidad son muy diversos a nivel mundial. Por ejemplo, de acuerdo a las estadísticas publicadas por la Agencia Internacional de la Energía [18], en los países de la OCDE el precio de la electricidad en 1999 para consumo industrial oscilaba entre 0.14 \$US/kWh en Japón y 0.03 \$US/kWh en Nueva Zelanda, y para el consumo residencial entre 0.22 \$US/kWh también en Japón y 0.05 \$US/kWh en la República Checa. En Europa los precios más altos para el consumo industrial, antes de impuestos, corresponden a Suiza y Portugal, y los más bajos a Finlandia y la República Checa. Para el consumo doméstico a Portugal y Alemania corresponden los precios más altos y los más bajos a la República Checa y a Noruega. España, con 0.055 \$US/kWh para consumo industrial está por debajo de la media de la OCDE, pero con 0.12 \$US/kWh para el consumo residencial está bastante por encima de la media.

⁹ Fuente, para este párrafo y los siguientes sobre España: “Información básica de los sectores de la energía” de la Comisión Nacional de Energía, CNE, 1999.

1.3.2. La gestión económica de un sistema eléctrico: planificación y operación del sistema

La gestión económica de un sistema eléctrico es una tarea extremadamente compleja que involucra muy diversas actividades, en las que intervienen aspectos financieros (por ejemplo, modalidades de financiación de inversiones, impacto de índices macroeconómicos, coste de los recursos financieros nacionales y extranjeros, riesgos), aspectos tarifarios (políticas de tarifas), aspectos sociales (ayudas, subvenciones), aspectos empresariales (contabilidad, recursos humanos), aspectos medioambientales, así como todo lo relacionado con la planificación de inversiones y la operación del sistema, estos últimos muy interrelacionados con los aspectos tecnológicos. Y todo ello enmarcado dentro del contexto regulatorio y legal de cada país, que por supuesto condiciona de forma relevante no sólo el enfoque y los márgenes de actuación de cada una de esas actividades, sino también, y mucho, los protagonistas (quiénes y cuándo) en la toma de decisiones.

Todos estos aspectos mencionados quedan claramente fuera del propósito y alcance de este libro excepto en lo que respecta a la planificación y operación del sistema, para los cuales este capítulo introductorio esboza una descripción genérica que sirve para encuadrar varios capítulos del libro donde se detallan varias de sus facetas. Como se acaba de mencionar, el contexto regulatorio condiciona de forma importante la organización de estas funciones y en estos momentos de profundos cambios regulatorios en el sector en muchas partes del mundo, era necesario tratar de dar una visión ajustada tanto al entorno tradicional, todavía presente en muchos países, como a los entornos más liberalizados vigentes por ejemplo en parte ya en España. Para no perder la visión de conjunto se ha optado por completar primero la descripción de las funciones de planificación de la expansión y la operación del sistema en el contexto tradicional, ya muy asentadas, y resaltar más adelante la filosofía y los cambios que en ese terreno ha introducido la nueva regulación, en lugar de hacer ese ejercicio comparativo tema por tema.

La planificación y la operación real de un sistema eléctrico son el resultado de una compleja cadena de toma de decisiones, que comienzan en el largo plazo (expansión de la capacidad, contratos de combustibles), continúan en el medio plazo (gestión hidroeléctrica, programación del mantenimiento de las instalaciones), se concretan en el corto plazo (acoplamiento de los grupos generadores, reservas de operación) y se materializan en la explotación real (despacho de los grupos, regulación de la frecuencia, respuesta a eventuales condiciones de emergencia). La toma de decisiones se apoya en modelos de cálculo alimentados por sistemas de adquisición de datos y de comunicaciones de enorme complejidad. Es por ejemplo posible con los medios actuales calcular con precisión el coste marginal de un kWh demandado en un punto de la red y un instante determinados, tomando en consideración la citada cadena completa de toma de decisiones.

Las decisiones de expansión y operación de un sistema eléctrico deben guiarse por consideraciones de eficiencia económica de forma que se minimice el coste de proporcionar energía eléctrica al consumidor o cliente con una calidad satisfactoria. Sin embargo, y esto es sin duda más cierto en esta industria que en cualquier otra por sus especificidades, es necesario tener presente continuamente consideraciones técnicas para asegurar la viabilidad física del suministro eléctrico. Como quedará de manifiesto más adelante, estas últimas consideracio-

nes adquieren progresivamente mayor importancia a medida que la cadena de decisiones se acerca al tiempo real, difuminándose lo económico en lo técnico, de forma que no es posible trazar una frontera clara entre lo uno y lo otro.

Por el tamaño, dimensión y complejidad del problema es necesario racionalizar y organizar toda la cadena de decisiones. Esto se consigue jerarquizando en el tiempo las funciones de gestión de la expansión y de la operación. Así, las decisiones de más largo plazo, en el que pesan mucho las incertidumbres futuras, los criterios económicos y en el que es suficiente una representación aproximada del comportamiento físico del sistema, irán progresivamente alimentando la toma de decisiones a más corto plazo, en el que el detalle técnico del sistema es mucho más relevante, culminándose con la operación en tiempo real en la que es necesario contemplar en todo su detalle la dinámica milisegundo a milisegundo del sistema.

1.3.3. Las funciones de expansión y operación en el contexto tradicional

En este contexto, un coordinador centralizado, controlado por la Administración, tiene la responsabilidad de decidir, controlar y vigilar la operación global del sistema eléctrico. Asimismo es el encargado de elaborar planes de expansión del sistema tanto en lo que se refiere a la instalación de nueva capacidad de generación como a las líneas o equipos de la red de transporte, siendo también a menudo en este último caso el propio responsable de materializarlos si es el propietario de la red, como ocurría en España. En el caso de que exista una única empresa estatal encargada del servicio (por ejemplo Argentina, Francia, Italia, Reino Unido, Brasil, o Colombia, antes de los procesos liberalizadores) ella misma ejerce todas estas funciones bajo el control de la Administración que es su propietaria.

El criterio de base que orienta todo el proceso de decisiones es la maximización de la utilidad social de producir y consumir energía eléctrica. Para ello intervienen dos factores fundamentales. El primero es procurar minimizar toda la cadena de costes incurridos para proporcionar el servicio al consumidor (costes de inversión y costes de operación). Ahora bien, el conseguir un servicio barato no es el único factor que interviene al medir la utilidad social. El servicio también tiene que tener una calidad satisfactoria. Un servicio barato pero con interrupciones constantes pierde mucho de su valor de utilidad, ya sea para un consumidor industrial o doméstico. Debido a los distintos factores de incertidumbre (por ejemplo, aportaciones hidrológicas, crecimiento real de la demanda, fallos de los equipos de generación, transporte y distribución) no es posible garantizar el servicio sin ningún tipo de fallo o de corte en el suministro para cualquier tipo de escenario futuro. Siempre existirá alguna probabilidad de no poder dar el servicio a toda la demanda en todo momento, lo que constituye una medida de la fiabilidad del sistema. Sin embargo es claro que dicha probabilidad de fallo en el suministro puede minimizarse invirtiendo en más equipos y operando de una forma más conservadora. El aumento de fiabilidad ha supuesto un aumento de los costes incurridos. Es por ello necesario complementar el primer criterio mencionado de minimización de costes, con un segundo criterio que refleje el nivel de fiabilidad del sistema. Existen varias formas de incorporarlo al proceso de decisiones. Una de ellas es fijar, basándose en la experiencia adquirida y en la percepción social que exista, un umbral mínimo de fiabilidad, medido en términos de probabilidad de energía eléctrica no servida

o alguna medida parecida. Otra, con mayor fundamento, consiste en tratar de cuantificar económicamente el perjuicio ocasionado por la interrupción del servicio en la función de utilidad del consumidor de forma que, incorporando este factor como un coste más al proceso de minimización de costes, se está realmente maximizando la utilidad social del servicio. La dificultad de esta segunda aproximación reside en dicha cuantificación, que puede ser muy distinta para cada tipo de consumidor e individuo y que no está claro como medir. Se han realizado estudios sistemáticos para tratar de valorarlo mediante encuestas a los consumidores especialmente diseñadas para ello.

La fiabilidad es un factor que involucra a todo el rango de decisiones, desde el largo plazo hasta el corto plazo. En efecto, una interrupción en el suministro puede deberse a aspectos relacionados con la inversión (por ejemplo, que no exista suficiente capacidad instalada en el sistema para cubrir la demanda, quizás porque ha habido un crecimiento inesperadamente importante de la demanda, o porque ha coincidido con unas condiciones hidrológicas muy adversas, o porque no existe suficiente capacidad de transporte o se retrasó la entrada en funcionamiento de las nuevas inversiones), o porque han existido problemas en la operación (mala gestión de embalses, insuficientes grupos acoplados para responder de forma inmediata a fallos de otros grupos o líneas, problemas de estabilidad del sistema en tiempo real). Es por ello que prácticamente en cualquiera de los ámbitos de decisión que se repasan a continuación aparecen siempre un factor de costes y un factor de fiabilidad cuyo equilibrio marcará la decisión a tomar. Se suele utilizar el término adecuación para describir la fiabilidad en el ámbito del largo plazo y el término seguridad para referirse a la operación en el corto plazo.

No existe una forma estándar de organizar la planificación y la operación de los sistemas eléctricos. Sin embargo, todos, de una forma u otra, responden a una jerarquía temporal en la toma de decisiones con una estructura similar a la que se detalla a continuación.

Programación y supervisión de la producción y el transporte en el largo plazo

El primer nivel de decisiones se encuentra en el largo plazo, en el entorno de los 2-3 años hasta los 10-15 años o más, para determinar las inversiones necesarias en nuevos equipos de generación y de red. En función de las previsiones de crecimiento de la demanda, de las alternativas tecnológicas existentes y sus costes, de estimaciones de la evolución en la disponibilidad y los precios de los combustibles, de los criterios de fiabilidad adoptados, de los condicionantes de impacto medioambiental, de las políticas de diversificación y de dependencia exterior marcadas, se trata de determinar de qué tipo, de qué volumen y en qué momento han de instalarse nuevos equipos de generación y transporte. Es necesario contemplar horizontes de tiempo tan lejanos porque las inversiones (muy elevadas) se justifican por los beneficios que proporcionan operando durante su vida útil que puede ser de 25-30 años para las centrales térmicas y muchos años más para las hidráulicas.

Obviamente, dado el horizonte de tiempo de estos estudios, la incertidumbre es un factor absolutamente determinante. Será necesario trabajar con múltiples escenarios, realizando en la medida de lo posible evaluaciones probabilistas, y adoptar criterios de selección de alternativas tales como: minimización de costes medios esperados, minimización del arrepentimiento o minimización del riesgo (varianza de la distribución de costes). Por la misma

razón no tiene sentido evaluar para este tipo de estudios el comportamiento detallado técnico de la operación del sistema, ya que ni sería viable ni tiene sentido buscar mucha precisión en la evaluación de los costes de operación cuando se está manejando tanta incertidumbre a niveles mucho más significativos en coste.

Es esencial contar con una buena base de datos que recopile toda la información necesaria para el proceso (datos actualizados sobre tecnologías, datos históricos sobre la demanda, las hidrologías, las tasas de fallo de los equipos, etc.). A partir de esos datos se elabora una previsión a largo plazo de la demanda (en forma de una distribución de probabilidad) que es la que determinará las necesidades de expansión del sistema. Como se ha apuntado previamente es tan relevante conocer el crecimiento del volumen de demanda como su perfil temporal ya que la elección de tecnologías depende significativamente de ello. Se procede a continuación a determinar la expansión del equipo generador para cubrir dicha demanda en la que, respetando los distintos criterios estratégicos mencionados previamente, se busca la opción que minimice los costes esperados en los que se va a incurrir para todo el horizonte contemplado. Estos costes corresponden a los costes fijos de las inversiones por las que se opte más los costes de operación para todo el horizonte, que dependerán obviamente de dichas inversiones. Es común apoyarse en modelos de simulación y optimización que realizan estas estimaciones. Normalmente por el tamaño del problema a tratar se utilizan técnicas de descomposición que trabajan de forma iterativa entre dos módulos, uno especializado en el cálculo de los costes de expansión y otro en el de los costes de operación, y entre los cuales se va intercambiando la información necesaria hasta converger.

La expansión de la red de transporte siempre ha estado tradicionalmente supeditada a las necesidades de las nuevas inversiones de generación y al crecimiento de los centros de demanda. Esto ha sido así porque los costes involucrados y los tiempos de construcción de la red han sido significativamente menores que los de las centrales de generación, aunque esto no es siempre cierto en aquellos países que por su geografía y extensión requieren un sistema de transporte realmente importante en dimensión y coste. Ubicadas las nuevas centrales y los crecimientos de consumo y producción se decide la expansión de la red contrastando los costes de inversión necesarios con el beneficio que reporta el sistema (menores costes de operación, menores pérdidas en el sistema, mayor fiabilidad en la cobertura de la demanda). Intervienen en el proceso de decisión criterios de seguridad que permiten asegurar que la demanda no sufrirá interrupciones por culpa de refuerzos y de aspectos técnicos de la red (por ejemplo problemas de tensiones o estabilidad).

Por supuesto las decisiones de expansión serán dinámicas en el tiempo, en el sentido de que deberán ser revisadas periódicamente a medida que la realidad del crecimiento de la demanda, de las innovaciones tecnológicas o de las condiciones de adquisición de combustibles modifique las hipótesis de partida de los planes iniciales de expansión.

Programación y supervisión de la producción y el transporte en el medio plazo

Teniendo presentes las futuras inversiones, es necesario planificar ahora la operación a medio/largo plazo de las instalaciones de producción y de transporte. Para un horizonte de 1-3 años, dependiendo de los sistemas, se busca determinar la mejor programación de

los ciclos de mantenimiento de las centrales y de la red, la mejor política de adquisición de combustibles, y la mejor planificación del uso de las centrales de energía limitada (cuyo ejemplo más representativo es sin duda la generación hidráulica) o con restricciones de producción anual por consideraciones medioambientales.

Las centrales de generación eléctrica son sofisticados sistemas con miles de componentes que requieren una revisión periódica con objeto de evitar fallos mayores y a veces peligrosos, y mantener la eficiencia técnica de la central. Es habitual dejar fuera de servicio las centrales térmicas convencionales en torno a unos veinte días una vez al año. Las centrales nucleares requieren recargar su combustible (las barras de uranio) cada año y medio, por lo que se aprovecha la parada de la central para proceder a todas las labores de mantenimiento. Las líneas eléctricas y en general los elementos de la red de transporte y distribución situados en las subestaciones requieren asimismo trabajos de mantenimiento, como por ejemplo la sustitución de los aisladores en mal estado o la limpieza de los mismos para evitar la pérdida del efecto aislante. Aunque es cada vez más frecuente disponer de la suficiente tecnología como para realizar estas labores en tensión (dando lugar a imágenes espectaculares de personal técnico especializado trabajando sobre las líneas a 400 kV, a veces colgados de helicópteros), la mayoría de estas operaciones se realizan sin tensión en los equipos, por motivos obvios de seguridad, obligando a una desconexión de líneas o de partes de las subestaciones. Esto obliga a una planificación cuidadosa del programa de mantenimiento para que interfiera lo menos posible con la operación del sistema (a este proceso se le conoce como plan de *descargos de red*).

La gestión del combustible requiere una planificación cuidadosa. Previstos unos determinados consumos es importante planificar la compra del combustible, a menudo en mercados internacionales (carbón, gas, petróleo), para aprovechar los mejores precios (por ejemplo haciendo uso de los mercados de futuros), prever su transporte y almacenamiento y desde luego asegurarse de que la central no se queda sin combustible por problemas logísticos.

Por último es necesario planificar el uso del agua en las centrales hidráulicas, como un combustible más. El agua es un combustible gratuito pero del que se dispone en cantidades limitadas (las que existan en el embalse de la central). Por ello es necesario planificar su uso en el tiempo, de forma que sea lo más beneficioso para el sistema. Las centrales hidráulicas que no tengan capacidad de almacenar agua (fluyentes) no necesitan ninguna planificación, pero aquellas para las cuales se puede optar por producir o almacenar el agua para más tarde, requieren una toma de decisión que, dependiendo del tamaño del embalse, puede abarcar desde algún día (para embalses muy pequeños) hasta semanas, meses o incluso años para los mayores embalses (conocidos como embalses de regulación hiperanual). Aquellos cuya gestión y regulación contempla varios meses han de planificarse con un horizonte anual o hiperanual. Dado que el objetivo natural de dicha planificación será tratar de sustituir la producción térmica más cara, a esta planificación se le suele denominar coordinación hidrotérmica. Ocurre algo similar para cualquier tecnología que presente una restricción de uso de cualquier tipo que limite su producción acumulada para un determinado horizonte de tiempo, típicamente estacional o anual, como por ejemplo la existencia de cuotas obligatorias de consumo de combustible nacional (por ejemplo carbón) o cupos limitados anuales de contaminación.

Programación y supervisión de la producción en el corto plazo

En el ámbito esta vez ya de la semana (días, un mes), y a partir de las consignas obtenidas del nivel de decisión jerárquicamente superior que se acaba de describir (mantenimientos decididos, gestión hidráulica a nivel mensual o semanal decidida, plan de emisiones, gestión del consumo de combustibles sujeto a cuota...), es necesario determinar hora a hora, para cada día de la semana o el mes, el plan de producción de las centrales hidráulicas y térmicas.

En este punto los detalles del sistema son ya muy relevantes, requiriéndose tener en consideración los procesos y costes de arranque y parada de los grupos térmicos, las restricciones impuestas por la red hidrológica de cada cuenca, las centrales en cascada, la cronología de la demanda que exige un seguimiento fiel de la producción, los elementos de generación en reserva para responder de inmediato a fallos fortuitos de los equipos, etc.

En efecto, los grupos térmicos presentan unas características técnicas que limitan la variación temporal de su capacidad de producción. Una central parada requiere un tiempo mínimo para volver a estar en condiciones de producir, empleado para alcanzar un grado suficiente de calentamiento de la caldera. Este tiempo mínimo para producir depende por tanto del estado de enfriamiento de la caldera, es decir, del tiempo que lleva parada. Las centrales térmicas más convencionales pueden requerir hasta 8 y 10 horas si la caldera está completamente fría. Las centrales de gas y ciclos combinados son más flexibles y este tiempo puede reducirse a 1-2 horas e incluso minutos para las turbinas simples de gas. Debido a este efecto el arranque de una central térmica tiene un coste significativo (quemar combustible sin producir hasta alcanzar la temperatura necesaria en la caldera). Es por esta razón por la que, a pesar de que la demanda pueda disminuir mucho, puede que no sea rentable desconectar ciertas centrales térmicas durante la noche, y se prefiera mantenerlas a su nivel mínimo de producción. Este nivel, llamado *mínimo técnico* de la central, es por lo general relativamente elevado (del orden de 30-40% de la capacidad máxima de la central) debido a requisitos de estabilidad de la combustión en la caldera. En función de ello será necesario determinar si es globalmente más económico arrancar y parar en el día (ciclo diario de arranque), o parar únicamente el fin de semana (ciclo semanal) o simplemente no parar nunca (por ejemplo las centrales nucleares). A veces interesa mantener caliente la caldera aún sin producir nada (se denomina *embotellar* la central). Las constantes térmicas de la caldera y sus límites imponen igualmente un límite en la velocidad con la que las centrales térmicas pueden modificar su producción. De esta forma existirán rampas temporales de subida y bajada de la capacidad de producción de la central. Todo ello requiere una planificación cuidadosa de los arranques y paradas de los grupos, problema que recibe el nombre de *asignación de unidades* o *unit commitment* en la literatura anglosajona.

En esta decisión intervienen también de forma relevante la gestión hidráulica para el horizonte de la semana o el mes, así como los requisitos de reserva del sistema. Las centrales hidráulicas presentan un comportamiento técnicamente mucho más flexible, pudiendo producir prácticamente de forma instantánea sin coste de arranque significativo, y modulando su generación sin límites reales. La optimización de la producción hidráulica tomará en consideración, a partir de las consignas de volúmenes de agua a utilizar en la semana o el mes, proporcionadas por las decisiones de orden jerárquicamente superior, el reparto horario más económico (coordinación hidrotérmica a nivel mensual o semanal) y las restricciones técni-

cas de los grupos térmicos para cubrir fielmente las variaciones temporales de la demanda. La producción hidráulica y el correspondiente movimiento de agua en los embalses deben respetar posibles restricciones impuestas por la gestión del agua para otros fines (regadíos, fauna, niveles mínimos de agua embalsada y de caudales de ríos, etc.) así como condicionantes propios de las obras geohidráulicas (por ejemplo canales, límites de los embalses, embalses en cascada o tuberías).

De nuevo intervienen también consideraciones de fiabilidad en las decisiones. Debe estar prevista la sustitución inmediata de cualquier central que pudiera razonablemente fallar en el sistema o la capacidad de responder a alguna indisponibilidad de la red de transporte, obligando a decidir el arranque y acoplamiento de nuevos grupos que, aunque innecesarios en ese momento, no estarían listos hasta pasadas varias horas de otra forma.

Programación y supervisión de la producción y el transporte en el tiempo real

Las funciones de operación en tiempo real se construyen esencialmente sobre criterios de seguridad y no tanto económicos. Son las consignas previamente decididas las que aportan todo el componente económico al proceso (sin olvidarse nunca como se ha visto de la componente económica de la fiabilidad). La supervisión, el control y la vigilancia aseguran la viabilidad técnica de ese gigantesco sistema dinámico que es el sistema eléctrico, tal y como se ha detallado en el apartado 1.2.6.

En España el centro de control se encuentra en las instalaciones de Red Eléctrica y recibe el nombre de CECOEL.

1.3.4. Las funciones de planificación y operación en el nuevo contexto regulador del sector

Una descripción detallada de los fundamentos y caracterización de las regulaciones tradicional y de libre competencia en el sector eléctrico se proporcionará en la próxima Sección 1.4. Los cambios en la regulación del sector eléctrico español ocurridos a raíz de la promulgación de la Ley 54/1997 del Sector Eléctrico de 27 de noviembre de 1997, y de los correspondientes desarrollos normativos, están modificando profundamente los hábitos de operación y planificación del sistema eléctrico. Otros muchos países han experimentado procesos semejantes. La liberalización del sector se acompaña de una profunda descentralización de las funciones de planificación y operación. La expansión (inversión) y la operación del sistema son fruto de las decisiones individuales de cada empresa que, bien a través de un sistema organizado de ofertas, bien a través de contratos privados de compraventa de energía eléctrica, toma individualmente las decisiones atendiendo a criterios de maximización de su beneficio empresarial. El riesgo económico y financiero y las expectativas de beneficio se convierten en el motor de las decisiones, sustituyendo los tradicionales criterios de minimización de costes. El reto de las autoridades administrativas y reguladoras es diseñar las reglas del mercado liberalizado de forma tal que el comportamiento estrictamente empresarial e individual de cada uno de los agentes conduzca a una minimización global de los costes del sistema y esto se refleje en la tarifa al usuario final.

Sin embargo queda como una función centralizada la operación en tiempo real del sistema. Un operador centralizado, comúnmente denominado operador del sistema, vela por la seguridad del sistema manteniéndose el esquema de supervisión y control descrito previamente para el entorno tradicional. Asegurar la viabilidad técnica en tiempo real del sistema requiere una coordinación avanzada de todos los medios, que exige tener una independencia clara de los intereses individuales de cada agente. En España esta función la ejerce Red Eléctrica de España, REE.

El funcionamiento del sector eléctrico se contempla por tanto desde una perspectiva completamente distinta. Nacen nuevas funciones, nuevas responsabilidades, nuevas formas de abordar el proceso de toma de decisiones y cambian los papeles a desempeñar por cada tipo de agente.

Las empresas eléctricas han tenido que reorganizarse para asumir sus nuevas funciones dentro del mercado. Tienen ante sí el reto de adaptarse a un nuevo entorno en el que han de cambiar muchos de sus hábitos de funcionamiento y en el que nacen nuevos cometidos y tareas. Entre las actividades más novedosas se encuentran las relacionadas con los procesos de elaboración de ofertas, y la elaboración de contratos y de presupuestos anuales de operación —ingresos menos costes de operación—, siempre en el marco de una política de gestión del riesgo.

El largo plazo

El nuevo entorno ha revolucionado por completo la forma de enfocar la planificación de la generación. La liberalización y descentralización de las decisiones de inversión trasladan a cada agente individual la responsabilidad de evaluar, en términos puramente de coste-beneficio propio, la conveniencia de invertir en nuevas instalaciones de generación. Por otro lado, los cambios tecnológicos¹⁰ y la posibilidad de acceder a un nuevo combustible como el gas¹¹ han reducido prácticamente las opciones posibles de expansión a los ciclos combinados de gas, tecnología que requiere inversiones unitarias y totales más reducidas que las tecnologías competidoras y que presenta plazos de construcción espectacularmente menores a los de las centrales más tradicionales. Los estudios de nuevas inversiones se basan por todo ello en la estimación del flujo previsto de ingresos a lo largo de varios años, es decir, en una evaluación del comportamiento futuro del mercado. Intervienen en estos análisis factores asociados a la estimación de precios de combustible, de niveles de demanda, de nuevas inversiones ajenas, de precios de mercado, etc. Y en todo ello la evaluación del riesgo económico juega un papel crítico ya que proporciona la llave para encontrar financiación adecuada para la inversión. La estocasticidad de las aportaciones hidráulicas y de la demanda así como el posible juego de escenarios de precios y de las decisiones ajenas de expansión son aspectos que va a ser necesario saber manejar en este entorno.

La gestión de riesgos constituye una de las principales actividades y motores de la planificación y operación de un sistema de energía eléctrica. La elaboración de contratos tanto físicos como financieros y el acceso a mercados de futuros y opciones son en este

¹⁰ También puede considerarse relevante para esta discusión el que no existen en España recursos hidráulicos significativos por aprovechar.

¹¹ A pesar de que la liberalización del sector gasista en España es todavía una asignatura pendiente.

entorno elementos de enorme importancia.

La planificación de la red de transporte, aunque por lo general se sigue realizando de forma centralizada¹², ha tenido que modificar su perspectiva y ha de realizarse actualmente en un entorno de mucha mayor incertidumbre. El criterio básico de la planificación, que es la optimización de la utilidad social de la producción y consumo de electricidad, sigue siendo el mismo. Pero ahora esta utilidad no ha de concretarse como una minimización de costes de producción sino como una maximización de los beneficios de los agentes individuales: utilidad del consumo eléctrico menos coste de adquisición, para los consumidores, e ingresos por la venta de electricidad menos costes de generación, para los productores. Por otro lado, la incertidumbre con la que el planificador debe tomar sus decisiones ha aumentado radicalmente. Tradicionalmente se planificaba la red partiendo de las decisiones previas de expansión de la capacidad de generación, información que en un entorno de libre competencia no se elabora centralizadamente ni *a priori*, sino que es fruto de decisiones empresariales tomadas individualmente por los agentes en cualquier momento. Por consiguiente, tanto la cantidad como la ubicación de la nueva generación en general no son conocidas con certeza a la hora de planificar la red. Por otro lado, el tiempo que puede transcurrir desde que se toma la decisión de construir una línea hasta su puesta en funcionamiento es cada vez más largo, debido especialmente a las frecuentes dificultades de tipo medioambiental y de ordenación del territorio, de forma que actualmente este tiempo es a menudo mayor que el de la propia construcción de las centrales.

El medio plazo

Hay diversos agentes en los mercados eléctricos que deben tratar de optimizar sus decisiones en el medio y corto plazo: consumidores, comercializadores y productores. Aquí nos limitaremos a comentar sobre estos últimos. Las funciones de medio plazo para las empresas de producción tienen un triple objetivo:

- Realizar previsiones económicas de medio plazo: previsión de ingresos y presupuestos anuales.
- Servir de soporte a las funciones del largo plazo mencionadas previamente: determinación de estrategias empresariales de largo plazo, evaluación de inversiones y gestión de contratos.
- Servir de soporte a las funciones de corto plazo, en particular la elaboración de ofertas en los mercados diarios de energía y de servicios complementarios: consignas de producción hidráulica, valoración de las reservas de agua, consignas de la producción térmica sujeta a restricciones anuales —por ejemplo las cuotas de carbón nacional o el resultado de restricciones de carácter medioambiental—.

El nuevo enfoque con el que deben diseñarse los modelos que sirvan de soporte para estas decisiones, en las que se busca la optimización de los beneficios propios de cada agente en el mercado, exige incorporar al modelo, de alguna forma, conceptos teóricos novedosos propios de la microeconomía y de la teoría de juegos. Los mercados se entienden como elementos

¹² Las diversas alternativas regulatorias se describen en la Sección 1.4.7.

dinámicos que se estabilizan en torno a unos puntos de equilibrio caracterizados por las estructuras de producción de los distintos agentes. También, y de forma muy paralela, se pueden entender como el resultado de un determinado juego en el que las reglas marcadas imponen finalmente una estrategia a seguir por cada agente en función de las reacciones de los demás.

El corto plazo

Aunque existen diversas formas de organizar los mercados eléctricos, todos ellos de alguna forma disponen de una serie o secuencia de mercados de corto plazo, típicamente diarios, intradiarios y de servicios complementarios, en los que se decide la operación a corto plazo de las centrales de producción. De entre todos ellos suele ser el mercado de ofertas diarias el de mayor importancia desde el punto de vista de referencia de precios o del volumen económico de las transacciones realizadas (es también el caso de España). En este sentido el corto plazo está marcado por el proceso diario de elaboración de ofertas.

Los procesos de elaboración de ofertas en el horizonte diario están alimentados por decisiones estratégicas de mayor nivel. Así, estos procesos se alimentan de consignas de producción ofrecidas por los análisis de mayor horizonte, y su papel consiste en fijar los precios del mercado en el día a día. La estimación de los precios previstos en el corto plazo —en ese intervalo la incertidumbre asociada a las aportaciones hidráulicas y la disponibilidad de los grupos es muy reducida— es una tarea importante ya que permite orientar las decisiones de internalización de costes de los grupos térmicos y las decisiones de colocar la producción hidráulica. Fruto de ello y de la estimación del comportamiento de la competencia, las empresas deciden las curvas de oferta (precio, cantidad) con las que acuden al mercado a competir.

El tiempo real: los servicios complementarios

La operación en tiempo real, con una fuerte componente de seguridad, mantiene una estructura similar al entorno tradicional si bien normalmente se ha realizado un importante esfuerzo por diferenciar y valorar claramente el tipo de servicios que en este ámbito cada uno de los agentes del sistema proporciona. Incluso siempre que ha sido posible se han implantado mecanismos de mercado para decidir en competencia quién presta el servicio y a qué precio. Este es frecuentemente el caso de las reservas de operación (secundaria, terciaria), aunque también a veces del control de las tensiones, e incluso del arranque de ceros de tensión en el sistema. El control primario de frecuencia/potencia se mantiene como un servicio básico obligatorio a disposición del operador del sistema, como elemento fundamental para garantizar la seguridad del mismo.

En este marco de competencia las empresas deben ofertar sus servicios teniendo que valorar tanto los costes incurridos por sus centrales para proporcionarlos como las distintas oportunidades de mercado.

1.4. El contexto regulador

1.4.1. Regulación tradicional y regulación en competencia

Puede definirse en síntesis la regulación como un “sistema que permite a un gobierno formalizar e institucionalizar sus compromisos de proteger a los consumidores e inversores en un determinado sector industrial” [19]. Dependiendo del proceso de desarrollo de la industria eléctrica en cada país —e incluso en distintas regiones dentro de un país— de los planteamientos ideológicos predominantes, de los recursos naturales específicos y de los cambios tecnológicos, entre otros factores, el sector eléctrico ha adoptado en los distintos países formatos variados de organización y de propiedad —privada o pública, ya sea ésta municipal, provincial o estatal—.

A pesar de esta diversidad, desde que la industria eléctrica alcanzó su madurez hasta tiempos muy recientes, su regulación a nivel mundial ha sido uniformemente la correspondiente a un servicio público prestado en condiciones de monopolio: por un lado garantía de la franquicia de suministro a la empresa eléctrica —verticalmente integrada, típicamente—, y por otro regulación de los precios atendiendo a los costes incurridos en proporcionar el servicio. Este es el enfoque regulador que se denominará aquí genéricamente como “tradicional”. Dentro de este esquema la relación entre las empresas eléctricas ha sido generalmente de colaboración voluntaria, concretándose en múltiples aspectos, como la gestión conjunta de la regulación de frecuencia o de las reservas de operación, algunos intercambios económicos o de emergencia —éstos más frecuentemente—, y el facilitar a terceros el tránsito de potencia por las redes bajo condiciones económicas negociadas entre las partes.

Esta homogeneidad reguladora fue alterada en 1982 cuando Chile introdujo un enfoque novedoso separando las actividades eléctricas más básicas, creando un *pool* o mercado mayorista organizado de energía en competencia —aunque fuese bastante limitada— tras privatizar mayoritariamente el sector, con un despacho centralizado basado en los costes variables declarados, con remuneración de todos los generadores según el coste marginal del sistema, con contratos de largo plazo para contrarrestar la volatilidad de los precios, con planificación indicativa de la generación —asumiendo el Estado un rol meramente subsidiario—, y con acceso libre a la red mediante un sistema de peajes. Hasta 1990 no tuvo lugar una transformación semejante —aunque bastante más radical— de la industria eléctrica en Inglaterra y Gales, que fue seguida de cerca por Argentina (1991) y Noruega (1991). Posteriormente otros muchos países como Colombia, Suecia, Finlandia, Nueva Zelanda, los estados de Victoria y Nueva Gales del Sur en Australia —dando posteriormente lugar al Sistema Nacional Australiano—, Nueva Zelanda, Perú, Ecuador, Bolivia, El Salvador, bastantes estados en los Estados Unidos y en Canadá, Holanda, Alemania, Italia, Portugal y España, entre otros, han establecido o están inmersos en el proceso de establecer también marcos regulatorios de libre competencia. Otros países han introducido importantes elementos de apertura a la competencia sobre marcos regulatorios de formato tradicional, como es por ejemplo el caso de casi todos los países de Europa del Este, México, Malasia, Filipinas, Indonesia, Tailandia, Japón, India, Jamaica y algunos países centroamericanos.

La evolución es tan rápida que es de escasa utilidad hacer una foto instantánea de la situación presente, por la dificultad de captar la posición exacta de todos los sujetos en

un determinado momento y porque se volvería obsoleta en un corto espacio de tiempo. Aquí se ha optado por presentar y clasificar en forma abstracta los rasgos específicos que caracterizan la regulación del sector, así como las opciones básicas de estructura, organización y tratamiento de los diferentes servicios del suministro de electricidad que se han ido adoptando para introducir competencia en los tradicionales esquemas de regulación de la industria eléctrica.

Debe comenzarse por recordar aquellas características tecnológicas y económicas de la industria eléctrica que condicionan el diseño de los planteamientos regulatorios que le son aplicables:

i) Las infraestructuras necesarias para producir, transportar y distribuir electricidad tienen un coste muy elevado, son específicas y muy duraderas.

ii) La energía eléctrica tiene el carácter de esencial para los consumidores, por lo que existe una gran sensibilidad social ante su eventual carencia o falta de calidad.

iii) La energía eléctrica no es almacenable económicamente en cantidades significativas, por lo que su producción ha de estar adaptada instantáneamente a su demanda.

iv) La operación real de un sistema eléctrico es el resultado de una compleja cadena jerarquizada de toma de decisiones, tal como se ha descrito en detalle en la sección anterior.

v) El suministro de electricidad integra actividades con claras condiciones de monopolio natural (los servicios de red de transporte y de distribución o la operación del sistema) con otras que admiten la competencia (la generación y la comercialización).

vi) Las estructuras de organización y de propiedad de las empresas eléctricas en distintos sistemas eléctricos son muy diversas.

1.4.2. La nueva regulación eléctrica: motivación

El cambio regulatorio en el sector eléctrico, que se inscribe en la actual tendencia liberalizadora de la economía —transporte aéreo, telecomunicaciones, servicios bancarios, suministro de gas, etc.—, ha sido posible gracias al concurso de diversos factores. Por un lado, el desarrollo de la capacidad de interconexión de los sistemas eléctricos, que ha conducido a un aumento efectivo del tamaño de los potenciales mercados relevantes, eliminando o reduciendo los posibles efectos de economía de escala de las unidades de producción. Por otro lado, la aparición de nuevas tecnologías de generación económicamente muy competitivas, en una multiplicidad de tamaños y con tiempos de instalación muy reducidos, que están proporcionando, al menos inicialmente, un amplio caudal potencial de entrantes a los mercados de nueva creación. En algunos países ha sido determinante la insatisfacción con el enfoque tradicional, a causa de sus deficiencias más habituales: excesivo intervencionismo gubernamental, confusión de los roles del estado como propietario y como regulador, ineficiencia en la gestión económica y técnica por ausencia de competencia o falta de capacidad inversora. Finalmente, los avances tecnológicos en medida, comunicaciones y procesado de la información facilitan enormemente el planteamiento de competencia en la comercialización del suministro eléctrico a los consumidores finales.

1.4.3. La nueva regulación eléctrica: en qué consiste

La nueva regulación eléctrica parte de un postulado básico: que es posible la existencia de un mercado mayorista de energía eléctrica al que todas las entidades generadoras —las existentes y las que voluntariamente se vayan incorporando— así como todas las entidades consumidoras —ya sea directa o indirectamente— puedan acudir. El núcleo principal de este mercado mayorista es típicamente un mercado *spot* de electricidad, con relación al cual o como alternativa al mismo, se establecen contratos de medio y largo plazo de diversos tipos, e incluso mercados organizados de derivados eléctricos. Los agentes que realizan transacciones en estos mercados son los generadores, los consumidores autorizados, y diferentes categorías de empresas comercializadoras, ya sea actuando en nombre de colectivos de consumidores sin capacidad de elección, o bien de consumidores con dicha capacidad, o bien como puros intermediarios entre otros agentes. La nueva regulación ha de ocuparse también de otros muchos aspectos, tales como: la creación de un mercado minorista que permita que todos los consumidores puedan ejercer el derecho a elegir suministrador; los mecanismos e instituciones de coordinación de los mercados organizados y, muy particularmente, de la operación técnica del sistema; las redes de transporte y distribución en sus diversos aspectos de acceso, expansión, retribución, asignación de peajes por su utilización, y calidad de servicio; o el diseño de un proceso de transición del marco tradicional al de competencia que proteja los intereses legítimos de consumidores y empresas.

Debe recordarse que el suministro de electricidad en competencia requiere la realización de determinadas actividades asociadas fundamentalmente a las redes de transporte y de distribución —cuyo control confiere un poder absoluto en el mercado eléctrico—. Es por consiguiente imprescindible que estas actividades asociadas a la red sean totalmente independientes de las actividades competitivas esenciales, que son la producción y la comercialización. Por ello, ya que normalmente los procesos de liberalización parten de compañías totalmente integradas verticalmente, esto es, que realizan todas las actividades desde la producción hasta la facturación de la electricidad al consumidor final, es generalmente preciso comenzar modificando la estructura de organización y de propiedad del sector, antes de poder introducir mecanismos de competencia. Por supuesto que en la estructura que resulte habrá también que atender posteriormente a los aspectos de concentración horizontal de las empresas de producción y de las entidades comercializadoras, así como a la integración vertical entre unas y otras, para mantener unas condiciones aceptables de competencia en el mercado.

1.4.4. Naturaleza de las actividades eléctricas

Un examen atento del proceso completo de abastecimiento de energía eléctrica a los consumos finales permite identificar diversas actividades, de naturaleza técnica y económica muy distinta, que son por tanto susceptibles de recibir un tratamiento regulatorio diferente. La división clásica en generación, transporte y distribución es excesivamente burda y además comete errores de bulto, como por ejemplo integrar dentro de una única categoría —“distribución”— lo que al menos son dos actividades de naturaleza radicalmente distinta: el servicio de “red de distribución”, que permite hacer llegar físicamente la energía desde la red de transporte hasta los consumidores finales y que tiene características de monopolio

Cuadro 1.3. Clasificación de las actividades eléctricas.

Generación	<i>Generación en régimen ordinario</i> <i>Generación en régimen especial</i> <i>Servicios complementarios</i>
Red	<i>Transporte</i> <ul style="list-style-type: none"> – Planificación de la expansión – Construcción – Planificación del mantenimiento – Mantenimiento – Operación del transporte <i>Distribución</i> <ul style="list-style-type: none"> – Planificación de la expansión – Construcción – Planificación del mantenimiento – Mantenimiento – Operación del transporte
Transacción	<i>Mercado mayorista</i> <ul style="list-style-type: none"> – Contratación libre – Contratación estandarizada – Intercambios internacionales <i>Mercado minorista</i> <ul style="list-style-type: none"> – Comercialización a consumidores con capacidad de elección – Comercialización a consumidores sin capacidad de elección <i>Actividades complementarias</i> <ul style="list-style-type: none"> – Liquidaciones – Facturación – Medición
Coordinación	<i>Operación técnica del sistema eléctrico</i> <i>Operación del mercado organizado</i>

natural, y el servicio de “comercialización” de esta energía, adquiriéndola al por mayor y vendiéndola al por menor, que puede realizarse en condiciones de competencia. El análisis de las actividades eléctricas que a continuación se expone constituye un resumen de lo publicado en [20].

Una primera clasificación de carácter general permite agrupar las actividades en las categorías básicas de producción, de red, de intermediación o transacción y de coordinación, además de otras complementarias de las anteriores, como medición o facturación. La Tabla 1.3 presenta un posible desglose detallado de actividades de acuerdo a esta clasificación. En una primera impresión podría parecer que el desglose expuesto es excesivo. Sin embargo, es absolutamente preciso partir conceptualmente de una descomposición como ésta para

poder realizar un correcto planteamiento regulatorio. Por ejemplo, la *planificación de la expansión* de la red de transporte, debido al carácter de monopolio natural de esta red y a su significativa influencia sobre las condiciones del mercado eléctrico, es una actividad que debe ser regulada de alguna forma. Por el contrario, decididas las características y la fecha de entrada en funcionamiento de una nueva instalación, su *construcción* puede ser asignada por algún procedimiento de concurso en condiciones de competencia de calidad y precio.

1.4.5. Separación de actividades

El elevado número de las actividades que han sido identificadas no implica necesariamente una multiplicidad correspondiente de sujetos para realizarlas. Como se verá más adelante, existen sinergias y costes de transacción que aconsejan que en ciertos casos un mismo sujeto se haga cargo de varias actividades. No obstante, también se verá que pueden existir conflictos de interés para un sujeto a cargo de más de una actividad, cuando la realización de una de ellas puede favorecerle frente a otros agentes en otra actividad que esté abierta a la competencia. Es posible aplicar distintos niveles de separación, que es necesario adecuar a cada caso particular. Básicamente pueden considerarse cuatro tipos: contable, de gestión, jurídica (esto es, sociedades distintas, pero que pueden pertenecer a los mismos propietarios, a través de un grupo empresarial) y de propiedad.

La regla básica sobre separación de actividades en la nueva regulación es que un mismo sujeto no debe realizar simultáneamente actividades reguladas (por ejemplo distribución) y actividades abiertas a la competencia (por ejemplo generación). Es obvio que el potencial apoyo que la actividad regulada puede proporcionar a la competitiva constituye una ventaja para ésta que es regulatoriamente inadmisibles. De igual forma, tampoco es aceptable que el riesgo de la actividad competitiva se transfiera a la regulada, pues recae en última instancia sobre consumidores sin capacidad de elección.

Asimismo, para conseguir una adecuada transparencia en las actividades reguladas se requiere que exista al menos una separación contable entre las unidades de negocio correspondientes. Las actividades de diversificación (es decir, no eléctricas) que quieran emprender las empresas con actividades reguladas no deben permitirse o, en todo caso, deben estar sujetas a la autorización de la entidad reguladora. El criterio básico para la autorización debe ser la inexistencia de repercusiones negativas sobre el negocio regulado, que podrían acabar siendo soportadas en última instancia por los consumidores sin capacidad de elección.

En el diseño del nuevo marco regulatorio deben sopesarse las distintas ventajas e inconvenientes en las decisiones de asignación de actividades a sujetos y en la fijación de los niveles de separación, teniendo también en cuenta las características específicas del sistema concreto y, en particular, la estructura empresarial de la que se parte. En general caben varias alternativas válidas, como lo muestra la diversidad de las experiencias de los países que han adoptado la nueva regulación eléctrica.

1.4.6. Las actividades de generación

Las actividades de generación comprenden la generación de energía *en régimen ordinario* y la de *régimen especial* —típicamente la cogeneración y las tecnologías de producción que utilizan recursos renovables—, que regulatoriamente sólo se deben diferenciar cuando la

generación especial recibe un trato más favorable —ya sea retributivo, de prioridad en la operación o de otro tipo— lo que es habitual actualmente en numerosos países. También deben incluirse algunos de los llamados *servicios auxiliares o complementarios*, cuando son proporcionados por los generadores, siendo su finalidad contribuir a que el suministro eléctrico se preste en condiciones adecuadas de seguridad y de calidad de servicio.

La *generación en régimen ordinario* es una actividad no regulada, que se realiza en condiciones de competencia, sin restricciones de entrada y con libre acceso a las redes. La venta de la producción puede efectuarse a través de distintos procedimientos de transacción —básicamente en un mercado *spot* o por medio de contratos— que se describen más adelante entre las actividades de transacción.

La *generación especial* —excepto por la existencia de diversos mecanismos económicos de promoción que la pueden distinguir— en nada más se diferencia de la generación ordinaria, bajo un aspecto regulatorio. La motivación fundamental para apoyar a la generación especial es su menor impacto ambiental en relación con la generación ordinaria. Dado que los costes medioambientales no están actualmente tenidos explícitamente en cuenta en el precio de los mercados eléctricos, se utilizan diferentes esquemas regulatorios para compensar esta carencia y equilibrar el terreno de juego para todas las tecnologías de producción, de forma que puedan competir todas ellas en condiciones de mayor igualdad, tratando de reconocer implícita o explícitamente todos los costes realmente incurridos.

Entre los esquemas regulatorios en uso o propuestos de promoción de la generación especial se encuentran los siguientes: a) obligación de las empresas comercializadoras o de las distribuidoras de compra de la energía que se les ofrezca a un precio fijado administrativamente; b) una prima, ya sea prefijada o bien asignada con mecanismos de competencia, por cada kWh producido con los generadores que cualifiquen para ello; c) exención de determinados impuestos, en particular de los que se establezcan sobre la producción de energía; d) ayudas a la inversión o a los programas de I+D en estas tecnologías; e) cuotas obligatorias de adquisición de energía a la generación especial por parte de comercializadores y consumidores elegibles, lo que fomenta la creación de un mercado paralelo de compraventa de esta energía; f) adquisiciones voluntarias de energía renovable por los consumidores finales, que pagan por ella una cantidad extra dedicada a financiar a la generación especial. En la elección de un enfoque apropiado ha de valorarse fundamentalmente la eficiencia —esto es, el grado de consecución del objetivo buscado en relación con el extra coste incurrido— y el evitar en lo posible las interferencias con el funcionamiento del mercado.

Además de producir energía, los grupos de generación contribuyen en la prestación de otros servicios que son imprescindibles para un suministro eléctrico eficiente y seguro: proporcionan reservas de operación, con capacidad de actuación en distintas escalas de tiempo, para hacer frente a los inevitables desajustes entre demanda y generación; contribuyen a regular la tensión en la red eléctrica en las diversas condiciones de operación; o bien permiten recuperar el servicio prontamente en la eventualidad de un fallo generalizado. La tendencia actual en la regulación de este conjunto de actividades adicionales de la generación, denominado globalmente *servicios complementarios*, se resume en dos criterios básicos: a) la utilización, siempre que sea posible, de criterios de mercado para su asignación y retribución, regulándolos directamente en caso contrario; b) que los cargos por los costes incurridos recaigan sobre los agentes causantes de su demanda.

1.4.7. Las actividades de red

Como ya se ha indicado, el suministro eléctrico requiere necesariamente el uso de redes, que por sus características técnicas y económicas han de ser gestionadas y reguladas como un monopolio natural, lo que condiciona fundamentalmente la nueva regulación del sector.

Las actividades de red incluyen: la planificación de las inversiones, la construcción, la planificación del mantenimiento, el mantenimiento y la operación. La *planificación de las inversiones* es el proceso por el que se determina la fecha de entrada en servicio, la ubicación, la capacidad y demás características de los nuevos activos de una red. La *planificación del mantenimiento* es el proceso por el que se determinan los periodos de tiempo en los que cada línea estará fuera de servicio para que se efectúen las reparaciones y tareas necesarias para mantenerlas operativas con un grado de fiabilidad adecuado. La *construcción* y el *mantenimiento* son actividades que pueden realizarse por empresas especializadas, no necesariamente empresas eléctricas. La *operación de la red* es el manejo de los flujos de energía en la red a partir de actuaciones directas sobre las instalaciones físicas de transporte, debiendo coordinarse con las actuaciones sobre las instalaciones de producción y consumo. Las redes pueden también participar en la provisión de determinados *servicios complementarios* —como la regulación de tensión— que en lo que se refiere a las redes suelen regularse directamente, incorporándoles a las anteriores actividades sin hacer intervenir mecanismos de mercado.

Tanto la planificación de los refuerzos de la red de transporte como la del mantenimiento tienen consecuencias sobre las actividades de coordinación que afectan al mercado eléctrico, por lo que debe garantizarse escrupulosamente la independencia de la entidad responsable de su gestión —típicamente el operador del sistema— con respecto a los agentes del mercado. Pero ambas actividades de planificación tienen también repercusiones obvias en las de mantenimiento y construcción de la red, que corresponden a las empresas transportistas. Existen por consiguiente motivos regulatorios de peso para separar la operación del sistema de cualquier empresa transportista, aunque por otro lado no pueden ignorarse las sinergias entre las distintas actividades de red, que aconsejarían que estuviesen en manos de una única compañía.

En las redes de distribución, por el contrario, no existe el problema de interferencia con la coordinación del mercado, por lo que no hay inconveniente en que todas las actividades de red en un área determinada puedan ser realizadas por una misma empresa —la empresa distribuidora local—. La actividad de distribución se diferencia de la de transporte en otros dos aspectos fundamentales bajo un punto de vista regulatorio: a) la red de distribución es a la que se conecta directamente la inmensa mayoría de los consumidores finales, por lo que los aspectos de calidad de servicio cobran una particular importancia; b) el elevado número de instalaciones de distribución no permite su tratamiento regulatorio individualizado como —en particular en lo referente a la retribución— por lo que se recurre a procedimientos simplificadores de carácter global.

La nueva regulación de las redes eléctricas se puede reducir a tres aspectos principales: acceso, inversiones y precios, que se comentan a continuación.

Transporte

Acceso: En los sistemas que han adoptado la nueva regulación existe implícitamente acceso a la red de transporte para todos los agentes autorizados a participar en el mercado mayorista. Obviamente la capacidad de la red impone una limitación física al acceso, y existen diversos procedimientos de gestión de restricciones, para resolver las potenciales situaciones de conflicto. Estos procedimientos abarcan desde la aplicación de precios nodales o zonales en un mercado mayorista organizado —lo que implícitamente resuelve las restricciones de red— hasta la celebración de subastas para asignar la capacidad limitada entre los agentes, o la modificación del despacho por el operador del sistema de acuerdo a reglas prefijadas, e incluso la asignación previa de derechos de largo plazo de utilización de la red, ya sea por subasta o en relación con la participación en la construcción de las líneas.

Inversiones: Tal como se indicó en la Sección 1.3.4, conceptualmente el objetivo de la nueva regulación es conseguir una red que maximice el beneficio agregado de productores y consumidores, que por otro lado han de hacerse cargo de los costes de la red. Por lo general se incorporan a la planificación de la red determinados criterios explícitos de fiabilidad, en vez de internalizarlos totalmente en las funciones económicas a optimizar.

El enfoque más habitual es el de la planificación centralizada, delegada por la Administración a una entidad especializada —tradicionalmente la empresa verticalmente integrada, el operador del sistema en la nueva regulación— que ha de realizar esta actividad sujeta a criterios prefijados de selección de las mejores alternativas, y siempre contando con la autorización final administrativa de cada instalación. La retribución de la red es fijada por la entidad reguladora, o bien resulta directamente para determinadas instalaciones de los concursos de adjudicación de la construcción y del mantenimiento, en su caso. El procedimiento puede estar abierto a la participación y propuesta de los agentes interesados. La intervención del regulador debe impedir que exista sobreinversión. Una posible dificultad con este esquema es que, en un entorno liberalizado y tal como se indicó anteriormente, es muy difícil prever el desarrollo futuro de la generación, que puede verse asimismo afectado por la expansión de la red.

Otro enfoque consiste en responsabilizar totalmente al transportista único —que en este caso coincidiría con el operador del sistema— de la operación y planificación de la red. En este caso el transportista debe: a) informar a los usuarios de la situación previsible de congestión o “capacidad remanente” de la red en sus distintos nodos de acceso, en un horizonte temporal razonable; b) asegurarse de que la red cumple con determinados estándares, prefijados regulatoriamente, de diseño y de servicio; c) encargarse de ampliar las instalaciones de red siempre que sea necesario para responder a las solicitudes de acceso, de forma que se sigan cumpliendo los estándares. La remuneración del transporte estaría fijada por el regulador y debería corresponder a los costes de una empresa eficiente que proporcionase el servicio en las condiciones establecidas. El método no garantiza —ni tampoco promueve— una expansión óptima de la red.

Un tercer enfoque es dejar la iniciativa de reforzar la red a los usuarios de la misma, que pueden sopesar la contribución que les corresponda en los costes de inversión frente a los beneficios —por facilitar el acceso, eliminación de congestiones o reducción de pérdidas— de cada posible refuerzo. El regulador evalúa la utilidad pública de los refuerzos propuestos

y, en los casos afirmativos, organiza un concurso para la adjudicación de su construcción y mantenimiento. La entidad transportista adjudicataria es remunerada de acuerdo a los términos de su oferta y deja la operación de la instalación al operador del sistema. Es un procedimiento tan orientado al mercado como es posible con la regulación de la red, aunque es complejo de administrar y descansa fundamentalmente sobre la existencia de señales correctas de precios de red, que promuevan la ubicación correcta de los agentes en la misma.

Precios: Ya que las actividades de red de transporte están reguladas, los precios que se apliquen por este concepto deben permitir cubrir sus costes totales (criterio de equidad o viabilidad). Además es fundamental que los agentes reciban señales económicas correctas (criterio de eficiencia) correspondientes a su ubicación en la red, tanto en el corto plazo —para que el mercado funcione correctamente, tomando en consideración las pérdidas y las posibles congestiones— como en el largo plazo —para promover una ubicación correcta de los futuros agentes productores o consumidores—. Y los precios no deben ser discriminatorios.

Existen cuatro conceptos de coste que frecuentemente aparecen mencionados bajo el epígrafe de precios de la red de transporte, y que hay que saber distinguir y tratar adecuadamente: costes de infraestructura de la red, pérdidas óhmicas, congestiones y servicios complementarios. Los únicos costes relevantes de la red son los de inversión y mantenimiento de las instalaciones, ninguno de los cuales está relacionado en la práctica con el uso eléctrico de los activos de transporte. Las pérdidas ocurren en la red, pero realmente son costes de producción, así como los sobrecostes de reprogramación que puedan derivarse de la existencia de congestiones u otras restricciones asociadas a la red. Como ya se ha comentado anteriormente, los servicios complementarios son fundamentalmente una actividad de generación y como tal deben tratarse regulatoriamente.

La existencia de pérdidas y de congestiones en la red da lugar a señales económicas que pueden verse como modificaciones del precio del mercado en cada momento. Así, el precio único del mercado se convierte en precios nodales —un precio diferente en cada nudo de la red [21]— que transmiten correctamente el impacto económico de las diferentes localizaciones de los generadores y de los consumidores. Si se prefiere mantener un precio único de mercado, no por eso debe renunciarse a las señales económicas de pérdidas y restricciones. Las pérdidas imputables a cada agente, ya sea marginalmente o en valor medio, pueden repercutirse como factores correctores de los precios de las ofertas o, preferiblemente, de las cantidades realmente producidas o generadas, de forma que los agentes internalicen sus pérdidas en sus ofertas al mercado mayorista. El tratamiento económico de las congestiones ya fue comentado al tratar sobre el acceso a la red.

La aplicación de precios nodales en lugar de un precio único del mercado da lugar a un superávit, que puede utilizarse para cubrir una parte de los costes de la red, normalmente no superior al 20%. En todo caso, ya se apliquen precios nodales o un precio único del mercado, debe resolverse el problema de asignar a los usuarios de la red la mayor parte, o la totalidad, de los costes de la red de transporte. Muy diversos métodos han sido utilizados o propuestos para realizar esta asignación. El más popular —en especial en países con redes bien desarrolladas y sin grandes distancias que cubrir entre generación y demanda— es simplemente el método del “sello de correos”, que consiste en un cargo uniforme por kWh

inyectado o retirado de la red, o por kW instalado, con independencia de la ubicación en la red. Cuando se ha considerado oportuno reforzar las señales de corto plazo de localización en la red asociadas a pérdidas y restricciones, se ha recurrido a procedimientos que tratan de cuantificar el uso eléctrico que cada agente hace de la red, o el beneficio económico que cada usuario obtiene de la misma, o también la responsabilidad de cada uno en el desarrollo de la red existente.

En un contexto de varios sistemas interconectados, con regulaciones eléctricas en general diferentes pero que permitan transacciones entre sus respectivos agentes, debe evitarse un error regulatorio básico al determinar el peaje de red a aplicar a dos agentes situados en sistemas distintos y que realizan una transacción. El citado procedimiento erróneo —denominado *pancaking* en los Estados Unidos— consiste en fijar el peaje a aplicar a la transacción como suma de los peajes de los sistemas que aparentemente debieran atravesarse para efectuarla. Véase que de esta forma la cuantía del peaje depende críticamente de la estructuración territorial —ya sea en compañías eléctricas o en países— que poco tiene que ver con el verdadero coste que la transacción impone a la red eléctrica del conjunto de los sistemas. A falta del nivel de coordinación necesario para establecer un peaje regional único para cubrir el coste de la red global —con cargos aparte por pérdidas y restricciones también consideradas en conjunto— una aproximación razonable y fácil de aplicar consistiría en que cada agente solamente pagase el cargo de red correspondiente a la infraestructura de red de su país, como un derecho único de conexión a la red regional, y que se estableciesen procedimientos coordinados para asignar los costes de pérdidas y la gestión de las restricciones que afecten a las transacciones internacionales.

Distribución

Acceso: La actividad de distribución está regulada, y las compañías distribuidoras tienen obligación de suministro en el área sobre la que se les ha concedido una franquicia territorial —explícita o implícita—. Por consiguiente, todo consumidor situado en una zona tiene el derecho a ser conectado a la red y a ser suministrado según las condiciones de calidad que se hayan establecido reglamentariamente para la misma.

La mayor parte de los sistemas que han adoptado la nueva regulación permiten libertad de acceso —esto es, libertad de elección de compañía comercializadora— a los consumidores finales, que en general estarán conectados a una determinada red de distribución. Es importante advertir que el cambio de compañía comercializadora en nada modifica los derechos ni cargos de un consumidor respecto a la red de distribución a la que está físicamente conectado.

Todo lo anterior no significa que cualquier consumidor pueda imponer a la compañía distribuidora exigencias singulares de conexión sin al menos estar obligado a cubrir los sobrecostes incurridos. La reglamentación de las acometidas —en general prolija y dependiente de normativas de las administraciones locales— trata de encontrar el justo punto medio entre dos extremos. Por un lado exigir a la distribuidora que proporcione servicio universal de red en su zona, sin otro coste que el que regulatoriamente haya sido reconocido por esta actividad. Pero por otro lado imponer al consumidor algún tipo de freno económico a sus exigencias, para evitar que éstas acaben siendo excesivas e irrazonables.

La problemática del acceso a la distribución se complica por la existencia de otros usuarios de estas redes, además de los consumidores finales. Se trata de los generadores —típicamente de mediana o pequeña capacidad— conectados a la red de distribución y de otras empresas distribuidoras —pequeñas en general— cuyo suministro proviene de otra distribuidora aguas arriba.

Inversiones: Como en el transporte, aquí el objetivo es también conseguir la red “óptima”, que proporcione el equilibrio más satisfactorio para el consumidor entre el coste de la electricidad y la calidad del servicio. Pero la distribución requiere un enfoque específico, ya que el elevado número de instalaciones dificulta su tratamiento individualizado y requiere soluciones de tipo global.

La piedra angular de la regulación de la distribución es el procedimiento de retribución, pues debe permitir una remuneración del capital invertido adecuada al riesgo de esta actividad, sin caer en la tentación de basarse en los costes realmente incurridos —imposibles de verificar o justificar en detalle— a la vez que se incentiva en su justo punto la calidad de servicio y la reducción de las pérdidas. En general tienden a aplicarse procedimientos del tipo “limitación de precios” o “limitación de ingresos” —*price-cap* o *revenue-cap*, en la nomenclatura inglesa— que determinan la trayectoria de las tarifas de distribución o los ingresos totales de la compañía distribuidora por un número de años —cuatro o cinco, típicamente— hasta que se realiza una nueva revisión por el regulador [22]. Las tarifas o los ingresos se fijan a partir de un análisis de la remuneración más adecuada para la red existente y de la previsión de los costes de operación y expansión de la red para el periodo de tiempo considerado.

Diversos procedimientos se utilizan para la determinación de estos costes. Así, por ejemplo, se puede partir de una regulación por comparación (*yardstick competition*) entre empresas distribuidoras similares. Partiendo de una base de datos de costes y de las características más significativas de las empresas, técnicas estadísticas avanzadas permiten establecer diferentes tipos de comparaciones entre ellas, así como el nivel adecuado de remuneración para una distribuidora adicional que se considere. Otro enfoque estaría basado en “empresas modelo” o “redes de referencia”. Aquí el nivel que se requiere de análisis de la actividad de distribución es mucho mayor, aunque también permite aproximarse más a los condicionantes que justifican el nivel de retribución de cada empresa, en particular comparativamente a las demás. Los modelos de referencia diseñan redes y organizaciones empresariales perfectamente adaptadas, cuyos costes —con los ajustes oportunos para adaptarse a las condiciones reales— sirven de base para fijar la remuneración de cada distribuidora. Se pueden introducir asimismo factores para adaptar la retribución, durante el intervalo hasta la siguiente revisión, al crecimiento del mercado. La ventaja de este enfoque, al contar con un modelo de referencia de la red, es poder incorporar una representación explícita de los niveles de pérdidas y de calidad de servicio. De esta manera la retribución corresponde a las pérdidas y a la calidad prefijados por el regulador para cada zona, y pueden establecerse con mayor facilidad incentivos económicos para su mejora, así como penalizaciones por su incumplimiento, que pueden basarse en el desempeño histórico de las distribuidoras en ambos aspectos. Unos estándares obligatorios de diseño y operación de la red, fijados reglamentariamente, permiten asegurar que las inversiones, aunque no sean óptimas, al menos cumplen unos criterios mínimos prefijados de calidad.

Precios: Los precios de distribución, por tratarse de una actividad regulada, deben permitir cubrir los costes totales de esta actividad, que son básicamente de inversión, operación y mantenimiento. Dado que no es relevante la implicación de la red de distribución en las actividades de coordinación del mercado y de la operación del sistema, el énfasis en la fijación de los precios de distribución debe ponerse en que el usuario de esta red —el consumidor final principalmente— reciba una señal económica correcta de su contribución a los costes de la red y a las pérdidas. En la actualidad, esto puede conseguirse solamente de forma aproximada, dado que el sistema de medida y facturación —equipos instalados— para la mayor parte de los consumidores solamente considera consumos de energía durante dilatados periodos de tiempo.

El enfoque más frecuentemente utilizado para fijar los peajes de distribución consiste simplemente en repartir los costes regulados de la actividad de distribución entre los usuarios de la red, discriminando únicamente según el nivel de la tensión de conexión y la potencia contratada. Los usuarios conectados en cada nivel de tensión sólo han de participar en los costes incurridos en su nivel y en los superiores. Dado que las redes de distribución se diseñan en buena parte atendiendo a cubrir las demandas de punta, es importante estimar el factor de contribución a la demanda de punta de cada consumidor. Para aquellos consumidores que carecen de contadores con la capacidad adecuada de discriminación horaria, se pueden aplicar perfiles estandarizados de carga que reflejen las características habituales de los distintos tipos de consumidores.

Las pérdidas óhmicas en la red de distribución afectan a los cargos que han de pagar los consumidores al menos en dos formas básicas. Por un lado, en el cálculo de los peajes de red, la demanda de cada consumidor en cada nivel de tensión ha de venir afectada por su correspondiente factor de pérdidas. Por otro lado, independientemente ya del pago de los costes de red, el cargo por el consumo de energía debe aplicarse, no al consumo real en las instalaciones del consumidor, sino a este valor aumentado en las pérdidas en que ha hecho incurrir al sistema.

1.4.8. Las actividades de transacción

La gestión del riesgo es el aspecto clave a considerar en las actividades de transacción, en cualquiera de sus modalidades. Para los generadores la gestión del riesgo estriba en sopesar la oportunidad de esperar a vender la energía en el incierto mercado *spot versus* la de adquirir compromisos de venta —en cantidades, precio y plazo prefijados— a través de los diversos tipos de contratos de medio y largo plazo. Para los consumidores con acceso al mercado mayorista la gestión de riesgo es simétrica a la anterior. Para las comercializadoras de consumidores con capacidad de elección, el riesgo a gestionar presenta dos caras: por un lado la adquisición de energía en el mercado mayorista a precio *spot* o a través de contratos; por otro lado la venta de energía a las tarifas negociadas libremente con los consumidores finales. Para las comercializadoras de consumidores sin capacidad de elección el nivel de riesgo a gestionar depende críticamente de su regulación: En un caso extremo el regulador permite un *pass-through* (o repercusión) total del precio de adquisición mayorista de energía a las tarifas reguladas, anulando totalmente el riesgo de transacción; en el otro caso extremo la tarifa regulada se establece *a priori* en función de alguna estimación del precio medio

del mercado, tal vez sujeta a algunos ajustes posteriores, y se deja a la comercializadora que absorba por completo el riesgo en el precio de compra. Los esquemas de regulación razonables se encuentran entre ambos extremos, limitando el riesgo de la comercializadora pero sin eliminarlo totalmente, de forma que exista un incentivo a participar activamente en el mercado mayorista haciendo el mejor uso posible de los mecanismos disponibles de transacción.

Transacciones en el contexto del mercado mayorista

A nivel mayorista los generadores, los consumidores autorizados (típicamente se comienza por los mayores) y las entidades comercializadoras de cualquier tipo (las que comercializan a consumidores a tarifa regulada, las que lo hacen a clientes con capacidad de elección de suministrador, los intermediarios y los *brokers*) pueden realizar libremente transacciones entre sí, ya sea a través de un mercado *spot* o por medio de contratos. Las regulaciones particulares frecuentemente establecen restricciones, a veces solamente transitorias, al establecimiento de determinadas transacciones entre los agentes, normalmente con la intención de limitar el abuso de posiciones de dominio en presencia de fuertes niveles de concentración horizontal o de integración vertical. La tendencia actual a nivel internacional es hacia liberalizar totalmente, mientras sea posible, los mecanismos de transacción.

Aunque conceptualmente no sea imprescindible, todos los mercados eléctricos competitivos han establecido algún tipo de mercado organizado, con transacciones estandarizadas, generalmente con mecanismos anónimos (es decir, no bilaterales) de casación de las ofertas de producción y demanda. Este mercado organizado incluye normalmente un mercado *spot*, típicamente de horizonte diario y con intervalos de casación horarios o semihorarios, que sirve de referencia a las restantes transacciones. En los mercados eléctricos más desarrollados, cuando las condiciones de volatilidad y competencia lo permiten y hay un volumen de contratación suficiente, se han creado mercados organizados de derivados o futuros eléctricos, que proporcionan a los agentes mecanismos de contratación más flexibles para gestionar su riesgo.

En el mercado *spot* organizado los generadores ofertan su energía, típicamente de un día para las 24 horas del día siguiente, siendo estas ofertas de producción casadas con las ofertas de demanda haciendo uso de procedimientos muy diversos, atendiendo en todo caso a criterios de precedencia económica. La demanda es simplemente estimada por alguna entidad independiente en los sistemas donde no se permite a los agentes demandantes ofertar. Cada generador es pagado en cada hora por la energía que produce al precio marginal del sistema, que es básicamente el precio de la oferta marginal en dicha hora. Cuando la capacidad instalada de una determinada tecnología está bien adaptada a la demanda del sistema y al resto de todo el parque generador, esta retribución de la energía a precio marginal del sistema permite recuperar los costes fijos y variables de producción.

La incertidumbre sobre el precio *spot* lleva a los generadores y a los agentes demandantes a utilizar diversos mecanismos de cobertura del riesgo. Entre ellos destacan los contratos bilaterales por diferencias con el precio *spot*, que tienen un carácter exclusivamente económico y son ignorados al establecer el orden de mérito en la casación de ofertas de generación y demanda. Otra variante de contratación —solamente autorizada en algunos sistemas—

son los contratos bilaterales físicos, que permiten a un agente vendedor suministrar a un comprador específico, sin tener que recurrir al mecanismo del mercado *spot* de ofertas. Ésta parece ser la tendencia actual —coexistencia de un mercado *spot* voluntario y de contratos bilaterales físicos— pero aún sigue bajo discusión si la hipotética libertad de actuación que estos contratos permiten, compensa la aparente complejidad regulatoria y organizativa de gestionar un tipo adicional de transacción.

Los *intercambios internacionales* constituyen un caso particular de transacción en el mercado mayorista, en donde la novedad es el tratamiento a dar a los agentes externos, en general sometidos a esquemas regulatorios diferentes y con un nivel distinto de apertura a la competencia.

Las dificultades prácticas en la regulación de los intercambios internacionales tienen su origen en las exigencias de reciprocidad en el tratamiento regulatorio en uno y otro país, ya que de esta reciprocidad puede depender críticamente el reparto entre los sistemas de los beneficios económicos que las interconexiones reportan. Es fundamental la consistencia con el contexto regulatorio multinacional en el que ocurren los intercambios. Un extremo es el de total carencia de integración regulatoria, que conduce a que las transacciones estén sujetas a condiciones de acceso a la red discrecionales y negociadas, sin restricción a los comportamientos oportunistas basados en el posicionamiento en la red o en el monopolio de realización de determinadas transacciones. El otro extremo es el de fuerte integración regulatoria, que al menos garantice el acceso a todas las redes bajo condiciones reguladas, transparentes y no discriminatorias. En este caso la normativa adoptada debiera alcanzar un nivel mínimo de armonización en el diseño y aplicación de los cargos por acceso, que por ejemplo evite el repetido pago de peaje de red en todos los sistemas supuestamente afectados por una transacción —el ya citado *pancaking*— y se aproxime lo más posible al concepto de un peaje regional de acceso —el que habría si el conjunto de todos los sistemas fuese un sistema único—.

Transacciones en el contexto del mercado minorista

A nivel minorista, los consumidores sin capacidad de elección de suministrador tienen que adquirir su energía a tarifa regulada a la empresa comercializadora asignada, que típicamente está estrechamente relacionada con la distribuidora a la que físicamente están conectados. En la mayor parte de las regulaciones puede tratarse de la misma empresa, con separación contable de actividades. Dependiendo de la regulación específica, y normalmente por un periodo transitorio, se puede permitir a los consumidores con capacidad de elección que permanezcan adquiriendo la energía a su comercializadora original a la tarifa regulada que les corresponda. *La comercialización a consumidores sin capacidad de elección* —o a los que teniéndola se les permite permanecer a tarifa— es una actividad regulada, con retribución según costes reconocidos y sujeta a estándares de calidad de servicio en la atención al cliente.

Los consumidores con capacidad de elección pueden acudir a cualquier empresa comercializadora para contratar su suministro de electricidad a un precio libremente negociado entre ambos. Este precio debe incluir las tarifas reguladas por los servicios de transporte y de la red de distribución a la que estén conectados, así como otros cargos regulados que

sean aplicables en cada regulación concreta, y que la empresa comercializadora deberá liquidar adecuadamente. El precio por el servicio de comercialización y por la energía es fijado libremente por la comercializadora. *La comercialización a consumidores con capacidad de elección* es por consiguiente una actividad no regulada, cuyo cometido esencial es la gestión del riesgo. Se trata en efecto de un negocio con un flujo monetario muy elevado y un margen reducido de beneficio —dada la presumible competencia elevada en esta actividad— el cual depende críticamente de una acertada gestión de compra mayorista y de su adaptación a los contratos negociados de suministro con los consumidores elegibles.

1.4.9. Actividades complementarias

La *liquidación económica* de las transacciones realizadas en los distintos mercados que gestiona el operador del mercado es realizada generalmente por esta entidad. Además puede tener a su cargo la liquidación del resto de transacciones y otros conceptos relacionados con el mercado mayorista, como servicios complementarios, pérdidas, restricciones técnicas, saldos de los desvíos finales e incluso, en algunos sistemas, los contratos bilaterales entre agentes. La liquidación correspondiente a las actividades reguladas, como el transporte, la distribución, u otros conceptos como las ayudas a la generación especial, está en general a cargo de la Administración, o de la entidad especializada e independiente en la que ésta delegue.

Tradicionalmente se ha considerado que la *medición* de los consumos y la *facturación* de los mismos eran parte integral de la actividad de comercialización, que a su vez formaba un conjunto inseparable con la distribución. En la nueva regulación es en principio posible que estas actividades puedan realizarse independientemente por empresas especializadas que compitan por la prestación de estos servicios. Éste es también el caso con la instalación de acometidas para los consumidores finales, actividad habitualmente considerada como parte de la distribución, aunque puede ser —y de hecho frecuentemente es— realizada en competencia por compañías instaladoras independientes. Es posible que en el futuro puedan identificarse otras actividades cuya realización separada tenga sentido, o que aparezcan actividades nuevas, por ejemplo en el marco de la filosofía resucitada de *multi-utility*, en el que las empresas comercializadoras ofrezcan servicios adicionales al de la electricidad.

1.4.10. Las actividades de coordinación

Operación del mercado

Aunque en teoría los agentes podrían relacionarse entre sí exclusivamente a través de relaciones bilaterales libremente negociadas entre ellos mismos, de cualquier tipo y en cualquier ámbito temporal, como se ha dicho anteriormente prácticamente todos los sistemas eléctricos que han adoptado la nueva regulación han creado al menos un mercado *spot* organizado, con formatos muy diversos pero gestionado por una entidad independiente, que aquí se ha denominado operador del mercado (y corresponde al *Power Exchange* en la terminología inglesa habitual). Frecuentemente esta misma entidad gestiona otros mercados organizados que complementan el *spot*, ya sea de horizonte temporal aún más reducido —mercados de “regulación” o “intradiarios”, para resolver ajustes en generación o deman-

da con mecanismos competitivos— o bien sea extendiéndose en el tiempo desde semanas hasta años —mercados organizados de “contratos *forward*” o futuros eléctricos—. Como la casación de ofertas en todos estos mercados se realiza de forma anónima, el operador del mercado debe actuar como cámara de compensación. Aunque en todos los sistemas se denomina formalmente como operador del mercado a una entidad específica, en principio no hay inconveniente en que otras organizaciones puedan competir en la realización de esta actividad, tanto ofreciendo derivados eléctricos como realizando casaciones parciales de ofertas de producción y demanda en el corto plazo. Debe verse al operador del mercado como un “facilitador” de transacciones, más que como un realizador de una actividad específicamente eléctrica.

La función más característica del operador del mercado es la gestión del mercado *spot*. El rol tan relevante de este mercado hace que su diseño sea siempre un aspecto central en la nueva regulación. Los modelos del mercado *spot* en los primeros sistemas abiertos a la competencia en general se caracterizaron por el papel pasivo de la demanda —que resultaba ser básicamente un agente tomador de precio— por la obligatoriedad de pasar por este mercado para comprar o vender energía y por utilizar procedimientos algorítmicos de optimización —análogos a los del despacho diario de generación o de programación semanal en el marco regulatorio tradicional— para casar las ofertas de producción y de demanda. Por el contrario, la tendencia en los modelos de mercado *spot* más recientes es dejar que las ofertas de producción y de demanda —en cantidad y en precio— participen en condiciones de igualdad, permitir que los agentes puedan utilizar contratos bilaterales físicos como alternativa a acudir al mercado *spot*, acercar el mecanismo de casación al tiempo real —bien sea acortando el horizonte de casación del mercado principal, bien con una sucesión o “zoom” de mercados, o bien dando relevancia al mercado final de regulación en el que se valoran los desvíos en la producción o consumo de los agentes respecto a las cantidades programadas— y simplificar el formato de presentación de las ofertas así como el procedimiento de casación de las mismas, de forma que se gane en transparencia y se transfiera la complejidad en el proceso a la preparación de las ofertas por los agentes.

Operación del sistema

La operación del sistema es la actividad que tiene por objeto garantizar el funcionamiento del sistema eléctrico en condiciones de seguridad y de forma que sea compatible con las decisiones de producción y consumo decididas por los agentes del mercado. Estrictamente es una actividad clásica de coordinación en todo sistema eléctrico, cuyo punto de partida en la nueva regulación es el resultado de la casación de ofertas y de los contratos bilaterales físicos, en vez del resultado de los tradicionales procedimientos de minimización de costes de producción. Esta actividad consiste en determinar el régimen efectivo de producción de los generadores y las instrucciones de operación de red para los transportistas, de forma que se realicen los resultados del mercado que proporcionan por un lado el operador del mercado y por otro los agentes, en su caso, con contratos bilaterales físicos, tomando en cuenta las restricciones técnicas —especialmente todas las relacionadas con la seguridad del sistema— que pudieran existir.

El operador del sistema, desde su posición privilegiada como concededor del funciona-

miento y limitaciones técnicas del sistema eléctrico, debe estar a cargo de la aplicación de los criterios técnicos de acceso a las redes y de mantener informados a los agentes del sistema de las condiciones previsibles de utilización de las mismas a corto, medio y largo plazo.

Por su naturaleza, la operación del sistema es una actividad que tiene que ser realizada centralizadamente y estar sujeta a regulación, tanto en lo que respecta a sus costes de servicio como a sus criterios de funcionamiento y al control de sus actuaciones. Un aspecto esencial es el de la independencia de la entidad a cargo de la operación del sistema —el operador del sistema— para asegurar un trato no discriminatorio a los agentes, por ejemplo en la aplicación de restricciones técnicas a las transacciones realizadas en el mercado. Los aspectos asociados a la independencia del operador del sistema se agudizan cuando, como es razonable por las sinergias que existen entre actividades distintas, se le asignan otras tareas tales como la gestión de los servicios complementarios o la planificación de la expansión o del mantenimiento de la red de transporte. Y, tal como se indicó al exponer las actividades de red, conduce a conflictos de interés cuando el operador del sistema ejerce también como transportista.

1.4.11. Completando el nuevo marco regulatorio

El nuevo marco regulatorio no se agota con el tratamiento individualizado de cada una de las actividades eléctricas. Es preciso completarlo con otros aspectos de conjunto, que han de resolverse en cualquier realización práctica de la nueva regulación. Por razones de brevedad, simplemente se presentan a continuación algunos de estos aspectos, sin entrar en una discusión detallada de los mismos [23].

La transición a la competencia

En un cambio del modelo regulatorio tradicional a la nueva regulación, no sólo hay que decidir el objetivo final que se desea alcanzar sino también cómo llegar a él y, obviamente, el condicionante básico es el punto de partida del sector eléctrico a transformar —su estructura organizativa y de propiedad—. Cuando la propiedad es privada, dos son las posibles dificultades que aparecen al tratar de aplicar la nueva regulación. Por un lado, la probable inadaptación del parque de generación existente a la demanda y a las tecnologías de producción actuales. Esto conlleva la aparición de unos costes de transición a la competencia¹³ (CTC) al cambiar el marco regulador, pues la valoración del mercado de los activos de generación inadaptados será normalmente inferior a la reconocida en el marco tradicional vigente. Por otro lado, el nivel de concentración empresarial, así como el de integración vertical, puede que no sean aceptables. Lo que es relativamente fácil de arreglar cuando se trata de empresas de propiedad pública (a costa del contribuyente), es ahora más difícil, por afectar a intereses privados. Una posible estrategia, ante un cambio inminente a la nueva regulación, consiste en alcanzar un acuerdo con las empresas privadas según el cual la Administración transige en la resolución de la primera dificultad a cambio de facilidades por parte de las empresas para resolver la segunda.

¹³ Denominados *stranded costs* (costes varados) o *competition transition charges* en la terminología inglesa.

Los beneficios varados

“Beneficios varados”¹⁴ son aquellos beneficios para la sociedad que se pierden cuando determinados bienes de carácter público dejan de producirse al cambiar el marco regulatorio tradicional del sector eléctrico a uno de competencia. Los bienes de carácter público que pueden dar lugar a beneficios varados pueden clasificarse en tres categorías: a) Protección a los consumidores —aquellos que no pueden hacer frente al coste real de la electricidad—; b) Protección del medio ambiente —al no estar el coste de impacto ambiental del suministro eléctrico internalizado en el precio del mercado— que se trata específicamente en el próximo apartado; c) Otros, tales como la diversificación de las tecnologías de producción, o las actividades de I+D sin un claro impacto a corto plazo en los negocios en competencia.

Los costes medioambientales

El importante impacto ambiental de los sistemas de energía eléctrica (ver Sección 1.1.5) requiere un tratamiento regulatorio específico, ya que el mercado no es capaz de tratar adecuadamente este aspecto mientras los costes medioambientales no estén incluidos en el precio de la electricidad. Es por esta razón que los diferentes marcos regulatorios deben adoptar medidas correctoras del mercado en varios sentidos: a) promoción, con mecanismos regulatorios específicos (ver Sección 1.4.6), de las tecnologías de producción menos contaminantes; b) desarrollo de programas de ahorro energético y de gestión de la demanda eléctrica (ver Sección 1.2.2); c) imposición de límites de contaminación y de impuestos especiales asociados a la contaminación en la producción de electricidad que se vayan aproximando a una verdadera internalización de los costes medioambientales.

Los aspectos estructurales

La teoría regulatoria y la experiencia hasta la fecha avalan que, aunque el desarrollo normativo para cada actividad sea correcto, si no lo son ni la estructura empresarial ni la capacidad de elección de los consumidores, fracasará la nueva regulación. Evidentemente, es aceptable un periodo transitorio de adaptación gradual de las estructuras. Pero los requisitos para que finalmente pueda haber competencia, condición esencial para el éxito de la nueva regulación, son al menos los siguientes: a) Un límite a la concentración horizontal, ya que la competencia requiere un nivel de rivalidad suficiente, lo que limita el número mínimo y el tamaño relativo máximo de las empresas en función del volumen del mercado geográficamente relevante; b) Un límite a la integración vertical, para evitar que la situación de privilegio de la que se pueda disfrutar en una actividad —por ejemplo una actividad ejercida en régimen de monopolio regulado— pueda utilizarse estratégicamente en detrimento de la competencia en otra actividad integrada verticalmente con la anterior;

¹⁴ El término “beneficios varados” (*stranded benefits*) ha sido acuñado por la National Association of Regulatory Energy Commissioners, NARUC, de los Estados Unidos, ver NCSL, “Stranded benefits in electric utilities restructuring”, National Conference of State Legislatures (joint project of NARUC & NCSL), octubre 1996.

c) Libertad de elección de suministrador de los consumidores y acceso al mercado de los productores y comercializadores.

La garantía de suministro en generación

En los sistemas acogidos a la nueva regulación en general no existe obligación alguna de suministro por parte de las empresas de producción, y la planificación centralizada de los medios de generación desaparece, quedando a la iniciativa de los agentes. Para las distribuidoras la obligación se limita a la conexión, al servicio de red y a la atención al usuario. Las empresas comercializadoras típicamente se comprometen a adquirir la energía al precio que sea aplicable a sus transacciones en el mercado mayorista. Se plantea, por tanto, la duda de si el mercado por sí solo proporcionará un nivel satisfactorio de garantía de suministro en generación o bien si será preciso introducir algún mecanismo regulatorio adicional para conseguirlo. No existe un consenso internacional sobre el tema, con países alineándose en un sentido o en el contrario. Sin duda se trata del asunto de mayor calado que tiene pendiente la nueva regulación eléctrica.

La entidad reguladora independiente

En este nuevo modelo regulatorio se hace necesario contar con un órgano independiente y especializado cuya principal función sea velar por la competencia y resolver los conflictos que puedan surgir en el funcionamiento del mercado. Es preferible que este órgano regulatorio sea independiente de la Administración para evitar la interferencia de objetivos políticos en la regulación del sector, conseguir una mayor especialización técnica de su personal, tener mayor garantía de transparencia en sus actuaciones y conseguir una mayor estabilidad del proceso regulatorio.

1.4.12. El nuevo marco regulatorio español

En el caso español el punto de partida ha sido un sector eléctrico de propiedad mayoritariamente privada y, además, con un plan de privatización completa a corto plazo, con un elevado nivel de concentración horizontal y de integración vertical, con una regulación de corte tradicional en las actividades de generación y distribución y un buen nivel de eficiencia técnica, y con una buena situación financiera en general de las empresas y una coyuntura económica del país favorable. Como característica singular, que ha resultado ser muy favorable para el proceso de reestructuración, las actividades de operación del sistema, despacho económico de la generación y transporte estaban ya siendo realizadas desde 1984 por una empresa especializada, Red Eléctrica de España, de propiedad compartida por las generadoras/distribuidoras y existía en las empresas la cultura y los medios técnicos para funcionar conjuntamente como un *pool*. En el momento de plantearse el cambio regulatorio existía una capacidad del parque de generación sobreabundante para la cobertura de la demanda, con un coste medio regulado de producción claramente superior al coste marginal de producción a medio y largo plazo para el sistema. Asimismo los precios de la electricidad eran comparativamente elevados con respecto a los países del entorno económico y a los

precios que idealmente resultarían en competencia. Finalmente, la política de protección al carbón nacional condicionaba el funcionamiento económico de las centrales de producción.

En España el sector eléctrico ha sido reestructurado y liberalizado a partir de la promulgación de la Ley 54/1997 del Sector Eléctrico de 27 de noviembre de 1997 —que a su vez profundiza en los planteamientos liberalizadores de la ecléctica Ley 40/1994 de Ordenación del Sistema Eléctrico Nacional de 30 de diciembre de 1994— habiéndose además procedido a completar la privatización del sector¹⁵. Se resumen a continuación esquemáticamente —utilizando en buena parte párrafos extractados del texto de la Ley 54/1997— las características básicas del nuevo marco regulatorio para el sector eléctrico español (una información detallada se puede encontrar en las páginas Web de REE [8], OMEL [15] y CNE [16]):

- Se distingue entre actividades reguladas —el transporte, la distribución, la gestión económica y la gestión técnica del sistema— y las actividades que se realizan en régimen de competencia —generación, comercialización e intercambios internacionales—, estableciendo regulaciones específicas para cada una de ellas. Se establece la separación jurídica entre actividades reguladas y no reguladas y la separación contable entre las reguladas.
- Se reconoce el derecho a la libre instalación de la generación de electricidad y se organiza su funcionamiento bajo el principio de libre competencia. Se abandona el principio de retribución a través de unos costes fijados administrativamente, así como una gestión económica de los medios de producción basándose en procedimientos de optimización. En su lugar el funcionamiento de los medios de producción se basa en las decisiones de los agentes económicos en el marco de un mercado mayorista organizado de energía eléctrica, con la retribución de la generación resultando del precio de este mercado.
- La contratación entre los agentes puede realizarse libremente, estableciéndose asimismo mecanismos estandarizados de contratación para facilitar las relaciones comerciales entre los agentes, que son mayoritariamente gestionados por el operador del mercado. Entre estos mecanismos destaca el mercado diario de ofertas de producción y de demanda, que sirve de referencia para el resto de transacciones y mercados. El operador del sistema gestiona los mercados de servicios complementarios —de carácter más cercano a la operación real—.
- Se reconoce la existencia de unos costes de transición a la competencia (CTC) para las actuales instalaciones de producción y un periodo máximo de 10 años para su recuperación por las empresas. Este concepto de retribución se obtendrá cada año por diferencia entre los ingresos asignados a las empresas de producción provenientes de la tarifa eléctrica y la retribución que resulta del mercado mayorista. Si el precio de este mercado excede un tope prefijado, el exceso se deducirá del monto total de CTC pendiente de cobro.

¹⁵ Aspectos puntuales de la Ley 54/1997 han sido modificados o ampliados por la Ley 34/1998 del Sector de Hidrocarburos y por los Decretos Ley 6/1999 y 6/2000 de medidas de intensificación de la competencia.

- La planificación estatal queda restringida a las instalaciones de transporte, sustituyéndose la planificación obligatoria de los medios de producción por una planificación indicativa, con el objeto de facilitar las decisiones de los distintos agentes económicos y establecer criterios en materia de calidad de servicio, eficiencia y ahorro energéticos, garantía de suministro y protección medioambiental.
- El transporte y la distribución se liberalizan a través de la generalización del acceso de terceros a las redes, que deben ser puestas a disposición de los diferentes sujetos del sistema eléctrico y de los consumidores. Las retribuciones del transporte y de la distribución son fijadas administrativamente. Los conflictos que puedan resultar del acceso a las redes serán resueltos por la Comisión Nacional de la Energía.
- Se crea la figura del comercializador para los consumidores con capacidad de elección de suministrador, que podrán optar entre permanecer a tarifa regulada o negociar libremente con cualquier comercializador. Se establece un periodo transitorio para que el proceso de aumento de la capacidad de elección se desarrolle progresivamente, de forma que sea total para todos los consumidores en un determinado plazo¹⁶. Durante este periodo transitorio las empresas distribuidoras realizarán la actividad regulada de comercialización para los consumidores sin capacidad de elección.
- Se establecen las condiciones de participación de los agentes externos al Sistema Eléctrico Nacional en el nuevo mercado competitivo.
- Se establece un marco de promoción a la generación especial, reconociendo la actual insuficiencia del mercado en incorporar los costes derivados del impacto ambiental de las actividades eléctricas. En esta misma línea se establece un programa de gestión de la demanda.
- Se especifican los conceptos que ha de comprender la tarifa eléctrica, lo que permite su racionalización y transparencia, así como el establecimiento de los cargos de acceso para los clientes cualificados.
- La Ley encomienda a la Comisión Nacional de la Energía el velar por la competencia efectiva en el sistema eléctrico, así como por su objetividad y transparencia. Para ello, entre otras funciones, se le dota de amplias facultades en materia de solicitud de información y de resolución de conflictos y se establece su colaboración con las instancias administrativas encargadas de la defensa de la competencia.
- La Ley incorpora al ordenamiento español las previsiones de la Directiva sobre el Mercado Interior de la Electricidad, superando en general ampliamente los requisitos mínimos que en ella se establecen. Específicamente:
 - Acceso regulado a la red para todos los agentes.
 - Calendario de elegibilidad para los agentes consumidores mucho más rápido y completo.
 - Libre entrada de generadores.
 - Separación jurídica de las actividades reguladas y no reguladas.

¹⁶ El plazo límite se fijó para el 2003.

- Independencia de los operadores del sistema y del mercado.
- Creación de un mercado mayorista competitivo.

Varios años después de aprobada la Ley del Sector Eléctrico, aún no puede hablarse en España de una estructura estable ni de una regulación fundamentalmente completa. La estructura de las empresas eléctricas, según se aprende de la propia experiencia y de la de otros países que han acometido esta transformación industrial, está en un proceso permanente de cambio que últimamente parece haberse acelerado, con dimensiones diversas: procesos de concentración y alianzas con otros sectores energéticos —el gas natural en particular—, provisión de múltiples servicios junto con la electricidad (por ejemplo gas, agua, comunicaciones), internacionalización, diversificación y la posibilidad siempre presente de adquisiciones y fusiones. La regulación tiene aún aspectos importantes pendientes de desarrollo y los existentes están todavía sujetos a frecuentes modificaciones para su mejora, a partir de la experiencia adquirida.

1.5. Retos y perspectivas de futuro

El carácter introductorio de este capítulo no permite extenderse en un desarrollo pormenorizado de las perspectivas de cambio en el sector eléctrico, que actualmente debe considerarse entre los sectores industriales más dinámicos. Aquí simplemente se va a presentar una lista comentada, necesariamente incompleta pero que se espera sea representativa, de desarrollos tecnológicos, económicos o regulatorios que es de esperar que adquieran relevancia en el sector eléctrico durante los próximos años. Algunos de ellos podrían cambiar de forma radical la industria eléctrica del futuro [17]. En la mayor parte de ellos es la interacción entre la tecnología, la economía y la regulación lo que les proporciona su enorme potencial de cambio. Los profesionales del sector eléctrico ciertamente tienen ante sí una tarea apasionante.

- *Generación distribuida.* El fomento de las energías renovables y de la cogeneración por consideraciones medioambientales, unido a los avances tecnológicos y a la reducción de costes en la generación eólica, las microturbinas o las células de combustible, puede conducir a un desarrollo espectacular de la generación descentralizada. Lo anterior puede suponer profundas modificaciones en las funciones, la planificación y la operación de las redes de transporte y distribución y en la gestión económica del sistema eléctrico. La penetración de la generación distribuida puede tener lugar de forma más intensa en países en desarrollo, donde la infraestructura eléctrica tradicional es aún muy insuficiente.
- *Electrificación rural “off-grid”.* Las soluciones más adecuadas para proporcionar servicio eléctrico a los más de dos billones de personas que actualmente carecen del mismo pueden ser frecuentemente minirredes aisladas o sistemas individuales, utilizando tecnologías apropiadas de generación distribuida.
- *Consideraciones medioambientales y estratégicas.* Las restricciones medioambientales y la progresiva internalización de los costes derivados del impacto ambiental, junto

con planteamientos de largo plazo sobre la seguridad del suministro, irán progresivamente influyendo de forma significativa en las futuras inversiones en nuevos medios de producción. Se generalizarán los mercados específicos para la “electricidad verde”, así como los mercados de emisiones contaminantes.

- *Telecomunicaciones con utilización de la red eléctrica.* Recientes desarrollos tecnológicos hacen posible la utilización de las redes locales de distribución para la transmisión de información a alta velocidad. Las compañías eléctricas podrán así proporcionar servicios competitivos de Internet y sin duda otros muchos, tales como teledistribución del consumo eléctrico o gestión de la demanda, aún por definir.
- *Multiutilities.* Las compañías eléctricas, tal como algunas de ellas hicieron en el pasado, están comenzando a ofrecer servicios adicionales, tales como distribución de gas, agua o telecomunicaciones, en lo que puede llegar a ser un paquete integrado, aprovechando las sinergias existentes entre las distintas áreas de negocio.
- *Superconductores.* Aunque su utilización en los sistemas de energía eléctrica todavía se ha reducido a la fabricación de grandes electroimanes y a instalaciones de tipo experimental, la superconductividad puede cambiar el diseño futuro de las grandes instalaciones de transporte, en particular en el entorno de las grandes ciudades.
- *FACTS.* Las dificultades en aumentar la capacidad de las redes de transporte y los problemas técnicos y económicos ocasionados por los *loop flows*, en particular en los mercados multinacionales, propiciarán el desarrollo de dispositivos electrónicos que permitan controlar los flujos en la red, permitiendo utilizar mejor la capacidad individual de transporte de cada instalación. Su uso generalizado modificará el planteamiento tradicional de supervisión y control de la red de transporte.
- *Gestión técnica y económica de mercados regionales.* La creación de mercados multinacionales de electricidad combinando diversos mercados organizados o bolsas de energía en competencia junto con infinidad de transacciones bilaterales, mientras que la gestión técnica de la seguridad de la operación está en manos de un conjunto de operadores del sistema independientes, plantea complejos problemas de organización para que ni la seguridad ni la eficiencia económica se vean adversamente afectadas. Un caso paradigmático es el de la gestión coordinada de las restricciones de la red. Nuevos esquemas organizativos y sistemas de comunicación e información, así como modelos y algoritmos de coordinación, habrán de desarrollarse para hacer frente a este reto.
- *El comercio de electricidad en la economía digital.* La liberalización de un sector industrial de la importancia del sector eléctrico, junto con el desarrollo del comercio electrónico, está ya conduciendo a un desarrollo espectacular del comercio de electricidad por Internet, con productos que cubren desde contratos de largo plazo, hasta la compraventa *on line* o los seguros de riesgos, como por ejemplo los derivados del clima.

Bibliografía

- [1] J. L. Torá Galván, *Transporte de la Energía Eléctrica*, Universidad Pontificia Comillas (ICAI-ICAIDE), Madrid, 1997.
- [2] A. J. Conejo, “Evolución Histórica y Regulación del Sector Eléctrico Español”, Actas VI Jornadas Hispano-Lusas de Ingeniería Eléctrica, Salamanca, julio 1999.
- [3] J. A. Pérez del Pulgar, “El Problema Ferroviario y la Nacionalización de la Energía Eléctrica”, *Razón y Fe*, Madrid, 1920.
- [4] “Survey of Essential UCPTE Recommendations for the Interconnected Operation”, UCPTE Secretariat, 1991.
- [5] AIE, “Energy Balances”, Agencia Internacional de la Energía, OCDE/AIE, París, 1999.
- [6] World Bank, “World Development Indicators”, Washington, D.C., 1999.
- [7] ESMAP 2000, “Energy Services for the World’s Poor. Energy and Development report 2000”, ESMAP Report, Washington D.C., The World Bank.
- [8] Página en internet de Red Eléctrica de España, <http://www.ree.es>
- [9] M. J. H. Sterling, *Power System Control*, Peter Peregrinus LTD, England, 1978.
- [10] T. Wildi, *Electrical Power Technology*, John Wiley & Sons, 1981.
- [11] J. Ramírez Vázquez, *Centrales Eléctricas*, Enciclopedia CEAC de electricidad, Ediciones CEAC, 4.ª edición, España, 1980.
- [12] M. R. Patel, *Wind and Solar Power Systems*, CRC Press, 1999.
- [13] L. L. Freris, *Wind Energy Conversion Systems*, Prentice-Hall, 1990.
- [14] J. Ramírez Vázquez, *Estaciones de Transformación y Distribución. Protección de Sistemas Eléctricos*, Enciclopedia CEAC de electricidad, Ediciones CEAC, 5.ª edición, España, 1981.
- [15] Página en internet de la Compañía Operadora del Mercado Eléctrico de España, <http://www.omel.es>
- [16] Página en internet de la Comisión Nacional de la Energía de España, <http://www.cne.es>
- [17] WorldPower 2000, Isherwood Production Ltd., Londres, 2000.
- [18] AIE, “Energy Prices and Taxes”, AIE/OCDE, París, 2001.
- [19] B. Tenenbaum, “The Real World of Power Sector Regulation”, Viewpoint, The World Bank, junio 1995.
- [20] CNSE, “Documento n.º 5 sobre el proyecto de Ley del Sector Eléctrico: Actividades del Sector Eléctrico”, Comisión Nacional del Sistema Eléctrico de España, <http://www.cne.es>, septiembre 1997.
- [21] F. C. Schweppe y col., *Spot Pricing of Electricity*, Kluwer Academic Publishers, 1988.
- [22] R. Green y M. Rodríguez Pardina, “Resetting Price Controls for Privatized Utilities. A manual for Regulators”, The World Bank, 1999.
- [23] J. I. Pérez Arriaga, “Fundamentos Teóricos de la Nueva Regulación Eléctrica”, *Economía Industrial*, n.º 136, 1997.

Capítulo 2

Elementos de los sistemas de energía eléctrica

ANTONIO FERNÁNDEZ OTERO Y JOSÉ CIDRÁS PIDRE

2.1. Modelización de redes de energía eléctrica

Fundamentalmente, una red de energía eléctrica (REE) es un sistema que comprende la producción, transporte y consumo del bien denominado energía eléctrica. Por tanto, en un sentido amplio, una REE comprende la producción de la energía en las centrales eléctricas, su transporte y distribución mediante las líneas eléctricas y los consumos de la energía que se realiza en las industrias, viviendas y servicios. Este esquema, que es común a otro tipo de bienes productivos, en el caso de la energía eléctrica presenta ciertas singularidades que lo hacen complejo. Entre estas singularidades se pueden resaltar su amplia utilización social e industrial, su elevada dimensión y extensión, su variedad de sistemas y la necesidad de simultaneidad entre la producción y el consumo.

En general, un sistema eléctrico presenta cierta estructura que se utiliza no sólo para describirlo sino también para modelarlo, simularlo, controlarlo y gestionarlo. Esta estructura básica permite descomponer las redes eléctricas en las subredes de transporte y distribución de media y baja tensión, tal y como se describe en el Capítulo 1.

Para cada una de las subredes descritas se puede realizar una clasificación atendiendo al modelo que se considere en su análisis. Esta nueva clasificación está sujeta a la interpretación que el planificador, analista u operador del sistema realice. En esta obra se considera la siguiente clasificación desde el punto de vista del modelado de la red eléctrica y del régimen de funcionamiento:

- *Estacionario.* Se denomina así a la modelización de la red eléctrica mediante un circuito en régimen estacionario sinusoidal. Por tanto, sólo se consideran variables eléctricas y le son de aplicación el método fasorial de resolución de circuitos. Un análisis típico de redes eléctricas es el denominado *flujo de potencia*, donde los generadores y los consumos se formulan con ecuaciones no lineales en régimen estacionario sinusoidal.

En la Figura 2.1 se muestra un ejemplo del régimen estacionario de una red eléctrica, cuya ecuación es:

$$\mathcal{E} = RI + j\omega LI$$

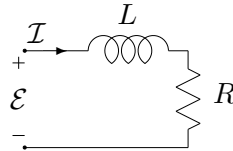


Figura 2.1. Ejemplo de régimen estacionario.

- *Electromecánico*. También conocido como régimen dinámico, en este caso coexisten los modelos eléctricos de la red y las ecuaciones diferenciales mecánicas de sus generadores y motores eléctricos. Debido a la elevada diferencia de las constantes de tiempo entre las variables eléctricas y las mecánicas (milisegundos frente a segundos), se pueden aplicar técnicas de análisis de “escala de tiempos” que permiten considerar modelos estacionarios de las variables eléctricas y dinámicos de las mecánicas. Los métodos de resolución, como es de esperar, resultan de un proceso iterativo entre el análisis fasorial de circuitos y la resolución numérica de ecuaciones diferenciales. En el análisis de redes eléctricas, este tipo de modelos se utiliza en los estudios de *estabilidad transitoria*, *control P-f* y, en general, en el *análisis dinámico*. Un ejemplo de este régimen dinámico se muestra en la Figura 2.2, donde las ecuaciones son

$$P_m - P_e = M \frac{d\Omega}{dt} + D\Omega \quad ; \quad P_e = \text{Real}\{\mathcal{E} \cdot \mathcal{I}^*\}$$

siendo P_m la potencia mecánica, Ω la velocidad del rotor y P_e la potencia activa del generador.

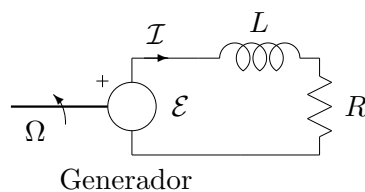


Figura 2.2. Ejemplo de régimen dinámico.

- *Electromagnético*. En este régimen, habitualmente conocido como régimen transitorio, la red es modelada mediante sus ecuaciones diferenciales, tanto en la parte eléctrica como en la mecánica. Es el modelo más completo para cualquier análisis de una red. No obstante, debido a la dimensión que suelen presentar las redes, así como a las constantes de tiempo que coexisten (sistema con diferentes “escala de tiempos”), este tipo de análisis, al contrario del dinámico, suele restringirse a estudios donde

únicamente se consideran variables eléctricas, siendo las variables mecánicas definidas como constantes. Este tipo de modelos se utiliza, por ejemplo, en la conexión de condensadores, apertura o conexión de líneas, etc. Un ejemplo de este régimen de funcionamiento se presenta en la Figura 2.3, donde la ecuación es

$$e(t) = Ri(t) + L \frac{di(t)}{dt}$$

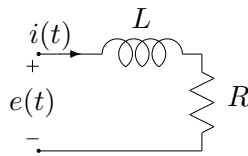


Figura 2.3. Ejemplo de régimen transitorio.

Por otra parte, los dispositivos y redes eléctricas presentan, en general, una configuración trifásica, lo cual significa, independientemente del régimen en estudio, que sus modelos se corresponden con circuitos con tres nudos por cada “barra” o punto de conexión. Ahora bien, en ocasiones, por el funcionamiento equilibrado de la red o por las características del análisis a realizar, el modelo de los dispositivos y de la red puede plantearse mediante modelos monofásicos equivalentes.

En este capítulo se aborda el estudio de los modelos de los elementos básicos que constituyen un sistema de energía eléctrica, sobre los supuestos de régimen estacionario equilibrado. En concreto, los elementos básicos que se consideran son: líneas eléctricas, transformadores de potencia, máquinas síncronas, máquinas asíncronas (o de inducción) y consumos. En otros capítulos de este libro se describen y estudian modelos trifásicos estacionarios a la frecuencia fundamental y a frecuencias armónicas, dinámicos y transitorios. También se presentan en otros capítulos algunos dispositivos de electrónica de potencia con interés en el análisis de redes.

2.2. Valores por unidad

2.2.1. Definición

Es habitual en el análisis de redes eléctricas, debido a la existencia de elementos con distintos niveles de tensión, potencias nominales y valores de sus parámetros, realizar una normalización de sus ecuaciones. De este modo todas las variables y parámetros que intervienen en los cálculos se encuentran en torno a la unidad. Esta normalización se denomina *valores por unidad* (p.u.) y se establece a través del cociente entre el valor de la variable o parámetro y un valor definido como base. Los valores base se definen sobre el circuito en notación fasorial y se corresponden con los valores de módulo de las magnitudes eléctricas básicas: tensión eficaz, intensidad eficaz, potencia aparente, módulo de la impedancia y

módulo de la admitancia. Evidentemente, los valores base que se seleccionen han de cumplir las relaciones o ecuaciones modulares básicas, que en un sistema monofásico son:

$$S_{\text{base}} = U_{\text{base}} \cdot I_{\text{base}} \quad ; \quad U_{\text{base}} = Z_{\text{base}} \cdot I_{\text{base}} \quad ; \quad I_{\text{base}} = Y_{\text{base}} \cdot U_{\text{base}} \quad (2.1)$$

Se puede establecer inicialmente cualquier binomio de valores base (potencia y tensión, potencia e intensidad, tensión e intensidad...) quedando el resto de las bases definidas mediante las relaciones (2.1). En el análisis de redes eléctricas, lo habitual es definir las bases de potencia S_{base} y de tensión U_{base} , resultando una impedancia base y una intensidad base dadas por:

$$Z_{\text{base}} = \frac{U_{\text{base}}^2}{S_{\text{base}}} \quad ; \quad I_{\text{base}} = \frac{S_{\text{base}}}{U_{\text{base}}}$$

Para transformar un circuito eléctrico con valores en unidades físicas a p.u. sólo se requiere una simple división entre el valor del parámetro (impedancia, admitancia) o de la variable (tensión, potencia, intensidad) por su base respectiva. A continuación, se expresan las transformaciones a p.u. de algunos parámetros y variables eléctricas:

$$\begin{aligned} \mathcal{U} \text{ (V)} &\rightarrow \mathcal{U}_{p.u.} = \frac{\mathcal{U}}{U_{\text{base}}} \text{ (p.u.)} \quad ; \quad \mathcal{I} \text{ (A)} \rightarrow \mathcal{I}_{p.u.} = \frac{\mathcal{I}}{I_{\text{base}}} \text{ (p.u.)} \\ P \text{ (W)} &\rightarrow P_{p.u.} = \frac{P}{S_{\text{base}}} \text{ (p.u.)} \quad ; \quad Q \text{ (var)} \rightarrow Q_{p.u.} = \frac{Q}{S_{\text{base}}} \text{ (p.u.)} \\ \mathcal{Z} \text{ (\Omega)} &\rightarrow \mathcal{Z}_{p.u.} = \frac{\mathcal{Z}}{Z_{\text{base}}} \text{ (p.u.)} \end{aligned}$$

Evidentemente, el análisis del circuito y los resultados de los cálculos que se obtengan están en valores por unidad y se requiere la operación contraria para pasar de p.u. a valores en unidades físicas.

La utilización de valores por unidad aporta grandes ventajas en el análisis de sistemas eléctricos de potencia, simplificando enormemente los cálculos, sobre todo cuando existen transformadores. En este caso, como se describe en el siguiente ejemplo, la elección de valores base adecuados significa la desaparición de la relación de transformación entre los devanados del transformador.

Ejemplo 2.1:

La Figura 2.4.a representa un circuito monofásico compuesto por una carga \mathcal{Z} alimentada por un generador (fuente de tensión \mathcal{U}_1) a través de un transformador ideal de relación N_1/N_2 al que se han añadido las impedancias serie (\mathcal{Z}_1 , \mathcal{Z}_2) y la impedancia paralelo (\mathcal{Z}_m). Del análisis circular de dicho circuito se obtienen las siguientes ecuaciones:

$$\mathcal{U}_1 = \mathcal{I}_1 \cdot \mathcal{Z}_1 + \mathcal{E}_1 \quad ; \quad \mathcal{E}_2 = \mathcal{I}_2 \cdot \mathcal{Z}_2 + \mathcal{U}_2$$

Si se seleccionan como valores base la potencia S_{base} , la tensión $U_{\text{base},1}$ para el devanado primario y la tensión $U_{\text{base},2}$ para el secundario, de tal modo que se cumpla la relación:

$$\frac{U_{\text{base},1}}{U_{\text{base},2}} = \frac{E_1}{E_2} = \frac{N_1}{N_2} = t \quad (2.2)$$

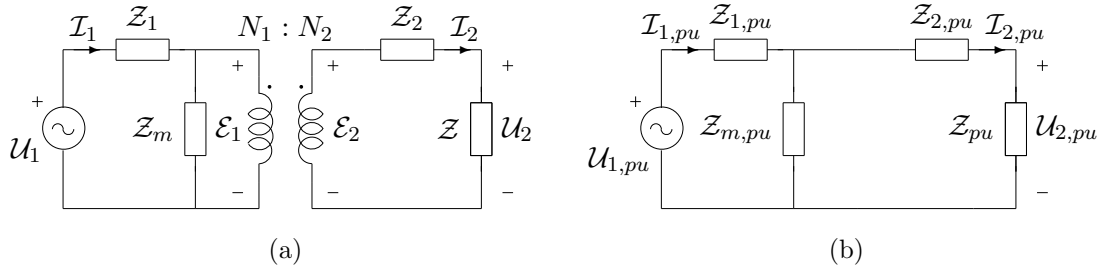


Figura 2.4. Ejemplo de utilización de valores por unidad.

se tienen las intensidades base:

$$I_{\text{base},1} = \frac{S_{\text{base}}}{U_{\text{base},1}} \quad ; \quad I_{\text{base},2} = \frac{S_{\text{base}}}{U_{\text{base},2}} \quad ; \quad \frac{I_{\text{base},1}}{I_{\text{base},2}} = \frac{U_{\text{base},2}}{U_{\text{base},1}} = \frac{1}{t}$$

y las impedancias base:

$$Z_{\text{base},1} = \frac{U_{\text{base},1}^2}{S_{\text{base}}} \quad ; \quad Z_{\text{base},2} = \frac{U_{\text{base},2}^2}{S_{\text{base}}} \quad ; \quad \frac{Z_{\text{base},1}}{Z_{\text{base},2}} = \frac{U_{\text{base},1}^2}{U_{\text{base},2}^2} = t^2$$

De aplicar las anteriores expresiones a las ecuaciones del transformador, resulta:

$$\frac{U_1}{U_{\text{base},1}} = \frac{I_1}{I_{\text{base},1}} \cdot \frac{Z_1}{Z_{\text{base},1}} + \frac{E_1}{U_{\text{base},1}}$$

$$\frac{E_2}{U_{\text{base},2}} = \frac{I_2}{I_{\text{base},2}} \cdot \frac{Z_2}{Z_{\text{base},2}} + \frac{U_2}{U_{\text{base},2}}$$

Y teniendo en cuenta (2.2), se tiene:

$$U_{1,pu} = I_{1,pu} \cdot Z_{1,pu} + I_{2,pu} \cdot Z_{2,pu} + U_{2,pu}$$

Es decir, la relación de transformación desde el punto de vista del análisis del circuito no aparece en las ecuaciones y, por tanto, el circuito se reduce al de la Figura 2.4.b.

Para el caso de circuitos trifásicos se puede aplicar la normalización de valores por unidad de una forma similar al caso monofásico, si trabajamos directamente con el circuito monofásico equivalente, sin más que considerar como potencia base una potencia de fase y como tensiones base las de fase-neutro.

Sin embargo, en las redes trifásicas es más habitual definir las bases en términos de tensiones fase-fase (tensiones de línea) y potencias trifásicas. De este modo, la impedancia base tiene una expresión idéntica a la de las bases monofásicas:

$$Z_{\text{base}} = \frac{U_{\text{base}}^2}{S_{\text{base}}}$$

mientras que la intensidad base se obtiene de la relación trifásica definida por:

$$I_{\text{base}} = \frac{S_{\text{base}}}{\sqrt{3} \cdot U_{\text{base}}}$$

Aplicando los valores base trifásicos así definidos, a las ecuaciones que relacionan las variables fundamentales de un circuito trifásico, obtenemos las correspondientes relaciones en p.u.:

$$S_{pu} = \frac{S}{S_{\text{base}}} = \frac{\sqrt{3}UI}{\sqrt{3}U_{\text{base}}I_{\text{base}}} = U_{pu}I_{pu}$$

y de igual forma

$$I_{pu} = \frac{I}{I_{\text{base}}} = \frac{\frac{U}{\sqrt{3}Z}}{\frac{U_{\text{base}}}{\sqrt{3}Z_{\text{base}}}} = \frac{U_{pu}}{Z_{pu}}$$

Se observa que desaparece el factor $\sqrt{3}$ en las ecuaciones, es decir, se obtiene directamente un circuito monofásico en p.u. Una vez resuelto, al pasar de los valores p.u. a los valores físicos se obtienen directamente tensiones nodales compuestas y potencias trifásicas.

Ejemplo 2.2:

A modo de ejemplo de utilización de la normalización en p.u., se presenta la red trifásica de la Figura 2.5.a.

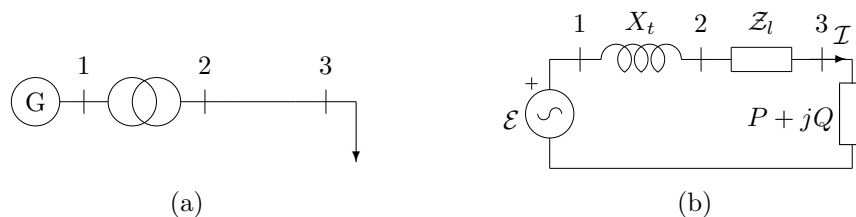


Figura 2.5. Ejemplo de valores p.u. trifásicos.

El circuito está compuesto de:

- Fuente de tensión trifásica ideal de 11 kV de tensión fase-fase (nudo 1).
- Transformador trifásico de tensiones nominales 11/66 kV con una potencia nominal 100 MVA y una reactancia serie de $X=0.15 \Omega$ vista desde el lado de 11 kV (rama 1-2).
- Línea de resistencia 5Ω y reactancia 10Ω (rama 2-3).
- Carga trifásica de potencia total $P = 80 \text{ MW}$ y $Q = 10 \text{ Mvar}$ (nudo 3).

Considerando una potencia base común para todo el circuito $S_{\text{base}} = 100$ MVA y unas tensiones base correspondientes a los dos niveles de tensión definidos por el transformador:

$$U_{\text{base},1} = 11 \text{ kV} ; U_{\text{base},2} = 66 \text{ kV}$$

se obtienen las intensidades e impedancias base siguientes:

$$I_{\text{base},1} = \frac{S_{\text{base}}}{\sqrt{3} \cdot U_{\text{base},1}} = 5248 \text{ A} ; I_{\text{base},2} = \frac{S_{\text{base}}}{\sqrt{3} \cdot U_{\text{base},2}} = 874 \text{ A}$$

$$Z_{\text{base},1} = \frac{U_{\text{base},1}^2}{S_{\text{base}}} = 1,21 \Omega ; Z_{\text{base},2} = \frac{U_{\text{base},2}^2}{S_{\text{base}}} = 43,56 \Omega$$

y las variables y los parámetros del circuito en p.u. (Figura 2.5.b) resultan:

$$\mathcal{E} = 1|_{0^\circ} \text{ p.u.}$$

$$X_t = \frac{0,15}{Z_{\text{base},1}} = 0,124 \text{ p.u.} ; Z_L = \frac{5 + 10j}{Z_{\text{base},2}} = 0,115 + 0,23j \text{ p.u.}$$

$$P + jQ = \frac{80 + 10j}{S_{\text{base}}} = 0,8 + 0,1j \text{ p.u.}$$

Resolviendo el circuito, se obtiene un valor para el módulo de la corriente \mathcal{I} de 1.0465 p.u. Así pues, las corrientes a ambos lados del transformador, en amperios, se calcularán multiplicando por las bases correspondientes:

$$I_1 = 1,0465 \cdot I_{\text{base},1} = 5492 \text{ A} ; I_2 = I_3 = 1,0465 \cdot I_{\text{base},2} = 914,6 \text{ A}$$

La implantación de los transformadores en las redes malladas se realiza de tal modo que, supuesta la red en vacío, cualquier lazo que se seleccione no incurra en la existencia de un nudo con dos tensiones nominales distintas, bien en módulo o en ángulo. Es decir, si en una red mallada un nudo cualquiera presenta un valor $U|_{0^\circ}$, cualquier trayectoria cerrada que parta de dicho nudo ha de cerrarse con el mismo valor de tensión; de otra forma se estaría en una situación de falta entre fases.

La consecuencia del anterior criterio, significa que en una red con transformadores con relación de transformación únicamente de módulo, la aplicación de los valores p.u. origina la desaparición de los acoplamientos en todos ellos.

Sin embargo, un transformador trifásico presenta, en general, una relación de transformación compleja¹ ($N_1|_\alpha : N_2|_{0^\circ}$), y por tanto, la selección de valores base adecuados origina la desaparición de la relación de transformación en su parte modular, pero no en su parte argumental. Es decir, la aplicación de los valores base implica un nuevo acoplamiento magnético donde persiste la relación de ángulos $1|_\alpha : 1|_{0^\circ}$.

Con la finalidad de hacer desaparecer las relaciones de transformación de ángulo en los modelos de los transformadores trifásicos, se puede definir para cada zona, además de la potencia base y la tensión base, un ángulo base. Este ángulo base se define de acuerdo con el índice horario de los transformadores presentes en la red supuesta en vacío. De este

¹ El modelo del transformador trifásico se describe en el apartado 2.4.2

modo, cualquier análisis de la red se realiza ignorando las transformaciones de ángulos en los circuitos equivalentes. Posteriormente, se pueden calcular los ángulos reales de las variables eléctricas de tensión e intensidad a partir del ángulo base donde se encuentre la variable. Así, para una zona con un ángulo base de valor α_{base} y valores base de módulo U_{base} y S_{base} , cualquier variable compleja en p.u. de intensidad $I_{p.u.} \angle \gamma$ o tensión $U_{p.u.} \angle \theta$, se puede pasar a valores físicos reales mediante las expresiones:

$$\mathcal{I} = I_{pu} \angle \gamma \cdot I_{\text{base}} \angle \alpha_{\text{base}} \quad ; \quad \mathcal{U} = U_{pu} \angle \theta \cdot U_{\text{base}} \angle \alpha_{\text{base}}$$

2.2.2. Elección y cambio de base

Generalmente, los parámetros de los elementos de la red eléctrica suelen venir expresados en p.u., o en tanto por ciento (0.1 p.u. \equiv 10%), referidos a la base definida por sus valores nominales (potencia nominal, tensión nominal). Evidentemente, esta base no tiene por qué coincidir con la que se utilice en un análisis concreto de la red y, en consecuencia, habrá que realizar un cambio de bases para unificar los datos de todos los elementos. Así, si se considera un elemento con valores $\mathcal{U}_{pu,1}$, $\mathcal{S}_{pu,1}$ y $\mathcal{Z}_{pu,1}$ referidos a unas bases $U_{\text{base},1}$ y $S_{\text{base},1}$, éstos pueden referirse a unas nuevas bases $U_{\text{base},2}$ y $S_{\text{base},2}$ mediante las relaciones siguientes:

$$\mathcal{U}_{pu,2} = \mathcal{U}_{pu,1} \cdot \frac{U_{\text{base},1}}{U_{\text{base},2}} \quad ; \quad \mathcal{S}_{pu,2} = \mathcal{S}_{pu,1} \cdot \frac{S_{\text{base},1}}{S_{\text{base},2}}$$

$$\mathcal{Z}_{pu,2} = \mathcal{Z}_{pu,1} \cdot \frac{U_{\text{base},1}^2}{U_{\text{base},2}^2} \cdot \frac{S_{\text{base},2}}{S_{\text{base},1}}$$

La selección de las bases en una red eléctrica, como se ha visto, tiene por principal finalidad eliminar los acoplamientos de los transformadores de los cálculos. Para ello, se debe proceder de la siguiente forma:

1. Se selecciona una tensión base por cada nivel de tensión nominal existente en la red, teniendo en cuenta que las tensiones base deben tener la misma relación de transformación que los transformadores. Esto significa que cada devanado del transformador determina una zona de valores de tensión base ($U_{\text{base},1}$, $U_{\text{base},2}$).
2. Se considera una potencia base única para toda la red (S_{base}).
3. Se selecciona un ángulo base por cada zona definida por los devanados de los transformadores trifásicos, teniendo en cuenta que la relación entre los ángulos base han de tener la misma relación que los ángulos del acoplamiento complejo ($\alpha_{\text{base},1}$, $\alpha_{\text{base},2}$).

En la Figura 2.6.a se representan gráficamente las zonas base que se definen sobre un ejemplo de red. En la Figura 2.6.b se muestra el circuito en p.u. que resulta de aplicar el proceso de selección anterior a la red eléctrica, donde se puede apreciar la inexistencia de bobinas de acoplamiento.

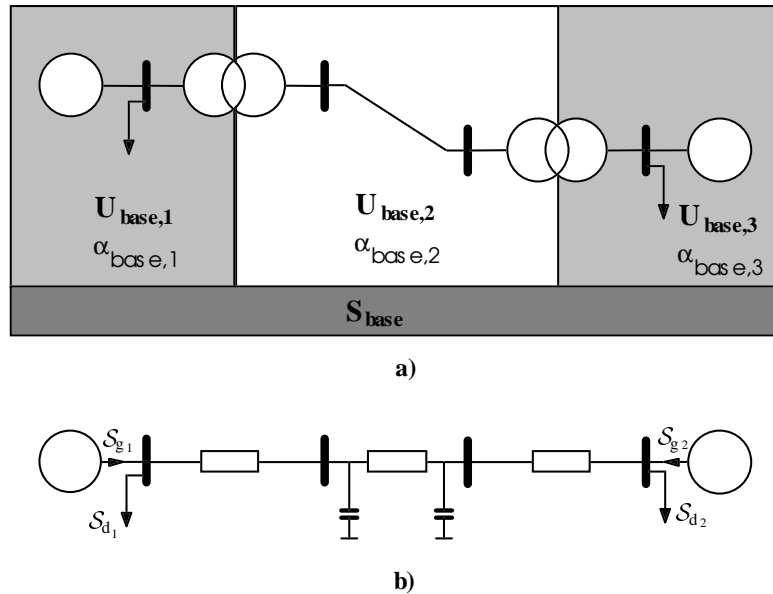


Figura 2.6. Selección de bases para el análisis de una red eléctrica.

2.3. Líneas eléctricas

Las líneas eléctricas son los elementos básicos que constituyen las redes eléctricas, cuya función es el transporte de la energía eléctrica entre dos puntos. Su funcionamiento viene caracterizado por cuatro parámetros fundamentales (resistencia, inductancia, capacidad y conductancia) que permiten modelar una línea mediante un circuito eléctrico.

A continuación se van a describir los cuatro parámetros mencionados, y los diferentes modelos de la línea que se pueden construir a partir de ellos. Por último, se analizarán algunas condiciones típicas de funcionamiento de las líneas.

2.3.1. Parámetros de líneas

Resistencia

Definimos la *resistencia efectiva* de un conductor como la relación entre la potencia de pérdidas P_p producida cuando por él circula una corriente I y el cuadrado de dicha corriente. Cuando la resistencia se establece en circuitos con variables sinusoidales se denota por R_{ca} y se define por

$$R_{ca} = \frac{P_p}{I^2}$$

El valor de esta resistencia coincide con la resistencia en corriente continua R_{cc} solamente cuando la corriente que circula por el conductor se distribuye de forma totalmente uniforme en su sección. En conductores con una sección uniforme y relativamente pequeña en relación

con su longitud, la resistencia R_{cc} es directamente proporcional a su longitud e inversamente proporcional a su sección

$$R_{cc} = \rho \frac{l}{S} \quad (2.3)$$

donde ρ es una constante de proporcionalidad que depende del material y que se denomina *resistividad* (Tabla 2.1). Típicamente, R se expresa en ohmios (Ω), l en metros, S en milímetros cuadrados y ρ en $\Omega \cdot \text{mm}^2/\text{m}$.

Por otra parte, la resistencia de un conductor varía con la temperatura, siendo esta relación aproximadamente lineal dentro del rango de temperaturas habituales de funcionamiento. De esta forma, conocida la resistencia R_1 a una temperatura determinada θ_1 , se puede obtener su valor R_2 a otra temperatura θ_2 mediante la expresión:

$$R_2 = R_1 \cdot [1 + \alpha \cdot (\theta_2 - \theta_1)] \quad (2.4)$$

donde α es el coeficiente de variación de la resistencia con la temperatura, cuyo valor depende del material (Tabla 2.1). Esta misma dependencia con la temperatura también puede ser expresada de otra forma, mediante la siguiente relación:

$$\frac{R_2}{R_1} = \frac{T_0 + \theta_2}{T_0 + \theta_1} \quad (2.5)$$

donde T_0 es un coeficiente de temperatura característico de cada material (Tabla 2.1).

Cuadro 2.1. Características de materiales conductores.

	$\rho_{20^\circ\text{C}}$ ($\Omega \cdot \text{mm}^2/\text{m}$)	α ($1/^\circ\text{C}$)	T_0 ($^\circ\text{C}$)
Cobre	0.01724	0.00393	234.5
Aluminio	0.02826	0.00403	228

El otro parámetro que influye de forma apreciable en el valor de la resistencia efectiva es la frecuencia de la corriente que circula por el conductor. El fenómeno electromagnético que se conoce por efecto *skin*, origina que la intensidad tienda a concentrarse en las zonas más próximas a la superficie del conductor. Este fenómeno depende de las dimensiones del conductor, de la frecuencia de la corriente y de la resistividad del material, de tal forma que sus efectos son más importantes cuanto mayor es la frecuencia y menor la resistividad. Las consecuencias prácticas del efecto *skin* equivalen a una reducción de la sección útil del conductor, lo que se traduce en un incremento del valor de su resistencia efectiva.

Además del efecto *skin*, producido por la propia corriente que circula por el conductor, la existencia de otros conductores cercanos puede provocar un efecto adicional de distorsión en la distribución de corriente y, por tanto, un incremento añadido de la resistencia efectiva. Este fenómeno se conoce como efecto *proximidad* y en líneas aéreas, dada la gran distancia existente entre los conductores, suele ser despreciable. Sin embargo, este fenómeno de proximidad puede ser de importancia en líneas constituidas a base de cables aislados.

En conjunto, teniendo en cuenta todos los fenómenos que se han visto, la resistencia efectiva de un conductor podría ser calculada mediante una expresión como la siguiente:

$$R_{ca2} = R_{cc1} \cdot [1 + \alpha \cdot (\theta_2 - \theta_1)] \cdot (1 + K_s) \cdot (1 + K_p) \quad (2.6)$$

donde K_s y K_p son coeficientes que expresan el incremento debido a los efectos *skin* y *proximidad*, respectivamente.

Habitualmente, los valores de resistencia de los distintos conductores se encuentran tabulados para diferentes condiciones normales de funcionamiento, como se muestra en la Tabla 2.2.

Cuadro 2.2. Valores de resistencia de algunos conductores.

	$R_{cc_{20^\circ C}} (\Omega/\text{km})$	$R_{ca_{20^\circ C}} (\Omega/\text{km})$	$R_{ca_{50^\circ C}} (\Omega/\text{km})$
LA-280 (Hawk)	0.119	0.119	0.131
LA-380 (Gull)	0.085	0.085	0.091
LA-455 (Condor)	0.072	0.073	0.083

Inductancia

Una corriente eléctrica circulando a través de un conductor, crea un campo magnético en forma de lazos circulares que rodean al conductor. Si la corriente $i(t)$ es variable con el tiempo, el campo magnético también lo será y en cualquier circuito eléctrico que concatene una porción del flujo magnético se inducirá un voltaje dado por:

$$v(t) = \frac{d\phi}{dt}$$

donde $\phi(t)$ es el flujo concatenado por el circuito.

El flujo concatenado es proporcional a la corriente que lo crea, siendo la constante de proporcionalidad el denominado coeficiente de inducción L , que únicamente depende de la geometría de los circuitos:

$$L = \frac{\phi(t)}{i(t)}$$

Inicialmente, se analizará el caso de un conductor cilíndrico de radio r , rectilíneo e infinitamente largo, por el que circula una corriente $i(t)$. Supondremos que la corriente varía sinusoidalmente a frecuencia industrial (baja frecuencia), lo que permite utilizar la aproximación cuasi-estacionaria de los campos electromagnéticos. Además, se considera que dicha corriente está uniformemente distribuida en toda la sección (es decir, densidad de corriente constante).

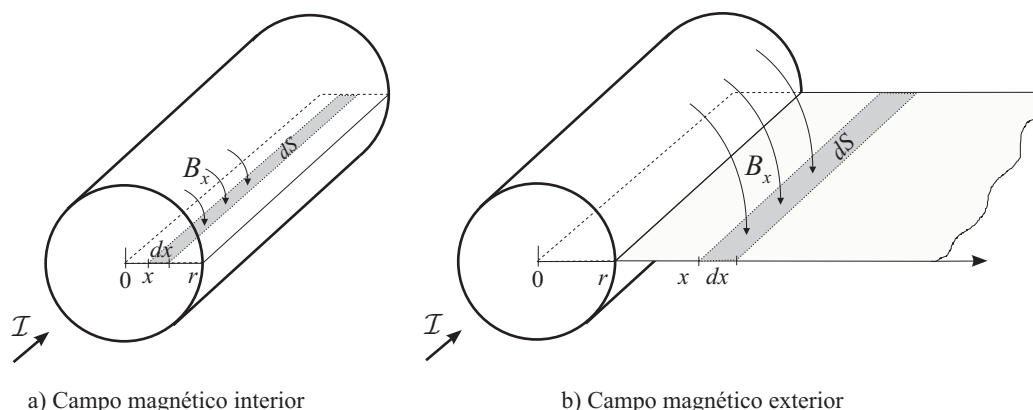


Figura 2.7. Campo magnético dentro y fuera del conductor.

En estas condiciones, aplicando directamente la ley de Ampère, y asumiendo que el medio es amagnético, lineal e isótropo con permeabilidad² μ_0 , la densidad de flujo magnético a una distancia x del centro del conductor vendrá dada por:

$$B_x = \mu_0 \cdot H_x = \frac{\mu_0 \mathcal{I}_x}{2\pi x}$$

siendo \mathcal{I}_x la corriente abarcada por la circunferencia de radio x . Para puntos externos al conductor se cumple que $\mathcal{I}_x = \mathcal{I}$, con lo que el flujo magnético (que rodea a la totalidad de la corriente \mathcal{I}) se puede obtener como (Figura 2.7.b):

$$\phi^{\text{ext}} = \int_r^\infty B_x dS = \int_r^\infty \frac{\mu_0 \mathcal{I}}{2\pi x} dx = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{\mu_0 \mathcal{I}}{2\pi} \ln \frac{x}{r} \right)$$

Sin embargo, en el interior del conductor, la corriente rodeada por el flujo es diferente para cada punto, dependiendo de la distancia x al centro, siendo:

$$\mathcal{I}_x = \frac{\mathcal{I}}{\pi r^2} \cdot \pi x^2 = \frac{\mathcal{I} x^2}{r^2}$$

Así pues, cada punto interior del conductor a una distancia x del centro, está rodeado por un flujo interior dado por (Figura 2.7.a):

$$\phi_x^{\text{int}} = \int_x^r B_x dS = \int_x^r \frac{\mu_0 \mathcal{I} x}{2\pi r^2} dx = \frac{\mu_0 \mathcal{I}}{4\pi r^2} (r^2 - x^2)$$

Para calcular la inductancia debida a este flujo interno, se calculará su valor medio en toda la sección del conductor, como:

$$\phi_{\text{med}}^{\text{int}} = \frac{1}{\pi r^2} \int_0^r \phi_x^{\text{int}} 2\pi x dx = \int_0^r \frac{\mu_0 \mathcal{I} x}{2\pi r^4} (r^2 - x^2) dx = \frac{\mu_0 \mathcal{I}}{8\pi}$$

² La permeabilidad magnética del vacío μ_0 vale $4\pi \cdot 10^{-7}$ V·s/A·m (H/m).

resultando un flujo total que enlaza al conductor de corriente \mathcal{I} y debido a él mismo, de valor:

$$\phi = \phi_{\text{med}}^{\text{int}} + \phi^{\text{ext}} = \frac{\mu_0 \mathcal{I}}{8\pi} + \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{\mu_0 \mathcal{I}}{2\pi} \ln \frac{x}{r} \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{\mu_0 \mathcal{I}}{2\pi} \ln \frac{x}{r'} \right)$$

donde $r' = r \cdot e^{-1/4}$ es un *radio ficticio* o aparente que nos permite englobar el efecto del flujo interno en la expresión general del flujo externo.

En el caso práctico más general, se tendrá una línea constituida por un cierto número n de conductores paralelos dispuestos en un área finita, transportando diferentes corrientes y cumpliéndose la condición de que la suma total de corrientes es cero. La corriente que circula por cada conductor crea un campo magnético, cuyo flujo enlazará en diferente medida al propio conductor y a los demás conductores.

El flujo magnético creado por un conductor j que enlaza a otro conductor i situado a una distancia d_{ij} , se puede obtener mediante la integral:

$$\phi_{ij} = \int_{d_{ij}}^{\infty} B_x dS = \int_{d_{ij}}^{\infty} \frac{\mu_0 \mathcal{I}}{2\pi x} dx = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{\mu_0 \mathcal{I}}{2\pi} \ln \frac{x}{d_{ij}} \right)$$

Así pues, un conductor genérico i estará rodeado por un flujo magnético total, debido al campo creado por él mismo y por todos los demás conductores, de valor:

$$\phi_i = \sum_{j=1}^n \phi_{ij} = \sum_{j=1}^n \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{\mu_0 \mathcal{I}_j}{2\pi} \ln \frac{x}{d_{ij}} \right) = \sum_{j=1}^n \frac{\mu_0 \mathcal{I}_j}{2\pi} \ln \frac{1}{d_{ij}} \quad (2.7)$$

expresión en la que ha desaparecido el límite al utilizar la condición de $\sum \mathcal{I}_j = 0$ y donde d_{ij} es la distancia entre los conductores i y j (medida desde los respectivos centros), y d_{ii} se corresponde con r'_i .

La expresión obtenida para el flujo puede ser aplicada ahora al caso práctico más habitual constituido por una línea trifásica, donde cada una de las fases a , b y c está formada por n_a , n_b y n_c conductores, respectivamente. Cada una de estas fases transporta una corriente total (\mathcal{I}_a , \mathcal{I}_b e \mathcal{I}_c) que se puede suponer repartida de forma uniforme entre los conductores que las constituyen, es decir, en cada conductor circula \mathcal{I}_a/n_a , \mathcal{I}_b/n_b o \mathcal{I}_c/n_c según pertenezca a la fase a , b o c .

En estas condiciones, cada conductor i de la fase a estará enlazado por un flujo magnético total ϕ_{a_i} , que será debido al campo magnético creado por los propios conductores de la fase a , y el debido a los conductores de las otras fases b y c , siendo:

$$\begin{aligned} \phi_{a_i} &= \frac{\mu_0}{2\pi} \left(\sum_{k=1}^{n_a} \frac{\mathcal{I}_a}{n_a} \ln \frac{1}{d_{a_i a_k}} + \sum_{k=1}^{n_b} \frac{\mathcal{I}_b}{n_b} \ln \frac{1}{d_{a_i b_k}} + \sum_{k=1}^{n_c} \frac{\mathcal{I}_c}{n_c} \ln \frac{1}{d_{a_i c_k}} \right) = \\ &= \frac{\mu_0}{2\pi} \left(\mathcal{I}_a \ln \frac{1}{n_a \sqrt{\prod_{k=1}^{n_a} d_{a_i a_k}}} + \mathcal{I}_b \ln \frac{1}{n_b \sqrt{\prod_{k=1}^{n_b} d_{a_i b_k}}} + \mathcal{I}_c \ln \frac{1}{n_c \sqrt{\prod_{k=1}^{n_c} d_{a_i c_k}}} \right) \end{aligned}$$

Considerando un flujo medio para la fase a , como el valor medio de los flujos de los conductores que la constituyen, se tiene:

$$\phi_a = \frac{\sum_{i=1}^{n_a} \phi_{a_i}}{n_a} = \frac{\mu_0}{2\pi} \left(\mathcal{I}_a \ln \frac{1}{D_{aa}} + \mathcal{I}_b \ln \frac{1}{D_{ab}} + \mathcal{I}_c \ln \frac{1}{D_{ac}} \right)$$

donde

$$D_{aa} = \sqrt[n_a n_a]{\prod_{i=1}^{n_a} \prod_{k=1}^{n_a} d_{a_i a_k}} ; \quad D_{ab} = \sqrt[n_a n_b]{\prod_{i=1}^{n_a} \prod_{k=1}^{n_b} d_{a_i b_k}} ; \quad D_{ac} = \sqrt[n_a n_c]{\prod_{i=1}^{n_a} \prod_{k=1}^{n_c} d_{a_i c_k}}$$

Y de igual manera, tenemos para las otras dos fases:

$$\phi_b = \frac{\mu_0}{2\pi} \left(\mathcal{I}_a \ln \frac{1}{D_{ab}} + \mathcal{I}_b \ln \frac{1}{D_{bb}} + \mathcal{I}_c \ln \frac{1}{D_{bc}} \right) ; \quad \phi_c = \frac{\mu_0}{2\pi} \left(\mathcal{I}_a \ln \frac{1}{D_{ac}} + \mathcal{I}_b \ln \frac{1}{D_{bc}} + \mathcal{I}_c \ln \frac{1}{D_{cc}} \right)$$

Cada distancia D_{xx} representa la media geométrica de las distancias entre los conductores de la fase x , y se conoce como *radio medio geométrico (RMG)* de la fase x . Hay que hacer notar que el factor correspondiente a la distancia entre un conductor y él mismo, $d_{x_i x_i}$, es igual a su radio aparente $r'_{x_i} = r_{x_i} \cdot e^{-1/4}$.

La distancia D_{xy} es la media geométrica de las distancias entre los conductores de las fases x e y y se denomina *distancia media geométrica (DMG)* entre dichas fases.

La relación entre el flujo magnético medio que enlaza a cada fase y las corrientes se puede escribir de forma más compacta mediante la siguiente relación matricial:

$$\begin{pmatrix} \phi_a \\ \phi_b \\ \phi_c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \ln \frac{1}{D_{aa}} & \ln \frac{1}{D_{ab}} & \ln \frac{1}{D_{ac}} \\ \ln \frac{1}{D_{ab}} & \ln \frac{1}{D_{bb}} & \ln \frac{1}{D_{bc}} \\ \ln \frac{1}{D_{ac}} & \ln \frac{1}{D_{bc}} & \ln \frac{1}{D_{cc}} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \mathcal{I}_a \\ \mathcal{I}_b \\ \mathcal{I}_c \end{pmatrix} \quad (2.8)$$

En el caso de que la línea sea *equilibrada*, esto es, si se cumple que $D_{aa} = D_{bb} = D_{cc} = D_{xx}$ y $D_{ab} = D_{ac} = D_{bc} = D_{xy}$, y teniendo en cuenta la condición de $\mathcal{I}_a + \mathcal{I}_b + \mathcal{I}_c = 0$, el flujo para cualquiera de las tres fases vale:

$$\phi_{\text{fase}} = \frac{\mu_0}{2\pi} \left(\mathcal{I}_{\text{fase}} \ln \frac{D_{xy}}{D_{xx}} \right)$$

quedando definida una inductancia por fase, igual para las tres fases, de valor:

$$L_{\text{fase}} = \frac{\phi_{\text{fase}}}{\mathcal{I}_{\text{fase}}} = \frac{\mu_0}{2\pi} \ln \frac{D_{xy}}{D_{xx}}$$

La inductancia por fase así definida ya engloba los acoplamientos inductivos mutuos entre las diferentes fases, lo que permite modelar la línea trifásica mediante un único circuito monofásico equivalente.

Una línea eléctrica real, si se tiene en cuenta el efecto de la tierra, nunca es totalmente equilibrada, ni aunque la disposición de sus fases sea simétrica. Sin embargo, en la mayoría

de los casos, el desequilibrio es lo suficientemente pequeño como para poder ser despreciado. Si por las características de la línea (disposición geométrica, longitud...) el desequilibrio es importante, se puede llevar a cabo la transposición de sus fases con el fin de que todas ellas sufran de igual modo los efectos eléctricos y magnéticos, y por tanto tengan los mismos parámetros. Dicha transposición se realiza regularmente a lo largo de la línea, de tal modo que con dos transposiciones se obtiene el equilibrio de sus parámetros en valores medios. En la Figura 2.8 se muestran las transposiciones en una línea.

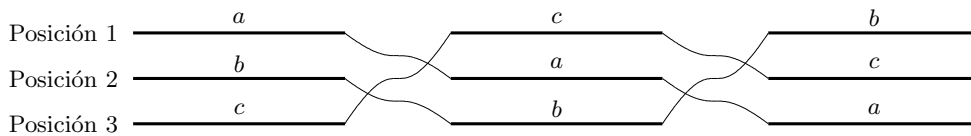


Figura 2.8. Transposición en una línea trifásica.

Con la transposición se consigue que la matriz de inductancias (2.8) se convierta en una matriz equilibrada con los elementos de la diagonal definidos por

$$D_{xx}^{\text{eq}} = \sqrt[3]{D_{aa}D_{bb}D_{cc}}$$

y todos los elementos fuera de la diagonal por

$$D_{xy}^{\text{eq}} = \sqrt[3]{D_{ab}D_{bc}D_{ac}}$$

donde D_{xx}^{eq} es un *radio equivalente* obtenido como la media geométrica de los radios medios geométricos de las tres fases y D_{xy}^{eq} es una *distancia equivalente entre fases* calculada como la media geométrica de las distancias entre las distintas fases. Una vez aplicada la transposición, la línea puede ser tratada como *equilibrada*, resultando en este caso una inductancia por fase igual a:

$$L_{\text{fase}} = \frac{\mu_0}{2\pi} \ln \frac{D_{xy}^{\text{eq}}}{D_{xx}^{\text{eq}}} \quad (2.9)$$

Ejemplo 2.3:

A continuación, se calculará la inductancia por fase de una línea trifásica constituida por dos circuitos en paralelo, y con conductores agrupados en haces de dos (tipo dúplex). Así pues, cada fase de dicha línea consta de cuatro conductores, dos en cada circuito, dispuestos como se muestra en la Figura 2.9.

Por otra parte, los conductores habituales no están contruidos a base de un único hilo cilíndrico sino que suelen fabricarse en forma de cables contruidos por sucesivas capas de hilos cilíndricos. Supongamos que en el caso del ejemplo, cada conductor tiene un diámetro exterior de 18 mm y que consta de 7 hilos cilíndricos de radio $r = 3$ mm cableados, tal y como se muestra en la Figura 2.10.

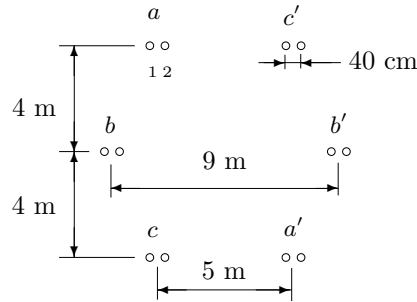


Figura 2.9. Línea de doble circuito dúplex.

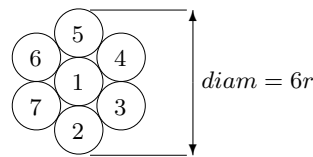


Figura 2.10. Sección de un cable constituido por 7 hilos.

Para calcular la inductancia tal y como se ha deducido, se debe considerar cada uno de los cables como una agrupación de conductores cilíndricos con un radio medio geométrico dado por:

$$r_{\text{mg}} = \sqrt[7 \times 7]{\prod_{i=1}^7 \prod_{j=1}^7 d_{ij}} \quad (2.10)$$

donde para el hilo-conductor 1 del ejemplo resulta:

$$\begin{aligned} d_{11} &= r' = r \cdot e^{-1/4} \\ d_{1i} &= 2r \quad i = 2, \dots, 7 \end{aligned} \quad (2.11)$$

y para el hilo-conductor 2:

$$\begin{aligned} d_{22} &= r' = r \cdot e^{-1/4} \\ d_{21} &= d_{23} = d_{27} = 2r \\ d_{24} &= d_{26} = 2r\sqrt{3} \\ d_{25} &= 4r \end{aligned} \quad (2.12)$$

siendo el resto de hilos-conductores idénticos al 2.

En consecuencia, el radio medio geométrico del ejemplo resulta:

$$r_{\text{mg}} = \sqrt[49]{r' \cdot (2r)^6 \cdot \left(r' \cdot (2r)^3 \cdot (2r\sqrt{3})^2 \cdot 4r \right)^6} = 2,1781 \cdot r = 6,5343 \text{ mm} \quad (2.13)$$

Si se hubiese tratado el conductor del ejemplo como si fuese un conductor cilíndrico macizo de radio exterior $3r$, el radio medio geométrico sería directamente $3r \cdot e^{-1/4} = 2,336 \cdot r = 7,008 \text{ mm}$. Se observa cómo el error cometido es relativamente pequeño y, en la práctica, se suele aceptar tal aproximación. Por otra parte, para un mismo diámetro exterior del cable, cuanto mayor sea el número de hilos que lo conforman, menor será el error cometido.

Para calcular la inductancia por fase de esta línea, que se supone transpuesta, se aplicará la expresión (2.9), donde necesitamos calcular las distancias D_{xx}^{eq} y D_{xy}^{eq} .

La primera de las distancias se define por:

$$D_{xx}^{\text{eq}} = \sqrt[3]{D_{aa}D_{bb}D_{cc}}$$

donde D_{aa} , D_{bb} y D_{cc} son los radios medios geométricos de las respectivas fases. Por ejemplo, para la fase a tenemos:

$$D_{aa} = \sqrt[16]{\prod_{i=1}^4 \prod_{j=1}^4 d_{a_i a_j}} \quad (2.14)$$

donde $d_{a_i a_j}$ es la distancia entre los conductores a_i y a_j . Los factores correspondientes a $i = j$ son, como ya se ha visto, $d_{a_i a_i} = r_{\text{mg}}$.

Dado que los conductores están agrupados de dos en dos formando haces dúplex³, se cumple que las distancias entre conductores de un mismo haz (en este caso 0.4 m) es mucho menor que la distancia entre los distintos haces (varios metros). En consecuencia, es aceptable aproximar las distancias entre conductores de distintos haces a un valor único igual a la distancia entre los centros de dichos haces. Esto es equivalente a tratar cada haz o grupo de conductores como un único conductor con un radio medio geométrico dado por

$$d_{aa} = d_{a'a'} = \sqrt{r_{\text{mg}} \cdot d}$$

donde $d = 0,4$ m es la distancia entre los dos conductores del haz. Con estas consideraciones, la expresión (2.14) para D_{aa} se reduce a la siguiente:

$$D_{aa} = \sqrt[4]{d_{aa}d_{aa'}d_{a'a}d_{a'a'}} = \sqrt{d_{aa}d_{aa'}}$$

Con los datos del ejemplo, se obtienen los siguientes resultados numéricos:

$$D_{aa} = D_{cc} = 0,694 \text{ m} ; \quad D_{bb} = 0,678 \text{ m}$$

$$D_{xx}^{\text{eq}} = \sqrt[3]{D_{aa}D_{bb}D_{cc}} = 0,688 \text{ m}$$

De igual forma, se puede calcular D_{xy}^{eq} como sigue:

$$D_{xy}^{\text{eq}} = \sqrt[3]{D_{ab}D_{ac}D_{bc}}$$

donde $D_{ab} = \sqrt[4]{d_{ab}d_{ab'}d_{a'b}d_{a'b'}} = 6,004$ m, $D_{ac} = \sqrt[4]{d_{ac}d_{ac'}d_{a'c}d_{a'c'}} = 6,324$ m y por simetría de la disposición de los conductores en este ejemplo, $D_{bc} = D_{ab} = 6,004$ m. Así pues, $D_{xy}^{\text{eq}} = 6,109$ m, obteniéndose una inductancia por fase según (2.9):

$$L_{\text{fase}} = \frac{\mu_0}{2\pi} \ln \frac{D_{xy}^{\text{eq}}}{D_{xx}^{\text{eq}}} = 4,36 \cdot 10^{-4} \text{ H/km}$$

³ La disposición de conductores formando grupos o haces constituidos por varios subconductores relativamente próximos entre sí (a distancias mucho menores que las existentes entre conductores de distintas agrupaciones) es habitualmente utilizada para tensiones elevadas, con el fin de reducir los fuertes gradientes de potencial en la superficie de los conductores y con ello limitar la aparición del *efecto corona*. En la práctica los haces de conductores más habituales constan de dos, tres o cuatro subconductores (línea dúplex, tríplex y cuádruplex).

Capacidad

Del mismo modo que el fenómeno de la inductancia de las líneas se establecía a partir del campo magnético creado por las intensidades, la capacidad está ligada al campo eléctrico generado por la carga eléctrica existente en los conductores.

El análisis del campo eléctrico en el entorno de un conductor permite relacionar la carga eléctrica q existente en dicho conductor con su potencial o tensión v respecto a un punto de referencia. Es precisamente el cociente entre ambas magnitudes lo que se define como capacidad C del conductor:

$$C = \frac{q}{v} \quad (2.15)$$

Para obtener dicha relación, se parte del caso teórico más sencillo consistente en un único conductor cilíndrico de radio r , infinitamente largo, con una carga en su superficie por unidad de longitud que varía sinusoidalmente a frecuencia industrial (baja frecuencia) y que denominaremos Q en notación fasorial.

En estas condiciones, se obtiene el campo eléctrico como en el caso estático aplicando el teorema de Gauss, siendo para un punto que dista x del centro del conductor:

$$\mathcal{E}_x = \frac{Q}{2\pi\epsilon_0 x}$$

donde ϵ_0 es la constante dieléctrica del vacío⁴. Hay que destacar que \mathcal{E}_x tiene dirección radial y que, a diferencia de lo que ocurre con el campo magnético, el campo eléctrico dentro del conductor es nulo.

A partir del campo eléctrico se puede calcular la diferencia de potencial entre dos puntos, sabiendo que $\mathcal{E} = -grad \mathcal{V}$, que para un campo central como en este caso, se reduce a:

$$\mathcal{E}_x = -\frac{d\mathcal{V}}{dx}$$

Integrando la anterior ecuación, se obtiene la diferencia de potencial entre dos puntos distantes x_1 y x_2 de la carga Q que crea el campo:

$$\mathcal{V}_1 - \mathcal{V}_2 = -\int_{x_1}^{x_2} \mathcal{E}_x dx = \frac{Q}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{x_2}{x_1}$$

En la práctica, se tiene una línea constituida por n conductores paralelos dispuestos en un área finita, con diferentes cargas Q_i cumpliéndose la condición de que la suma total de cargas es cero. En esta situación, si consideramos como referencia de potenciales un punto infinitamente alejado ($V_\infty = 0$), cada conductor tendrá un potencial \mathcal{V}_i debido a las cargas de todos los demás conductores y a la suya propia, dado por la siguiente suma:

$$\mathcal{V}_i = \lim_{x \rightarrow \infty} \sum_{j=1}^n \frac{Q_j}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{x}{d_{ij}} = \sum_{j=1}^n \frac{Q_j}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{1}{d_{ij}} \quad (2.16)$$

donde d_{ij} es la distancia entre los conductores i y j , siendo para el caso $i = j$, igual al radio del conductor ($d_{ii} = r_i$). Es conveniente resaltar que al no haber campo eléctrico en

⁴ La constante dieléctrica del vacío ϵ_0 vale $\frac{1}{36\pi} \cdot 10^{-9}$ A·s/V·m ó (F/m).

el interior del conductor, se utiliza el radio físico real del conductor (a diferencia de lo que ocurría en el cálculo de la inductancia donde se utilizaba r').

La expresión (2.16) del potencial en un conductor es, formalmente, similar a la del flujo magnético ϕ_i (2.7), salvo en las constantes y que en lugar de corrientes se habla ahora de cargas. Esto significa que siguiendo un desarrollo semejante al expuesto en el caso del flujo, se puede obtener la expresión del potencial correspondiente al caso de una línea trifásica con varios conductores por fase, suponiendo que es equilibrada o bien, transpuesta. El resultado que se obtiene es el siguiente:

$$V_{\text{fase}} = \frac{Q_{\text{fase}}}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{D_{xy}^{\text{eq}}}{D_{xxm}^{\text{eq}}} \quad (2.17)$$

donde D_{xxm}^{eq} es el *radio medio geométrico modificado*, cuya única diferencia con el *radio medio geométrico* D_{xx}^{eq} , ya definido en el estudio de la inductancia, es que los factores d_{ii} son ahora iguales a r_i (y no a r'_i).

Así pues, se puede escribir directamente el valor de la capacidad por fase como:

$$C_{\text{fase}} = \frac{Q_{\text{fase}}}{V_{\text{fase}}} = \frac{2\pi\epsilon_0}{\ln \frac{D_{xy}^{\text{eq}}}{D_{xxm}^{\text{eq}}}} \quad (2.18)$$

Ejemplo 2.4:

Se va a calcular la capacidad por fase de la línea del ejemplo 2.3, aplicando directamente la expresión (2.18).

La distancia media geométrica equivalente entre fases D_{xy}^{eq} coincide con la ya calculada para la inductancia siendo igual a 6.109 metros. Por el contrario, el radio medio geométrico modificado D_{xxm}^{eq} debe ser calculado, de la misma forma que D_{xx}^{eq} con la única diferencia de utilizar el radio real r de los conductores en vez de r_{mg} . Según esto, se tendrá que:

$$D_{xxm}^{\text{eq}} = \sqrt[3]{D_{aa_m} D_{bb_m} D_{cc_m}}$$

Los radios medios geométricos modificados para cada fase se obtienen como sigue:

$$D_{aa_m} = D_{cc_m} = \sqrt{d_{aa_m} d_{aa'}} = \sqrt{\sqrt{r \cdot d} \cdot d_{aa'}} = 0,752 \text{ m}$$

$$D_{bb_m} = \sqrt{d_{bb_m} d_{bb'}} = \sqrt{\sqrt{r \cdot d} \cdot d_{bb'}} = 0,735 \text{ m}$$

Por tanto, $D_{xxm}^{\text{eq}} = 0,746 \text{ m}$ y la capacidad por fase vale:

$$C_{\text{fase}} = \frac{2\pi\epsilon_0}{\ln \frac{D_{xy}^{\text{eq}}}{D_{xxm}^{\text{eq}}}} = 26,44 \text{ nF/km}$$

Pérdidas de aislamiento y efecto corona

Además de las corrientes de naturaleza capacitiva que circulan a tierra y en paralelo con ellas, pueden existir fugas de corriente a través de los aisladores y del aire y que, principalmente, son de dos tipos: pérdidas de aislamiento y pérdidas por efecto corona.

Los elementos que realizan la tarea de unir los conductores de una línea a sus apoyos, manteniéndolos al mismo tiempo eléctricamente separados, son los aisladores. Si los aisladores fuesen ideales, su resistencia eléctrica sería infinita y no sería posible el paso de corriente a través de ellos. Sin embargo, la resistencia de aislamiento, aunque muy elevada, tiene en realidad un valor finito y, por tanto, existirá una cierta circulación de intensidad entre los conductores y tierra. Dicha resistencia de aislamiento se suele expresar en forma de una conductancia de valor:

$$G = \frac{I_p}{V}$$

donde I_p es la intensidad de fuga y V la tensión entre el conductor y tierra.

Esta intensidad de fuga está en fase con la tensión y por tanto provoca pérdidas de potencia activa definidas por:

$$P_g = G \cdot V^2$$

La *conductancia de aislamiento* varía mucho en función de factores tales como la humedad del ambiente, la suciedad de los aisladores, el número de ellos, etc., y siendo en la mayoría de los casos despreciable.

El otro fenómeno es el *efecto corona* que consiste en la ionización del aire que rodea a los conductores de una línea de alta tensión. Este fenómeno se produce cuando un conductor adquiere un potencial lo suficientemente elevado, como para que el campo eléctrico en su superficie supere el valor de la rigidez dieléctrica del aire. Si los conductores están próximos entre sí, podría establecerse un arco entre ellos con el consiguiente defecto de aislamiento, pero si las distancias son elevadas, como ocurre en el caso de líneas aéreas, es difícil que llegue a producirse, y en ese caso la descarga tiene lugar sólo en las proximidades de cada conductor. Al igual que en el caso anterior, las pérdidas por *efecto corona* son de potencia activa.

Se denomina *tensión crítica disruptiva* o umbral a la tensión en que se inicia el fenómeno, aunque éste no sea visible. Esta *tensión crítica disruptiva* se corresponde con aquella en la que el gradiente en la superficie del conductor iguala a la rigidez dieléctrica del aire. El efecto corona se manifiesta en forma de crepitación sonora, perturbaciones radioeléctricas y con un halo luminoso visible en la oscuridad.

El valor de la rigidez dieléctrica o campo eléctrico crítico para el cual el aire pierde sus condiciones aislantes, varía enormemente en función de las condiciones atmosféricas de humedad y presión, siendo aproximadamente de 30 kV/cm (valor de pico) en condiciones de aire seco a presión de 1 at. En otras condiciones de presión y temperatura, dicho valor crítico debe ser modificado mediante un factor corrector δ [3], es decir:

$$E_{cr} = 30 \cdot \delta$$

donde $\delta = \frac{3,921 \cdot h}{273 + \theta}$ y siendo h la presión barométrica en centímetros de Hg y θ la temperatura en °C.

Si se analiza el caso de una línea trifásica con un único conductor por fase, podemos obtener el valor del campo eléctrico en la superficie de cada conductor (de radio r), considerando únicamente la carga propia de cada uno y, por tanto, despreciando el efecto de los demás, según:

$$E = \frac{Q}{2\pi\epsilon_0 r} = \frac{C \cdot V}{2\pi\epsilon_0 r}$$

donde C es la capacidad por fase de la línea y V el valor de la tensión de fase.

La tensión crítica V_{cr} de fase a partir de la cual se produce efecto corona será aquella para la cual se alcanza el campo eléctrico crítico E_{cr} , es decir:

$$V_{cr} = \frac{2\pi\epsilon_0 r E_{cr}}{C} = E_{cr} \cdot r \cdot \ln \frac{D}{r}$$

donde D es la distancia media geométrica entre fases. Si como es habitual, consideramos que V_{cr} es tensión de fase en valor eficaz, debemos utilizar un valor de $E_{cr} = 30 \cdot \delta / \sqrt{2}$ kV/cm, y trabajar con r y D en centímetros.

Si la línea tiene sus fases constituidas por dos o más conductores agrupados en haces, el campo eléctrico en cada conductor es menor, si tenemos en cuenta que la carga de cada fase se reparte entre ellos.

En una agrupación de dos conductores (dúplex) separados una distancia d (pequeña en comparación con la distancia entre distintas fases), el valor máximo del campo eléctrico en cada uno será la resultante de los campos debidos a ambos:

$$E = \frac{Q/2}{2\pi\epsilon_0 r} + \frac{Q/2}{2\pi\epsilon_0 d} = \frac{C \cdot V/2}{2\pi\epsilon_0 r} \left(1 + \frac{r}{d}\right)$$

Teniendo en cuenta que $r \ll d$ se observa como el campo eléctrico para una agrupación dúplex es prácticamente la mitad que para un conductor solo. Similar desarrollo podría hacerse para tres o más conductores obteniéndose mayores reducciones del campo eléctrico y, por tanto, del *efecto corona*.

2.3.2. Cables aislados

Existen algunas diferencias en el tratamiento de los cables aislados frente a las líneas aéreas que resumiremos en este apartado.

Los cables eléctricos aislados están constituidos por al menos dos componentes: el elemento conductor y el aislamiento.

El elemento conductor es la parte fundamental del cable ya que es por donde circula la energía eléctrica. Los materiales utilizados habitualmente en cables como elemento conductor son el cobre y el aluminio. La utilización del aluminio implica mayores secciones debido a su peor conductividad eléctrica aunque su peso es menor.

El elemento aislante previene contra el contacto directo entre el conductor y cualquier otro objeto, todo ello permitiendo la adecuada disipación del calor que se produce en el conductor por el paso de la corriente. Un buen material aislante debe ofrecer una elevada resistencia al paso de la corriente y ser capaz de soportar los esfuerzos dieléctricos a que se ve sometido. Los materiales más utilizados para el aislamiento de cables son a base de polímeros sintéticos: termoplásticos, elastómeros o gomas, siliconas...

Además de los mencionados elementos, pueden existir componentes adicionales destinados a proporcionar protección de tipo mecánico, químico o electromagnético en forma de capas concéntricas dispuestas sucesivamente sobre el aislamiento. Son las pantallas, armaduras y cubiertas.

Para tensiones superiores a 1 kV, los cables suelen estar apantallados. La finalidad de la pantalla es confinar el campo eléctrico al interior del cable, logrando una distribución

simétrica y radial del esfuerzo dieléctrico en el aislamiento, así como evitar o reducir la posibilidad de contactos peligrosos. Para ello, las pantallas deben estar conectadas a tierra en algún punto. El apantallamiento se consigue con una capa conductora (cintas o hilos de cobre o aluminio) aplicada sobre cada conductor.

La armadura protege al cable frente a esfuerzos mecánicos externos y habitualmente está construida con metales duros como el acero.

Por último, el cable suele estar recubierto externamente por una capa destinada a protegerlo contra la corrosión y otros agentes atmosféricos o químicos. Típicamente estará constituida por algún material sintético (termoplástico, elastómero...).

Campo eléctrico

Uno de los parámetros a tener en cuenta en el diseño de un cable aislado es el valor del campo eléctrico existente en su interior y que genera esfuerzos dieléctricos en el material aislante que rodea a los conductores.

Así como las condiciones ambientales externas son importantes en la elección de la cubierta y de la armadura, los esfuerzos dieléctricos son un factor decisivo en la selección y dimensionamiento del aislamiento y del tipo de apantallamiento.

El material que conforma el aislamiento del cable tiene una rigidez dieléctrica que si es superada en algún punto provocará su ruptura dieléctrica y su consiguiente deterioro. Para prevenir este fenómeno, el cable debe trabajar en unas condiciones tales que el máximo gradiente de potencial (que se produce en la superficie del conductor) nunca supere la rigidez dieléctrica del aislante.

En un cable unipolar, el campo eléctrico existente entre el conductor y la envoltura metálica o pantalla es de tipo radial. Lo mismo puede decirse en el caso de cables multipolares, donde cada uno de los conductores está rodeado por una envoltura metálica o pantalla individualmente. En este caso, en la zona del cable que queda entre los diferentes conductores el campo eléctrico será nulo.

Sin embargo, existen cables de tipo multipolar con una única envoltura metálica o pantalla, que recubre a todos los conductores al mismo tiempo. En estos cables el campo eléctrico ya no es radial y las líneas del campo presentan formas irregulares, en consecuencia, los materiales de relleno entre los diferentes conductores están sometidos a esfuerzos dieléctricos, para los que están menos preparados. Esto limita la utilización de este tipo de cables a tensiones más reducidas (<15 kV).

El campo eléctrico radial de un cable unipolar (o el de cada conductor de un cable tripolar con tres pantallas) es un problema cuya solución es bien conocida. Suponiendo un conductor cilíndrico infinitamente largo con una carga Q por unidad de longitud, y rodeado por una capa de material aislante con constante dieléctrica ϵ^5 , el valor del campo eléctrico o gradiente de potencial en un punto cualquiera del aislante que dista x del centro del conductor viene dado por:

$$\mathcal{E}_x = \frac{Q}{2\pi\epsilon x} \text{ V/m}$$

⁵ $\epsilon = \epsilon_r \cdot \epsilon_0$, donde ϵ_r para los materiales aislantes habituales adopta valores entre 2 y 5.

Dado que la diferencia de potencial entre dos puntos viene dada por la circulación del campo eléctrico entre ellos, en el caso del cable unipolar que estamos estudiando, la diferencia de potencial entre el conductor y la pantalla o cubierta metálica será:

$$\mathcal{V} = \int_r^R \mathcal{E}_x \cdot dx = \frac{Q}{2\pi\epsilon} \ln \frac{R}{r}$$

donde r es el radio del conductor (radio interior de la capa aislante) y R el radio exterior de la capa aislante.

De las anteriores dos expresiones, se concluye que:

$$\mathcal{E}_x = \frac{\mathcal{V}}{x \ln \frac{R}{r}}$$

y por tanto el campo eléctrico máximo se tendrá en la superficie del conductor (es decir, cuando $x = r$) y en valor eficaz vale:

$$E_{\text{máx}} = \frac{V}{r \ln \frac{R}{r}}$$

En general, la pantalla o cubierta metálica estará puesta a tierra y por tanto V coincidirá con el valor eficaz de la tensión de trabajo del conductor (tensión de fase en un sistema trifásico).

A partir de la expresión del potencial podemos calcular la capacidad por unidad de longitud para el cable aislado de campo radial, como la relación entre la carga y la diferencia de potencial:

$$C = \frac{Q}{\mathcal{V}} = \frac{2\pi\epsilon}{\ln \frac{R}{r}} \text{ F/m}$$

El estudio del campo eléctrico en un cable tripolar con una única carcasa metálica o pantalla no es tan sencillo como el caso anterior. Como ya se ha dicho, en estas condiciones el campo no es radial con lo que el estudio se complica enormemente. Por ello, en este tipo de cables es conveniente obtener las diferentes capacidades a partir de medidas directas. En este caso, se distinguen seis capacidades entre los conductores y la pantalla, tal y como se muestra en la Figura 2.11. Si los conductores están dispuestos de forma totalmente simétrica, las seis capacidades se reducen a dos únicos valores distintos: entre cada conductor y la pantalla existe una capacidad C_1 y entre cada dos conductores otra capacidad C_2 .

Estas dos capacidades pueden ser obtenidas mediante la realización de los correspondientes ensayos. Una vez conocidas las capacidades C_1 y C_2 , se calcula la capacidad por fase del cable trifásico convirtiendo el triángulo de capacidades a la estrella equivalente (Figura 2.11). Como el punto neutro de la estrella está al mismo potencial que la pantalla (potencial cero), la capacidad a neutro para cada conductor o capacidad por fase será el paralelo de C_1 y $3C_2$, es decir:

$$C_{\text{fase}} = C_1 + 3C_2$$

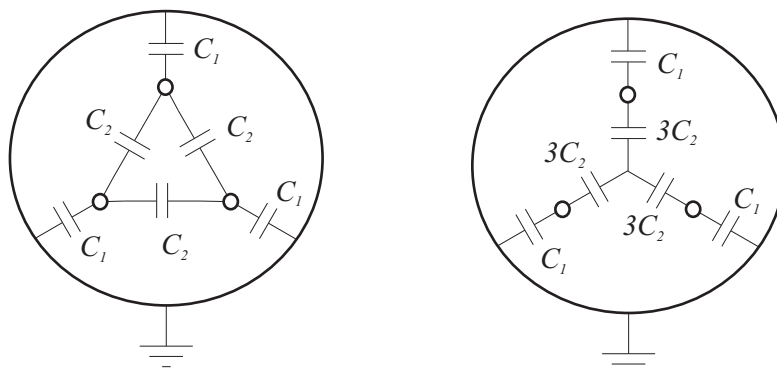


Figura 2.11. Capacidades en un cable tripolar de campo no radial.

Corrientes y tensiones inducidas en las pantallas

Cuando por un cable unipolar circula una corriente alterna se genera un campo magnético variable de la misma frecuencia. Este campo magnético, al enlazar a la pantalla o cubierta metálica, da lugar a la aparición de potenciales inducidos en ella. Estos potenciales inducidos, en determinadas condiciones, provocarán la circulación de corrientes y las consiguientes pérdidas de energía.

El potencial \mathcal{V}_p inducido por el conductor en la pantalla, vendrá dado por:

$$\mathcal{V}_p = \mathcal{I} \cdot j\omega M$$

donde \mathcal{I} es la corriente que circula por el conductor y M el coeficiente de inductancia mutua entre el conductor y la pantalla. Para un sistema trifásico constituido por tres cables unipolares individuales, cada uno de ellos con su pantalla, y siguiendo un razonamiento similar al utilizado en la obtención de la inductancia por fase (considerando ahora, además de los tres conductores de fase, los tres conductores adicionales —pantallas—) se obtiene la siguiente expresión para el coeficiente mutuo de inducción:

$$M = \frac{\mu_0}{2\pi} \ln \frac{D_{xy}}{r_p}$$

donde r_p es el radio medio de la capa de apantallamiento y D_{xy} la distancia media geométrica entre las tres fases.

Si la pantalla está puesta a tierra en un solo extremo, la tensión \mathcal{V}_p aparecerá en el extremo abierto y no habrá circulación de corrientes por ella. En cambio, si está conectada a tierra en ambos extremos, entonces circulará por ella una intensidad \mathcal{I}_p . En este caso, en el conductor principal o de fase, se produce una caída de tensión $\Delta\mathcal{V}$ dada por:

$$\Delta\mathcal{V} = \mathcal{I} \cdot (R + j\omega L) + \mathcal{I}_p \cdot j\omega M$$

donde R y L son la resistencia e inductancia propia de dicho conductor.

Como en la pantalla la caída de tensión será nula, se cumple la siguiente ecuación:

$$0 = \mathcal{I}_p \cdot (R_p + j\omega L_p) + \mathcal{I} \cdot j\omega M$$

donde R_p y L_p son la resistencia e inductancia de la pantalla, cumpliéndose que L_p es aproximadamente igual a M .

Eliminando \mathcal{I}_p en las anteriores ecuaciones, resulta

$$\Delta\mathcal{U} = \mathcal{I} \cdot (R + j\omega L) + \frac{\mathcal{I} \cdot \omega^2 M^2}{(R_p + j\omega M)}$$

y por tanto se puede definir una nueva impedancia por fase dada por:

$$\mathcal{Z} = \frac{\Delta\mathcal{U}}{\mathcal{I}} = (R + \Delta R + j\omega(L + \Delta L))$$

donde

$$\Delta R = R_p \cdot \frac{\omega^2 M^2}{R_p^2 + \omega^2 M^2} \quad \text{y} \quad \Delta L = -M \cdot \frac{\omega^2 M^2}{R_p^2 + \omega^2 M^2}$$

En consecuencia, la circulación de corriente por la pantalla equivale a un incremento de valor ΔR en la resistencia efectiva del conductor y a una disminución de valor ΔL en la inductancia.

En la práctica, es habitual que las cubiertas metálicas y las pantallas de los cables estén unidas a tierra en ambos extremos, cerrando un circuito que permite la circulación de corrientes a través de ellas. Esto crea, como se ha visto, unas pérdidas adicionales (debidas a ΔR) y por tanto una reducción efectiva en la capacidad de carga del sistema en comparación con su capacidad en corriente continua. Si por razones económicas o técnicas estas pérdidas deben ser eliminadas, se puede poner a tierra únicamente un extremo de las pantallas, teniendo en cuenta que en ese caso, los potenciales inducidos aparecerán directamente en el otro extremo. Debe ponerse especial cuidado con los potenciales que se pueden inducir transitoriamente durante maniobras o faltas.

Una manera de reducir las pérdidas y la aparición de valores elevados de tensión inducida consiste en la transposición de las pantallas. El efecto que se obtiene es sumar las tensiones inducidas en las tres secciones y en caso de cargas equilibradas dicha suma será cero.

Pérdidas en el dieléctrico

Como se ha visto anteriormente, el conjunto formado por el conductor y la pantalla o cubierta metálica de un cable aislado, constituyen un condensador cilíndrico. Si el material aislante que separa ambos electrodos fuese ideal, la corriente circulante sería exclusivamente capacitiva (desfasada 90° con la tensión) y no existirían pérdidas. Sin embargo, en los aislantes reales dicha corriente tiene una pequeña componente en fase con la tensión y por tanto se producen pérdidas en forma de calor, que se denominan *pérdidas dieléctricas*. Estas pérdidas se deben, entre otros factores, a las corrientes de fuga y a las corrientes de polarización (histéresis dieléctrica).

El comportamiento del condensador incluyendo las pérdidas se puede representar mediante la combinación en paralelo de una capacidad y una resistencia, tal y como se muestra en la Figura 2.12, donde las pérdidas se producen en el elemento resistivo y, por tanto, valen:

$$P_\varepsilon = \frac{V^2}{R} = V^2 \omega C \operatorname{tg} \delta$$

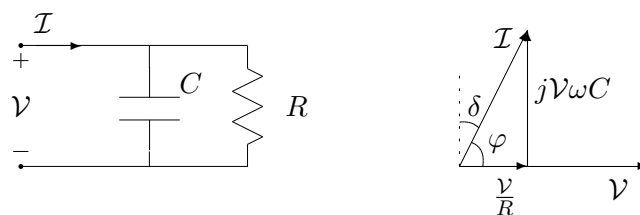


Figura 2.12. Modelo eléctrico de un dieléctrico.

donde V es la tensión de trabajo (tensión de fase en un sistema trifásico) y δ el denominado *ángulo de pérdidas dieléctricas*, que para dieléctricos normales debe tener un valor muy pequeño. Expresándolo en radianes, se pueden hacer las aproximaciones $\delta \approx \text{tg}\delta \approx \text{sen}\delta = \text{cos}\phi$.

2.3.3. Modelos de líneas en régimen estacionario sinusoidal

El funcionamiento de una línea eléctrica viene caracterizado por los cuatro parámetros fundamentales ya definidos en apartados anteriores y que se encuentran distribuidos a lo largo de toda su longitud: resistencia, inductancia, capacidad y conductancia. Los dos parámetros serie (resistencia e inductancia) constituyen la denominada impedancia serie de la línea, que en una línea trifásica se puede expresar mediante una matriz de impedancias propias de cada fase y mutuas entre cada dos fases. Asimismo, los parámetros paralelo (capacidad y conductancia) son agrupados en una matriz de admitancias propias y mutuas. Sin embargo, en este apartado se considerará que las líneas trifásicas son equilibradas, lo que permite analizarlas mediante un circuito monofásico equivalente más simple. En determinados casos (estudios de armónicos, desequilibrios, etc.) puede no ser posible o conveniente hacer tal suposición, en cuyo caso será necesario recurrir a modelos trifásicos más completos.

Dado que los parámetros característicos de una línea eléctrica se encuentran uniformemente distribuidos a lo largo de toda su longitud, una representación adecuada de la línea debería estar constituida por una sucesión de infinitos elementos de longitud dx , como se muestra en la Figura 2.13, donde R , L , C y G son los parámetros de la línea por unidad de longitud.

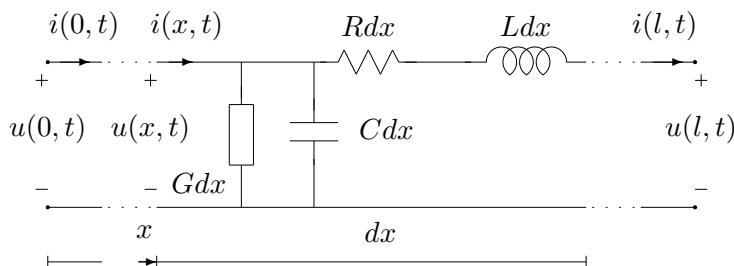


Figura 2.13. Circuito con parámetros distribuidos de una línea monofásica.

La tensión y la corriente a lo largo de la línea son funciones del tiempo t y del espacio x , y se expresan por $u(x, t)$ e $i(x, t)$, donde la variable espacial x representa la distancia al origen de la línea y siendo l la longitud total.

De este modo, en el elemento diferencial de longitud dx , se produce una variación en la tensión $u(x, t)$ debida a la caída resistiva e inductiva en $R \cdot dx$ y $L \cdot dx$ que se puede expresar como:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = - \left(Ri + L \frac{\partial i}{\partial t} \right) \quad (2.19)$$

donde el signo negativo indica que la tensión disminuye al aumentar x según las referencias para las tensiones y corrientes que se indican en la Figura 2.13.

De la misma forma, se produce una variación en la corriente como resultado de las intensidades que circulan a través de los elementos paralelo, que se puede expresar de la siguiente forma:

$$\frac{\partial i}{\partial x} = - \left(Gu + C \frac{\partial u}{\partial t} \right) \quad (2.20)$$

El sistema formado por las dos ecuaciones diferenciales en derivadas parciales (2.19) y (2.20) representa matemáticamente el comportamiento de las intensidades y tensiones en las líneas eléctricas. En este capítulo se aborda únicamente su resolución en condiciones de funcionamiento en régimen estacionario sinusoidal, de forma que la tensión y la intensidad se definen por:

$$u(x, t) = \Re(\mathcal{U}(x) \cdot e^{j\omega t}) \quad ; \quad i(x, t) = \Re(\mathcal{I}(x) \cdot e^{j\omega t})$$

donde $\mathcal{U}(x)$ e $\mathcal{I}(x)$ son respectivamente los fasores tensión e intensidad, que dependen únicamente del espacio (para simplificar se denominarán a partir de ahora \mathcal{U}_x e \mathcal{I}_x) y ω la pulsación de las ondas sinusoidales de la tensión y de la intensidad.

De esta forma, las ecuaciones que rigen el comportamiento de la línea eléctrica de parámetros distribuidos quedan de la siguiente forma:

$$\frac{d\mathcal{U}_x}{dx} = -z \cdot \mathcal{I}_x \quad ; \quad \frac{d\mathcal{I}_x}{dx} = -y \cdot \mathcal{U}_x \quad (2.21)$$

que constituyen un sistema de dos ecuaciones diferenciales donde z e y son la impedancia serie y la admitancia paralelo respectivamente, ambas por unidad de longitud, y que vienen dadas por:

$$z = R + j\omega L \quad (\Omega/\text{m}) \quad ; \quad y = G + j\omega C \quad (\text{S}/\text{m})$$

Derivando de nuevo cada una de las ecuaciones (2.21) y sustituyendo, se obtienen dos ecuaciones diferenciales independientes con solución conocida en forma de suma de exponenciales. Considerando como condiciones de contorno la tensión y la corriente en el origen de la línea (\mathcal{U}_0 e \mathcal{I}_0), tales soluciones se pueden expresar de una forma compacta a base de funciones hiperbólicas, que matricialmente se pueden escribir como sigue:

$$\begin{pmatrix} \mathcal{U}_x \\ \mathcal{I}_x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cosh(\gamma x) & -\mathcal{Z}_c \sinh(\gamma x) \\ -\frac{1}{\mathcal{Z}_c} \sinh(\gamma x) & \cosh(\gamma x) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \mathcal{U}_0 \\ \mathcal{I}_0 \end{pmatrix} \quad (2.22)$$

donde $\mathcal{Z}_c = \sqrt{z/y}$ es la denominada *impedancia característica o natural* de la línea (con dimensión de Ω) y $\gamma = \sqrt{zy}$ es la *constante de propagación* (con dimensión de m^{-1}). La parte

real de γ se conoce como *constante de atenuación* y la parte imaginaria como *constante de fase o distorsión*.

Invirtiendo la relación (2.22) y considerando únicamente los extremos de la línea ($x = 0$ y $x = l$), se obtiene la expresión que relaciona las tensiones e intensidades en los extremos de la línea:

$$\begin{pmatrix} \mathcal{U}_0 \\ \mathcal{I}_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathcal{A} & \mathcal{B} \\ \mathcal{C} & \mathcal{D} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \mathcal{U}_l \\ \mathcal{I}_l \end{pmatrix} \quad (2.23)$$

donde \mathcal{U}_l , \mathcal{I}_l son la tensión y la intensidad en el final de la línea ($x = l$) y siendo los coeficientes \mathcal{A} , \mathcal{B} , \mathcal{C} y \mathcal{D} :

$$\mathcal{A} = \mathcal{D} = \cosh(\gamma l) \quad ; \quad \mathcal{B} = \mathcal{Z}_c \sinh(\gamma l) \quad ; \quad \mathcal{C} = \frac{1}{\mathcal{Z}_c} \sinh(\gamma l)$$

Si cerramos la línea en su extremo final con una impedancia igual a \mathcal{Z}_c , se cumple que:

$$\mathcal{U}_l = \mathcal{Z}_c \cdot \mathcal{I}_l$$

y, en estas condiciones, la potencia que se transporta se llama *potencia característica o natural* de la línea y se expresa por:

$$S_c = \frac{U_l^2}{Z_c}$$

Si analizamos el comportamiento de una línea ideal (sin pérdidas) mediante las ecuaciones (2.22) escritas en forma exponencial, se extraen fácilmente algunas conclusiones interesantes acerca de la variación de las tensiones a lo largo de la línea:

- Trabajando en régimen natural, esto es, con una carga igual a la característica, el perfil de tensiones es plano, es decir, la tensión tiene un valor constante a lo largo de toda la línea.
- Con cargas mayores que la característica ($Z_l < Z_c$) la tensión va disminuyendo a lo largo de la línea, desde el origen hasta el final. El caso extremo sería el de cortocircuito donde $U_l = 0$.
- Para cargas menores que la característica ($Z_l > Z_c$) se produce una elevación de tensión a medida que se avanza desde el origen hasta el final (*efecto Ferranti*).

Así pues, el régimen natural de una línea da una idea de las condiciones más idóneas de funcionamiento aunque no supone ningún límite de potencia o estabilidad.

Circuito equivalente de la línea con parámetros distribuidos

A partir de las ecuaciones (2.23) y por transformaciones matemáticas se obtiene el modelo π equivalente de la Figura 2.14, donde la impedancia serie \mathcal{Z}_π y las admitancias paralelo \mathcal{Y}_π son:

$$\mathcal{Z}_\pi = \mathcal{Z}_c \cdot \sinh(\gamma l) \quad ; \quad \mathcal{Y}_\pi = \frac{1}{\mathcal{Z}_c} \cdot \operatorname{tgh}\left(\frac{\gamma l}{2}\right)$$

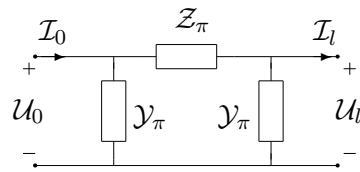


Figura 2.14. Modelo π de una línea de parámetros distribuidos.

Líneas cortas

Tanto la función $\sinh(x)$ como la $\operatorname{tgh}(x)$ tienen la propiedad de que su valor puede ser aproximado por su argumento x , cuando dicho argumento es lo suficientemente pequeño. El error cometido con dicha aproximación se va reduciendo a medida que disminuye el argumento. Así, para argumentos inferiores a 0,1 el error cometido al aproximar dichas funciones por su argumento es inferior al 1 %.

En los modelos de líneas que se están analizando, los argumentos involucrados son los definidos por γl y $\gamma l/2$. Para determinar el orden de magnitud de tales valores, se supone que la línea es ideal (es decir, sin pérdidas). En ese caso la constante de propagación γ toma el valor: $\gamma = \sqrt{z \cdot y} = j\omega\sqrt{LC}$. Y de aplicar las expresiones de la inductancia L y de la capacidad C , definidas en el apartado 2.3, resulta:

$$\gamma \approx j\omega\sqrt{\mu_0\varepsilon_0} = 0,0011047 \quad (\text{km}^{-1}) \quad (2.24)$$

donde $\sqrt{\mu_0\varepsilon_0}$ es la inversa de la velocidad de la luz en el vacío y $\omega = 2\pi 50$.

Esto significa que para líneas de longitudes inferiores a 200 km ($\gamma l < j0,23$), pueden adoptarse las simplificaciones siguientes, sin incurrir en errores significativos:

$$\sinh(\gamma l) \approx \gamma l \quad ; \quad \operatorname{tgh}\left(\frac{\gamma l}{2}\right) \approx \frac{\gamma l}{2}$$

Según esto, los elementos del circuito equivalente π quedan definidos como en un modelo de parámetros concentrados por:

$$Z_\pi \approx Z_c \cdot \gamma l = z \cdot l = Z \quad ; \quad Y_\pi \approx \frac{1}{Z_c} \cdot \frac{\gamma l}{2} = \frac{y \cdot l}{2} = \frac{Y}{2}$$

donde Z e Y son la impedancia y admitancia totales de la línea. Además, considerando que la conductancia G suele ser despreciable, es habitual hacer la aproximación $Y = j\omega C$.

En el caso de líneas muy cortas (< 50 km), la corriente transversal que circula a través de la admitancia paralelo de la línea suele ser despreciable, quedando reducido el circuito equivalente a una impedancia en serie. Un circuito serie más simplificado, de utilidad en el análisis de redes, se obtiene despreciando la resistencia de la línea, quedando tal y como se muestra en la Figura 2.15.

2.3.4. Condiciones de funcionamiento de las líneas eléctricas

La función de una línea eléctrica es el transporte de la energía eléctrica entre dos puntos y por razones económicas obvias, interesa que cada línea sea capaz de transportar la máxima

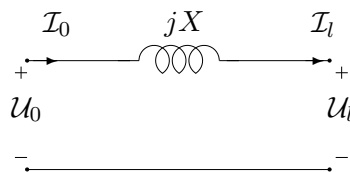


Figura 2.15. Modelo serie de una línea monofásica.

energía posible en condiciones adecuadas para el consumo. Este valor máximo está limitado por una serie de factores, siendo los más evidentes los límites tecnológicos de los propios elementos que conforman la línea, esto es:

- La intensidad en cualquier punto de la línea no puede superar la corriente máxima admisible por los conductores (límite térmico): $I < I_{\text{máx}}$.
- La tensión en todos los puntos debe mantenerse dentro de unos márgenes, que eviten defectos de aislamiento y para ofrecer al abonado un valor de tensión que permita el correcto funcionamiento de los equipos alimentados: $U_{\text{mín}} < U < U_{\text{máx}}$.

Además de los anteriores límites, el funcionamiento de la línea está condicionado por las características propias de la red en la que está inmersa, y estos límites se definen a partir de las condiciones de la carga que alimenta la línea. En este apartado, a partir de los modelos que se han descrito, se van a establecer algunas relaciones de interés en el análisis del comportamiento estacionario de las líneas.

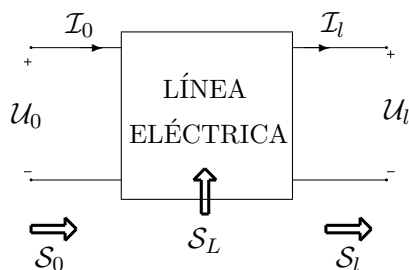


Figura 2.16. Potencias en una línea eléctrica.

En las líneas pueden distinguirse tres potencias (véase Figura 2.16): potencia de entrada a la línea (S_0), potencia entregada a la carga (S_l) y potencia consumida en la línea (S_L). En este sentido, habitualmente se considera que cuando se habla de potencia de la línea se refiere a la potencia entregada a la carga. La parte real P_L de la potencia consumida en la línea representa las pérdidas.

Las potencias mencionadas se obtienen a partir de las siguientes expresiones:

$$S_l = P_l + jQ_l = U_l \cdot I_l^* \quad (2.25)$$

$$S_0 = P_0 + jQ_0 = U_0 \cdot I_0^* \quad (2.26)$$

$$S_L = P_L + jQ_L = S_0 - S_l \quad (2.27)$$

Aplicando las ecuaciones de transmisión de la línea de parámetros distribuidos para expresar las corrientes en función de las tensiones $\mathcal{U}_l = U_l|_{0^\circ}$ y $\mathcal{U}_0 = U_0|\delta$, podemos escribir las anteriores expresiones de las potencias de una forma más práctica. Por ejemplo, las potencias activa y reactiva entregadas por la línea a la carga quedan como sigue:

$$P_l = \frac{U_l U_0}{B} \cos(\beta - \delta) - \frac{A U_l^2}{B} \cos(\beta - \alpha)$$

$$Q_l = \frac{U_l U_0}{B} \operatorname{sen}(\beta - \delta) - \frac{A U_l^2}{B} \operatorname{sen}(\beta - \alpha)$$

donde $\mathcal{A} = A|_\alpha$ y $\mathcal{B} = B|_\beta$.

Si utilizamos el modelo π de parámetros concentrados (con $G = 0$), las ecuaciones de P_l y Q_l serían las siguientes:

$$P_l = \frac{U_l U_0}{Z} \cos(\beta - \delta) - \frac{U_l^2}{Z} \cos(\beta) \quad (2.28)$$

$$Q_l = \frac{U_l U_0}{Z} \operatorname{sen}(\beta - \delta) - \frac{U_l^2}{Z} \operatorname{sen}(\beta) + \frac{\omega C U_l^2}{2} \quad (2.29)$$

donde $\mathcal{Z} = Z|_\beta$. Para el modelo serie ($\mathcal{Z} = jX$), las anteriores igualdades se simplifican, resultando:

$$P_l = \frac{U_l U_0}{X} \operatorname{sen}(\delta) \quad ; \quad Q_l = \frac{U_l U_0}{X} \cos(\delta) - \frac{U_l^2}{X}$$

De la misma forma, pueden obtenerse unas expresiones similares para \mathcal{S}_0 .

En base a las potencias que circulan por la línea, se puede definir su rendimiento η como la relación entre la potencia activa que se entrega a la carga y la de entrada en la línea, siendo, en porcentaje:

$$\eta = \frac{P_l}{P_0} \times 100 = \frac{P_l}{P_l + P_L} \times 100$$

Otra relación de interés práctico es la caída de tensión en una línea, que se calcula como la diferencia de tensiones (en módulo) entre los extremos y que, normalmente, se expresa en valores porcentuales relativos a una tensión determinada que suele ser la nominal:

$$\Delta U = \frac{U_0 - U_l}{U_n} \times 100$$

2.3.5. Líneas alimentando a distintos modelos de cargas

Las condiciones de funcionamiento de las líneas eléctricas, y por tanto sus límites se establecen según el tipo de carga que alimente. Así, a las ecuaciones descritas se deben añadir las debidas a los consumos que en este estudio estacionario se modelan por una impedancia, una fuente de potencia o por una fuente de tensión. En este apartado, serán analizados los tres casos, utilizando el modelo π de la línea (con $G = 0$) por ser, en la práctica, el más usual.

Línea alimentando a una impedancia

Supongamos que la línea está alimentando en su extremo final una impedancia de valor Z_l , tal y como se muestra en la Figura 2.17.a.

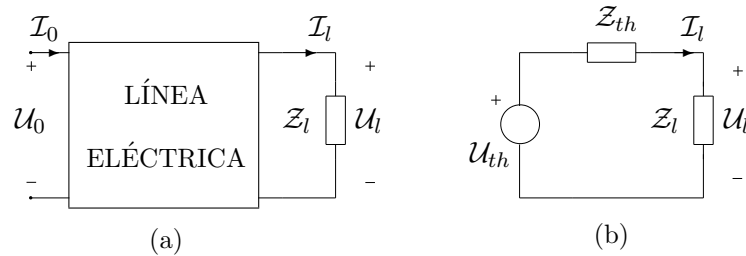


Figura 2.17. Línea con una carga modelada por impedancia.

A partir del circuito π de la línea, se puede obtener su equivalente Thevenin (Figura 2.17.b), donde:

$$U_{th} = \frac{2U_0}{2 + j\omega C(R + jX)} \quad ; \quad Z_{th} = \frac{2(R + jX)}{2 + j\omega C(R + jX)}$$

Si se conoce como dato de partida el valor de la tensión en el origen U_0 , se pueden calcular I_l y U_l como:

$$I_l = \frac{U_{th}}{Z_{th} + Z_l} \quad ; \quad U_l = I_l \cdot Z_l = \frac{U_{th} \cdot Z_l}{Z_{th} + Z_l} \quad (2.30)$$

Y la potencia compleja $P_l + jQ_l$ entregada a la carga vale:

$$P_l + jQ_l = U_l \cdot I_l^* = I_l^2 \cdot Z_l$$

De las ecuaciones anteriores, si se admite cualquier tensión en la carga, se observa que el límite de funcionamiento de la línea se presenta para $I_l \leq I_{m\acute{a}x}$, donde $I_{m\acute{a}x}$ es el límite térmico de los conductores. En caso contrario, si existe un límite de tensión en la carga, se necesita determinar la condición más desfavorable.

Una condición que tiene un interés teórico en las líneas eléctricas es el cálculo de la máxima potencia activa $P_{m\acute{a}x}$ que la línea puede entregar a la carga. Para ello se aplica el teorema de máxima transferencia de potencia, que establece que aquella se consigue cuando la impedancia Z_l es igual a Z_{th}^* . En estas condiciones se comprueba que la potencia entregada a la carga tiene el mismo valor que las pérdidas en la línea y que la tensión es muy reducida. En consecuencia, la situación de máxima transferencia de potencia no es adecuada para la explotación de líneas de energía eléctrica.

Línea alimentando a un consumo de potencia constante

Otra carga que se puede considerar en las líneas es una fuente de potencia de valor $P_l + jQ_l$, tal y como se muestra en la Figura 2.18.

La característica no lineal de la carga impone la existencia de relaciones no lineales entre las variables del conjunto línea-carga, relaciones que vienen dadas por las ecuaciones de potencias (2.28) y (2.29). A partir de dichas ecuaciones, supuesta conocida la tensión U_0 en el origen de la línea, las condiciones de funcionamiento se plantean a través del sistema no lineal de las dos ecuaciones de P_l y Q_l , con las dos incógnitas δ y U_l .

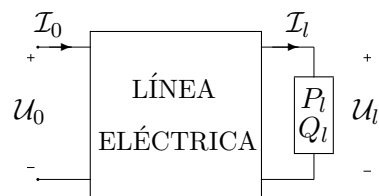


Figura 2.18. Línea con carga modelada por fuente de potencia.

Para determinar la solución del sistema no lineal se elimina, en primer lugar, la incógnita δ mediante la igualdad trigonométrica $\cos^2(\alpha) + \sin^2(\alpha) = 1$. De este modo, resulta una ecuación bicuadrática de la forma:

$$a \cdot U_l^4 + b \cdot U_l^2 + c = 0$$

donde los coeficientes a , b y c de la ecuación valen:

$$a = \frac{1}{Z^2} - \frac{C\omega \cdot \sin(\beta)}{Z} + \frac{C^2 \cdot \omega^2}{4}$$

$$b = \frac{2P_l}{Z} \cos(\beta) + 2Q_l \cdot \left(\frac{\sin(\beta)}{Z} - \frac{C\omega}{2} \right) - \frac{U_0^2}{Z^2}$$

$$c = P_l^2 + Q_l^2$$

La solución de dicha ecuación bicuadrática viene dada por la expresión:

$$U_l = \sqrt{\frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}}$$

de la que se extraen las siguientes conclusiones:

1. Existen combinaciones de valores de P_l y Q_l para los cuales el discriminante es menor que cero (es decir, $b^2 - 4ac < 0$), obteniéndose un resultado complejo para U_l . Debido a la imposibilidad de tener un módulo complejo, se interpretan como situaciones de funcionamiento no posibles. En consecuencia, las soluciones posibles de los valores de P_l y Q_l son aquellas que presenten un discriminante de la ecuación bicuadrática igual o superior a cero, $b^2 - 4ac > 0$.
2. Para los valores de P_l y Q_l factibles, en general existirán dos posibles soluciones para U_l (debido al \pm). Si se representa el valor de U_l frente a P_l , para determinados valores de Q_l , la curva que se obtiene tiene la forma mostrada en la Figura 2.19. En dicha curva se observa cómo para cada par (P_l, Q_l) existen dos posibles valores de la tensión U_l . De estas dos posibles soluciones para U_l sólo se considera como funcionamiento normal de la línea el valor superior, que se encuentra próximo a valores de 1 p.u. El valor inferior representa una situación de funcionamiento anormal de la línea (situaciones no factibles o inestables en la práctica). En el Capítulo 10 el lector puede encontrar un análisis más extenso de la denominada estabilidad de las tensiones en redes eléctricas.
3. En las curvas de la Figura 2.19 se ve claramente cómo existe un valor máximo de la potencia que puede ser transportada (extremo de la curva). Este valor se presenta cuando $b^2 - 4ac = 0$ y, por tanto, la tensión U_l tiene un único valor posible o valor crítico $U_{l,\text{crit}}$ definido por:

$$U_{l,\text{crit}} = \sqrt{\frac{-b}{2a}} \tag{2.31}$$

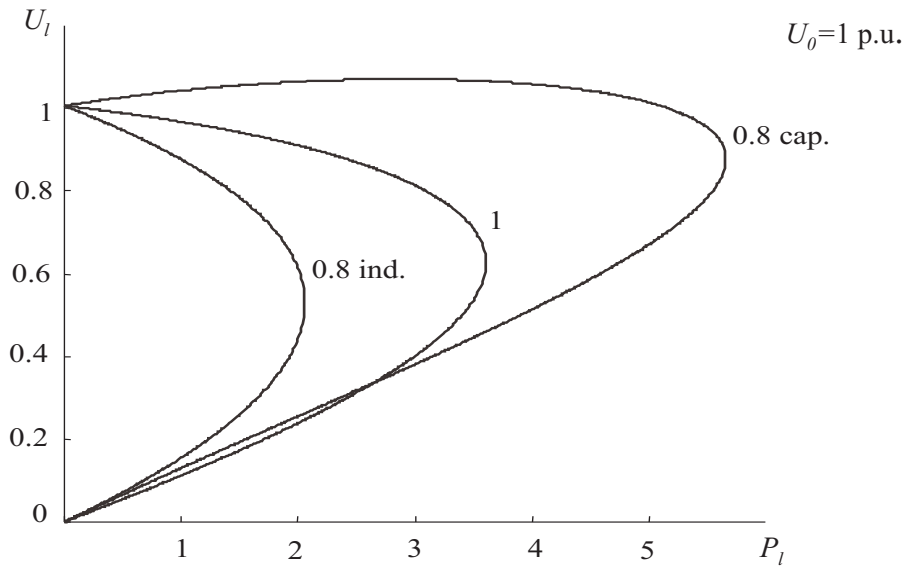


Figura 2.19. Tensiones en una línea en función de las potencias.

De lo anterior se concluye que en las líneas que alimentan fuentes de potencia, además del límite térmico $I_l \leq I_{m\acute{a}x}$, existe el denominado límite de estabilidad de tensión definido por $U_l \leq U_{l,crit}$. Obsérvese que a diferencia de las cargas de impedancia, para los consumos de potencia el límite de tensión es inherente a la línea.

Línea alimentando a un consumo de tensión constante

Otra posibilidad de funcionamiento de la línea es cuando alimenta a una carga cuya tensión se mantiene constante. Este caso se presenta cuando la línea está conectada a un nudo de potencia de cortocircuito muy elevada, o cuando alimenta un nudo cuya tensión está controlada (por ejemplo un generador). Retomando las ecuaciones (2.28) y (2.29) de las potencias que fluyen por la línea y considerando U_0 y U_l constantes, se deduce, de forma inmediata, que para el modelo π la máxima P_l que se puede entregar a la carga se da cuando $\cos(\beta - \delta) = 1$, es decir, cuando $\delta = \beta$. En esas condiciones, dicha $P_{l,m\acute{a}x}$ vale:

$$P_{l,m\acute{a}x} = \frac{U_l \cdot U_0}{Z} - \frac{U_l^2}{Z} \cos(\beta)$$

Considerando el modelo serie, el máximo de la potencia se tiene cuando $\delta = \pi/2$ rad:

$$P_{l,m\acute{a}x} = \frac{U_l \cdot U_0}{X} \tag{2.32}$$

La zona de funcionamiento normal de la línea se corresponde con valores pequeños del ángulo δ , y las situaciones con $\delta > \beta$ ($\delta > \pi/2$ rad) son eléctricamente inestables. En la Figura 2.20 se muestra la curva P/δ para el caso de una línea con modelo serie, donde se puede observar el punto de máxima potencia, la zona estable ($\delta < \pi/2$, donde el aumento de

ángulo significa un aumento de potencia) y la zona inestable ($\delta > \pi/2$, donde un incremento de ángulo se traduce en una disminución de la potencia).

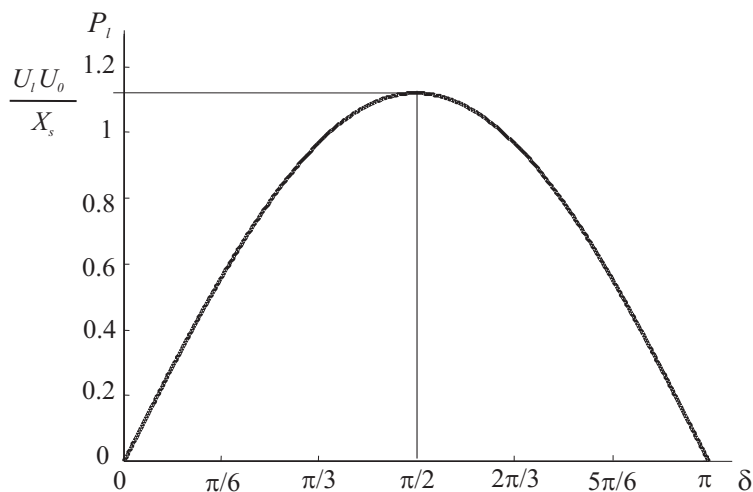


Figura 2.20. Potencia en función de δ .

Se puede concluir que, en el caso de las líneas que alimentan consumos modelados por fuentes de tensión, además del límite térmico $I_l \leq I_{\text{máx}}$, existe el denominado límite de estabilidad de ángulo. Este límite se define por $\delta \leq \beta$, donde δ es el ángulo de desfase entre las tensiones \mathcal{U}_0 y \mathcal{U}_l y β es el ángulo de la impedancia \mathcal{Z} del modelo π de la línea ($\beta = \pi/2$ rad para el modelo serie).

Ejemplo 2.5:

A continuación, se aplicarán algunos de los conceptos expuestos en los anteriores apartados al caso de la línea cuyos parámetros L y C han sido calculados en los Ejemplos 2.3 y 2.4. Se supone que dicha línea es de 132 kV, tiene una longitud $l = 100$ km, y que los conductores que la constituyen tienen una resistencia de $0.14 \Omega/\text{km}$ y que soportan una corriente máxima de 500 A.

Dado que cada fase consta de cuatro cables, la resistencia por fase de dicha línea será de $0.14/4 = 0.035 \Omega/\text{km}$, y la corriente máxima por fase (límite térmico de la línea) será de $4 \times 500 = 2000$ A ($\sqrt{3} \cdot 132 \cdot 2000 = 457,3$ MVA).

Así pues, la impedancia serie y la admitancia paralelo de dicha línea valen:

$$z = R + j\omega L = 0,035 + j2\pi 50 \cdot 4,36 \cdot 10^{-4} = 0,035 + j0,137 \Omega/\text{km}$$

$$y = G + j\omega C = 0 + j2\pi 50 \cdot 26,44 \cdot 10^{-9} = j8,31 \cdot 10^{-6} \text{ S/km}$$

siendo, por tanto, los valores totales:

$$\mathcal{Z} = z \cdot l = 3,5 + j13,7 \Omega$$

$$\mathcal{Y} = y \cdot l = j8,31 \cdot 10^{-4} \text{ S}$$

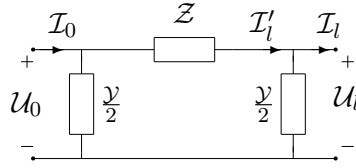


Figura 2.21. Modelo π de la línea.

Si la línea alimenta a una carga de 200 MVA ($S_{\text{fase}} = 200/3$ MVA) con $\cos\varphi = 0,8$ inductivo, a tensión nominal (tensión de fase $U_l = 132/\sqrt{3}$ kV), podemos calcular la tensión en el origen utilizando el modelo π de la línea, por fase (Figura 2.21):

$$I_l = \left(\frac{200 \cdot 10^6 / 3 \angle_{\arccos 0,8}}{132 \cdot 10^3 / \sqrt{3}} \right)^* = 874,7 \angle_{-36,87^\circ} \text{ A}$$

$$U_0 = I'_l Z + U_l = (I_l + U_l \cdot Y/2) Z + U_l = 85,41 + j7,86 = 85,77 \angle_{5,25^\circ} \text{ kV}$$

Por tanto, la caída de tensión en este caso vale:

$$\Delta U = \frac{U_0 - U_l}{U_l} \cdot 100 = 12,55 \%$$

Y la corriente en el origen vendrá dada por:

$$I_0 = I'_l + U_0 \cdot Y/2 = I_l + U_l \cdot Y/2 + U_0 \cdot Y/2 = 833,47 \angle_{-33,31^\circ} \text{ A}$$

siendo la potencia que entra a la línea, por fase:

$$S_0 = U_0 I_0^* = 55,9 + j44,6 \text{ MVA}$$

En consecuencia, el rendimiento de la línea en tales condiciones es:

$$\eta = \frac{P_l}{P_0} \times 100 = \frac{200 * 0,8/3}{55,9} \times 100 = 95,4 \%$$

2.4. Transformadores de potencia

Otro de los elementos fundamentales en las redes eléctricas son los transformadores de potencia, que son utilizados para elevar, reducir o regular los niveles de las tensiones en la red. En este apartado se aborda el estudio de los distintos transformadores que se utilizan en las redes eléctricas con el objetivo de definir sus modelos eléctricos.

2.4.1. Transformador monofásico

Un transformador monofásico de potencia está constituido básicamente por dos devanados arrollados sobre un núcleo de material ferromagnético, como se muestra esquemáticamente en la Figura 2.22.

El transformador monofásico ideal, que responde al circuito eléctrico de la Figura 2.23, se define a partir de los siguientes supuestos:

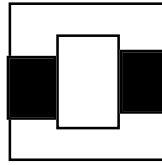


Figura 2.22. Transformador monofásico.

1. Los devanados tienen resistencia nula.
2. El flujo magnético está totalmente confinado en el núcleo magnético, es decir, no hay flujo de dispersión.
3. El núcleo tiene una reluctancia magnética nula.
4. No hay pérdidas por histéresis ni corrientes parásitas en el núcleo.

En estas condiciones se cumple la igualdad de las potencias del primario y del secundario del transformador $\mathcal{S}_p = \mathcal{S}_s$ y las relaciones entre las tensiones e intensidades definidas a partir del número de espiras en el primario N_p y en el secundario N_s :

$$\frac{U_p}{U_s} = \frac{N_p}{N_s} = t \quad ; \quad \frac{I_p}{I_s} = \left(\frac{N_s}{N_p}\right)^* = \left(\frac{N_s}{N_p}\right) = \frac{1}{t}$$

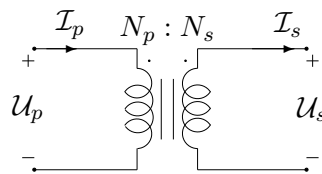


Figura 2.23. Circuito eléctrico de transformador monofásico ideal.

Cuando a un transformador real se le aplica una tensión en uno de sus devanados mientras que en el otro se le conecta una carga, se observa que las potencias activas y reactivas en ambos devanados no son iguales, y la relación entre las tensiones primaria y secundaria no coincide exactamente con la relación de espiras N_p/N_s . Esto plantea la necesidad de representar el transformador mediante un modelo más cercano a la realidad como el que se muestra en la Figura 2.24.

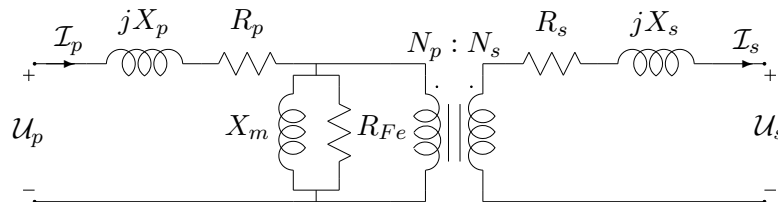


Figura 2.24. Circuito eléctrico del transformador monofásico real.

En este circuito se modelan las pérdidas óhmicas en los devanados y los flujos de dispersión mediante la inclusión de las resistencias en serie R_p y R_s y de las reactancias X_p y X_s , respectivamente. La rama formada por la resistencia R_{Fe} y la reactancia X_m representan las pérdidas que se producen en el propio núcleo ferromagnético por corrientes de Foucault y fenómenos de histéresis y el hecho de que la reluctancia magnética del circuito magnético no es nula.

Para determinar el modelo del transformador real, se le somete básicamente a dos tipos de ensayo:

1. Ensayo de vacío, que se basa en alimentar a uno de los devanados, por ejemplo el primario, a su tensión nominal $U_{p,n}$, dejando el otro, el secundario, abierto (en vacío). El resultado es la existencia de una pequeña intensidad I_0 , denominada de vacío, con un claro carácter inductivo, una tensión en el secundario $U_{s,0}$, cercana a la nominal, una potencia activa P_0 , muy baja, y una potencia reactiva Q_0 , baja. De los valores medidos se pueden deducir los siguientes parámetros:

$$\frac{U_{p,n}}{U_{s,0}} \approx \frac{N_p}{N_s} ; R_{Fe} \approx \frac{U_{p,n}^2}{P_0} ; X_m \approx \frac{U_{p,n}^2}{Q_0}$$

2. Ensayo de cortocircuito, que se realiza disponiendo el secundario en cortocircuito y alimentando el primario a una tensión $U_{p,cc}$, fijada para que por el devanado circule la intensidad nominal $I_{p,n}$. Los resultados de este ensayo son: una intensidad en el secundario $I_{s,cc}$, prácticamente igual a la nominal ($\frac{I_{p,n}}{I_{s,cc}} \approx \frac{1}{t}$), una potencia activa P_{cc} baja e inferior a la reactiva Q_{cc} . A partir de los valores de este ensayo se puede extraer la denominada impedancia de cortocircuito, reducida al primario:

$$R_{cc} \approx \frac{P_{cc}}{I_{p,n}^2} = \frac{R_p \cdot I_{p,n}^2 + R_s \cdot I_{s,cc}^2}{I_{p,n}^2} \approx R_p + t^2 \cdot R_s$$

$$X_{cc} \approx \frac{Q_{cc}}{I_{p,n}^2} = \frac{X_p \cdot I_{p,n}^2 + X_s \cdot I_{s,cc}^2}{I_{p,n}^2} \approx X_p + t^2 \cdot X_s$$

Suele ser habitual expresar el resultado del ensayo de cortocircuito en tanto por ciento, obtenido multiplicando por 100 el cociente entre la tensión de alimentación del ensayo $U_{p,cc}$ y el valor nominal de ese devanado $U_{p,n}$, es decir:

$$\mathcal{Z}_{cc, \%} = \frac{U_{p,cc}}{U_{p,n}} \cdot 100 = \frac{\mathcal{I}_{p,cc} \mathcal{Z}_p + \frac{N_p}{N_s} \mathcal{I}_{s,n} \mathcal{Z}_s}{\frac{N_p}{N_s} U_{s,n}} \cdot 100 = \frac{\left(\left(\frac{N_s}{N_p} \right)^2 \mathcal{Z}_p + \mathcal{Z}_s \right) S_{s,n}}{U_{s,n}^2} \cdot 100 \quad (2.33)$$

De la anterior ecuación se deduce que $\mathcal{Z}_{cc, \%}$ dividida por 100 coincide con la impedancia de cortocircuito en valores por unidad $\mathcal{Z}_{cc, pu}$ referida a unas tensiones base y una potencia base iguales a las nominales del transformador.

En condiciones cercanas a las nominales de trabajo se puede despreciar la corriente de vacío por ser muy inferior a la corriente de carga y, en consecuencia, puede eliminarse la

rama paralelo del circuito de la Figura 2.24. Si el circuito resultante lo pasamos a valores por unidad, siguiendo las reglas mencionadas en el apartado 2.2, el modelo del transformador se reduce al circuito serie de la Figura 2.25, donde $R_{cc,pu}$ y $X_{cc,pu}$ son la resistencia y reactancia (en p.u.) que se miden en el ensayo de cortocircuito.

En lo sucesivo, salvo que se diga lo contrario, siempre se entenderá que las variables y parámetros se expresan en valores p.u., sin necesidad de especificarlo en sus unidades.

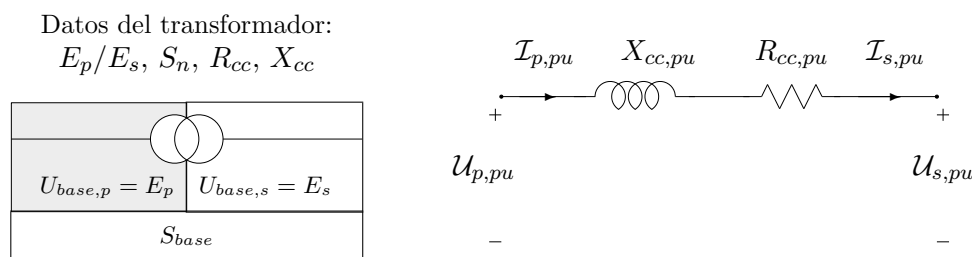


Figura 2.25. Circuito eléctrico del transformador monofásico real en p.u.

2.4.2. Transformador trifásico

Los transformadores de potencia trifásicos son una extensión del transformador monofásico, donde ahora los devanados aumentan en número y pudiendo disponerse en distintas conexiones (estrella, triángulo). Los transformadores trifásicos desde el punto de vista del tipo de núcleo ferromagnético pueden clasificarse en:

- Banco de transformadores monofásicos o también denominado banco trifásico, constituido por tres transformadores monofásicos (Figura 2.26.a).
- Transformador de 3 columnas, donde se dispone un único núcleo con una columna por fase (Figura 2.26.b).
- Transformador de 5 columnas, cuyo núcleo dispone de 5 columnas: 3 para las fases y 2 adicionales en sus extremos (Figura 2.26.c).

En este apartado se consideran únicamente transformadores trifásicos en condiciones estacionarias equilibradas. En consecuencia, sus variables trifásicas responderán a fuentes y cargas trifásicas equilibradas y, por tanto, se pueden analizar, cualquiera que sea su tipología y para efectos de su modelización, mediante tres transformadores monofásicos conectados entre sí de manera adecuada.

En función del número de devanados por columna que se dispongan en el núcleo se tiene:

- Transformadores de dos devanados separados (primario-secundario).
- Transformadores de tres devanados separados (primario-secundario-terciario⁶).

⁶ Como norma general se considera el devanado primario el de mayor tensión, el secundario el siguiente de menor tensión y el terciario, si existe, el de menor tensión.

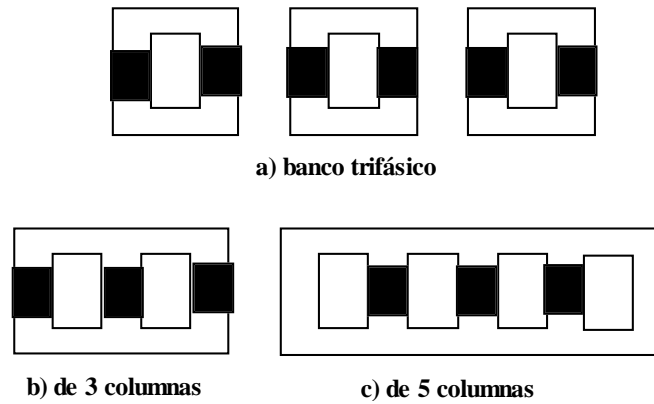


Figura 2.26. Tipos de transformadores trifásicos atendiendo al núcleo magnético.

- Transformadores de un devanado continuo. En este último caso se encuentran las denominadas reactancias, y también los autotransformadores, aunque debido a la existencia de conexiones intermedias se pueden definir devanados primario y secundario.

Por otra parte, los transformadores trifásicos admiten otra clasificación atendiendo a la forma de conexión de sus devanados, esto es, en estrella o triángulo, dando lugar a distintas configuraciones del transformador: estrella-triángulo, estrella-estrella o triángulo-triángulo.

La forma de conexión de los devanados primario y secundario (estrella o triángulo) provoca la aparición de distintos desfases entre las tensiones primarias y secundarias y da lugar a diferentes relaciones de transformación de los módulos. Es decir, en los transformadores trifásicos, a diferencia de los monofásicos, se presentan relaciones de transformación entre los devanados (primario-secundario-terciario) tanto de módulo como de ángulo.

Las relaciones de transformación de ángulo se suelen expresar mediante un coeficiente que indica el ángulo de desfase entre primario y secundario en unidades de 30° . Este coeficiente recibe el nombre de *índice horario* debido a la correspondencia que se puede establecer entre los ángulos y la esfera horaria de un reloj.

Por ejemplo, si conectamos tanto el primario como el secundario en estrella, tal y como se indica en la Figura 2.27.a, se observa cómo el desfase entre las tensiones del primario y las correspondientes del secundario es de 0° . Si se considera el diagrama fasorial situado sobre una esfera horaria, donde la tensión del primario marca las 12, la correspondiente tensión del secundario señala, en este caso, también las 12 que es equivalente a las cero horas, por lo que este transformador es denominado $Yy0$. En este transformador, las relaciones de módulo y ángulo pueden expresarse matemáticamente por:

$$\frac{U_A}{U_a} = \frac{N_p}{N_s} \quad (2.34)$$

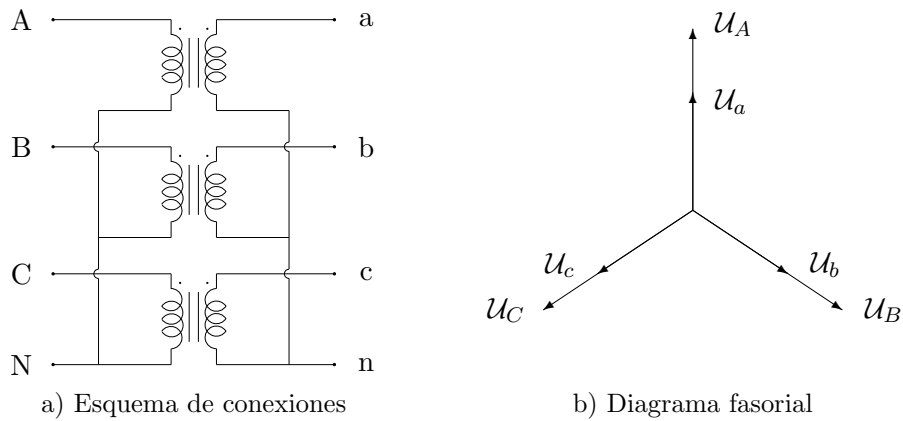


Figura 2.27. Conexiones del transformador trifásico Yy0 y diagrama fasorial de tensiones.

Otro posible caso se obtiene conectando el primario en estrella y el secundario en triángulo, cómo se indica en la Figura 2.28.a. Si a partir de su diagrama fasorial (Figura 2.28.b) se dispone la tensión del primario U_{AB} en las doce de una supuesta esfera horaria, la tensión U_{ab} marcará la una, siendo, por tanto, su denominación Yd1. La relación de transformación entre las tensiones U_A/u_a , se obtiene de forma inmediata sabiendo que $U_A/u_{ab} = N_p/N_s$:

$$\frac{U_A}{u_a} = \frac{U_A}{\frac{U_{ab}}{\sqrt{3}} \cdot e^{-j\frac{\pi}{6}}} = \frac{U_A}{U_{ab}} \cdot \sqrt{3} \cdot e^{j\frac{\pi}{6}} = \frac{N_p}{N_s} \cdot \sqrt{3} \cdot e^{j\frac{\pi}{6}} \quad (2.35)$$

Es decir, para el transformador trifásico Yd1 la relación de transformación entre primario y secundario es $N_p\sqrt{3}/N_s$, con un desfase de 30° .

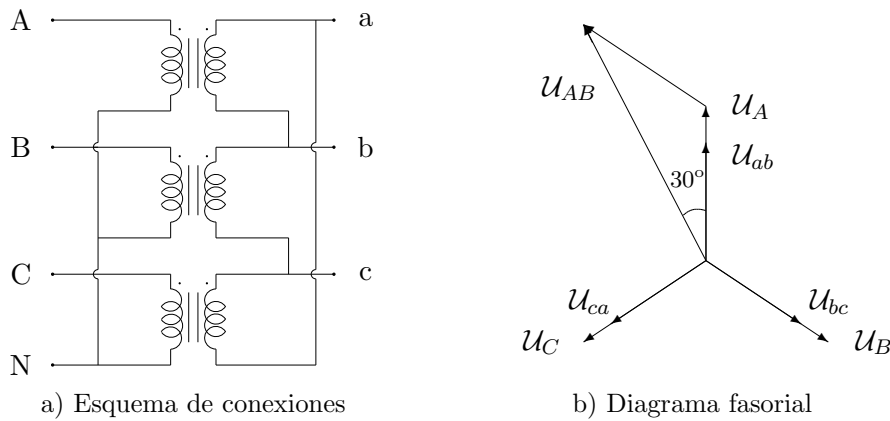


Figura 2.28. Conexiones del transformador trifásico Yd1 y diagrama fasorial de tensiones.

Combinando las distintas posibilidades se pueden obtener transformadores con diferentes índices horarios (Yy6, Yd7, Yd5, Yd11, Dd6, Dd2, Dd8, Dd10, Dy7, Dy5, etc.).

De acuerdo con lo expuesto, se concluye que un transformador trifásico con una relación de transformación a (relación entre sus tensiones nominales) e índice horario h , responde al modelo que se muestra en la Figura 2.29, donde $\alpha = h \cdot 30^\circ$.

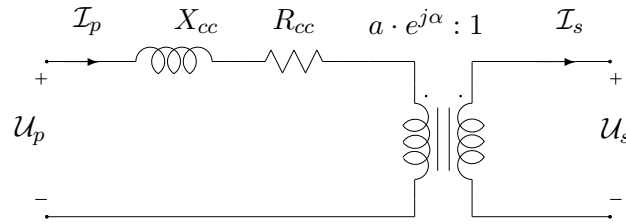


Figura 2.29. Circuito equivalente monofásico de un transformador trifásico.

Seleccionando convenientemente los valores base (apartado 2.2), se obtiene el circuito del transformador trifásico en valores por unidad mostrado en la Figura 2.30.

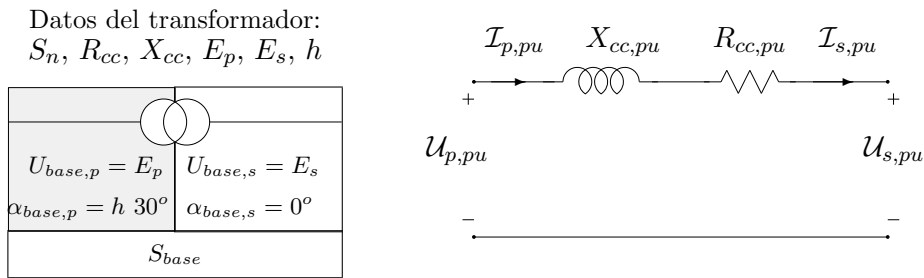


Figura 2.30. Circuito equivalente monofásico de un transformador trifásico en p.u.

Por otra parte, los límites de funcionamiento del transformador de potencia presentan las mismas características que en el caso de una línea, siendo su análisis más simple al no existir las capacidades en paralelo.

Ejemplo 2.6:

Como ejemplo se considera un transformador Yd11, 240/11 kV, de 50 MVA de potencia nominal, con una reactancia de cortocircuito X_{cc} del 13.73 % y una resistencia del 4 %.

Se desea obtener su modelo para una potencia base de 100 MVA. Tomando como tensiones base las nominales del transformador, tendremos:

$$U_{base,p} = 240 \text{ kV} \ ; \ U_{base,s} = 11 \text{ kV}$$

$$\alpha_{base,p} = 30^\circ \ ; \ \alpha_{base,s} = 0^\circ$$

La impedancia de cortocircuito dada por X_{cc} y R_{cc} están referidas a la potencia nominal, por lo que es necesario realizar un cambio de base, dado por:

$$R_{cc,pu} + j \cdot X_{cc,pu} = (R_{cc} + j \cdot X_{cc}) \cdot \frac{S_{base}}{S_n} = (0,04 + j \cdot 0,1373) \cdot \frac{100}{50} = 0,08 + j \cdot 0,2746 \quad (2.36)$$

siendo su circuito monofásico equivalente semejante al de la Figura 2.30.

2.4.3. Transformadores de tres devanados

Los transformadores trifásicos de tres devanados, como su nombre indica, presenta tres devanados por cada una de las fases (tres bobinas por cada columna). Su modelo monofásico equivalente consta de tres acoplamientos, como se muestra en la Figura 2.31.a, donde se han incluido las tres impedancias de cortocircuito de los devanados y se han despreciado las pérdidas en el hierro y la reactancia de magnetización.

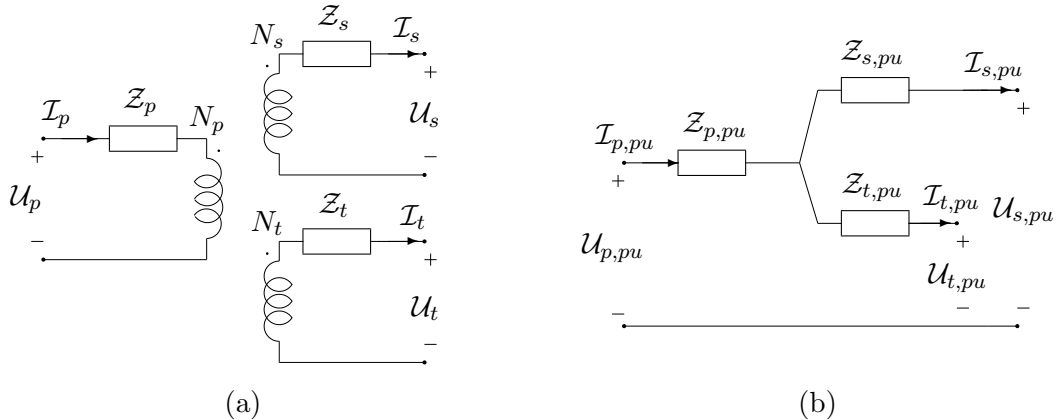


Figura 2.31. Circuito equivalente monofásico del transformador de tres devanados.

La existencia de distintos índices horarios y conexiones en los transformadores trifásicos de tres devanados tiene un trato por fase idéntico al de dos devanados. Así, por ejemplo en un transformador Dy5d1, se tiene un desfase de 150° (Dy5) entre primario y secundario, y otro de 30° (Dd1) entre primario y terciario.

Si el circuito del transformador de tres devanados se convierte a valores p.u., tomando una única potencia base, y tres tensiones base que cumplan las relaciones de transformación, desaparecen los acoplamientos y se obtiene un circuito en estrella como el de la Figura 2.31.b.

Los impedancias del transformador de tres devanados se definen, habitualmente, a partir de los siguientes ensayos:

- Ensayo de cortocircuito (cc) alimentando desde el primario con una tensión $U_{p,cc}$, estando el secundario en cc y el terciario abierto, de forma que por el secundario circule una corriente igual a la nominal $I_{s,n}$. En estas condiciones, se mide una impedancia $Z_{ps,\%}$, que se suele expresar como el cociente entre la tensión $U_{p,cc}$ y la nominal $U_{p,n}$ multiplicado por 100 (en tanto por cien). A partir de las relaciones de transformación entre los devanados y con una deducción similar a la (2.33), se demuestra que la impedancia así obtenida y expresada en tanto por uno ($Z_{ps,pu} = Z_{ps,\%}/100$) es igual a la misma impedancia expresada en p.u. tomando como tensiones base las nominales ($U_{p,n}$ y $U_{s,n}$) y como potencia base la nominal del secundario $S_{s,n}$ (en general, del devanado cortocircuitado).
- Ensayo de cortocircuito alimentando desde el primario con el terciario en cc y el secundario abierto, de manera que por el terciario circule la intensidad nominal. De

este ensayo se obtiene la $Z_{pt,pu}$ en p.u. referidos a las tensiones base nominales ($U_{p,n}$ y $U_{t,n}$) y a una potencia base igual a la nominal del terciario $S_{t,n}$.

- Ensayo de cortocircuito alimentando desde el secundario, con el terciario en cc y con el primario abierto, de donde se extrae la impedancia $Z_{st,pu}$. Dicha impedancia vendrá expresada, en este caso, en las bases nominales de tensión ($U_{s,n}$ y $U_{t,n}$) y de potencia $S_{t,n}$.

Conviene destacar que en los transformadores de tres devanados, al contrario de lo que ocurre en los de dos, es normal que los devanados tengan distintas potencias nominales. Este hecho obliga a realizar los cambios de base necesarios para que las tres impedancias mencionadas se expresen en una potencia base común. En esas condiciones se cumplen las siguientes tres igualdades:

$$Z_{ps,pu} = Z_{p,pu} + Z_{s,pu} \quad ; \quad Z_{pt,pu} = Z_{p,pu} + Z_{t,pu} \quad ; \quad Z_{st,pu} = Z_{s,pu} + Z_{t,pu} \quad (2.37)$$

que constituyen un sistema de tres ecuaciones con tres incógnitas que nos permite calcular las tres impedancias $Z_{p,pu}$, $Z_{s,pu}$ y $Z_{t,pu}$.

Ejemplo 2.7:

Se va a deducir el modelo en p.u. de un transformador de tres devanados Yy0d11 con tensiones nominales 139/65/13.8 kV y potencias nominales 40/40/13.33 MVA, del cual se conocen los siguientes parámetros: $X_{ps,\%} = 12,62\%$, $X_{pt,\%} = 6,41\%$ y $X_{st,\%} = 1,7381\%$ (como suele ser habitual, se desprecian las resistencias).

Se considera como potencia base común a toda la red $S_{base} = 100$ MVA y como tensiones base las nominales con lo que los valores de las reactancias de cc en p.u. resultan:

- $X_{ps} = X_{ps,\%}/100 = 0,1262$ pu, referida a la potencia $S_{s,n} = 40$ MVA. Para expresarla respecto a $S_{base} = 100$ MVA, se realiza el cambio de base:

$$X'_{ps} = X_{ps} \cdot \frac{S_{base}}{S_{s,n}} = 0,1262 \cdot \frac{100}{40} = 0,315 \text{ pu}$$

- $X_{pt} = X_{pt,\%}/100 = 0,0641$ pu, referida a la potencia $S_{t,n} = 13,33$ MVA. Para expresarla respecto a $S_{base} = 100$ MVA:

$$X'_{pt} = X_{pt} \cdot \frac{S_{base}}{S_{t,n}} = 0,0641 \cdot \frac{100}{13,33} = 0,48 \text{ pu}$$

- $X_{st} = X_{st,\%}/100 = 0,01738$ pu, referida a la potencia $S_{t,n} = 13,33$ MVA. Para expresarla respecto a $S_{base} = 100$ MVA:

$$X'_{st} = X_{st} \cdot \frac{S_{base}}{S_{t,n}} = 0,017381 \cdot \frac{100}{13,33} = 0,12 \text{ pu} \quad (2.38)$$

A partir de los nuevos valores de las impedancias de cc y resolviendo el sistema (2.37), se obtienen las reactancias del modelo monofásico equivalente del transformador de tres devanados en p.u. (circuito un estrella de la Figura 2.31).

$$X_p = 0,3375 \text{ pu} \quad ; \quad X_s = -0,0225 \text{ pu} \quad ; \quad X_t = 0,1425 \text{ pu}$$

2.4.4. Transformadores regulables

Un tipo de transformador de potencia de especial interés en la explotación de redes eléctricas es el transformador con regulación. Los transformadores de regulación, desde el punto de vista de la variable a controlar, pueden ser de dos clases:

- Transformadores de regulación de módulo.
- Transformadores de regulación de ángulo.

En este libro no se pretende profundizar en la tecnología de construcción de estos transformadores sino únicamente describir sus modelos de funcionamiento eléctrico.

Transformadores de regulación de módulo

El esquema más sencillo consiste en un transformador donde uno de sus devanados tiene varias tomas correspondientes a distintos números de espiras. De esta forma, el transformador realiza la modificación del módulo de U_s , supuesta fija U_p , mediante la modificación del número de espiras de N_p (lado de alta) y, por tanto, la variación de relación de espiras N_p/N_s . De este modo, se tiene un transformador de regulación por tomas, que responde al circuito que se muestra en la Figura 2.32.

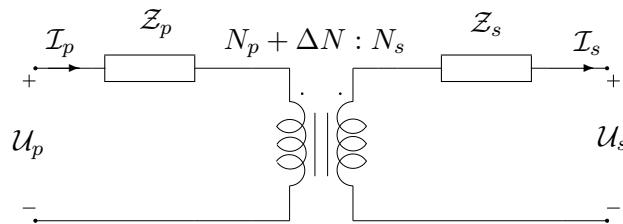


Figura 2.32. Circuito de transformador con regulación por tomas.

Del circuito equivalente de la Figura 2.32, pasándolo a valores por unidad (con tensiones base manteniendo la relación de transformación nominal N_p/N_s), se obtiene el modelo de la Figura 2.33, donde $Z_{cc,pu}$ es la impedancia de cortocircuito del transformador en p.u., igual a la obtenida sin modificación de tomas, y donde a representa la regulación entre tensiones primaria y secundaria, tal que: $a = 1 + \Delta N_p/N_p$.

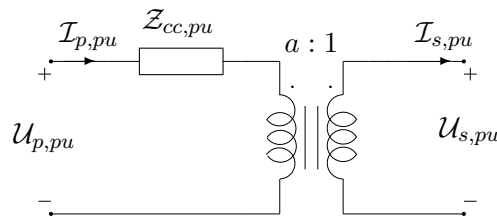


Figura 2.33. Circuito de transformador con regulación por tomas en p.u.

Para el caso genérico de un transformador con regulación de módulo, se puede obtener un circuito equivalente sin acoplamiento, resultando un esquema más simple. Planteando el análisis nodal del circuito de la Figura 2.33, resulta en forma matricial:

$$\begin{pmatrix} \mathcal{I}_{p,pu} \\ \mathcal{I}_{s,pu} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathcal{Y} & -a\mathcal{Y} \\ -a\mathcal{Y} & a^2\mathcal{Y} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \mathcal{U}_{p,pu} \\ \mathcal{U}_{s,pu} \end{pmatrix} \quad (2.39)$$

donde $\mathcal{Y} = 1/\mathcal{Z}_{cc,pu}$.

De las ecuaciones anteriores puede extraerse fácilmente el circuito equivalente de la Figura 2.34.

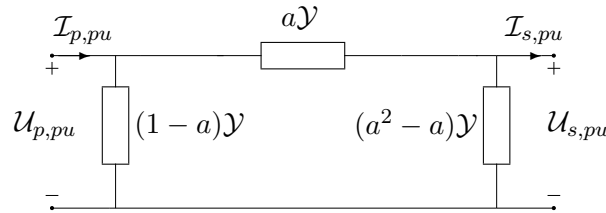


Figura 2.34. Modelo en π del circuito de la Figura 2.33.

Otro dispositivo que permite regular el módulo de tensión se basa en un esquema de inyección de tensión como el de la Figura 2.35.a, donde la tensión \mathcal{U}_s se obtiene como suma de \mathcal{U}_p con una tensión proporcional a esta última, $k \cdot \mathcal{U}_p$, es decir:

$$\mathcal{U}_s = \mathcal{U}_p + k \cdot \mathcal{U}_p = (k + 1) \cdot \mathcal{U}_p$$

De la anterior ecuación se deduce el circuito equivalente de la Figura 2.35.b. Estos reguladores se conectan al final de una línea, y su objetivo es regular el módulo de la tensión en dicho nudo. A este modelo se le puede aplicar un tratamiento similar al del transformador por tomas, en lo relativo a la obtención de un circuito equivalente.

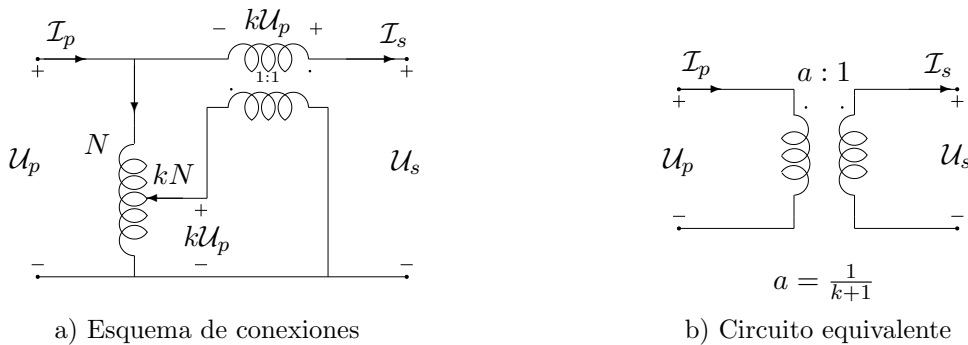


Figura 2.35. Conexiones del transformador con regulación por inyección de tensión y circuito monofásico equivalente.

Transformador de regulación de ángulo

De un modo similar al regulador de tensión descrito, se puede disponer un transformador para regular el desfase de ángulo entre los dos extremos. El esquema de este tipo de transformador-regulador se tiene en la Figura 2.36, donde se aprecia cómo en cada fase se inyecta una tensión girada 90° con respecto a la que se desea regular. El resultado se puede observar en el diagrama fasorial, donde la tensión \mathcal{U}_A se ve desplazada por la tensión inyectada $k \cdot \mathcal{U}_{BC}$ de forma que $\mathcal{U}_{A'} = \mathcal{U}_A + k \cdot \mathcal{U}_{BC}$, ocurriendo lo mismo para las otras dos fases.

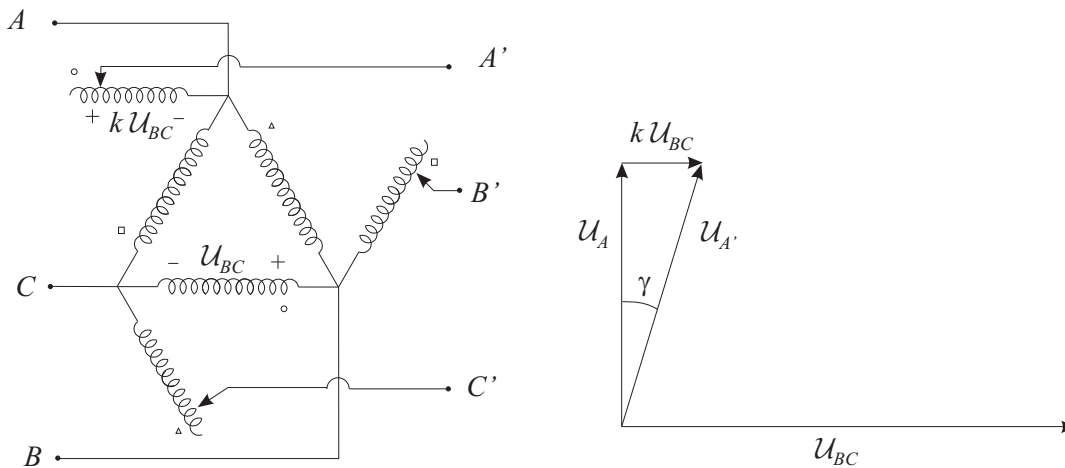


Figura 2.36. Transformador con regulación de ángulo.

Admitiendo que los valores de k deben ser pequeños, se obtiene:

$$\mathcal{U}_{A'} \approx \mathcal{U}_A \cdot e^{-j \cdot \gamma}$$

donde

$$\gamma \approx \text{tg} \gamma = \frac{k \cdot U_{BC}}{U_A} = k \cdot \sqrt{3}$$

En consecuencia, el circuito de la Figura 2.36 permite realizar un desfase de valor γ entre las tensiones \mathcal{U}_A y $\mathcal{U}_{A'}$, permaneciendo sus módulos prácticamente iguales.

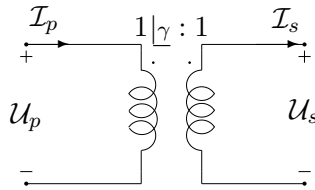


Figura 2.37. Circuito monofásico del transformador con regulación de ángulo.

En la Figura 2.37 se muestra el circuito monofásico equivalente del transformador-regulador de ángulo, donde la relación de transformación del acoplamiento es un número complejo $\mathcal{T} = 1|\underline{\gamma}$, de forma que:

$$\frac{U_p}{U_s} = \mathcal{T} = 1|\underline{\gamma} \quad ; \quad \frac{I_p}{I_s} = \frac{1}{\mathcal{T}^*} = 1|\underline{\gamma}$$

A diferencia del transformador regulador de módulo, el de ángulo no da lugar a un circuito equivalente sin acoplamiento.

2.5. La máquina síncrona

La máquina eléctrica síncrona consta, básicamente, de dos volúmenes cilíndricos contruidos con material ferromagnético: uno de ellos fijo, denominado estátor, y otro móvil, denominado rotor. En ambos cilindros se encuentran ubicados los devanados de la máquina, constituidos por conductores eléctricos.

En el caso de una máquina síncrona, el rotor puede presentar dos formas geométricas diferentes: rotor liso (o cilíndrico) y rotor de polos salientes. La primera geometría, rotor liso, se utiliza en el caso de máquinas que funcionan a grandes velocidades de rotación (turbomáquinas). En la Figura 2.38 se muestran los dos tipos de máquinas, y a lo largo de este apartado las explicaciones teóricas se darán, en primer lugar, para una máquina con rotor liso de dos polos.

2.5.1. Máquina síncrona de rotor cilíndrico

En la máquina síncrona, el devanado rotórico está alimentado con corriente continua (también existen máquinas con rotor a base de imanes permanentes), de forma que se origina un flujo magnético simétrico que se cierra sobre el estátor. Debido a la rotación del rotor, se inducen tensiones en los devanados del estátor, que se pueden utilizar para alimentar cargas eléctricas. Para conseguir una generación trifásica equilibrada de las tensiones en los devanados estatóricos, éstos se disponen distribuidos geométricamente cada 120° .

Por comodidad en la representación y en las explicaciones, se acostumbra a mostrar las variables magnéticas de la máquina (flujos, vector de inducción y fuerza magnetomotriz) con la referencia del vector de inducción \vec{B} , que indica la dirección del flujo magnético perpendicular a la superficie de la bobina. En la Figura 2.39 se muestran las referencias

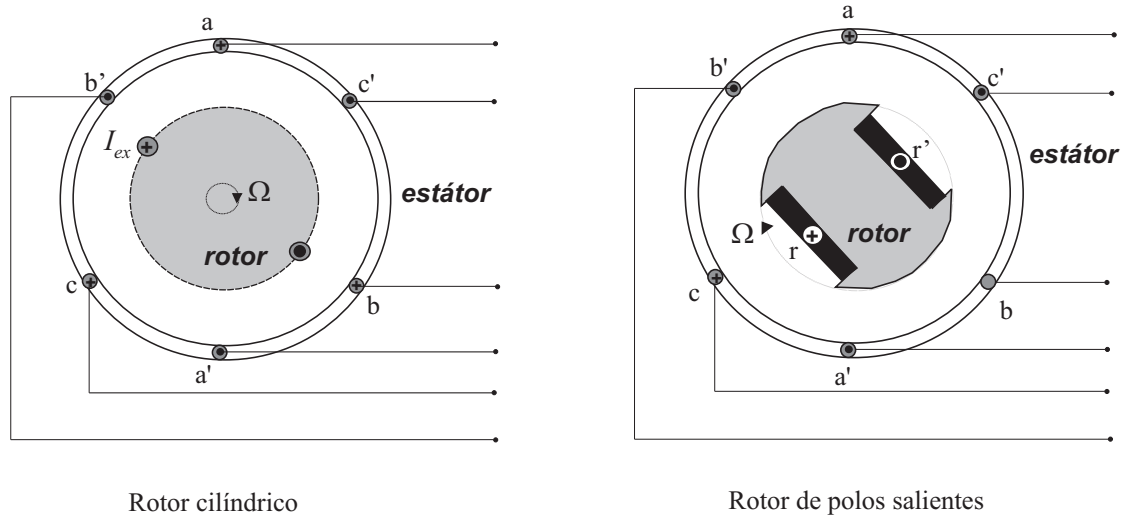


Figura 2.38. Tipos de máquina síncrona (con un par de polos).

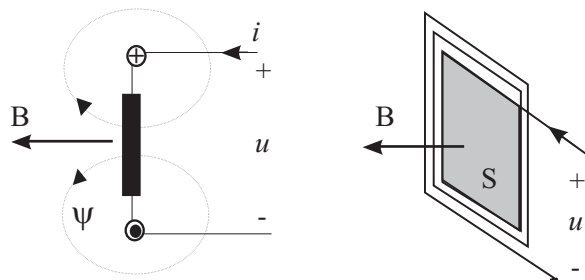


Figura 2.39. Variables y referencias en un circuito electromagnético.

que se establecen en una bobina, sobre el supuesto de que todas las variables consideradas continuas tienen un valor positivo.

En la Figura 2.40 se muestra el vector \vec{B}_r originado por la bobina del rotor al alimentarse con la denominada intensidad de excitación.

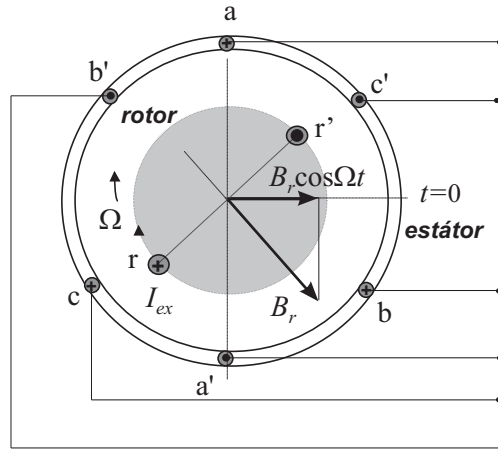


Figura 2.40. Vector de inducción magnética creado por el rotor en la máquina síncrona.

Para una velocidad de rotación constante Ω , y de acuerdo con las relaciones electromagnéticas, las tensiones inducidas en las bobinas del estátor originadas por el flujo creado por el rotor se pueden expresar por:

$$\begin{aligned} e_{aa'} &= \sqrt{2}E \cdot \text{sen}(\Omega t) \\ e_{bb'} &= \sqrt{2}E \cdot \text{sen}(\Omega t - 120^\circ) \\ e_{cc'} &= \sqrt{2}E \cdot \text{sen}(\Omega t - 240^\circ) \end{aligned} \quad (2.40)$$

donde E es el valor eficaz de la tensión en cada devanado, que depende de la velocidad Ω y de la intensidad de excitación I_{ex} , que circula por el devanado del rotor.

Para conseguir tensiones de frecuencia industrial de 50 Hz, con una máquina de un par de polos, la velocidad de giro del rotor ha de ser de 50 revoluciones por segundo (50 Hz = 50 rps = 3000 rpm), es decir, $\Omega = 2\pi 50$ (rd/s). Si la máquina dispone de p pares de polos, las tensiones de 50 Hz se consiguen con una velocidad de rotación de $\Omega = 2\pi 50/p$ (rd/s) = 3000/ p (rpm). En consecuencia, la relación entre pulsación (frecuencia) eléctrica ω (f) y velocidad de rotación mecánica Ω , es: $\omega = 2\pi f = \Omega \cdot p$.

Por otra parte, si se unen todos los terminales a' , b' y c' se obtiene una configuración en estrella de los devanados estatóricos. Análogamente, si se unen los terminales a' con b , b' con c y c' con a se obtiene una configuración en triángulo, con las tensiones compuestas (fase-fase) en bornes de la máquina.

En lo sucesivo, salvo que se diga lo contrario, siempre se considerará el generador en configuración estrella. Y en el caso de disponer la configuración triángulo, se puede hacer uso de la transformación triángulo-estrella descrita en cualquier texto de teoría de circuitos.

Así pues, una máquina síncrona en vacío puede modelarse por un sistema trifásico equilibrado de tensiones instantáneas e_a , e_b y e_c , y en notación fasorial \mathcal{E}_a , \mathcal{E}_b y \mathcal{E}_c , con las siguientes expresiones:

$$\begin{aligned} e_a &= \sqrt{2}E \cdot \text{sen}(\omega t) \\ e_b &= \sqrt{2}E \cdot \text{sen}(\omega t - 120^\circ) \\ e_c &= \sqrt{2}E \cdot \text{sen}(\omega t - 240^\circ) \end{aligned} \quad (2.41)$$

Si no se consideran los efectos de la saturación, la tensión E se puede expresar por $E = k \cdot \omega \cdot I_{ex}$, donde k es una constante e I_{ex} es la intensidad de excitación de los devanados rotóricos. Esta última expresión de la tensión eficaz E es de suma importancia en la regulación de la tensión en las máquinas síncronas, puesto que pone de manifiesto que para regular la tensión en bornes de la máquina, supuesta su frecuencia constante, se puede actuar sobre la intensidad de excitación.

En la Figura 2.41 se representa el circuito eléctrico de una máquina síncrona en vacío en régimen estacionario, compuesta únicamente por un sistema trifásico de tensiones (fuente trifásica ideal).

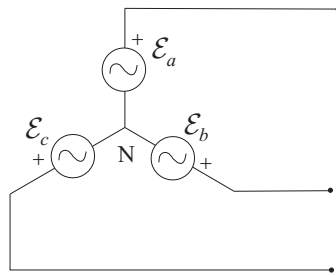


Figura 2.41. Circuito eléctrico de una máquina síncrona en vacío.

Hasta ahora se ha descrito la máquina síncrona en vacío. Sin embargo, si en los bornes de la máquina conectamos una carga eléctrica, y se considera que las tensiones tienen una frecuencia f , por los devanados estatóricos circularán unas intensidades i_a , i_b e i_c también de la misma frecuencia f .

Dichas intensidades presentarán un desfase φ respecto a las correspondientes tensiones inducidas por el rotor e_a , e_b y e_c , tal que:

$$\begin{aligned} i_a &= \sqrt{2}I \cdot \text{sen}(\omega t - \varphi) \\ i_b &= \sqrt{2}I \cdot \text{sen}(\omega t - 120^\circ - \varphi) \\ i_c &= \sqrt{2}I \cdot \text{sen}(\omega t - 240^\circ - \varphi) \end{aligned} \quad (2.42)$$

Las intensidades estatóricas, debido a la disposición geométrica de los devanados, crean un vector de inducción \vec{B}_s de valor constante que gira a la misma velocidad que el rotor, o lo que es lo mismo a la misma frecuencia que las intensidades que lo crearon. De este modo, desde un punto de vista de los acoplamientos magnéticos, los devanados de la máquina pueden representarse por dos bobinas giratorias: la del rotor (r-r'), que genera el vector \vec{B}_r , y una bobina "ficticia" en el estátor (s-s'), que genera el vector \vec{B}_s . Ambas bobinas son alimentadas por sendas intensidades continuas: I_{ex} para el rotor y la intensidad "ficticia" I_s para el estátor. En la Figura 2.42 se muestran las dos bobinas giratorias definidas y sus correspondientes vectores de inducción que se determinan por:

$$\vec{B}_r = \frac{N_r I_r \Lambda}{S} \quad ; \quad \vec{B}_s = \frac{3\sqrt{2} N_s I_s \Lambda}{S}$$

donde Λ y S son respectivamente la permeancia magnética y la sección del circuito magnético.

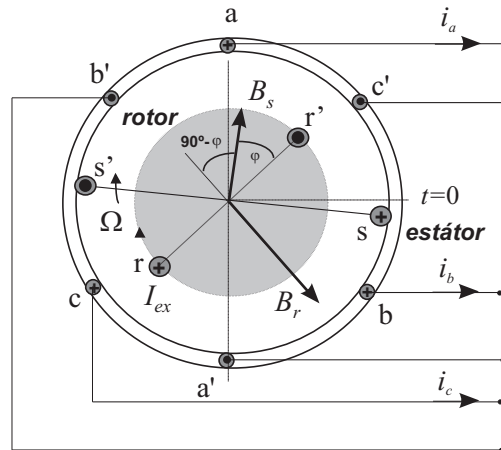


Figura 2.42. Vectores de inducción en una máquina síncrona de un par de polos.

Por consiguiente, la combinación vectorial de los dos vectores de inducción, el creado por el rotor y por el devanado ficticio del estátor, inducirá en cada una de las bobinas del estátor una tensión distinta a la inducida únicamente por el vector \vec{B}_r (de valor modular E). A este fenómeno se le conoce como *reacción de inducido*. El cálculo del efecto del vector del devanado ficticio $s - s'$ sobre la tensión E , se establece por la proyección del vector \vec{B}_s en la dirección del vector \vec{B}_r . De este modo, al flujo magnético creado por el vector \vec{B}_r se le superpone el flujo de la inducción magnética $B_s \sin(\varphi)$. Matemáticamente, el fenómeno de reacción de inducido se modela mediante la denominada reactancia de reacción de inducido X_{ri} .

Por otra parte, existe una porción del flujo creado por el vector \vec{B}_s que no abarca al devanado del rotor que se representan mediante una reactancia X_p . La combinación de esta última reactancia con la reactancia de reacción de inducido X_{ri} da lugar a la denominada reactancia síncrona X_s de la máquina.

Además de los efectos de los fenómenos magnéticos, en la máquina se tienen los fenómenos resistivos debidos a las pérdidas en los conductores eléctricos de las bobinas, que se modelan mediante resistencias eléctricas en serie. En consecuencia, el modelo de una máquina síncrona en estado estacionario viene dado por el circuito que se muestra en la Figura 2.43, donde, como suele ser habitual, no se han considerado las resistencias debido a su reducido valor respecto a las reactancias.

Por otra parte, el circuito trifásico equilibrado de la Figura 2.43 puede ser estudiado a partir del circuito monofásico equivalente de la Figura 2.44, cuyos parámetros son:

\mathcal{E} : tensión interna, función de la intensidad de excitación y de la velocidad de giro del rotor, cuyo valor eficaz se obtiene mediante el ensayo de vacío de la máquina.

X_s : reactancia síncrona, que se obtiene a partir del ensayo de cortocircuito de la máquina, y que modela todos los flujos originados por el estátor.

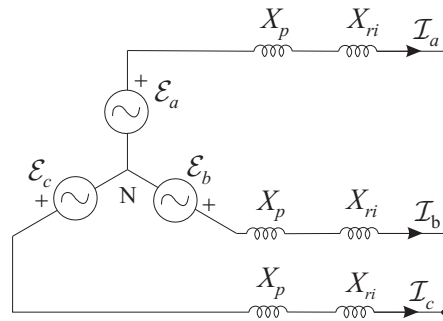


Figura 2.43. Circuito de una máquina síncrona en carga.

\mathcal{I} : intensidad que suministra la máquina.

\mathcal{U} : tensión en bornes de la máquina o tensión de salida.

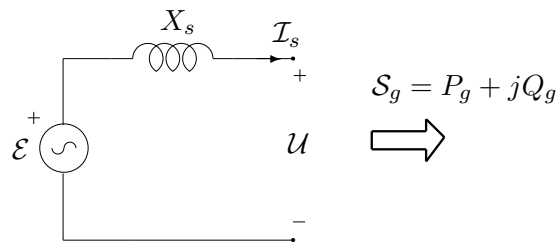


Figura 2.44. Circuito monofásico equivalente de una máquina síncrona en régimen estacionario.

A partir de la Figura 2.44 se pueden establecer fácilmente las expresiones de las potencias activa y reactiva suministradas por la máquina, considerada como generador y modelada en p.u., a cualquier carga conectada en sus bornes:

$$\mathcal{S}_g = P_g + j \cdot Q_g = \mathcal{U} \cdot \mathcal{I}^* \tag{2.43}$$

donde \mathcal{S}_g es la potencia compleja en bornes de la máquina, P_g la potencia activa o real y Q_g la potencia reactiva o imaginaria en bornes de la máquina.

Considerando las tensiones fasoriales $\mathcal{U} = U \angle 0^\circ$ y $\mathcal{E} = E \angle \delta$ y sustituyendo el valor de la intensidad $\mathcal{I} = (\mathcal{E} - \mathcal{U})/jX_s$ en (2.43), se obtienen las dos expresiones, semejantes a las definidos para el modelo serie de una línea:

$$P_g = \frac{EU}{X_s} \cdot \text{sen } \delta \tag{2.44}$$

$$Q_g = \frac{EU}{X_s} \cdot \text{cos } \delta - \frac{U^2}{X_s} \tag{2.45}$$

Asimismo, el rotor de la máquina se mueve gracias a la aportación de energía (potencia) que le suministra el elemento motriz (turbina). Si se denomina P_m a la potencia proveniente

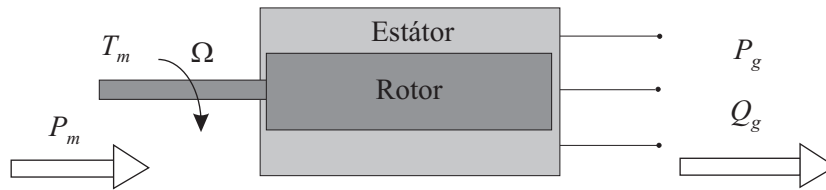


Figura 2.45. Representación de una máquina síncrona.

del elemento motriz que mueve la máquina síncrona, resulta el balance de potencias que se muestra en la Figura 2.45.

Aplicando el teorema de conservación de la potencia compleja al esquema de la Figura 2.45, se deduce que $P_m = P_g + P_{\text{perd}}$, donde P_{perd} representa las pérdidas que son únicamente mecánicas, si no se consideran las resistencias eléctricas de los devanados. Las anteriores expresiones también son válidas cuando la máquina funciona como motor. En este caso, la máquina sobre un régimen estacionario absorbe potencia eléctrica y la suministra a una carga mecánica.

Del balance de potencias anterior se concluye que los aspectos relacionados con la potencia reactiva sólo están vinculados con las partes eléctricas (circuito eléctrico) de la máquina, mientras que para la potencia activa existe una relación entre la parte motriz y el circuito eléctrico. Esta relación de las potencias activas del generador y la potencia mecánica del elemento motriz, se establece, para cualquier régimen de funcionamiento, a partir de la ley fundamental de la mecánica aplicada a móviles con movimiento giratorio:

La suma de pares de fuerza aplicados a una masa en rotación es igual a la inercia de la masa por su aceleración angular.

Aplicando el anterior principio a las potencias de la máquina, considerando la referencia de funcionamiento como generador, se tiene la ecuación dinámica:

$$P_m - P_g - P_{\text{perd}} = M \cdot \frac{d\Omega}{dt} + D \cdot (\Omega - \Omega_s) \quad (2.46)$$

donde M es una constante de la máquina que depende de la inercia del conjunto generador-turbina, del número de pares de polos y de la velocidad síncrona, Ω es la velocidad angular del rotor, Ω_s es la velocidad angular síncrona del rotor y D es la denominada constante de amortiguamiento de la máquina (que se define en el Capítulo 10).

2.5.2. Condiciones de funcionamiento de la máquina síncrona

La máquina síncrona es un dispositivo reversible y, por tanto, puede funcionar como generador o como motor. La diferencia entre ambos modos de funcionamiento se establece a partir del sentido de la potencia mecánica. En ambos modos de funcionamiento la potencia reactiva puede ser consumida o suministrada por la máquina, como se establece en la ecuación (2.45), de tal forma que:

$$E \cdot \cos \delta > U \quad \rightarrow \quad Q_g > 0$$

$$E \cdot \cos \delta < U \quad \rightarrow \quad Q_g < 0$$

En consecuencia, la máquina síncrona puede trabajar en los cuatro cuadrantes de los ejes cartesianos $P - Q$, tal y como se representa en la Figura 2.46.

Generador	P	Generador
$\delta > 0$		$\delta > 0$
$E \cdot \cos \delta < U$		$E \cdot \cos \delta > U$
$\delta < 0$		$\delta < 0$
$E \cdot \cos \delta < U$		$E \cdot \cos \delta > U$
Motor		Motor

Figura 2.46. Situaciones de funcionamiento de la máquina síncrona.

Los generadores síncronos representan la práctica totalidad de la producción de la energía eléctrica en una red. Por ello, estos generadores son los dispositivos básicos para mantener la frecuencia de la red, y en gran medida las tensiones en los nudos. En consecuencia, los generadores síncronos disponen de sendos controles de la frecuencia (control P-f) y del módulo de la tensión generada (control Q-V)⁷.

De acuerdo con los reguladores $Q - V$ y $P - f$ disponibles, las condiciones de funcionamiento estacionario de un generador síncrono visto desde sus bornes de salida, responden a las de un elemento con la potencia activa P y tensión eficaz U especificadas (elemento nodal $P - V$). Para el caso de la máquina funcionando como motor, el modelo se define en términos de potencias activa y reactiva especificadas (elemento nodal $P - Q$).

Por otra parte, el generador síncrono, como cualquier otro dispositivo eléctrico, presenta restricciones de orden tecnológico y económico en sus condiciones de funcionamiento, entre las que se pueden citar:

- *Límites de la potencia mecánica:* $P_{m,máx}$, que se establece por la potencia máxima que se puede extraer de la turbina y $P_{m,mín}$, la potencia mínima que económica o tecnológicamente puede dar la turbina.
- *Límite térmico del estátor:* $I_{máx}$, es la intensidad máxima que puede circular por los devanados del estátor. Si se considera la tensión en bornes de la máquina fija, el límite térmico se puede establecer como una potencia aparente máxima $S_{máx}$.
- *Límite de tensión interna máxima:* $E_{máx}$, definida por la intensidad máxima de excitación que puede recorrer el rotor y/o la máxima tensión de aislamiento.
- *Límite de estabilidad:* $\delta_{máx}$, este límite se establece a partir de consideraciones de estabilidad de la máquina, que el lector puede ver en el Capítulo 10. Sin embargo, a título orientativo, se indica que este límite se puede establecer por la cota superior de 90° , que corresponde a la potencia activa máxima que puede suministrar el generador a la red.

⁷ En el Capítulo 5 el lector puede encontrar una explicación más detallada y extensa del control de generadores.

Ejemplo 2.8:

A continuación, se determinan analítica y gráficamente, sobre un ejemplo numérico, los lugares geométricos de los límites de un generador síncrono y, por tanto, su zona de trabajo. La representación gráfica se realiza en un sistema cartesiano $P - Q$. Los datos del generador son:

- Tensión nominal en bornes $U = 11$ kV.
- Reactancia síncrona $X_s = 1,2$ p.u.
- Potencia nominal de la turbina $P_m = 40$ MW.
- Potencia aparente nominal del generador $S_n = 50$ MVA.

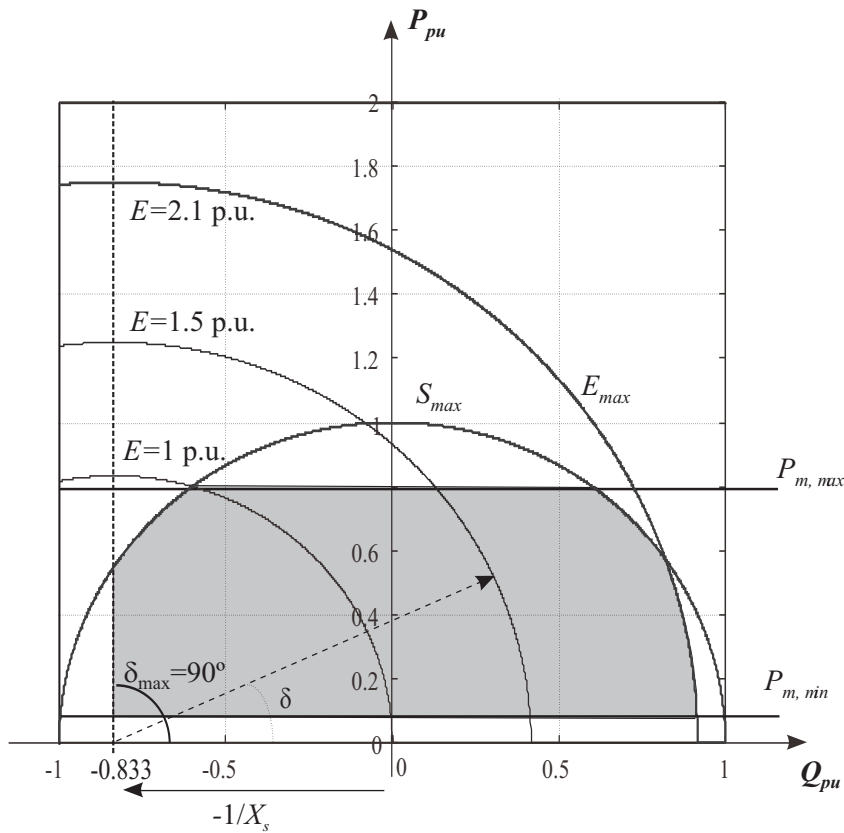


Figura 2.47. Zonas y límites de funcionamiento de la máquina síncrona.

A partir de los datos del generador, sus límites de funcionamiento, expresados en p.u. referidos a $U_{base} = 11$ kV y $S_{base} = 50$ MVA, se determinan por:

- *Potencia activa máxima:* $P_{m,máx} =$ Potencia mecánica nominal de la turbina que en este caso vale $40/50=0.8$ p.u. En la Figura 2.47 esta potencia se define por la recta $P_m = 0,8$ p.u.
- *Potencia activa mínima:* $P_{m,mín} =$ Potencia mecánica mínima que se considera para el adecuado funcionamiento del grupo (se estima en el 10 % de la potencia nominal). En la Figura 2.47 está representada por la recta $P_m = 0,08$ p.u.

- *Intensidad máxima de estátor:* $I_{\text{máx}}$, cuyo valor para $U = 1,0$ p.u. coincide con la potencia aparente máxima del generador, $S_{\text{máx}}$, que se estima igual a la nominal, $S_{\text{máx}} = S_n = 1$ p.u. Por tanto, el lugar geométrico viene definido por los puntos que cumplen la ecuación $P^2 + Q^2 = S_{\text{máx}}^2$, que son los correspondientes a la circunferencia de radio $S_{\text{máx}}$ y centro en el punto ($P = 0, Q = 0$).

- *Intensidad máxima en el rotor:* Este valor se suele traducir en términos de la tensión interna máxima, $E_{m\acute{a}x}$. De este modo, siempre trabajando en valores p.u., el lugar geométrico para la tensión $E_{m\acute{a}x}$, combinando las ecuaciones (2.44) y (2.45), se expresa por la ecuación:

$$P^2 + \left(Q + \frac{U^2}{X_s} \right)^2 = \frac{E_{m\acute{a}x}^2 U^2}{X_s^2}$$

y se corresponde en la Figura 2.47 con la circunferencia de radio $E_{m\acute{a}x}/X_s$ y centro en el punto $(P = 0, Q = -1/X_s)$.

- *Límite de estabilidad estacionaria:* Este límite característico de las máquinas síncronas se define para un valor del ángulo de desfase $\delta = 90^\circ$, entre las tensiones interna, \mathcal{E} , y en la tensión en bornes, $\mathcal{U} = U|_{0^\circ}$. En esta situación, la potencia reactiva del generador vale $Q = -1/X_s$. En consecuencia, el límite de estabilidad estacionaria, gráficamente, es la recta definida por $Q_{min} = -1/X_s$.

Con los límites indicados, queda definida la zona de funcionamiento del grupo de generación eléctrica por el área sombreada en la Figura 2.47.

2.5.3. Máquina síncrona de rotor de polos salientes

Tal y como se ha mencionado, además de la máquina síncrona de rotor cilíndrico (que ya se ha descrito), existe el otro tipo de máquina denominada de rotor de polos salientes que se va a analizar y modelar en este apartado. Para este fin, se muestra en la Figura 2.48 la máquina de polos salientes, donde ahora en vez de representar los vectores de inducción de estátor y rotor, se disponen los vectores asociados a las fuerzas magnetomotrices que, a diferencia de los de inducción, no dependen de la geometría del circuito magnético.

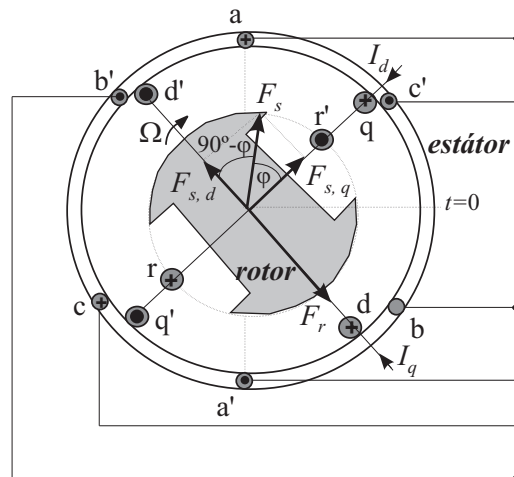


Figura 2.48. Máquina síncrona de rotor de polos salientes.

De la observación de la máquina de polos salientes fácilmente se constata que no presenta una simetría completa, como ocurre con la máquina de rotor liso y, por tanto, la permeancia magnética correspondiente al vector de F_s es función de la posición del rotor, función que se considera sinusoidal y que permite establecer un modelo de la máquina con parámetros sinusoidales.

No obstante, en la máquina se pueden definir dos ejes de simetría en las direcciones longitudinal (eje directo) y transversal al rotor (ejes d-d' y q-q' de la Figura 2.48), lo que permite modelar la máquina con parámetros constantes⁸. Este análisis se fundamenta en la descomposición de la fuerza magnetomotriz F_s en los dos ejes mencionados ($F_{s,d}$ y $F_{s,q}$).

De este modo, la máquina de polos salientes, desde el punto de vista eléctrico y magnético, se puede representar por tres bobinas:

1. La del rotor (r-r') recorrida por la intensidad continua I_r y que genera F_r y el vector B_r .
2. La ficticia del estátor (q-q') por la que circula una intensidad continua I_d y que origina $F_{s,d}$ y $B_{s,d}$.
3. La ficticia del estátor (d-d') recorrida por una intensidad continua I_q y que origina $F_{s,q}$ y $B_{s,q}$.

Las variables magnéticas mencionadas se pueden expresar como:

$$F_r = N_r I_r \quad ; \quad F_{s,d} = N_s I_d \quad ; \quad F_{s,q} = N_s I_q \quad (2.47)$$

$$B_r = \frac{N_r I_r \Lambda_d}{S_d} \quad ; \quad B_{s,d} = \frac{N_s I_d \Lambda_d}{S_d} \quad ; \quad B_{s,q} = \frac{N_s I_q \Lambda_q}{S_q} \quad (2.48)$$

donde Λ_d y S_d (Λ_q y S_q) son, respectivamente, la permeancia y la sección del circuito magnético por donde circula el flujo asociado a la fuerza magnetomotriz $F_{s,d}$ ($F_{s,q}$).

A partir de las anteriores expresiones, se pueden determinar los flujos magnéticos que concatenan los devanados (d-d') y (q-q'), resultando:

$$\psi_d = (N_s I_d - N_r I_r) \Lambda_d$$

$$\psi_q = N_s I_q \Lambda_q$$

Y de acuerdo con la ley de Lenz, se tienen las tensiones inducidas en las bobinas fijas del estátor, siendo para la fase a⁹:

$$u_{a,q} = (-N_s^2 I_d + N_r N_s I_r) \Lambda_d \omega \text{sen}(\omega t)$$

$$u_{a,d} = N_s^2 I_q \Lambda_q \omega \text{sen}(\omega t - 90^\circ)$$

⁸ La transformación de Park es una transformación matemática que descompone las variables eléctricas y magnéticas en los ejes longitudinal y transversal.

⁹ Las tensiones se refieren a la inducción que se presentan en las bobinas del estátor debidas a los flujos de las bobinas ficticias móviles, y no a las tensiones en las bobinas ficticias que serían continuas.

Si a las anteriores ecuaciones se les añade el flujo de dispersión, modelado por una reactancia de dispersión X_p , y se expresan en notación fasorial, resulta la ecuación (cuya representación se tiene en la Figura 2.49):

$$\mathcal{U} = \mathcal{E} - jX_d\mathcal{I}_d - jX_q\mathcal{I}_q \tag{2.49}$$

donde

$E = N_s N_r \Lambda_d I_r \omega$, es la tensión interna.

$X_d = X_p + N_s^2 \Lambda_d \omega$ y $X_q = X_p + N_s^2 \Lambda_q \omega$, son las reactancias longitudinal y transversal, respectivamente.

$\mathcal{I}_d = jI \sin(\varphi)$ e $\mathcal{I}_q = I \cos(\varphi)$, son las intensidades longitudinal y transversal.

\mathcal{U} , es la tensión en bornes de la máquina.

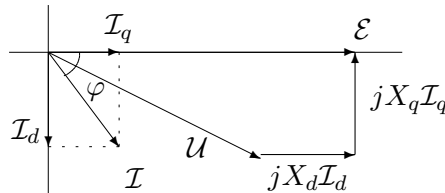


Figura 2.49. Diagrama fasorial de la máquina síncrona de polos salientes.

Para el caso de rotor cilíndrico se cumple que $X_d = X_q = X_s$ y, en consecuencia, la expresión (2.49) se reduce a la ecuación ya conocida:

$$\mathcal{U} = \mathcal{E} - jX_s(\mathcal{I}_d + \mathcal{I}_q) = \mathcal{E} - jX_s\mathcal{I} \tag{2.50}$$

2.6. La máquina asíncrona o de inducción

La máquina asíncrona o de inducción es una máquina eléctrica en la que los devanados estatóricos se alimentan a través de una fuente de tensión trifásica, mientras que los devanados rotóricos están en cortocircuito y son recorridos por intensidades inducidas desde el estátor.

En condiciones estacionarias equilibradas, la máquina asíncrona se comporta de una forma similar a un transformador [7]. De este modo, el modelo estacionario de una máquina de inducción trifásica es semejante al de un transformador de potencia (apartado 2.4). Así pues, el circuito monofásico equivalente definido para una configuración estrella de los devanados estatóricos y supuesta la reducción de los parámetros y variables rotóricas al estátor, puede representarse en una versión simplificada por el circuito de la figura 2.50.

Las variables y parámetros que se observan en dicho circuito, en p.u., son:

P y Q : potencias activa y reactiva en bornes de la máquina.

\mathcal{U}_s e \mathcal{I}_s : tensión y corriente en bornes (estátor) del generador.

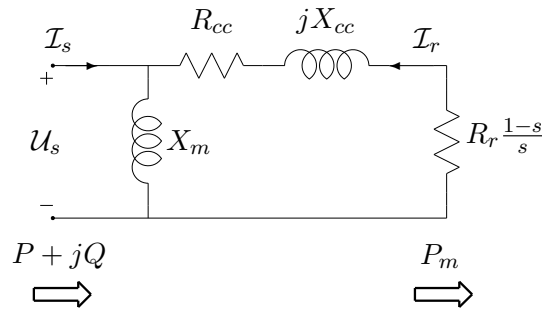


Figura 2.50. Circuito monofásico equivalente aproximado de la máquina asíncrona.

I_r : intensidad rotórica reducida al estátor.

$Z_{cc} = R_{cc} + jX_{cc}$: impedancia de cortocircuito, que comprende la del estátor más la del rotor reducida al estátor.

X_m : reactancia por fase que modela la magnetización del núcleo ferromagnético.

s : deslizamiento de la máquina obtenido como $s = (\omega_s - \omega)/\omega_s$, donde ω_s es la velocidad síncrona en rad/s.

P_m : potencia mecánica que la máquina intercambia con el exterior que se puede expresar a partir de los parámetros eléctricos, como:

$$P_m = I_r^2 \cdot R_r \cdot \frac{1-s}{s}$$

donde R_r es la resistencia rotórica reducida al estátor.

Típicamente el funcionamiento estacionario de la máquina asíncrona se representa sobre gráficos potencia mecánica-deslizamiento y potencia reactiva-deslizamiento, en función de la tensión de alimentación U_s . En la Figura 2.51 se muestran estas gráficas para una máquina de inducción para diferentes tensiones.

En la gráfica $P - s$ de la Figura 2.51 se observa que para deslizamientos mayores que 0 (velocidades rotóricas subsíncronas) la potencia mecánica es positiva (la potencia activa en bornes es consumida) y la máquina se dice que funciona como motor. En cambio, para deslizamientos menores que 0 (velocidades rotóricas supersíncronas) la potencia es negativa (la potencia activa en bornes es generada), por lo que el funcionamiento es como generador. Por otra parte, en la gráfica $Q - s$ se aprecia que la potencia reactiva es siempre positiva (es decir, consumida). Así, se concluye que las máquinas asíncronas necesitan estar conectadas a una fuente de tensión (red eléctrica) que realice el aporte de la potencia reactiva. No obstante, existen sistemas de autoexcitación para este tipo de máquinas basados en dispositivos electrónicos que tratan de eliminar la necesidad de la red eléctrica, pero que no son objeto de estudio en este capítulo.

Otras situaciones extremas de interés que pueden observarse en las gráficas son los valores para deslizamientos $s = 1$ (rotor parado) y $s = 0$ (máquina en vacío).

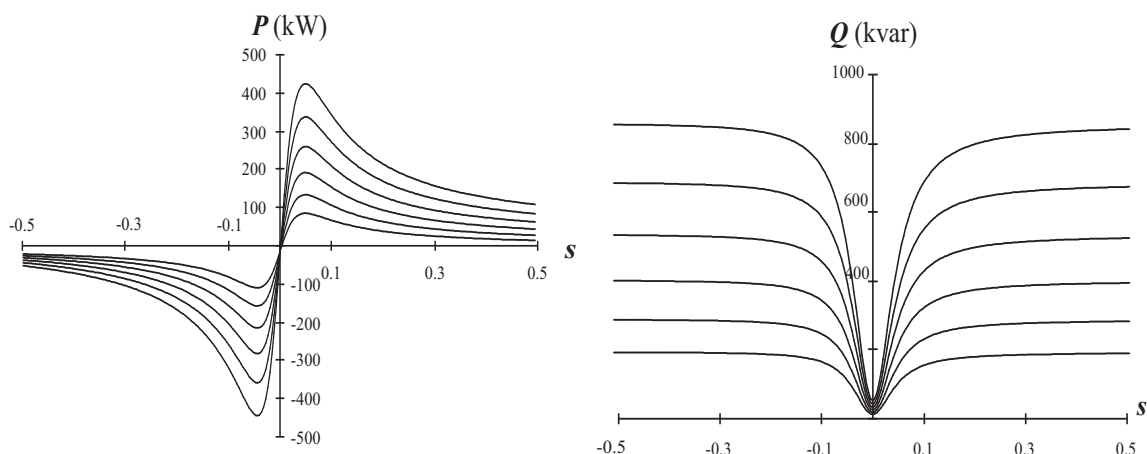


Figura 2.51. Curvas $P - s$ y $Q - s$ de una máquina asíncrona.

Para el primer caso, rotor parado, la potencia mecánica es nula y la potencia reactiva presenta su valor máximo. Mientras que para la máquina en vacío la potencia mecánica es también nula y la potencia reactiva se reduce a la debida a la reactancia de magnetización.

Desde un punto de vista del circuito equivalente de la máquina asíncrona en régimen estacionario, como se aprecia en la Figura 2.50, ésta puede ser modelada por una admitancia equivalente \mathcal{Y}_{eq} definida por:

$$\mathcal{Y}_{\text{eq}} = j(B_c - B_m) + \frac{1}{R_r \frac{1-s}{s} + R_{\text{cc}} + jX_{\text{cc}}} \quad (2.51)$$

donde B_m es la inversa de la reactancia de magnetización (X_m), y B_c es la susceptancia de la batería de condensadores que se dispone en paralelo en bornes de la máquina para compensar su factor de potencia.

Otro posible modelo estacionario de la máquina asíncrona es como fuente de potencia. Este modelo se obtiene a partir de la relación entre las potencias de la Figura 2.50 [8]:

$$U_s^2 \cdot I_r^2 = I_r^2 \cdot X_{\text{cc}} + (P_m + I_r^2 \cdot R_{\text{cc}})^2$$

De la ecuación bicuadrática anterior, y seleccionado el menor valor, se obtiene $I_r^2 = f(U_s, P_m)$. De este modo, las potencias en bornes de la máquina se pueden expresar por:

$$P = P_m + f(U_s, P_m) \cdot R_{\text{cc}}$$

$$Q = U_s^2 \cdot (B_c - B_m) + f(U_s, P_m) \cdot X_{\text{cc}}$$

Si se admiten algunas aproximaciones de orden práctico como $B_c = B_m$, $R_{\text{cc}} = 0$ y $U_s = 1$, las potencias se pueden formular como sigue:

$$P \approx P_m \quad ; \quad Q \approx f(U_s, P_m) \cdot X_{\text{cc}} \approx \frac{P_m^2 X_{\text{cc}}}{U_s - X_{\text{cc}}} \approx P^2 X_{\text{cc}}$$

Los límites de funcionamiento de una máquina asíncrona, como en otro tipo de máquinas y elementos de las redes eléctricas, vienen impuestos por condiciones tecnológicas y económicas. En este caso, se definen tres límites de funcionamiento:

- *Límite térmico o de intensidad de estátor:* Se define por la intensidad máxima que puede circular por los devanados del estátor de la máquina y se expresa por:

$$I_s = \frac{\sqrt{P^2 + Q^2}}{U_s} < I_{s,\text{máx}}$$

- *Límite de aislamiento dieléctrico o de máxima tensión de alimentación:* $U_s < U_{s,\text{máx}}$.
- *Límite de estabilidad o de magnetización:* Este límite se puede establecer gráficamente para una tensión determinada, como el valor máximo de la potencia mecánica que corta a la correspondiente curva $P_m - s$ de la Figura 2.51.

2.7. Consumos

En los apartados anteriores se han considerado las cargas eléctricas individualmente y con modelos concretos. Así, se presentaron cargas estáticas, modelizadas por impedancias o fuentes de potencia, y cargas dinámicas como los motores asíncronos o síncronos. Sin embargo, es evidente que existe una mayor diversidad de dispositivos consumidores de energía eléctrica que no responden exactamente a los modelos descritos. Por otra parte, la mayoría de los estudios y análisis sobre redes eléctricas consideran cargas que combinan y aglutinan distintos dispositivos consumidores (por ejemplo, una subestación que alimenta a una determinada zona de una ciudad, donde coexisten industrias, comercios y viviendas). En consecuencia, si se atiende únicamente a un criterio cualitativo, las cargas eléctricas pueden clasificarse en *particulares* y *globales*.

Las cargas *particulares* se consideran cuando se contempla un único dispositivo consumidor y, por tanto, responden a un *modelo concreto* (motor, lámpara, rectificador, horno...) y las *globales*, cuando se consideran varios dispositivos consumidores de distintas características o de diferentes regímenes de funcionamiento (subestación, centro de transformación, grupo de motores...). Este tipo de cargas, habitualmente, se definen mediante los denominados *modelos agregados*. Es evidente que, dentro de la agregación, la que presenta mayor grado de complejidad es aquella donde los dispositivos son de distinto tipo y presentan regímenes de funcionamiento diferentes.

Por otra parte, las cargas eléctricas admiten otras posibles clasificaciones, entre las que se resaltan las siguientes:

- Atendiendo a su función matemática: *lineales* y *no lineales*.
- Según el tipo de variables que consideren: *eléctricas*, *electromecánicas*, *electrotérmicas*, *ambientales*, *temporales*, etc.
- De acuerdo a su modelización: *determinísticas* y *aleatorias*.

Como criterio general, en este apartado se analiza la modelización de una carga eléctrica agregada, considerándose que el lector puede obtener los modelos de cargas concretas en otros capítulos de este texto o en la bibliografía. En consecuencia, en primer lugar, se describen las características de la modelización más habitual de las cargas por impedancias, fuentes de intensidad y fuentes de potencia. A continuación, se estudian los modelos funcionales que tratan de formular la relación entre la carga y la tensión, frecuencia de alimentación, etc. Este tipo de modelo tiene interés en el análisis dinámico de redes y en la gestión de la carga (*Load Management*) [12] [13]. Por último, se analizan los modelos predictivos de la demanda que se centran en la caracterización de la carga con la finalidad de estimar sus valores futuros.

2.7.1. Modelos estacionarios

El modelo de carga como *fente de potencia* representa tradicionalmente los grandes consumos existentes en las subestaciones. Por tanto, es claramente un modelo de agregación de consumidores. Los valores de la potencia activa y reactiva se obtienen mediante medidas efectuadas en las subestaciones y típicamente se representan por la denominada *curva diaria*, donde se muestran los consumos en kW y kvar con intervalos de hora. Un ejemplo de este tipo de representación se muestra en la Figura 2.52. No obstante, pueden existir dispositivos concretos que admitan la modelización como fuente de potencia, como ocurre con los motores de inducción o síncronos controlados.

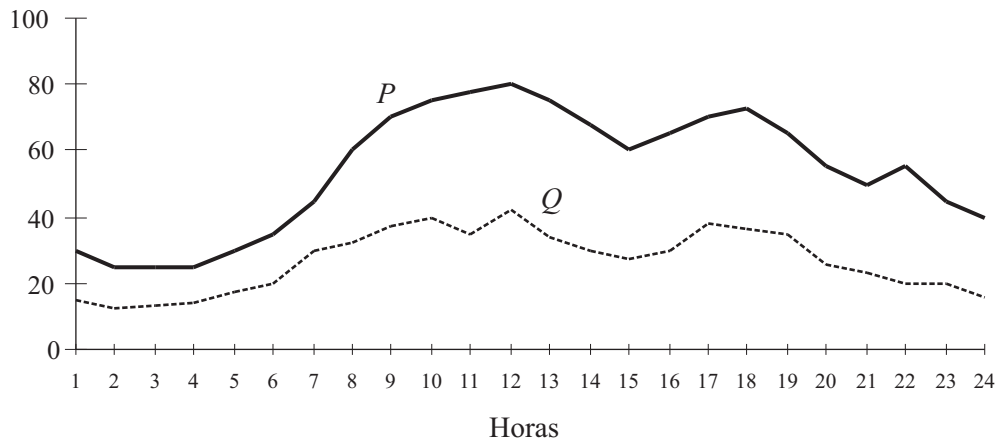


Figura 2.52. Curva diaria de una subestación.

El modelo que define la carga como una *impedancia* se ha visto de utilidad para consumos agregados en las redes de distribución de media y baja tensión, siendo de escasa utilización en el análisis de redes de transporte, salvo en casos concretos donde se busca la linealización de las ecuaciones nodales, como ocurre en el análisis de cortocircuitos y de estabilidad. Como en el anterior modelo, el de impedancias se presenta en algunos consumos concretos tales como lámparas de incandescencia, calefactores eléctricos, etc.

Los modelos por fuentes de intensidad son menos frecuentes en las cargas agregadas y su mayor utilización se presenta en el análisis armónico de redes eléctricas, con la finalidad

de realizar un proceso iterativo de cálculo. Por tanto, en general, suele ser un modelo poco útil en la práctica. Sin embargo, existen dispositivos concretos que responden a este modelo, como ocurre con los rectificadores electrónicos controlados.

En la mayoría de las redes, los consumos no pueden simularse únicamente por un tipo de modelo, siendo conveniente utilizar un modelo que contemple distintos tipos. En general este tipo de consumos se denominan *modelos estacionarios genéricos*. Estos modelos están definidos, consecuentemente, para resaltar el carácter agregado de una carga. Una de las muchas formas de expresar un consumo genérico es mediante las expresiones [12]:

$$P = K_p \cdot U^\alpha \quad ; \quad Q = K_q \cdot U^\beta$$

donde P y Q son las potencias activa y reactiva del consumo, K_p y K_q son los coeficientes, respectivamente, de las potencias activa y reactiva, y se definen a partir de las potencias en un punto de funcionamiento, U es el valor eficaz de la tensión nodal en el consumo y α y β son, respectivamente, los exponentes de las potencias activa y reactiva.

Obsérvese que para $\alpha = 0$ y $\beta = 0$, el modelo genérico es una fuente de potencia; para $\alpha = 2$ y $\beta = 2$, el modelo responde a un admitancia, y para $\alpha = 1$ y $\beta = 1$, se tiene una fuente de intensidad. La experiencia demuestra que este tipo de modelo se comporta adecuadamente para valores en p.u. de $0,90 < U < 1,1$ y $48,5 \text{ Hz} < f < 51,5 \text{ Hz}$. Los valores típicos de los exponentes, obtenidos en la práctica, se mueven dentro de los márgenes $1,5 \leq \alpha \leq 2,0$ y $3,0 \leq \beta \leq 4,0$.

En la Figura 2.53 se muestran las características de un consumo genérico para distintos supuestos de tensiones y exponentes.

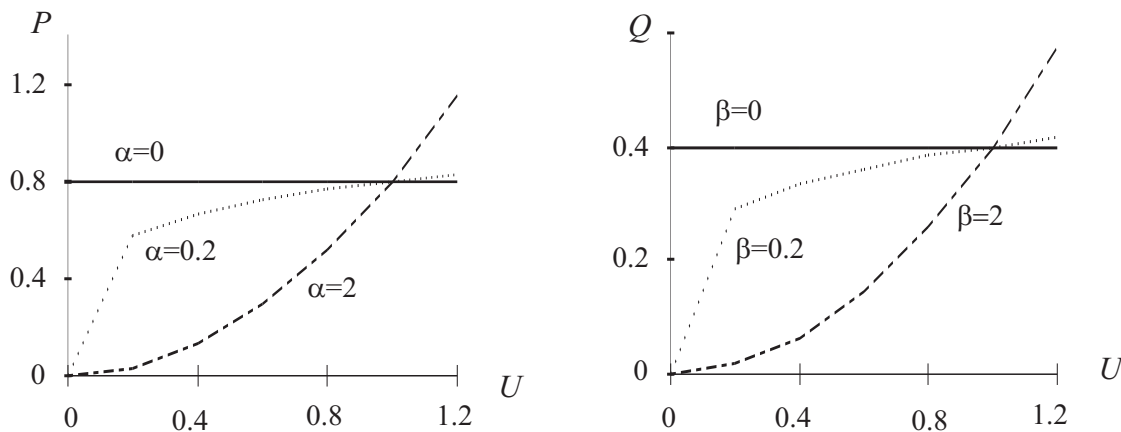


Figura 2.53. Representación de consumos genéricos.

2.7.2. Modelos funcionales

Es evidente que los modelos estacionarios descritos establecen un modelo funcional parcial. Así, una impedancia o una fuente de potencia son sensibles a las variaciones de la tensión de alimentación, aunque de forma totalmente contraria. Un aumento de tensión

para una impedancia, significa un aumento de la intensidad y para una potencia una disminución. Por tanto, un modelo funcional *a priori*, salvo que se conozca el tipo de carga, no suele limitarse únicamente a una expresión lineal [12] [14] [16] [15] [13].

En general un modelo funcional estacionario responde a una función no lineal, tal como $P = p(U, \omega)$ y $Q = q(U, \omega)$ [16], que aplicando el desarrollo de Taylor resulta un modelo linealizado:

$$P = P_0 + \sum K_i \cdot \Delta U^i + \sum K'_i \cdot \Delta \omega^i \quad (2.52)$$

$$Q = Q_0 + \sum L_i \cdot \Delta U^i + \sum L'_i \cdot \Delta \omega^i \quad (2.53)$$

2.7.3. Modelos predictivos

La ola de desregulación y privatización que se está dando en el sector eléctrico de algunos países, ha aumentado el interés de las compañías por los modelos predictivos de la demanda. De este modo, los modelos predictivos, que habitualmente tenían interés para la planificación de las redes, están siendo aplicados para obtener modelos de los consumos en el muy corto plazo (minutos) y corto plazo (horas). La consecuencia es el elevado auge que las técnicas predictivas están experimentando debido a la aparición de la competencia en el mercado eléctrico.

En este apartado se estudian algunos de los métodos más habituales en la predicción de la demanda eléctrica. Para ello, en primer lugar, se describen las singularidades de la demanda desde el punto de vista cualitativo, que hacen de la predicción un problema de difícil solución.

Es sobradamente conocido el carácter aleatorio de los consumos eléctricos debido a su incontrollabilidad y dependencia de variables ajenas a la propia red eléctrica. Además, la utilización eléctrica no se centra en una única actividad, sino por el contrario, se presenta prácticamente en todas las actividades de la sociedad (tracción, alumbrado, espectáculos, servicios, cargas térmicas...). En consecuencia, el carácter aleatorio unido a la generalidad y extensión del consumo eléctrico, hacen de la caracterización de la demanda un problema complejo. Sin embargo, se observan ciertas condiciones en la demanda que pueden ayudar a su conocimiento y caracterización. En concreto, se admiten las siguientes características y dependencias observadas en los consumos:

- *Dependencia de los consumos con la hora del día:* Como se observa en cualquier curva diaria, existe una variación en los consumos a lo largo del día. Así, se sabe que, en general, las horas de menor consumos se tienen durante el período nocturno, debido a la menor actividad social, y el mayor consumo se presenta durante las horas diurnas.
- *Dependencia de los consumos con el tipo de día:* Debido a la fuerte relación que existe entre los consumos y las actividades económicas, aquellos presentan tipologías muy diferentes entre los días denominados laborables y los días no laborables o festivos.
- *Dependencia de los consumos con el tipo de sociedad o zona:* Para un mismo día tipo, los consumos presentan curvas diarias distintas en relación con la actividad que se desarrolla en la zona. De este modo, el comportamiento de los consumos en una zona claramente industrial es muy diferente a otra residencial, de servicios o agraria.

- *Dependencia de los consumos con las condiciones atmosféricas:* Admitiendo una misma zona y día tipo, los consumos se ven fuertemente influenciados con las condiciones atmosféricas (temperatura, viento y nubosidad).

Los trabajos desarrollados para obtener modelos predictivos de la demanda se pueden agrupar en tres grandes bloques: los modelos basados en *series temporales* en los que el consumo se define de acuerdo con valores históricos, los *modelos causales* o funcionales, donde la carga es modelada en función de ciertos factores o variables ajenas a la red (exógenas), como por ejemplo las condiciones atmosféricas o el ámbito social, y los modelos más recientes, basados en técnicas de inteligencia artificial y computación neuronal [22]. Cada uno de estos procedimientos presenta ventajas e inconvenientes en todos los órdenes y tienen sus defensores y detractores.

Los modelos temporales y causales han sido extensamente utilizados con éxito y utilizan técnicas estadísticas para su cálculo. Sin embargo, los modelos causales presentan la ventaja de *entender* físicamente el comportamiento de la demanda. Los modelos que se basan en técnicas de inteligencia artificial, reconocimiento de formas y redes neuronales son los que actualmente están siendo objeto de un mayor número de trabajos. Hay autores que consideran que estos modelos están todavía poco contrastados y necesitan sistematizar sus procedimientos para que lleguen a ser una técnica de predicción con garantías en su aplicación.

Con la finalidad de presentar algunos de los modelos predictivos, matemáticamente el consumo y de una determinada zona z para cada instante de tiempo t , puede expresarse por:

$$y(t) = f(z, C(t), t) \quad (2.54)$$

donde z es la zona en la que se pretende realizar la predicción de la demanda que se define por el conjunto de actividades (industrias, servicios, clientes domésticos, etc.), $C(t)$ es el conjunto de variables que definen las condiciones atmosféricas (temperatura, humedad, velocidad del viento, nubosidad...) que presentan distintos valores para cada instante de tiempo t .

La aplicación de la ecuación (2.54) a los datos históricos que permitirán la formulación de los modelos predictivos da como resultado la expresión discreta:

$$y_k = f(z, C_k, k) \quad (2.55)$$

donde k representa los intervalos de tiempo, tal que para un instante de tiempo t se tiene $t = k \cdot \tau$, siendo el intervalo τ seleccionado de acuerdo con la estimación que se pretenda (minutos, horas, días, semanas).

Es evidente que la función anterior no debe interpretarse como una relación determinista entre las variables presentes, debido a la existencia de otras variables de difícil cuantificación o expresión, pero que se admite que presentan un comportamiento aleatorio. En definitiva, la función anterior pretende establecer una relación casual entre el valor del consumo y las variables atmosféricas y la zona o cargas que lo definen a partir de un conjunto de datos y medidas históricas.

Modelos predictivos causales

Los modelos causales se fundamentan, básicamente, en la búsqueda de la relación entre la demanda eléctrica y las condiciones atmosféricas, admitiéndose una clasificación previa de aquella respecto a la componente temporal para eliminar sus efectos sobre el modelo. La clasificación más elemental de la demanda es considerar separadamente los días laborables del resto y admitir una periodicidad en la curva diaria de la demanda que se atribuye a las actividades de la zona [1] [20]. De este modo, los modelos causales, en general, admiten una descomposición de la demanda $y(t)$, para una zona específica y días tipo, en [20]:

$$y(t) = y_d(t) + y_c(t) \quad (2.56)$$

donde $y_d(t)$ representa la componente determinista de la carga, que se obtiene, por ejemplo, a partir del valor medio de las curvas horarias de los consumos en un día tipo, e $y_c(t)$ es la parte del consumo que se considera dependiente de las condiciones atmosféricas.

A pesar de existir un elevado número de técnicas para abordar el modelo predictivo causal, los modelos más extendidos son los basados en la regresión lineal [17] [21]. Para ello, la formulación del problema de predicción de la demanda es del tipo [1]:

$$y_c(t) = a_0 + a_1T + a_2W + a_3L + a_4P \quad (2.57)$$

donde a_0, a_1, a_2, a_3 y a_4 son los coeficientes a calcular y T, W, L y P son las variables de las condiciones atmosféricas (temperatura, velocidad de viento, luminosidad y precipitación).

Modelos predictivos de series temporales

Estos modelos predictivos, fundamentados en el análisis de series temporales, utilizan, de forma combinada, métodos auto-regresivos y de media móvil, denominados ARMA (Auto-Regressive Moving Average) [18] [17]. La versión que considera además variables exógenas (por ejemplo temperatura atmosférica) se denomina ARMAX (Auto-Regressive Moving Average with exogenous variable) [19].

Los métodos de series temporales, conceptualmente se basan en la existencia de periodicidades en los datos a analizar (estacional, diaria, semanal u horaria), sin entrar a buscar las causas de dicha periodicidad.

Los modelos predictivos de series temporales se definen sobre un vector de observaciones (medidas) $y(k)$ que constituye una serie temporal discreta no estacionaria, donde k es el muestreo que viene determinado por la menor periodicidad que se admite (tales como horas para periodicidad diaria).

Aplicar el proceso ARMA sobre la serie $y(k)$ requiere los siguientes pasos: i) Transformación de la serie no estacionaria en otra estacionaria $x(k)$, de media y varianza constantes, y ii) Determinación de los órdenes p y q del ARMA y P y Q estacionales [17].

De este modo, se tiene, de acuerdo con el proceso auto-regresivo (AR), que los valores de $x(k)$ pueden ser expresados a partir de los valores previos $x(k-1), x(k-2), \dots, x(k-p)$ y una variable aleatoria gaussiana $a(k)$ de media cero y varianza σ^2 . A su vez, por el proceso de media móvil (MA), los valores $x(k)$ son también una combinación lineal de los valores previos $a(k), a(k-1), a(k-2), \dots, a(k-q)$. De la observación de la diferencia entre las dos series temporales $y(k)$ y $x(k)$, se determina la validez del modelo predictivo.

Bibliografía

- [1] M. J. H. Sterling, *Power System Control*, Peter Peregrinus LTD., 1978.
- [2] W. D. Stevenson, *Elements of Power Systems Analysis*, McGraw-Hill, 1981.
- [3] M. Khalifa, *High-Voltage Engineering*, Marcel Dekker, Inc., 1990.
- [4] E. Ras, *Transformadores, de medida y de protección*, Marcombo, 1972.
- [5] O. I. Elgerd, *Electric Energy Systems Theory: An Introduction*, McGraw-Hill, 1980.
- [6] T. Gönen, *Modern Power System Analysis*, Wiley, 1988.
- [7] P. C. Krause, *Analysis of Electric Machinery*, McGraw-Hill, 1986.
- [8] A. Feijóo y J. Cidrás, "Modelling of Wind Farm in Load Flow Analysis", *IEEE Trans. on Power Systems*, vol. 15, n.º 1, febrero 2000.
- [9] M. R. Patel, *Wind and Solar Power Systems*, CRC Press, 1999.
- [10] L. L. Freris, *Wind energy conversion systems*, Prentice-Hall, 1990.
- [11] R. Willheim y M. Waters, *Neutral grounding in high voltage transmission*, Elsevier, 1956.
- [12] IEEE Task Force Report, "Load Representation for Dynamic Performance Analysis", *IEEE Trans. on Power Systems*, vol. 8, n.º 2, pp. 472-482, 1993.
- [13] C. Álvarez, Malhamé y Gabaldón, "A Class of Models for Load Management Application and Evaluation Revisited", *IEEE Trans. on Power Systems*, vol. 7, n.º 4, pp. 1435-1443, noviembre 1992.
- [14] J. V. Milanovic y I. A. Hiskens, "Effects of Load Dynamics on Power System Damping", *IEEE Trans. on Power Systems*, vol. 10, n.º 2, pp. 1022-1027, mayo 1995.
- [15] S. Komami y S. Kimura, "Effect of Load Characteristics on Dynamic Stability of Power System", *Electrical Engineering in Japan*, vol. 107, n.º 4, pp. 32-41, 1987.
- [16] A. R. Bergen, D. J. Hill y C.L. Marcot, "Lyapunov Function for Multimachine Power Systems with Generator Flux Decay and Voltage Dependent Loads", *Electrical Power and Energy Systems*, vol. 8, n.º 1, pp. 2-10, enero 1986.
- [17] D. Peña, *Estadística Modelos y métodos. Volumen 2. Modelos lineales y series temporales*, Alianza Universidad Textos, Madrid, 1989 (2.ª edición).
- [18] G. E. P. Box y G. M. Jenkins, *Time series analysis: Forecasting and Control*, Holden-Day, San Francisco, 1970.
- [19] H. T. Yang, C. M. Huang y C. L. Huang, "Identification of ARMAX Model for Short Load Forecasting: an Evolutionary Programming Approach", *IEEE Trans. on Power Systems*, vol. 11, n.º 1, pp. 403-408, febrero 1996.
- [20] J. Y. Fan y J. D. McDonald, "A Real-Time Implementation of Short-Term Load Forecasting for Distribution Power Systems", *IEEE Trans. on Power Systems*, vol. 9, n.º 2, pp. 988-994, mayo 1994.
- [21] V. M. Vlahovic y I. M. Vujosevic, "Long-Term Forecasting: a Critical Review of Direct-Trend Extrapolation Methods", *Electrical Power and Energy Systems*, vol. 9, n.º 1, pp. 2-8, enero 1987.
- [22] H. Steinherz, C. E. Pedreira y R. Castro, "Neural Networks for Short-Term Load Forecasting: a Review and Evaluation", *IEEE Trans. on Power Systems*, vol. 16, n.º 1, pp. 44-55, febrero 2001.

Capítulo 3

Flujo de cargas

ANTONIO GÓMEZ EXPÓSITO Y FERNANDO L. ALVARADO

3.1. Introducción

El problema conocido como *flujo de cargas* (*load flow* o *power flow* en lengua inglesa) consiste en obtener las condiciones de operación en régimen permanente de un sistema de energía eléctrica. Más concretamente, dados los consumos en cada nudo, y la potencia generada por los alternadores, se trata de encontrar las tensiones en los nudos y los flujos de potencia por las líneas y transformadores.

Sin duda alguna, la rutina del flujo de cargas es la más empleada por los ingenieros involucrados en la explotación y planificación de los sistemas de potencia, bien como aplicación independiente o como subrutina de aplicaciones más complejas (estabilidad transitoria, colapso de tensiones, problemas de optimización, simuladores de entrenamiento, etc.).

En la operación diaria, constituye la base del análisis de seguridad del sistema. Esta herramienta se ejecuta periódicamente para identificar posibles problemas de sobrecargas o tensiones inaceptables, como consecuencia de la evolución de la carga, o cuando ocurre algún cambio brusco (inesperado o programado) en la topología de la red. En la planificación, permite simular el estado en que se encontrarían los distintos escenarios que se están analizando ante una demanda estimada.

El flujo de cargas consta básicamente de dos etapas: la primera y más decisiva consiste en obtener las tensiones complejas en todos los nudos eléctricos. Para este propósito no es posible utilizar las herramientas convencionales de análisis de circuitos lineales, porque las restricciones de contorno no se especifican en términos de impedancias (cargas) y fuentes de tensión (generadores) sino de potencias, lo cual conduce a un sistema no lineal de ecuaciones. La segunda etapa consiste simplemente en el cálculo de todas las magnitudes de interés, como flujos de potencia activa y reactiva, pérdidas, etc., lo cual es inmediato.

En este capítulo se explican en detalle las técnicas más utilizadas para el cálculo del flujo de cargas, incluyendo aspectos complementarios tales como el tratamiento de los límites de reactiva de los generadores, las tomas de transformadores controladas automáticamente, etcétera.

Una de las claves del éxito que tuvieron los programas de flujos de carga a comienzos de los setenta fue la introducción de técnicas numéricas eficientes para la solución de grandes sistemas de ecuaciones lineales. Estas técnicas, desarrolladas por ingenieros eléctricos específicamente para resolver este problema, marcaron un hito fundamental en el análisis de los sistemas de potencia, y constituyen hoy día materia obligada en los manuales de métodos numéricos. La última sección de este capítulo y el Apéndice A están dedicados precisamente a presentar las ideas y algoritmos más importantes en los que se sustentan estos procedimientos.

3.2. Formulación del problema

Como sabemos por la teoría de circuitos, el estado de una red eléctrica de n nudos queda determinado completamente mediante las tensiones complejas en todos sus nudos. Las leyes de Kirchhoff y los modelos para cada componente de la red se condensan en las ecuaciones nodales, que en forma compleja se escriben como:

$$\mathcal{I} = \mathcal{Y}\mathcal{U} \quad (3.1)$$

$$\mathcal{I}_i = \sum_{j=1}^n \mathcal{Y}_{ij}\mathcal{U}_j \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (3.2)$$

donde \mathcal{U} es el vector de tensiones nodales, \mathcal{I} el vector de intensidades netas inyectadas en los nudos e \mathcal{Y} la matriz $n \times n$ de admitancias de nudos.

Además, en cada nudo debe cumplirse que

$$\mathcal{S}_i = \mathcal{S}_{Gi} - \mathcal{S}_{Ci} = \mathcal{U}_i\mathcal{I}_i^* \quad (3.3)$$

siendo \mathcal{S}_i la potencia compleja neta inyectada en el nudo i , obtenida en el caso general como diferencia entre la potencia generada y la consumida por la carga en dicho nudo. La ecuación anterior, aplicada a todos los nudos, puede escribirse en forma matricial como:

$$\mathcal{S} = \text{diag}(\mathcal{U})\mathcal{I}^* \quad (3.4)$$

donde \mathcal{S} es el vector de potencias complejas nodales y $\text{diag}(\mathcal{U})$ denota una matriz diagonal cuyos elementos son los del vector \mathcal{U} .

Conocida la matriz de admitancias, las expresiones (3.1) y (3.4) constituyen un sistema de $2n$ ecuaciones complejas en términos de las $3n$ incógnitas complejas contenidas en \mathcal{S} , \mathcal{U} e \mathcal{I} . En teoría, conociendo n de dichas incógnitas podría resolverse el sistema no lineal resultante para obtener las $2n$ restantes. En la práctica, las intensidades complejas nodales nunca son conocidas o especificadas *a priori* en un sistema de potencia, por lo que se prefiere eliminarlas sustituyendo (3.1) en (3.4). Esto conduce al sistema no lineal de n ecuaciones complejas siguiente:

$$\mathcal{S} = \text{diag}(\mathcal{U})[\mathcal{Y}\mathcal{U}]^* \quad (3.5)$$

Descomponiendo la potencia compleja en su parte real e imaginaria, $\mathcal{S} = P + jQ$, y utilizando coordenadas cartesianas para los elementos de la matriz de admitancias, $\mathcal{Y} =$

$G + jB$, la ecuación anterior se convierte en:

$$P + jQ = \text{diag}(\mathcal{U})[G - jB]\mathcal{U}^* \quad (3.6)$$

$$P_i + jQ_i = \mathcal{U}_i \sum_{j=1}^n [G_{ij} - jB_{ij}]\mathcal{U}_j^* \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (3.7)$$

Los métodos iterativos más importantes que se describirán posteriormente no pueden trabajar con las ecuaciones complejas anteriores, porque la presencia de variables conjugadas impide llevar a cabo derivadas en forma compleja. Es preciso, por tanto, separar dichas ecuaciones en $2n$ ecuaciones reales. Habitualmente, las tensiones se expresan en coordenadas polares, $\mathcal{U} = V|\theta$, lo que conduce a:

$$P_i = V_i \sum_{j=1}^n V_j (G_{ij} \cos \theta_{ij} + B_{ij} \sen \theta_{ij}) \quad (3.8)$$

$$Q_i = V_i \sum_{j=1}^n V_j (G_{ij} \sen \theta_{ij} - B_{ij} \cos \theta_{ij}) \quad (3.9)$$

$$i = 1, 2, \dots, n$$

mientras que si se utilizan coordenadas cartesianas o rectangulares, $\mathcal{U} = V_r + jV_x$, se obtiene:

$$P_i = V_{ri} \sum_{j=1}^n (G_{ij}V_{rj} - B_{ij}V_{xj}) + V_{xi} \sum_{j=1}^n (G_{ij}V_{xj} + B_{ij}V_{rj}) \quad (3.10)$$

$$Q_i = V_{xi} \sum_{j=1}^n (G_{ij}V_{rj} - B_{ij}V_{xj}) - V_{ri} \sum_{j=1}^n (G_{ij}V_{xj} + B_{ij}V_{rj}) \quad (3.11)$$

$$i = 1, 2, \dots, n$$

En lo sucesivo, salvo indicación contraria, nos referiremos a las ecuaciones en coordenadas polares.

Obsérvese que cada nudo aporta dos ecuaciones y cuatro incógnitas, por lo que deben especificarse dos magnitudes por nudo para que las ecuaciones anteriores puedan resolverse. En función de las condiciones de contorno impuestas, pueden distinguirse dos tipos principales de nudos:

- *Nudos de consumo o nudos PQ*: Nudos donde se conoce el consumo de potencia activa ($P_{C_i}^{\text{esp}}$) y reactiva ($Q_{C_i}^{\text{esp}}$), siendo nula la potencia generada ($P_{G_i} = Q_{G_i} = 0$). Las restricciones impuestas son, por tanto,

$$P_i^{\text{esp}} = -P_{C_i}^{\text{esp}} \quad ; \quad Q_i^{\text{esp}} = -Q_{C_i}^{\text{esp}} \quad (3.12)$$

quedando como incógnitas las dos componentes de la tensión nodal respectiva. La gran mayoría de nudos de una red, sobre todo en niveles de menor tensión, son de este tipo.

- *Nudos de generación o nudos PV*: Nudos donde un generador regula la tensión a un valor especificado (V_i^{esp}) e inyecta una potencia activa ($P_{G_i}^{\text{esp}}$) determinada previamente por consideraciones económicas (véase el Capítulo 6). Las restricciones resultantes, que tienen en cuenta el posible consumo local, son:

$$P_i^{\text{esp}} = P_{G_i}^{\text{esp}} - P_{C_i}^{\text{esp}} \quad ; \quad V_i = V_i^{\text{esp}} \quad (3.13)$$

quedando Q_i y θ_i como incógnitas. Un caso particular de nudo PV surge cuando se conecta un compensador de reactiva (estático o rotativo) con capacidad para regular la tensión. En este caso $P_{G_i}^{\text{esp}} = 0$. La presencia de pequeños generadores sin regulador de tensión puede modelarse como nudos de consumo negativo.

Ahora bien, si sólo se considerasen ambos tipos de nudos, todas las potencias activas inyectadas deberían especificarse de antemano, lo cual es imposible porque las pérdidas en la red, que también deben ser aportadas por los generadores, no se conocen hasta que se obtienen los flujos de potencia por cada elemento. Es decir, la potencia activa de al menos un generador no puede ser especificada y debe calcularse al final del proceso. Afortunadamente, esta incógnita adicional se compensa con el hecho de que, cuando se trabaja con fasores, uno de los ángulos de fase puede tomarse libremente como origen de fases. Por simplicidad de cálculo, se toma como origen de fases precisamente el nudo de generación cuya potencia se deja libre. Este nudo, que suele ser un generador importante con capacidad para regular frecuencia, o un nudo de interconexión con el exterior, se denomina nudo de referencia, nudo oscilante o, más comúnmente, nudo *slack*.

Sea n_D el número de nudos de consumo. Entonces, el número de nudos de generación, sin contar el nudo slack, será $n_G = n - n_D - 1$. Sin pérdida de generalidad, supondremos que los n_D primeros nudos son de consumo y que el nudo de referencia es el último. En base a la clasificación de nudos realizada anteriormente, las ecuaciones que intervienen en el problema del flujo de cargas son las siguientes:

$$P_i^{\text{esp}} = V_i \sum_{j=1}^n V_j (G_{ij} \cos \theta_{ij} + B_{ij} \sin \theta_{ij}) \quad (3.14)$$

$$i = 1, 2, \dots, n_D + n_G$$

$$Q_i^{\text{esp}} = V_i \sum_{j=1}^n V_j (G_{ij} \sin \theta_{ij} - B_{ij} \cos \theta_{ij}) \quad (3.15)$$

$$i = 1, 2, \dots, n_D$$

La solución de este problema consiste en encontrar los desfases θ_i , $i = 1, 2, \dots, n_D + n_G$, y los módulos de tensiones V_i , $i = 1, 2, \dots, n_D$, que satisfacen las $2n_D + n_G$ ecuaciones (3.14) y (3.15).

Nótese que fijar la tensión compleja del nudo oscilante, y dejar libre su potencia compleja, implica simplemente que las dos ecuaciones respectivas no intervienen en el proceso. Dichas ecuaciones servirán después, una vez resuelto el problema, para hallar precisamente la potencia compleja de dicho nudo.

Del mismo modo, las n_G ecuaciones (3.9) excluidas de (3.15) permitirán calcular la potencia reactiva que necesita inyectar o absorber cada generador para mantener su tensión

al valor especificado. Como la capacidad de un generador para absorber o generar reactiva está limitada, es necesario comprobar que no se viola ninguno de los límites, lo cual complica y alarga normalmente el proceso de solución. Más adelante se explicará cómo se aborda este problema según la metodología adoptada.

Dado que las ecuaciones resultantes son no lineales, su solución debe ser forzosamente iterativa, por lo que es necesario adoptar unos valores iniciales para las variables del problema. La búsqueda de valores iniciales adecuados, que hagan converger el proceso iterativo hacia un punto físicamente viable, de entre las muchas soluciones matemáticamente posibles, no es un problema trivial en el caso general. Afortunadamente, las características especiales del problema del flujo de cargas, donde sabemos de antemano que las tensiones se mueven en una banda relativamente pequeña alrededor de su valor nominal, y que los desfases entre nudos adyacentes se mueven en márgenes estrechos por motivos de estabilidad, hacen que el denominado *perfil plano* sea casi siempre la mejor opción para iniciar el proceso iterativo. Dicho perfil consiste en hacer $\theta_i^0 = 0$ para todos los nudos y $V_i^0 = 1$ pu para los nudos de consumo. Si se ha ejecutado previamente un flujo de cargas, y los cambios en el estado del sistema han sido menores, puede iniciarse el proceso con la solución del caso anterior. Esto es especialmente útil cuando se analizan distintas perturbaciones partiendo del mismo caso base (véase el Capítulo 7). La experiencia demuestra, sin embargo, que utilizar unos valores aparentemente más próximos a la solución, pero arbitrarios, suele dar peores resultados que el perfil plano.

Una vez resueltas las ecuaciones (3.14) y (3.15) es posible calcular cualquier magnitud deseada (los programas comerciales de flujos de cargas generan una serie de ficheros o salidas gráficas con toda la información que el usuario especifique). Los flujos de potencia para un único elemento conectado entre los nudos i y j se pueden obtener de:

$$P_{ij} = V_i V_j (G_{ij} \cos \theta_{ij} + B_{ij} \sin \theta_{ij}) - G_{ij} V_i^2 \quad (3.16)$$

$$Q_{ij} = V_i V_j (G_{ij} \sin \theta_{ij} - B_{ij} \cos \theta_{ij}) + V_i^2 (B_{ij} - b_{pij}) \quad (3.17)$$

donde b_p denota la susceptancia paralelo del modelo en π presentado en el capítulo anterior. Cuando existen varios elementos en paralelo de distintas características, debe recurrirse directamente a dicho modelo para calcular los flujos individuales.

Análogamente, las pérdidas totales del sistema pueden calcularse, una vez hallada la potencia del nudo slack, mediante suma de las inyecciones de todos los nudos, o bien como suma de las pérdidas de cada elemento.

Ejemplo 3.1:

Considérese la red de 3 nudos mostrada en la Figura 3.1, en la que el nudo 1 se toma como referencia ($\theta_1 = 0$), el nudo 2 es PQ y el nudo 3 es PV. Los datos de esta red, sobre una base de 100 MVA, se muestran en la tabla siguiente (las admitancias paralelo son despreciables):

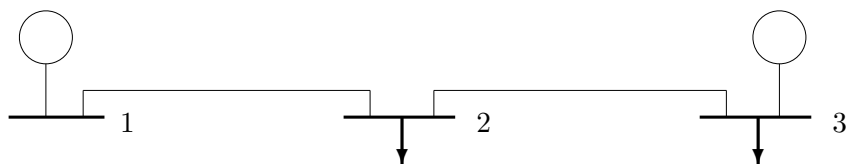


Figura 3.1. Red de 3 nudos para ilustrar los ejemplos.

Nudo	V	P_G	P_D	Q_G	Q_D
1	1.1	-	0	-	0
2	-	0	1	0	0.4
3	1.05	0.6	0.2	-	0.05
Impedancia serie 1-2:			$z_{12} = 0,03 + 0,3j$		
Impedancia serie 2-3:			$z_{23} = 0,06 + 0,2j$		

Para realizar los cálculos posteriores es conveniente disponer de la matriz de admitancias de nudos, cuya obtención es inmediata:

$$\mathcal{Y} = \begin{bmatrix} 0,3300 - 3,3003j & -0,3300 + 3,3003j & 0 \\ -0,3300 + 3,3003j & 1,7062 - 7,8875j & -1,3761 + 4,5872j \\ 0 & -1,3761 + 4,5872j & 1,3761 - 4,5872j \end{bmatrix}$$

En este caso, las incógnitas son θ_2 , V_2 para el nudo 2 y θ_3 para el nudo 3, y los valores especificados:

$$\begin{aligned} P_2^{\text{esp}} &= P_{G2} - P_{C2} = -1 \\ Q_2^{\text{esp}} &= Q_{G2} - Q_{C2} = -0,4 \\ P_3^{\text{esp}} &= P_{G3} - P_{C3} = 0,4 \end{aligned}$$

Las funciones no lineales, en coordenadas polares, que ligan los datos con las incógnitas son las siguientes:

$$\begin{aligned} P_2^{\text{esp}} &- V_2 (1,7V_2 - 0,363 \cos \theta_2 + 3,63 \sin \theta_2 - 1,445 \cos \theta_{23} + 4,816 \sin \theta_{23}) = 0 \\ Q_2^{\text{esp}} &- V_2 (7,887V_2 - 3,63 \cos \theta_2 - 0,363 \sin \theta_2 - 4,816 \cos \theta_{23} - 1,445 \sin \theta_{23}) = 0 \quad (3.18) \\ P_3^{\text{esp}} &- 1,05 (1,445 - 1,376V_2 \cos \theta_{32} + 4,587V_2 \sin \theta_{32}) = 0 \end{aligned}$$

Obtener el flujo de cargas para esta red consiste en resolver las ecuaciones anteriores para las potencias especificadas. Una vez resueltas, puede obtenerse la potencia activa y reactiva que debe inyectar el generador 1, la potencia reactiva del generador 3, los flujos de potencia en cada extremo de línea y las pérdidas totales.

3.3. Métodos iterativos simples

Históricamente, debido fundamentalmente a la poca capacidad de cálculo y de memoria de los computadores primitivos, empezaron usándose métodos que iteraban nudo a nudo sin

tener que manipular grandes matrices, ya fuesen de admitancias [21, 6] o de impedancias [9, 8, 3]. Estas técnicas son aplicaciones directas al caso no lineal de los métodos iterativos de solución de ecuaciones lineales existentes en aquella época, y su interés industrial hoy día es prácticamente nulo. A pesar de ello, por su simplicidad e interés académico, resumiremos a continuación algunas de la técnicas más populares que todavía incorporan algunos paquetes comerciales.

3.3.1. Método de Gauss-Seidel

Consiste en barrer secuencialmente cada nudo y actualizar su tensión en función de los valores disponibles en ese momento de todas las tensiones. En general, encontrar el vector x que satisface el sistema no lineal

$$f(x) = 0 \quad (3.19)$$

puede formularse como el problema de punto fijo

$$x = F(x)$$

cuya solución, partiendo de un valor inicial x^0 , se obtiene iterativamente mediante:

$$x_i^{k+1} = F_i(x_1^{k+1}, \dots, x_{i-1}^{k+1}, x_i^k, \dots, x_n^k) \quad (3.20)$$

$$i = 1, 2, \dots, n$$

Obsérvese que cuando se actualiza x_i se utilizan los nuevos valores de las variables actualizadas con anterioridad ($i = 1, 2, \dots, i - 1$).

Para el caso concreto del flujo de cargas, entre las diversas formas en que puede reescribirse (3.7), la siguiente parece haberse consolidado como la más eficiente:

$$\mathcal{U}_i^{k+1} = \frac{1}{\mathcal{Y}_{ii}} \left[\frac{P_i^{\text{esp}} - jQ_i^{\text{esp}}}{(\mathcal{U}_i^k)^*} - \sum_{j=1}^{i-1} \mathcal{Y}_{ij} \mathcal{U}_j^{k+1} - \sum_{j=i+1}^n \mathcal{Y}_{ij} \mathcal{U}_j^k \right] \quad (3.21)$$

$$i = 1, 2, \dots, n - 1$$

El proceso iterativo se detiene cuando se satisface

$$\max_i |\mathcal{U}_i^{k+1} - \mathcal{U}_i^k| \leq \varepsilon \quad (3.22)$$

donde ε es un umbral suficientemente pequeño (por ejemplo 0,0001).

Aunque el esfuerzo de cálculo por iteración es moderado, la convergencia del método de Gauss-Seidel es lineal, lo que significa que el número de iteraciones es del orden de n . Esto supone una limitación importante para sistemas grandes, porque el tiempo de cálculo total crece con n^2 . Es posible disminuir el número de iteraciones, a veces hasta la mitad, mediante un factor de aceleración α

$$\mathcal{U}_{i_{\text{acel}}}^{k+1} = \mathcal{U}_i^k + \alpha (\mathcal{U}_i^{k+1} - \mathcal{U}_i^k)$$

cuyo valor debe ser menor que 2 para evitar divergencia. Los valores óptimos de α están comprendidos entre 1.4 y 1.6.

Sin embargo, la ecuación (3.21) no puede aplicarse directamente a los nudos PV por dos motivos: 1) no se conoce Q_i^{esp} ; 2) el módulo de la tensión resultante no coincide con el especificado. El método habitualmente empleado para solventar el primer inconveniente consiste en sustituir Q_i^{esp} por el valor calculado con las tensiones disponibles en cada momento. La segunda limitación se solventa corrigiendo la tensión obtenida para que tenga el módulo deseado:

$$U_{i_{\text{corr}}}^{k+1} = V_i^{\text{esp}} U_i^{k+1} / V_i^{k+1}$$

Este mecanismo de corrección no debe llevarse a cabo prematuramente para no perturbar la convergencia global del proceso, ya de por sí bastante pobre.

Quizás la única utilidad práctica hoy día del método de Gauss-Seidel radique en su utilización como forma de generar valores iniciales para el método de Newton-Raphson, en aquellos raros casos en los que la convergencia de éste sea problemática partiendo desde el perfil plano.

Ejemplo 3.2:

Resolveremos la red del Ejemplo 3.1 mediante el método de Gauss-Seidel.

Tomando inicialmente $Q_3 = 0$ y perfil plano, las tensiones obtenidas después de aplicar dos veces la ecuación (3.21) a cada uno de los nudos 2 y 3 son:

$$U_2 = 0,9803 \angle_{-3,369} \quad ; \quad U_3 = 1,05 \angle_{-2,086}$$

Los resultados finales obtenidos y el número de iteraciones necesarias se muestran en la siguiente tabla para dos criterios de convergencia diferentes:

Max $ \Delta U_i $	10^{-4}		10^{-5}	
Iteraciones	25		33	
Nudo	V	θ	V	θ
2	0.9931	-9.256	0.9931	-9.262
3	1.05	-5.479	1.05	-5.490

Puede apreciarse la pobre convergencia del método, siendo incluso peor si el nudo 3 fuese de tipo PQ (33 y 42 iteraciones, respectivamente). En este caso concreto, el uso de factores de aceleración no aporta ninguna mejora.

3.3.2. Método basado en la matriz de impedancias

La inversa de la matriz de admitancias de nudos

$$\mathcal{Z} = \mathcal{Y}^{-1}$$

se conoce como la matriz de impedancias de nudos, y encuentra ciertas aplicaciones en el análisis de faltas (véase el Capítulo 9). No obstante, si el sistema está débilmente conectado a tierra, como ocurre cuando las capacidades de las líneas son despreciables, la matriz \mathcal{Y} es casi singular y \mathcal{Z} está mal definida numéricamente. Este problema se evita si se omite el nudo

slack y se trabaja con las matrices reducidas resultantes, como se explica a continuación. Sea \mathcal{U}_r e \mathcal{I}_r los vectores obtenidos al eliminar el nudo slack. La ecuación (3.1) puede escribirse como

$$\mathcal{I}_r = \mathcal{Y}_r \mathcal{U}_r + \mathcal{Y}_s \mathcal{U}_s$$

donde \mathcal{Y}_r es la matriz de admitancias obtenida al eliminar la fila y columna del slack, \mathcal{Y}_s es dicha columna y \mathcal{U}_s es la tensión del slack. Despejando las tensiones obtenemos

$$\mathcal{U}_r = \mathcal{Z}_r [\mathcal{I}_r - \mathcal{Y}_s \mathcal{U}_s] \quad (3.23)$$

donde $\mathcal{Z}_r = \mathcal{Y}_r^{-1}$ es la matriz de impedancias reducida. Partiendo de unas tensiones iniciales \mathcal{U}_r^0 se calculan las intensidades de

$$\mathcal{I}_i = (P_i^{\text{esp}} - jQ_i^{\text{esp}}) / \mathcal{U}_i^* \quad i = 1, 2, \dots, n-1$$

y se sustituyen en (3.23), repitiéndose el proceso hasta alcanzar convergencia.

Existen distintas variaciones sobre este patrón básico, todas ellas con bastante mejor convergencia que el método de Gauss-Seidel. El precio a pagar proviene de que la matriz \mathcal{Z}_r es completamente llena, lo que implica que el coste por iteración crece con n^2 . Con las técnicas numéricas presentadas en el Apéndice A, este inconveniente se evita utilizando la factorización triangular de \mathcal{Y}_r en lugar de su inversa. A pesar de ello, estos métodos no se consideran competitivos en la actualidad, exceptuando quizás el caso de las redes radiales (véase la Sección 3.8).

3.4. Método de Newton-Raphson

Este método obtiene sucesivamente nuevos valores mediante aproximaciones de primer orden de las funciones no lineales involucradas. La ecuación (3.19) puede aproximarse por su desarrollo en serie alrededor del punto x^k :

$$f(x) \cong f(x^k) + F(x^k)(x^{k+1} - x^k) = 0 \quad (3.24)$$

donde $F = \partial f / \partial x$ es el jacobiano de $f(x)$. Partiendo del valor inicial x^0 se obtienen correcciones Δx^k resolviendo el sistema lineal:

$$-F(x^k) \Delta x^k = f(x^k) \quad (3.25)$$

y nuevos valores x^{k+1} de:

$$x^{k+1} = x^k + \Delta x^k \quad (3.26)$$

El proceso iterativo se detiene cuando se cumple que:

$$\max_i |f_i(x^k)| \leq \varepsilon$$

para un ε suficientemente pequeño. Para valores x^0 próximos a la solución, el método de Newton-Raphson converge cuadráticamente (cuando diverge también lo hace cuadráticamente). En el caso concreto del flujo de cargas, con independencia del tamaño de la red,

el número de iteraciones oscila habitualmente entre 3 y 5 partiendo del perfil plano [14], aunque la actualización de variables de control descrita en la Sección 3.7 puede aumentar significativamente este número.

A diferencia de los métodos anteriores, que pueden implementarse directamente en forma compleja, la presencia del conjugado en las expresiones de la potencia obliga a trabajar en forma real cuando se trata de calcular derivadas. Según la forma en que se expresen las tensiones, se obtiene la formulación polar o la rectangular, siendo con diferencia la primera de ellas la más extendida.

3.4.1. Formulación polar

En este caso el vector x , de dimensión $2n_D + n_G$, viene dado por:

$$x = [\theta|V]^T = [\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_{n-1}|V_1, V_2, \dots, V_{n_D}]^T$$

y las funciones que queremos anular pueden expresarse, para cada nudo, como el residuo o diferencia entre la potencia especificada y la potencia calculada en el estado actual, es decir:

$$f(x) = [\Delta P|\Delta Q]^T = [\Delta P_1, \Delta P_2, \dots, \Delta P_{n-1}|\Delta Q_1, \Delta Q_2, \dots, \Delta Q_{n_D}]^T$$

siendo:

$$\Delta P_i = P_i^{\text{esp}} - V_i \sum_{j=1}^n V_j (G_{ij} \cos \theta_{ij} + B_{ij} \sin \theta_{ij}) \quad (3.27)$$

$$i = 1, 2, \dots, n - 1$$

$$\Delta Q_i = Q_i^{\text{esp}} - V_i \sum_{j=1}^n V_j (G_{ij} \sin \theta_{ij} - B_{ij} \cos \theta_{ij}) \quad (3.28)$$

$$i = 1, 2, \dots, n_D$$

Con esta notación, y dividiendo el jacobiano en submatrices como se ha hecho con los vectores anteriores, la ecuación (3.25), aplicada al problema del flujo de cargas, se convierte en [18, 19]:

$$\begin{bmatrix} H & N \\ M & L \end{bmatrix}^k \begin{bmatrix} \Delta \theta \\ \Delta V/V \end{bmatrix}^k = \begin{bmatrix} \Delta P \\ \Delta Q \end{bmatrix}^k \quad (3.29)$$

y la (3.26)

$$\begin{bmatrix} \theta \\ V \end{bmatrix}^{k+1} = \begin{bmatrix} \theta \\ V \end{bmatrix}^k + \begin{bmatrix} \Delta \theta \\ \Delta V \end{bmatrix}^k \quad (3.30)$$

La utilización de $\Delta V/V$ en lugar de ΔV no afecta numéricamente al algoritmo, pero simplifica los términos del jacobiano haciéndolo numéricamente más simétrico (estructuralmente ya lo es). Teniendo en cuenta que

$$-\partial(f_i^{\text{esp}} - f_i)/\partial x_j = \partial f_i/\partial x_j$$

Cuadro 3.1. Expresiones para los términos del jacobiano en la formulación polar.

Para $i \neq j$	
$H_{ij} = L_{ij} = V_i V_j (G_{ij} \text{sen } \theta_{ij} - B_{ij} \text{cos } \theta_{ij})$	
$N_{ij} = -M_{ij} = V_i V_j (G_{ij} \text{cos } \theta_{ij} + B_{ij} \text{sen } \theta_{ij})$	
Para $i = j$	
$H_{ii} = -Q_i - B_{ii} V_i^2$	$L_{ii} = Q_i - B_{ii} V_i^2$
$N_{ii} = P_i + G_{ii} V_i^2$	$M_{ii} = P_i - G_{ii} V_i^2$

donde f es indistintamente P o Q y x se refiere a V o θ , los términos del jacobiano se obtienen de las siguientes definiciones:

$$\begin{aligned} H_{ij} &= \partial P_i / \partial \theta_j & N_{ij} &= V_j \partial P_i / \partial V_j \\ M_{ij} &= \partial Q_i / \partial \theta_j & L_{ij} &= V_j \partial Q_i / \partial V_j \end{aligned} \quad (3.31)$$

Los valores respectivos se muestran en la Tabla 3.1. Obsérvese que entre las expresiones del jacobiano y las de ΔP y ΔQ hay muchos términos comunes, lo cual debe aprovecharse para ahorrar esfuerzo de cálculo. De este modo, el cálculo del jacobiano es casi un subproducto del cálculo de los residuos de potencia.

La solución del flujo de cargas mediante el método de Newton-Raphson consta entonces de los siguientes pasos:

1. Inicializar tensiones con el perfil plano o usar la solución de un caso anterior.
2. Calcular $[\Delta P | \Delta Q]$, así como los términos del jacobiano. Si todos los componentes de este vector son menores que ε , detener el proceso. En caso contrario, continuar.
3. Obtener $[\Delta \theta | \Delta V / V]$ resolviendo el sistema (3.29) con las técnicas explicadas al final del capítulo.
4. Actualizar $[\theta | V]$ y volver al paso 2.

Recuérdese que, por cada nudo PV, nos ahorramos una ecuación en el sistema anterior, lo cual constituye la principal ventaja de la formulación polar.

En muchos casos se consiguen mejoras de convergencia si se trabaja con $\Delta Q / V$ en lugar de ΔQ , lo cual se consigue dividiendo simplemente la fila respectiva por V_i . La razón es que, de ese modo, sólo el término Q_i^{esp} / V_i , numéricamente menor que los demás, permanece no lineal en V_i , y a mayor linealidad mejor convergencia.

Aunque, por claridad de presentación, el jacobiano se ha dividido en submatrices compatibles con las particiones realizadas en los vectores de tensiones y potencias, en la práctica, las dos ecuaciones de un nudo PQ y sus dos variables asociadas se ordenan consecutivamente.

Ejemplo 3.3:

Ilustraremos el método de Newton-Raphson en coordenadas polares para la red de la Figura 3.1. Partiendo del análisis preliminar y expresiones obtenidas en el Ejemplo 3.1, el sistema de ecuaciones a resolver en cada iteración es el siguiente:

$$\left[\begin{array}{cc|c} H_{22} & H_{23} & N_{22} \\ H_{32} & H_{33} & N_{32} \\ \hline M_{22} & M_{23} & L_{22} \end{array} \right]^k \left[\begin{array}{c} \Delta\theta_2 \\ \Delta\theta_3 \\ \Delta V_2/V_2 \end{array} \right]^k = \left[\begin{array}{c} \Delta P_2 \\ \Delta P_3 \\ \Delta Q_2 \end{array} \right]^k \quad (3.32)$$

donde los residuos de potencia se obtienen de las ecuaciones (3.18) y los ángulos se expresan en radianes. Derivando directamente en dichas ecuaciones, o de la Tabla 3.1, obtenemos los términos del jacobiano. Para los bloques diagonales, H y L , resultan las siguientes expresiones:

$$\begin{aligned} H_{22} &= V_2 (3,63 \cos \theta_2 + 0,363 \sin \theta_2 + 4,816 \cos \theta_{23} + 1,445 \sin \theta_{23}) \\ H_{23} &= V_2 (-4,816 \cos \theta_{23} - 1,445 \sin \theta_{23}) \\ H_{32} &= 1,05 (-4,587 \cos \theta_{32} - 1,376 \sin \theta_{32}) \\ H_{33} &= 1,05 (4,587 \cos \theta_{32} + 1,376 \sin \theta_{32}) \\ L_{22} &= Q_2 + 7,887V_2^2 \end{aligned}$$

y para los no diagonales, N y M :

$$\begin{aligned} N_{22} &= P_2 + 1,7V_2^2 \\ N_{32} &= 1,05V_2 (-1,376 \cos \theta_{32} + 4,587 \sin \theta_{32}) \\ M_{22} &= P_2 - 1,7V_2^2 \\ M_{23} &= V_2 (1,445 \cos \theta_{23} - 4,816 \sin \theta_{23}) \end{aligned}$$

Partiendo de perfil plano, el sistema (3.32) tiene los siguientes valores:

$$\left[\begin{array}{ccc} 8,446 & -4,816 & 1,592 \\ -4,816 & 4,816 & -1,445 \\ -1,808 & 1,445 & 7,328 \end{array} \right] \left[\begin{array}{c} \Delta\theta_2 \\ \Delta\theta_3 \\ \Delta V_2/V_2 \end{array} \right]^{(1)} = \left[\begin{array}{c} -0,892 \\ 0,328 \\ 0,159 \end{array} \right] \quad (3.33)$$

cuya solución, pasando por conveniencia los ángulos a grados, es

$$[\Delta\theta_2 \quad \Delta\theta_3 \quad \Delta V_2/V_2]^{(1)} = [-8,904 \quad -4,990 \quad 0,0005]$$

Con los incrementos anteriores se actualiza el vector de estado y se repite el proceso. En la tabla siguiente se muestra el máximo residuo antes de realizar cada iteración:

Iter.	Max $ \Delta P , \Delta Q $	Componente
1	0.8982	ΔP_2
2	$5,57 \cdot 10^{-2}$	ΔQ_2
3	$4,77 \cdot 10^{-4}$	ΔQ_2
4	$4,48 \cdot 10^{-8}$	ΔQ_2

Es decir, deberemos realizar 2 o 3 iteraciones dependiendo de que el criterio de convergencia utilizado sea 10^{-3} o 10^{-4} . Después de 3 iteraciones se converge a los siguientes valores:

$$[\theta_2 \quad \theta_3 \quad V_2] = [-9,263 \quad -5,492 \quad 0,9930]$$

que prácticamente coinciden con los obtenidos por el método de Gauss-Seidel tras 33 iteraciones.

Con estos valores, obtenemos inmediatamente que el generador del nudo 3 debe inyectar una reactiva de 24,02 Mvar y que la potencia compleja del nudo de referencia es 62,38 MW + j37,72 Mvar. Eso significa que en la red tienen lugar unas pérdidas de 2,38 MW (1,98 % de la demanda).

A continuación, se muestran los valores del jacobiano en la cuarta iteración, que difieren relativamente poco de los de (3.33), especialmente en los dos bloques diagonales:

$$\begin{bmatrix} 8,178 & -4,678 & 0,683 \\ -4,867 & 4,867 & -1,117 \\ -2,682 & 1,746 & 7,378 \end{bmatrix}$$

3.4.2. Formulación rectangular

La dimensión del vector x es ahora $2n - 2$, estando constituido por los siguientes elementos:

$$x = [V_{r1}, V_{r2}, \dots, V_{r(n-1)} | V_{x1}, V_{x2}, \dots, V_{x(n-1)}]^T$$

El cálculo de los residuos de potencia se realiza en este caso mediante las ecuaciones

$$\Delta P_i = P_i^{\text{esp}} - \left[V_{ri} \sum_{j=1}^n (G_{ij} V_{rj} - B_{ij} V_{xj}) + V_{xi} \sum_{j=1}^n (G_{ij} V_{xj} + B_{ij} V_{rj}) \right] \quad (3.34)$$

$i = 1, 2, \dots, n - 1$

$$\Delta Q_i = Q_i^{\text{esp}} - \left[V_{xi} \sum_{j=1}^n (G_{ij} V_{rj} - B_{ij} V_{xj}) - V_{ri} \sum_{j=1}^n (G_{ij} V_{xj} + B_{ij} V_{rj}) \right] \quad (3.35)$$

$i = 1, 2, \dots, n_D$

Como se observa claramente, el número de ecuaciones es menor que el de incógnitas. La razón es que aún falta por imponer en los nudos de generación la restricción:

$$\Delta V_i^2 = (V_i^{\text{esp}})^2 - V_{ri}^2 - V_{xi}^2 = 0 \quad i = 1, 2, \dots, n_G \quad (3.36)$$

En forma matricial, el flujo de cargas en coordenadas cartesianas queda formulado entonces como:

$$\begin{bmatrix} S & T \\ U & W \\ C & D \end{bmatrix}^k \begin{bmatrix} \Delta V_r \\ \Delta V_x \end{bmatrix}^k = \begin{bmatrix} \Delta P \\ \Delta Q \\ \Delta V^2 \end{bmatrix}^k \quad (3.37)$$

$$\begin{bmatrix} V_r \\ V_x \end{bmatrix}^{k+1} = \begin{bmatrix} V_r \\ V_x \end{bmatrix}^k + \begin{bmatrix} \Delta V_r \\ \Delta V_x \end{bmatrix}^k \quad (3.38)$$

siendo los elementos del jacobiano los recogidos en la Tabla 3.2. En dicha tabla, I_{ri} e I_{xi} se refieren a la parte real e imaginaria, respectivamente, de la corriente neta inyectada en el nudo i , que se calcula de la expresión:

$$I_{ri} + jI_{xi} = \sum_{j=1}^n (G_{ij} + jB_{ij})(V_{rj} + jV_{xj}) \quad (3.39)$$

Cuadro 3.2. Expresiones para los términos del jacobiano en la formulación rectangular.

Para $i \neq j$	
$S_{ij} = -W_{ij} = G_{ij}V_{ri} + B_{ij}V_{xi}$	
$T_{ij} = U_{ij} = G_{ij}V_{xi} - B_{ij}V_{ri}$	
$C_{ij} = D_{ij} = 0$	
Para $i = j$	
$S_{ii} = I_{ri} + G_{ii}V_{ri} + B_{ii}V_{xi}$	$U_{ii} = -I_{xi} - B_{ii}V_{ri} + G_{ii}V_{xi}$
$W_{ii} = I_{ri} - G_{ii}V_{ri} - B_{ii}V_{xi}$	$T_{ii} = I_{xi} - B_{ii}V_{ri} + G_{ii}V_{xi}$
$C_{ii} = 2V_{ri}$	$D_{ii} = 2V_{xi}$

El proceso iterativo consta de los mismos pasos descritos para la formulación polar, cambiando simplemente las expresiones utilizadas.

Se ha propuesto también una variante en coordenadas cartesianas basada en residuos de corriente [7], que resulta competitiva con la formulación polar, especialmente en redes con un porcentaje reducido de nudos PV. La utilización de residuos de corriente conlleva ciertas ventajas, y es la forma más efectiva de abordar los flujos de carga trifásicos y con armónicos, tal y como se explica en los Capítulos 11 y 12.

3.5. Método desacoplado rápido

A pesar de los avances en técnicas computacionales explicados en el Apéndice A, la ejecución del flujo de cargas mediante el método de Newton-Raphson exacto, tal como se ha descrito anteriormente, conlleva tiempos de cálculo elevados para redes muy grandes, que pueden ser inaceptables para aplicaciones de “tiempo real” donde haya que resolver múltiples casos. En ese tipo de aplicaciones, la rapidez es muchas veces más importante que la precisión. De ahí la importancia que han adquirido las variantes que se describen en esta sección.

La primera y evidente simplificación, a la vista de los valores numéricos obtenidos en el Ejemplo 3.3, consiste en no recalcular el jacobiano en cada iteración, manteniendo constante el que se calcula la primera vez. Teniendo en cuenta que los términos del jacobiano se obtienen como subproducto del cálculo de los residuos de potencia, el ahorro proviene solamente del proceso de factorización de dicha matriz (véase el Apéndice A). Ahora bien, como la convergencia empeora ligeramente, las iteraciones de más, necesarias cuando se utiliza jacobiano constante, cancelan muchas veces el ahorro obtenido en cada iteración.

La segunda y más importante simplificación proviene del desacoplamiento existente entre las potencias activas y módulos de tensiones y las potencias reactivas y ángulos de fase [4, 15], que se traduce en que los valores numéricos de las matrices N y M en la ecuación (3.29) son significativamente menores que los de los bloques diagonales H y L .

Como puede comprobarse de las expresiones de la Tabla 3.1, esta circunstancia proviene fundamentalmente de que los desfases entre nudos adyacentes son relativamente pequeños (lo que implica que $\cos \theta_{ij} \approx 1$ y $\sin \theta_{ij} \approx 0$) y de que en líneas de transporte el cociente $R/X = G/B \ll 1$ (en líneas de 220 y 400 kV dicho cociente oscila entre 1/5 y 1/10). Es de esperar, por tanto, que la utilización de modelos desacoplados funcione peor cuando se trate de sistemas fuertemente cargados y/o correspondientes a niveles de tensión no muy elevados (en líneas de 50 kV el cociente $R/X \approx 1$, y en líneas de 20 kV éste puede ser bastante mayor que 1). Obsérvese que el desacoplamiento es mucho menos significativo y evidente cuando se utilizan coordenadas rectangulares [2].

La versión más popular entre los algoritmos desacoplados es la conocida como *flujo de cargas desacoplado rápido* (FCDR), publicada por Stott y Alsac en 1974 [17]. Además de hacer cero las matrices N y M , las modificaciones e hipótesis simplificativas en las que se basa este método son las siguientes:

1. Se utiliza $\Delta P/V$, $\Delta Q/V$ en lugar de ΔP , ΔQ .
2. Se asume que:

$$\begin{aligned} \cos \theta_{ij} &\approx 1 \\ G_{ij} \sin \theta_{ij} &\ll B_{ij} \\ Q_i &\ll B_{ii} V_i^2 \end{aligned}$$

dado que Q_i suele ser menor que 1 pu y B_{ii} oscila típicamente entre 20 pu y 50 pu.

3. En el subproblema activo se toma $V_i = 1$, se omiten en H las reactancias y condensadores en paralelo, incluyendo los del modelo en π de las líneas, y se utiliza el valor nominal para tomas de transformadores. En la matriz L del subproblema reactivo se ignoran los transformadores desfasadores.

Teniendo en cuenta estas consideraciones, la ecuación (3.29) del método de Newton-Raphson exacto se reduce a los dos sistemas desacoplados siguientes:

$$B' \Delta \theta = \Delta P/V \quad (3.40)$$

$$B'' \Delta V = \Delta Q/V \quad (3.41)$$

donde las matrices B' y B'' son constantes, y por tanto se construyen y factorizan una sola vez. Experimentalmente se observó además que, si en B' se ignoraban las resistencias, la convergencia mejoraba significativamente. De ese modo, los elementos de ambas matrices vienen dados por:

$$\begin{aligned} B'_{ij} &= -1/X_{ij} & ; & & B'_{ii} &= \sum_{j \in i} 1/X_{ij} \\ B''_{ij} &= -B_{ij} & ; & & B''_{ii} &= -B_{ii} \end{aligned}$$

siendo X_{ij} la reactancia serie del elemento i - j , B_{ij} la parte imaginaria del elemento respectivo de la matriz de admitancias de nudos y $j \in i$ el conjunto de nudos j adyacentes a i . Obsérvese que B'' es simétrica, y también B' si no hay transformadores desfasadores, lo que ahorra operaciones al resolver los sistemas anteriores.

El proceso iterativo consiste en resolver alternativamente las ecuaciones (3.40) y (3.41), utilizando en cada caso los valores más recientes de θ y V , hasta que se satisface el criterio de convergencia tanto en ΔP como en ΔQ . La velocidad de convergencia del FCDR es similar a la de la versión acoplada en las primeras iteraciones, aunque cerca de la solución es más lenta. En cualquier caso, el posible exceso de iteraciones se compensa sobradamente con el hecho de que el esfuerzo de cálculo por iteración llega a ser de 4 a 5 veces menor, lo que convierte a este método en la herramienta ideal en aquellas aplicaciones donde deben realizarse múltiples flujos de carga (véase el Capítulo 7).

Como se discutió anteriormente, las hipótesis en las que se basa el desacoplo de los subproblemas P - θ y Q - V pierden validez en sistemas fuertemente cargados o con ratios R/X elevados. En estos casos, el FCDR puede diverger o comportarse oscilatoriamente cerca de la solución, por lo que debe acudir a la versión exacta del método de Newton-Raphson. En la referencia [20] se presentaron resultados experimentales que demuestran que el FCDR converge notablemente mejor en casos difíciles si las resistencias de las líneas se desprecian en B'' en lugar de en B' . Desde entonces, la versión estándar se conoce como versión “XB” y la propuesta en [20] como “BX”.

El buen comportamiento del FCDR, un tanto sorprendente considerando el gran número de aproximaciones aparentemente hechas, ha suscitado el interés de los investigadores por la búsqueda de alguna justificación teórica que avale los resultados experimentales. Se resumen a continuación las ideas más relevantes presentadas en [11].

Utilizando álgebra de bloques, el sistema de ecuaciones (3.29) puede descomponerse en los dos subsistemas siguientes:

$$[H - NL^{-1}M] \Delta\theta = \Delta P - NL^{-1}\Delta Q \quad (3.42)$$

$$[L - MH^{-1}N] \Delta V = \Delta Q - MH^{-1}\Delta P \quad (3.43)$$

donde los términos de acoplamiento se han pasado al miembro de la derecha. Analizaremos sólo el problema activo, ya que se obtienen conclusiones similares para el reactivo.

A diferencia del modelo acoplado, donde tanto ΔP^k como ΔQ^k son funciones de θ^k y V^k , en cada semi-iteración del FCDR uno de los dos conjuntos de variables ha sido actualizado en la semi-iteración anterior. Por tanto, en la semi-iteración $k+1$, ΔP^{k+1} es función de θ^k y del recién calculado V^{k+1} . Si hacemos su desarrollo en serie en el punto θ^k, V^k , obtenemos:

$$\Delta P(\theta^k, V^{k+1}) \cong \Delta P(\theta^k, V^k) - N\Delta V^k$$

pero, teniendo en cuenta que ΔV^k se acaba de calcular resolviendo el problema reactivo

$$L\Delta V^k \cong \Delta Q(\theta^k, V^k)$$

el desarrollo en serie anterior queda:

$$\Delta P(\theta^k, V^{k+1}) \cong \Delta P(\theta^k, V^k) - NL^{-1}\Delta Q(\theta^k, V^k)$$

Comparando con la ecuación (3.42) concluimos que el FCDR no ignora realmente el acoplamiento entre ambos subproblemas, sino que lo tiene en cuenta implícitamente al utilizar valores que han sido actualizados en la semi-iteración anterior.

Respecto a la matriz de coeficientes de (3.42), puede demostrarse, para perfil plano y redes radiales [11], que

$$H - NL^{-1}M = B'$$

si se ignoran las resistencias al formar B' . Lo mismo ocurre para redes malladas con ratio R/X uniforme. En el caso general, la igualdad anterior no se satisface exactamente (de hecho la matriz de la izquierda es densa mientras que B' no lo es), pero las diferencias numéricas son pequeñas. Ello explica que experimentalmente se obtuvieran mejores resultados al ignorar las resistencias.

Ejemplo 3.4:

Aplicaremos la variante 'XB' del FCDR a la red de la Figura 3.1, resuelta en ejemplos anteriores mediante Gauss-Seidel y Newton-Raphson.

Las matrices B' y B'' utilizadas por esta técnica, según las simplificaciones que se acaban de discutir, tienen los siguientes valores (compárense con los coeficientes de los bloques diagonales del jacobiano en el método de Newton-Raphson):

$$B' = \begin{bmatrix} 8,333 & -5 \\ -5 & 5 \end{bmatrix} \quad ; \quad B'' = [7,887]$$

Los residuos de potencia activa en la primera iteración sólo se diferencian de los calculados en el método acoplado por el hecho de dividir por V (en este caso sólo cambia el del nudo 3, al ser $V_3 = 1,05$). El sistema de ecuaciones a resolver en la primera semi-iteración activa viene dado por:

$$\begin{bmatrix} 8,333 & -5 \\ -5 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta\theta_2 \\ \Delta\theta_3 \end{bmatrix}^{(1)} = \begin{bmatrix} -0,898 \\ 0,312 \end{bmatrix}$$

cuya solución, en grados, es:

$$[\Delta\theta_2 \quad \Delta\theta_3]^{(1)} = [-10,0736 \quad -6,4984]$$

Después de actualizar θ_2 y θ_3 se calcula el residuo para la primera semi-iteración reactiva, cuyo valor resulta ser $\Delta Q_2/V_2 = -5,96 \cdot 10^{-2}$. Como puede apreciarse, este valor es del mismo orden de magnitud que el máximo residuo del método de Newton-Raphson en la *segunda* iteración, correspondiente precisamente a ΔQ_2 (véase el ejemplo anterior). El hecho de utilizar ángulos actualizados para calcular residuos de reactiva, en lugar del perfil plano, explica esta mejora del FCDR, que prácticamente compensa las aproximaciones realizadas. La corrección de tensión se obtiene en este caso mediante una simple división ($\Delta V_2^{(1)} = -7,55 \cdot 10^{-3}$), con lo que $V_2^{(2)} = 0,9924$. Este valor es significativamente mejor que el obtenido tras la primera iteración del método acoplado, lo que explica que en diversas aplicaciones donde no se requiere excesiva precisión se den por válidos los resultados de una iteración completa del FCDR.

Después de 4 semi-iteraciones de P y de 3 de Q todos los residuos son menores que 0,0001, convergiendo el proceso al mismo resultado obtenido anteriormente.

3.6. Flujo de cargas en continua

Aunque tanto P como Q son funciones no lineales de V y θ , puede obtenerse una relación lineal bastante aproximada entre P y θ , lo que conduce al denominado *flujo de cargas en continua*. Este modelo se obtiene suponiendo que $V_i = 1$ en todos los nudos, lo que impide de antemano realizar cualquier cálculo relacionado con la potencia reactiva. Con esta hipótesis, el flujo de potencia activa, dado por la ecuación (3.16), queda

$$P_{ij} = G_{ij}(\cos \theta_{ij} - 1) + B_{ij} \sin \theta_{ij}$$

y, al ser las diferencias angulares pequeñas ($\cos \theta_{ij} \approx 1$ y $\sin \theta_{ij} \approx \theta_i - \theta_j$):

$$P_{ij} = B_{ij} (\theta_i - \theta_j)$$

El elemento B_{ij} es la susceptancia serie del elemento en cuestión cambiada de signo, es decir:

$$B_{ij} = \frac{x_{ij}}{r_{ij}^2 + x_{ij}^2} = \frac{1/x_{ij}}{1 + (r_{ij}/x_{ij})^2}$$

donde r_{ij} y x_{ij} son la resistencia y reactancia respectivamente. Para valores $r_{ij} < x_{ij}/3$, habituales en redes de transporte, el error cometido sustituyendo B_{ij} por $1/x_{ij}$ es menor del 1%, quedando:

$$P_{ij} = \frac{1}{x_{ij}}(\theta_i - \theta_j) \quad ; \quad \theta_i - \theta_j = x_{ij}P_{ij} \quad (3.44)$$

Si A representa la matriz de incidencias nudos-ramas, θ el vector de ángulos de fase, reducidos ambos en la fila del nudo de referencia, X la matriz diagonal de reactancias, y P_f el vector de flujos de potencia activa, la ecuación anterior puede escribirse en forma matricial como:

$$A^T \theta = X P_f \quad (3.45)$$

$$P_f = [X^{-1} A^T] \theta \quad (3.46)$$

Por otra parte, al haberse despreciado las resistencias, las potencias activas inyectadas suman cero, por lo que una de ellas es combinación lineal de las demás. Si P es el vector de potencias inyectadas en todos los nudos salvo el de referencia, la primera ley de Kirchhoff aplicada a las potencias es:

$$P = A P_f \quad (3.47)$$

Finalmente, eliminando los flujos de potencia mediante (3.46), se obtiene la relación lineal buscada entre potencias y ángulos:

$$P = [A X^{-1} A^T] \theta = B \theta \quad (3.48)$$

donde B tiene la misma estructura (simétrica y dispersa) y se construye con las mismas reglas que la matriz de admitancias de nudos, pero utilizando exclusivamente reactancias. Obsérvese que B coincide con la B' del subproblema activo en la versión "XB" del FCDR.

También pueden eliminarse los ángulos para relacionar los flujos de potencia con las inyecciones:

$$P_f = [X^{-1}A^TB^{-1}]P \quad (3.49)$$

La expresión anterior resulta útil para analizar de forma rápida el efecto que determinados cambios en la red tienen sobre los flujos de potencia (véase el Capítulo 7). Aunque la matriz entre corchetes es densa, muchos de sus elementos, correspondientes a líneas y nudos eléctricamente remotos, son despreciables.

El modelo dado por la ecuación (3.48), proveniente de un análisis en alterna, se corresponde con el de un circuito resistivo *en continua* donde las reactancias juegan el papel de las resistencias, los desfases el de las tensiones y las potencias el de las intensidades. De ahí su nombre.

Aunque el flujo de cargas en continua conduce inherentemente a pérdidas nulas, éstas pueden estimarse aproximadamente, en base a los flujos de activa, como suma de los términos $R_{ij}P_{ij}^2$.

Ejemplo 3.5:

El flujo de cargas en continua para la red de la Figura 3.1 se obtiene resolviendo en primer lugar el sistema de ecuaciones siguiente:

$$\begin{bmatrix} 8,333 & -5 \\ -5 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta_2 \\ \theta_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 0,4 \end{bmatrix}$$

Obsérvese que, mientras que la matriz de coeficientes coincide con la B' del Ejemplo 3.4, el vector derecho se refiere a las potencias netas inyectadas y no a los residuos de potencias de la semi-iteración activa. La solución, en grados, del sistema anterior es:

$$[\theta_2 \quad \theta_3] = [-10,314 \quad -5,731]$$

que se aproxima bastante a la del flujo de cargas en alterna. Con estos desfases se obtienen inmediatamente los flujos por las líneas (no se olvide que, aunque los ángulos se muestran en grados, deben usarse en radianes):

$$P_{12} = \frac{1}{x_{12}}(\theta_1 - \theta_2) = 0,6 \text{ pu} \quad ; \quad P_{32} = \frac{1}{x_{32}}(\theta_3 - \theta_2) = 0,4 \text{ pu}$$

En este caso concreto, al tratarse de una red radial, los flujos se deducen trivialmente de las inyecciones, lo cual no ocurre en el caso mallado.

Obviamente, al haberse despreciado las pérdidas, el nudo de referencia debe generar sólo 60 MW. No obstante, considerando las tensiones a 1 pu e ignorando los flujos de reactiva, las pérdidas pueden estimarse aproximadamente como:

$$R_{12}P_{12}^2 + R_{32}P_{32}^2 = 0,0204 \text{ pu}$$

frente al valor exacto calculado en el Ejemplo 3.3 (0.0238).

3.7. Ajuste de límites y reguladores

La metodología descrita hasta ahora sólo tiene en cuenta las restricciones de igualdad impuestas por los nudos de consumo y generación. En la práctica, sin embargo, las soluciones suministradas por un programa industrial de cálculo de flujos de carga deben tener en cuenta restricciones de contorno adicionales. Estas restricciones pueden ser de desigualdad (límites impuestos a ciertas variables reguladas y de control) o de igualdad (valores deseados para ciertas variables dependientes). Los más importantes se describen a continuación:

- *Límites de reactiva en nudos PV.* Se aplican a la reactiva generada o absorbida por los alternadores, o compensadores, que regulan la tensión de un nudo. Cuando se alcanza uno de estos límites el nudo PV pasa a ser PQ.
- *Límites de tensión en nudos PQ.* Menos comunes que los anteriores. Si se alcanza alguno de estos límites el nudo se convierte en PV por la activación de algún elemento regulador (normalmente la toma de un transformador).
- *Transformadores de regulación* (véase el capítulo anterior). Aunque en algunos casos las tomas bajo carga de transformadores son cambiadas remotamente por un operador, en otros casos dichas tomas son reguladas localmente por un automatismo para mantener constante (o dentro de una banda) la tensión de un nudo próximo. A veces se pretende regular el flujo de reactiva a través del propio elemento. En cualquier caso, el valor de la toma no puede exceder sus límites físicos.
- *Transformadores desfasadores.* Estos transformadores introducen pequeños desfases, manteniendo los módulos, para regular su flujo de potencia activa.
- *Intercambio de potencia entre áreas.* Normalmente se desea mantener a un valor predeterminado la potencia total que fluye por las líneas de interconexión entre un área y las adyacentes. Para ello se utiliza la potencia generada por uno o varios alternadores.

En todos los casos, lo que se pretende es controlar una magnitud basándose en una o varias variables de control.

La forma de llevar a cabo estos ajustes depende del método numérico utilizado. Básicamente, los procedimientos existentes pueden agruparse en dos categorías [16]:

1. El vector de estado se adapta dinámicamente, ampliando o disminuyendo el número de variables, para tener en cuenta en cada caso los límites alcanzados.
2. Se utiliza un proceso realimentado de ajuste de la variable de control. Sea y_e el valor especificado, o el límite violado, para la variable y , regulada por la variable x . En cada iteración, x se corrige con un Δx dado por:

$$\Delta x^k = \alpha \Delta y^k \quad (3.50)$$

hasta que $\Delta y^k = y_e - y^k$ sea suficientemente pequeño. La elección del coeficiente de realimentación α es crítica para que la convergencia no sea lenta, si es muy pequeño, o se produzca divergencia, si es muy elevado. Cuando las variables involucradas intervienen explícitamente en el modelo linealizado, se puede estimar α mediante la

sensibilidad entre ambas variables. También puede estimarse empíricamente de las correcciones Δy conseguidas por Δx en iteraciones anteriores.

La implantación de cualquiera de estos mecanismos incrementa notablemente el número de iteraciones, así como la complejidad del código. Es recomendable que, para evitar oscilaciones, el proceso de ajuste no comience hasta que y se conozca con suficiente precisión.

A continuación, se explica el tratamiento de los ajustes más habituales.

3.7.1. Límites de reactiva en nudos PV

Sea cual sea el método utilizado, la reactiva que tiene que inyectar un generador o compensador para mantener su tensión constante debe calcularse en cada iteración y compararse con sus límites. Si se viola algún límite, Q^{lim} , la tensión del nudo regulado no puede mantenerse al valor V^{esp} , pasando a ser éste un nudo de consumo con $Q^{\text{esp}} = Q^{\text{lim}}$. A partir de ese momento hay que monitorizar la tensión de este nudo PQ virtual. Si $V^k > V^{\text{esp}}$ y $Q^{\text{esp}} = Q^{\text{max}}$, o si $V^k < V^{\text{esp}}$ y $Q^{\text{esp}} = Q^{\text{min}}$, entonces dicho nudo vuelve a ser PV (esto puede ocurrir por interacción entre varios nudos PV).

En el método de Gauss-Seidel este mecanismo se lleva a cabo de forma trivial.

La implantación de este proceso tampoco es difícil en el método de Newton-Raphson en coordenadas polares, puesto que en cada iteración hay que calcular el jacobiano. Basta con incluir ΔQ_i en el vector de residuos y ΔV_i en el vector de estado cuando el nudo i pasa de PV a PQ, y excluirlos en caso contrario, actualizando acordemente las filas y columnas del jacobiano.

Algo más complicado resulta el caso en que el nudo regulado j difiere del regulador i (control remoto). En ese caso, cuando Q_i está dentro de límites, deben anularse los residuos ΔP_i , ΔP_j y ΔQ_j , siendo las incógnitas θ_i , θ_j y V_i , mientras que si Q_i alcanza un límite, tanto i como j son nudos PQ ordinarios. La complejidad proviene de la asimetría estructural que introduce en el jacobiano la eliminación de la fila correspondiente a ΔQ_i y la columna correspondiente a ΔV_j , lo que dificulta la solución del sistema de ecuaciones.

La implantación de la mecánica anteriormente descrita para el FCDR [17], aunque posible, no es recomendable porque obligaría a modificar la estructura de la matriz B'' cada vez que un nudo pasa de PV a PQ (añadiendo una fila y una columna) o viceversa (eliminándolas). Por este motivo, se ha propuesto utilizar la técnica basada en la ecuación (3.50), corrigiéndose V^{esp} en cada iteración para anular en la siguiente el exceso de reactiva sobre el límite violado. Por ejemplo, si $Q_i^k > Q_i^{\text{max}}$, se realizan las siguientes operaciones:

$$\begin{aligned}\Delta Q_i &= Q_i^{\text{max}} - Q_i^k \\ \Delta V_i &= \alpha_i \Delta Q_i \\ V_i^{\text{esp}(k+1)} &= V_i^{\text{esp}(k)} + \Delta V_i\end{aligned}$$

Un valor razonable para el coeficiente α_i puede obtenerse *a priori* de la sensibilidad entre V_i y Q_i . Para ello se resuelve el sistema de ecuaciones,

$$B''_a S_i = e_i \quad (3.51)$$

donde e_i es la columna i -ésima de la matriz identidad, B_a'' es la matriz B'' aumentada con la fila y columna correspondiente al nudo i y S_i es la columna respectiva de la matriz de sensibilidad, tomándose $\alpha_i = S_{ii}$. En el caso de regulación remota de V_j , se tomaría el elemento S_{ji} como ganancia de la realimentación.

Cuando se violan muchos límites de reactiva, el mecanismo de realimentación suele conducir a un elevado número de iteraciones. En esos casos, una solución más eficaz, que sólo requiere cambiar los elementos diagonales de B'' pero no su estructura, consiste en lo siguiente: se forma B'' como si todos los nudos fuesen PQ (misma estructura que B'). Para cada nudo PV se toma $\Delta Q_i = 0$ y se añade un número ρ arbitrariamente grande a la diagonal respectiva, lo cual hace que obtengamos $\Delta V_i \approx 0$ al resolver el problema reactivo. El valor de ρ no debe ser muy elevado para no introducir mal condicionamiento en el sistema de ecuaciones. Si se alcanza un límite de reactiva, basta con eliminar ρ de la diagonal, lo que convierte el nudo en PQ. Interpretando la solución del problema reactivo como la de un circuito lineal resistivo cuya matriz de conductancias es B'' , esta técnica equivale a “cortocircuitar” el nudo respectivo mediante una gran conductancia a tierra para obligar a que su tensión sea nula. El principal sobrecoste proviene de la refactorización parcial de B'' cada vez que alguna de sus diagonales se modifica (véase el Apéndice A).

3.7.2. Transformadores reguladores

Aunque aquí nos referiremos a los transformadores con tomas ordinarios, las mismas ideas son de aplicación a los transformadores desfasadores.

La mejor opción para modelar el efecto de estos transformadores en el método de Newton-Raphson consiste en incluir la toma como variable adicional en sustitución de la tensión regulada [12]. Supongamos que un transformador conectado entre los nudos m y n , con toma variable a , regula la tensión del nudo i (normalmente i coincidirá con m o n). En este caso se elimina $\Delta V_i/V_i$ del vector de incógnitas y se añade $\Delta a/a$. En general, el sistema de ecuaciones a resolver tendrá la siguiente estructura

$$\begin{bmatrix} H & N & K_p \\ M & L & K_q \end{bmatrix}^k \begin{bmatrix} \Delta \theta \\ \Delta V/V \\ \Delta a/a \end{bmatrix}^k = \begin{bmatrix} \Delta P \\ \Delta Q \end{bmatrix}^k \quad (3.52)$$

donde K_p y K_q tienen tantas columnas como tomas y sus elementos se obtienen respectivamente de $a \partial P / \partial a$ y $a \partial Q / \partial a$ a partir del modelo en π estudiado en el capítulo anterior. Si, eventualmente, una toma alcanzase alguno de sus límites, el nudo regulado pasaría a PQ y la toma quedaría fija.

Para el FCDR, la necesidad de mantener constantes las matrices de coeficientes hace de nuevo que la técnica de realimentación del error sea la menos costosa. Si $\Delta V_i^k = V_i^{\text{esp}} - V_i^k$ es el error de tensión en la iteración actual, la toma debe corregirse para la siguiente en la cantidad

$$\Delta a^k = \alpha \Delta V_i^k$$

donde $\alpha = \pm 1$ es un valor adecuado, especialmente para transformadores en configuración radial (si la toma está en el lado m se utiliza el signo positivo para $i = m$ y el negativo cuando $i = n$).

En cualquier caso, al terminar el proceso iterativo, el valor obtenido para la toma debe redondearse al escalón real más próximo.

3.7.3. Intercambio entre áreas

En el método de Newton-Raphson, esta restricción puede modelarse añadiendo simplemente una ecuación no lineal, que obligue a que el flujo total de potencia activa por las líneas de interconexión sea el valor programado, P_I^{esp} . Esta ecuación adicional debe compensarse lógicamente con una nueva incógnita, que se consigue por ejemplo liberando la potencia activa de uno de los generadores del área.

Como en casos anteriores, para el FCDR es más conveniente recurrir a la técnica que utiliza el error de intercambio en la iteración k , $\Delta P_I^k = P_I^{\text{esp}} - P_I^k$, para modificar los datos especificados en la iteración siguiente. De este modo, la potencia total generada en el área debe corregirse para la siguiente iteración en la cantidad

$$\Delta P_G = \alpha \Delta P_I^k$$

donde, al ser las pérdidas pequeñas, $\alpha = 1$ es una buena estimación de la sensibilidad. La cantidad ΔP_G puede ser asignada en su totalidad a un solo nudo o, más habitualmente, prorrateada entre varios generadores previamente especificados.

Ejemplo 3.6:

En el Ejemplo 3.3 se obtuvo que la potencia reactiva que tiene que inyectar el generador 3 para mantener la tensión de su embarrado a 1.05 es 24.02 Mvar. Supondremos en este ejemplo que el límite superior de reactiva para dicho generador es 20 Mvar, lo que implica que el nudo 3 debe pasar a PQ durante el proceso iterativo. A continuación, se ilustrará brevemente la técnica de realimentación del error para tener en cuenta este límite en el FCDR.

Esta técnica se basa en la sensibilidad de la tensión V_3 a cambios unitarios de potencia reactiva en el nudo 3. Dicha sensibilidad se obtiene, antes de comenzar el proceso iterativo, resolviendo la ecuación (3.51), que en este caso se reduce a:

$$\begin{bmatrix} 7,887 & -4,587 \\ -4,587 & 4,587 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} S_{23} \\ S_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \Rightarrow S_{33} = 0,521$$

Supongamos, para utilizar los resultados finales del Ejemplo 3.4, que el límite de reactiva se comprueba por primera vez una vez convergido el FCDR, es decir, tras la tercera semi-iteración de reactiva (en realidad habría que hacerlo algo antes). Según la metodología descrita anteriormente, el nuevo valor de V_3^{esp} para la siguiente iteración se estima de:

$$V_3^{\text{esp}} = 1,05 + S_{33}(0,2 - 0,2402) = 1,029$$

Procediendo de este modo, tras 2 semi-iteraciones adicionales de activa y 3 de reactiva (para una tolerancia de 0,0001), llegamos al estado mostrado a continuación:

$$[\theta_2 \quad \theta_3 \quad V_2 \quad V_3] = [-9,32 \quad -5,29 \quad 0,979 \quad 1,0297]$$

que sólo requiere que el generador 3 inyecte 20 Mvar, en lugar de los 24 Mvar iniciales. A cambio, la tensión del nudo de consumo 2 puede ser inaceptablemente baja, lo que obligaría a instalar un compensador de reactiva local o a subir la tensión del nudo 1.

3.8. Aplicación a redes de distribución radiales

Aunque la configuración de la mayoría de redes de distribución es mallada, especialmente en zonas urbanas, su explotación se realiza casi siempre en forma radial. Esto se hace (véase el Capítulo 9) para simplificar la gestión de las protecciones y para disminuir las potencias de cortocircuito, lo que se traduce en un ahorro de costes a cambio de reducir la fiabilidad (mayor número y duración de interrupciones).

En este tipo de redes, con relación R/X elevada y tramos de líneas a veces muy cortos, el FCDR no siempre funciona correctamente, e incluso se han encontrado casos donde el método de Newton-Raphson estándar presenta dificultades de convergencia.

Por otro lado, la configuración radial, con un solo punto de alimentación en la cabecera de donde salen diversas líneas aéreas y/o subterráneas, permite la implantación de algoritmos más simples, de eficacia similar o superior a la del método de Newton-Raphson, que aprovechan la estructura arborescente para disminuir los tiempos de cálculo. A continuación, se describe uno de los procedimientos más intuitivos [13], que no es más que una adaptación del método descrito en la Sección 3.3.2 al caso radial. Se presentará sólo la versión monofásica (redes y cargas equilibradas), aunque su extensión al caso trifásico es inmediata para redes radiales (el caso desequilibrado general se explica en el Capítulo 12).

Considérese una red radial cuyos n nudos se ordenan desde el punto de alimentación hasta los nudos más extremos, de modo que cada nudo precede a los que tiene “aguas abajo”. Partiendo del perfil plano, \mathcal{U}^0 , el proceso de solución consta de tres etapas, que se repiten hasta que las tensiones en dos iteraciones consecutivas sean suficientemente parecidas:

1. Con los valores actuales de tensiones, se obtienen las intensidades netas inyectadas en cada nudo:

$$\mathcal{I}_i^k = \left(\mathcal{S}_i^{\text{esp}} / \mathcal{U}_i^k \right)^* - \mathcal{Y}_i^p \mathcal{U}_i^k \quad i = n, n-1, \dots, 2 \quad (3.53)$$

donde \mathcal{Y}_i^p es la admitancia paralelo conectada al nudo i .

2. Barriando todas las ramas del árbol en sentido ascendente (“aguas arriba”) se obtienen las intensidades \mathcal{I}_{ij} circulantes por cada una mediante la primera ley de Kirchhoff:

$$\mathcal{I}_{ij}^k = -\mathcal{I}_j^k + \sum_{m \in j, m \neq i} \mathcal{I}_{jm} \quad j = n, n-1, \dots, 2 \quad (3.54)$$

donde i y j son el extremo suministrador y receptor de la rama en cuestión. En la práctica, los pasos 1 y 2 se realizan simultáneamente.

3. Barriando el árbol en sentido opuesto (“aguas abajo”) se actualizan las tensiones desde el nudo de alimentación mediante la segunda ley de Kirchhoff:

$$\mathcal{U}_j^{k+1} = \mathcal{U}_i^{k+1} - \mathcal{Z}_{ij} \mathcal{I}_{ij}^k \quad j = 2, 3, \dots, n \quad (3.55)$$

siendo \mathcal{Z}_{ij} la impedancia serie de la línea i - j .

La principal diferencia respecto al método descrito en 3.3.2 es que, gracias al carácter radial de la red, nos ahorramos construir y almacenar cualquier matriz, sea de impedancias o admitancias, siendo suficiente con la estructura del árbol.

Una ligera variante del método anterior, menos adaptable al caso trifásico, se obtiene si se trabaja con flujos de potencia en lugar de intensidades [10]. Para ello, en lugar de la ecuación (3.53), se utiliza la siguiente:

$$\mathcal{S}_i^k = \mathcal{S}_i^{\text{esp}} - \mathcal{Y}_i^{p*} (V_i^k)^2 \quad i = n, n-1, \dots, 2 \quad (3.56)$$

Análogamente, en el barrido hacia arriba deben estimarse las pérdidas de las ramas salientes para calcular los flujos de potencia de la rama entrante:

$$\mathcal{S}_{ij}^k = -\mathcal{S}_j^k + \sum_{m \in j, m \neq i} \left[\mathcal{Z}_{jm} \frac{S_{jm}^2}{V_m^2} + \mathcal{S}_{jm} \right] \quad j = n, n-1, \dots, 2 \quad (3.57)$$

y en el barrido hacia abajo se utilizan los flujos que se acaban de calcular:

$$\mathcal{U}_j^{k+1} = \mathcal{U}_i^{k+1} - \mathcal{Z}_{ij} \left[\frac{\mathcal{S}_{ij}^k}{\mathcal{U}_j^k} \right]^* \quad j = 2, 3, \dots, n \quad (3.58)$$

3.9. Sistemas de gran dimensión

El método de Newton-Raphson, usado en la mayoría de los programas modernos de flujos de potencia, involucra matrices de gran dimensión cuando se aplica a sistemas de gran tamaño. Consideremos la estructura del jacobiano completo en su versión polar que, como hemos visto, tiene la forma siguiente:

$$J = \begin{bmatrix} H & N \\ M & L \end{bmatrix} \quad (3.59)$$

La dimensión de cada componente del jacobiano es, en principio, igual a $n \times n$ (donde n es el número de nudos en la red) aunque, como se explicó anteriormente, ciertas filas y columnas no se usan en el cómputo actual. Así, en la componente H del jacobiano, correspondiente a las derivadas de la potencia activa inyectada con respecto a los desfases, las filas y columnas del nudo de referencia se eliminan, reduciendo su dimensión. Lo mismo ocurre en los otros 3 bloques del jacobiano, donde las filas correspondientes a los residuos de potencia reactiva de los nudos PV y las columnas de las tensiones respectivas también se omiten.

La propiedad más interesante de estas matrices es que, además de ser de gran dimensión para el caso de un sistema con muchos nudos, son también muy dispersas, es decir, la gran mayoría de sus elementos son nulos. Analizando las ecuaciones que definen el jacobiano, es fácil darse cuenta de que la estructura o topología de cada una de estas cuatro matrices es idéntica a la estructura de la matriz de admitancias \mathcal{Y} . La matriz de admitancias tiene elementos no nulos solamente cuando hay una conexión directa entre dos nudos. La forma más fácil de explicar este hecho es a través de un ejemplo específico. Consideremos la red de 20 nudos de la Figura 3.2, cuyo grafo y matriz de admitancias se muestran en la Figura 3.3.

El jacobiano completo (con filas tanto para P como para Q , y columnas tanto para el ángulo como la magnitud de cada voltaje) está ilustrado en la Figura 3.4. En esta figura los

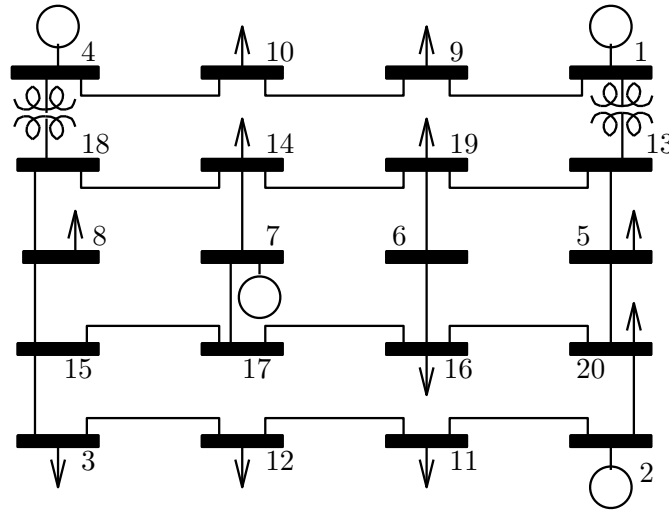


Figura 3.2. Diagrama unifilar para un sistema de 20 nudos. Las líneas gruesas indican embarrados (nudos). Las líneas delgadas indican líneas de transporte o transformadores.

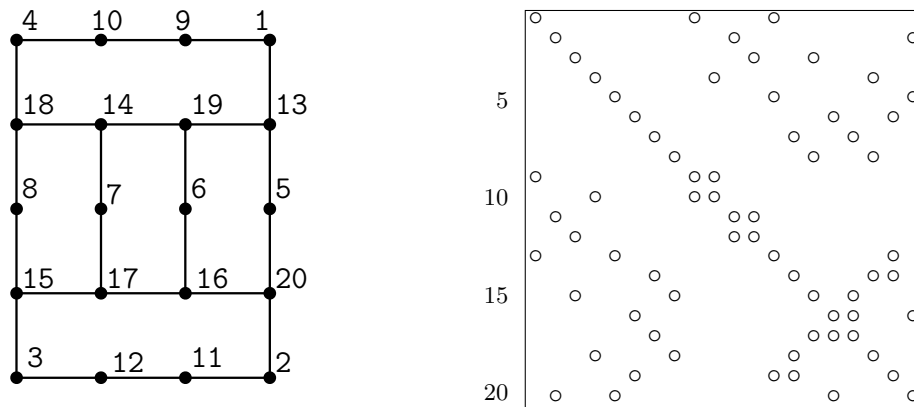


Figura 3.3. Grafo y topología de la matriz de admitancias correspondientes al diagrama unifilar de la Figura 3.2.

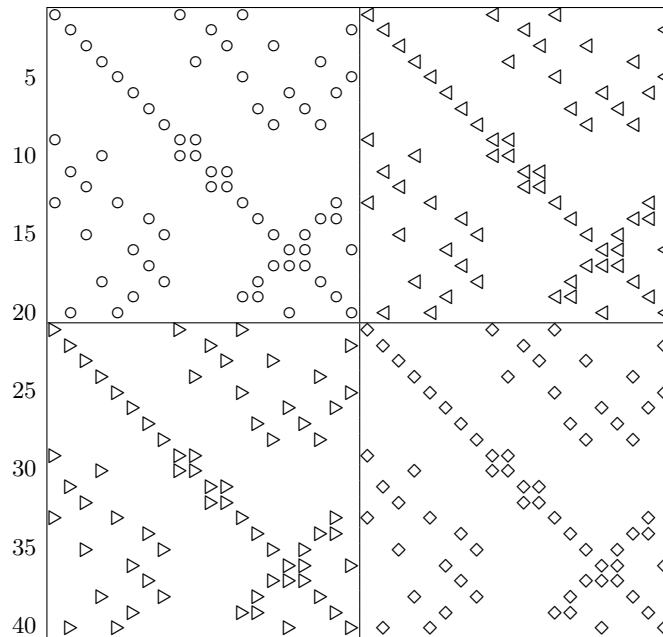


Figura 3.4. Topología del jacobiano completo para la red de la Figura 3.3.

elementos de H están representados con el símbolo \circ , los de N con el símbolo \triangleleft , los de M con el símbolo \triangleright y los de L con el símbolo \diamond .

Se puede mejorar tanto la apariencia como los aspectos computacionales de este jacobiano si se reordenan las filas y las columnas para agrupar los componentes que corresponden a las mismas conexiones. El resultado del reordenamiento de las filas y columnas del jacobiano completo es la matriz mostrada en la Figura 3.5. En términos de entradas individuales, la dimensión de esta matriz es de 40×40 , pero en términos de bloques es de 20×20 .

De esta estructura deben eliminarse ciertas filas. Para el problema que se ha planteado, son necesarios los siguientes cambios:

- La fila y la columna que corresponden al nudo de referencia (nudo número 4 en nuestro ejemplo) se eliminan completamente.
- Para los otros tres nudos de generación (nudos 1, 2 y 7), se eliminan los términos correspondientes en las submatrices N , M y L del jacobiano.

El resultado es una matriz de 35×35 (de 19×19 si se cuentan los bloques y no los elementos individuales de la matriz). Esta matriz se ilustra en la Figura 3.6. Obsérvese que se han eliminado filas y columnas de acuerdo al tipo de nudo.

El paso más importante para la solución eficiente de matrices dispersas de gran dimensión es el ordenamiento de las filas y las columnas para reducir el número de elementos en los factores de la matriz. En un ejemplo de 20 nudos no es fácil ilustrar la importancia del

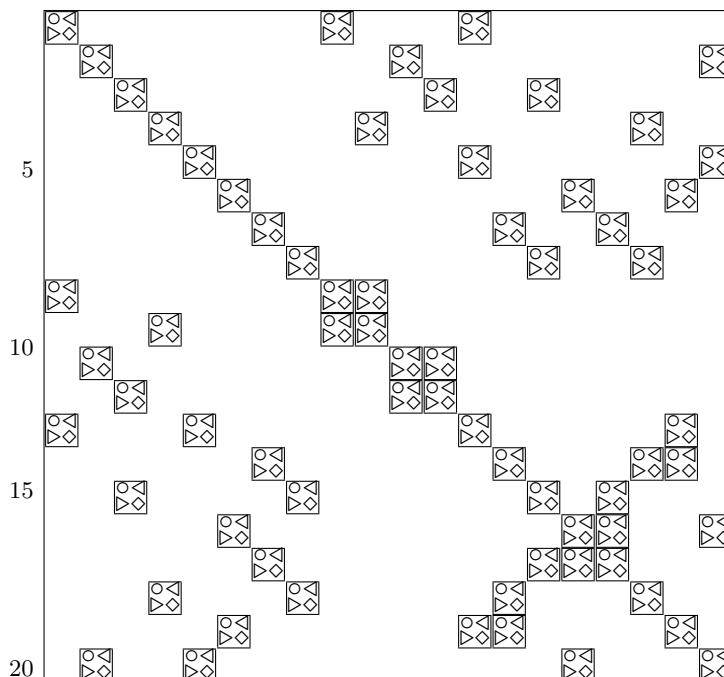


Figura 3.5. Topología del jacobiano reorganizado.

método de ordenación. Por este motivo, en lo sucesivo ilustraremos el caso de una red con 118 nudos.

Hay muchos métodos de reordenamiento que se pueden usar para reducir el número de entradas que resultan de la factorización del jacobiano. Los tres métodos principales son los propuestos por W. F. Tinney [18]:

1. Ordenamiento *a priori* de los nudos de acuerdo a la valencia o grado del nudo. La valencia se define como el número inicial de conexiones del nudo.
2. Ordenamiento dinámico de los nudos de acuerdo a la valencia. La valencia se define en este caso como el número de conexiones del nudo en cada paso del proceso de factorización. Este método se conoce también como el método de *grado mínimo*.
3. Ordenamiento dinámico de los nudos de acuerdo a la valencia, pero cuando la valencia se define como el número de entradas adicionales (*fillins*) que ocurrirían si el nudo se eliminara en ese paso del proceso.

Para el caso del sistema de ecuaciones que corresponde a la red de 118 nudos, la Figura 3.7 ilustra la estructura inicial de la matriz. La Figura 3.8 muestra los factores L y U si no se realiza ninguna ordenación. Los factores L y U cuando la matriz se ha ordenado previamente siguiendo el método 2 de Tinney se ilustran en la Figura 3.9. Se puede ver inmediatamente la gran ventaja del ordenamiento, a pesar de que una matriz de este tamaño

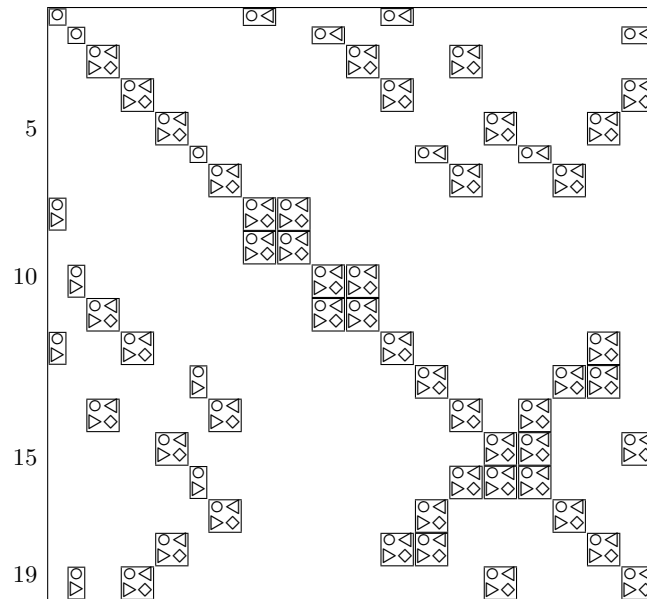


Figura 3.6. Topología del jacobiano reorganizado y reducido.

se considera bastante pequeña. El efecto del ordenamiento y las diferencias entre los tres métodos se aprecian mucho más claramente con matrices de gran dimensión. Este efecto no está restringido a la disminución del número de entradas en los factores de la matriz, sino sobre todo a una reducción notable en el esfuerzo computacional.

Muchas variantes de estos métodos de ordenamiento se han implementado en los últimos 25 años. El propósito de estas variantes ha incluido, entre otros, los siguientes objetivos:

- Reducción de las dependencias entre las operaciones e incremento del paralelismo en los procesos involucrados.
- Mejora de la velocidad del algoritmo por medio de aproximaciones al método básico.
- Extensiones para el caso de matrices no simétricas.
- Consideración de aspectos numéricos de la factorización de la matriz.

Desde el punto de vista práctico, la variante del método de grado mínimo (Tinney 2) denominada “mmd”, de George y Liu [5], es una de las más adecuadas. En la mayoría de los casos no es necesario, ni recomendable, usar otro método, a menos que haya alguna razón específica (como, por ejemplo, la necesidad de implementar el algoritmo en una máquina con computación en paralelo).

La extensión de estas técnicas para el método desacoplado rápido es directa, teniendo en cuenta que las matrices que se usan no tienen la estructura de bloques mostrada anteriormente, sino que cada elemento es un escalar. Además, la factorización de las matrices se hace una sola vez, utilizándose estos factores durante varias iteraciones, lo cual cambia la importancia relativa de las fases de ordenación, factorización y solución.

Figura 3.7. Matriz original para el sistema de 118 nudos, con 179 elementos no diagonales en cada mitad.

Figura 3.8. Factores L/U de la matriz de 118 nudos (sin ordenamiento). Cada matriz contiene 1 025 elementos no diagonales, de los cuales 846 son *fillins*.

Figura 3.9. Factores L/U de la matriz de 118 nudos, ordenada según la variante “mmd” del método Tinney 2. Cada matriz contiene 321 elementos no diagonales, de los cuales 142 son *fillins*.

Métodos más avanzados, que aprovechan la estructura dispersa de los vectores involucrados y reconstruyen parcialmente los factores L y U , pueden usarse para acelerar en gran medida los cálculos en casos especiales. Para más detalles, véase [1] y el Apéndice A.

Bibliografía

- [1] F. L. Alvarado, W. F. Tinney y M. K. Enns, “Sparsity in Large-Scale Network Computation”, *Advances in Electric Power and Energy Conversion System Dynamics and Control* (C. T. Leonard, ed.), Control and Dynamic Systems, vol. 41, Academic Press, 1991, Part 1, pp. 207-272.
- [2] B. S. Babic, “Decoupled Load Flow with Variables in Rectangular Form”, *IEE Proceedings, part C*, 1983, pp. 98-110.
- [3] A. Brameller y J. K. Denmead, “Some Improved Methods of Digital Network Analysis”, *IEE Proceedings*, vol. 109, 1962, pp. 109-116.
- [4] S. T. Despotovic, B. S. Babic y V. P. Mastilovic, “A Rapid and Reliable Method for Solving Load Flow Problems”, *IEEE Transactions on Power Apparatus and Systems*, vol. PAS-90, 1971, pp. 123-130.
- [5] A. George y J. W. H. Liu, “The Evolution Of The Minimum Degree Ordering Algorithm”, *SIAM Review*, vol. 31, 1971, pp. 1-19.
- [6] A. F. Glimm y G. W. Stagg, “Automatic Calculation of Load Flows”, *IEEE Transactions on Power Apparatus and Systems*, vol. PAS-76, 1957, pp. 817-825.
- [7] A. Gómez Expósito y E. Romero Ramos, “Augmented Rectangular Load Flow Model”, Paper 2000TR720, aceptado en *IEEE Transactions on Power Systems*.
- [8] P. P. Gupta y M. W. H. Davies, “Digital Computers in Power System Analysis”, *IEE Proceedings*, vol. 108, 1961, pp. 383-404.

- [9] H. W. Hale y R. Goodrich, "Digital Computation of Power Flow - Some New Aspects", *IEEE Transactions on Power Apparatus and Systems*, vol. PAS-78, 1959, pp. 919-924.
- [10] G. X. Luo y A. Semlyen, "Efficient Load Flow for Large Weakly Meshed Networks", *IEEE Transactions on Power Systems*, vol. 5(4), 1990, pp. 1309-1316.
- [11] A. Monticelli, A. García y O. R. Saavedra, "Fast Decoupled Load Flow: Hypothesis, Derivations and Testing", *IEEE Transactions on Power Systems*, vol. 5(2), 1990, pp. 556-564.
- [12] N. M. Peterson y W. S. Meyer, "Automatic Adjustment of Transformer and Phase-Shifter Taps in the Newton Power Flow", *IEEE Transactions on Power Apparatus and Systems*, vol. PAS-90, 1971, pp. 103-108.
- [13] D. Shirmohammadi, H. W. Hong, A. Semlyen y G. X. Luo, "A Compensation-Based Power Flow Method for Weakly Meshed Distribution and Transmission Networks", *IEEE Transactions on Power Systems*, vol. 3(2), 1988, pp. 753-762.
- [14] B. Stott, "Effective Starting Process for Newton Raphson Load Flows", *IEE Proceedings*, vol. 118, 1971, pp. 983-987.
- [15] B. Stott, "Decoupled Newton Load Flow", *IEEE Transactions on Power Apparatus and Systems*, vol. PAS-91, 1972, pp. 1955-1959.
- [16] B. Stott, "Review of Load Flow Calculation Methods", *Proceedings of the IEEE*, vol. 62, 1974, pp. 916-929.
- [17] B. Stott y O. Alsac, "Fast Decoupled Load Flow", *IEEE Transactions on Power Apparatus and Systems*, vol. PAS-93, 1974, pp. 859-869.
- [18] W. F. Tinney y C. E. Hart, "Power Flow Solution by Newton's Method", *IEEE Transactions on Power Apparatus and Systems*, vol. PAS-86, 1967, pp. 1449-1460.
- [19] W. F. Tinney y J. W. Walker, "Direct Solutions of Sparse Network Equations by Optimally Ordered Triangular Factorization", *Proceedings of the IEEE*, vol. 55, 1967, pp. 1801-1809.
- [20] R. A. M. Van Amerongen, "A General-Purpose Version of the Fast Decoupled Load Flow", *IEEE Transactions on Power Systems*, vol. 4, 1989, pp. 760-770.
- [21] J. B. Ward y H. W. Hale, "Digital Computer Solution of Power Flow Problems", *IEEE Transactions on Power Apparatus and Systems*, vol. PAS-75, 1956, pp. 398-394.

Capítulo 4

Estimación de estado

ANTONIO GÓMEZ EXPÓSITO Y ALI ABUR

4.1. Introducción

El renombrado apagón ocurrido en el nordeste de los Estados Unidos en 1965, supuso un hito importante en la forma de operar los cada vez más complejos sistemas de transporte de energía eléctrica. Los sistemas primitivos, inicialmente aislados entre sí, se habían ido interconectando por motivos de seguridad (apoyo mutuo ante perturbaciones) y economía (intercambio de energía barata). Paradójicamente, sin embargo, uno de los principales inconvenientes de la interconexión consiste en la posibilidad de que un incidente se extienda a áreas mucho mayores, lo que obligó desde un principio a realizar un seguimiento continuo del funcionamiento de dichos sistemas.

Con el advenimiento de los primeros ordenadores, pudieron instalarse los denominados *Sistemas de Supervisión, Control y Adquisición de Datos* (más conocidos por las siglas inglesas SCADA), presentes hoy día en innumerables instalaciones industriales de cierta complejidad, como centrales nucleares, sistemas ferroviarios, gasoductos, etc. Las funciones más primitivas de un sistema SCADA consisten en la captura de todos los datos relevantes del sistema supervisado, mediante unidades normalmente remotas, el mantenimiento de una base de datos, la presentación en pantallas gráficas de la información disponible, resaltando posibles alarmas o eventos importantes, y facilitar al operador la actuación sobre elementos de control del sistema para modificar su evolución.

En el caso de los sistemas eléctricos, los SCADA incorporaban además ciertas funciones propias, como el control automático de la generación y el despacho económico, que se estudiarán en los Capítulos 5 y 6. Para ello, además de los estados de los interruptores, se monitorizaba la frecuencia del sistema y las potencias activas de los generadores.

El mencionado apagón, y otros incidentes menos conocidos, pusieron de manifiesto que había que prestar mucha más atención a la seguridad de operación del sistema, lo que requería sistemas SCADA más sofisticados que los entonces existentes. Se empezaron a capturar, a intervalos de tiempo menores, un mayor número de medidas, incluyendo flujos de potencia por las líneas, y se desarrollaron nuevas herramientas informáticas, que eventual-

mente permitirían analizar la seguridad de la red, los riesgos de inestabilidad, las pérdidas, etc.

Todo este nuevo entramado se basaba, fundamentalmente, en el conocimiento del estado del sistema, determinado completamente, como hemos visto en el capítulo anterior, por las tensiones complejas en todos los nudos. Los primeros intentos de obtener dicho estado mediante un flujo de cargas *on-line* estuvieron plagados de problemas, como consecuencia de la carencia de ciertas medidas, la inconsistencia de otras y la imposibilidad de aprovechar toda la información disponible (el flujo de cargas no utiliza por ejemplo los flujos por las líneas). En esta situación, el profesor Fred Schweppe, del Instituto Tecnológico de Massachusetts (MIT), sugirió que la solución pasaba por aplicar el concepto de estimación de estado, utilizado ya en otras áreas tecnológicas sobre sistemas más pequeños [43, 44]. Los desarrollos que siguieron a este trabajo pionero, especialmente la incorporación de las mejoras computacionales que Tinney y sus colegas acababan de realizar al problema del flujo de cargas [27], avalaron muy pronto la idoneidad de los estimadores de estado, cuya presencia se hizo indispensable desde entonces en cualquier centro de control.

Un estimador de estado, trabajando *on-line*, permite obtener una base de datos fiable y completa, imprescindible para el correcto funcionamiento de todas las actividades involucradas en el control y operación del sistema eléctrico, empezando por la evaluación de seguridad [13]. Hasta tal punto el análisis de seguridad depende de los resultados del estimador de estado, que usualmente ambas herramientas aparecen y se describen como una sola (en este texto, el análisis estático de seguridad se explica en el Capítulo 7). Pero el registro histórico de toda la información generada resulta también vital para la mayoría de funciones relacionadas con la planificación (predicción de la demanda, estudios de fiabilidad, ampliación de los sistemas de generación y transporte, etc.) y la gestión de los nuevos mercados de electricidad (Capítulo 6). La incorporación a los sistemas SCADA convencionales de todas estas funciones, junto al avance espectacular en arquitecturas de ordenadores, han dado lugar a los modernos Sistemas de Gestión de Energía (conocidos también por las siglas inglesas EMS).

Un estimador de estado incluye básicamente las siguientes funciones [54, 36]:

1. *Prefiltrado de medidas*: Como medida preventiva se realiza en primer lugar un chequeo de consistencia de medidas, para detectar y descartar valores claramente erróneos (tensiones negativas, potencias fuera de rango o muy distintas en ambos extremos de una línea, etc.).
2. *Procesador topológico*: Obtiene el modelo eléctrico de la red (nudos eléctricos, conectividad, islas no energizadas, etc.) mediante el estado de los elementos de maniobra (seccionadores e interruptores).
3. *Análisis de observabilidad*: Determina si la disponibilidad y distribución de medidas permite que la estimación pueda realizarse sobre toda la red, y en caso negativo discrimina las partes observables de las que no lo son. Según la técnica usada, este proceso puede estar integrado en la propia estimación.
4. *Estimación de estado*: Calcula el estado óptimo, estadísticamente hablando, del sistema, compuesto por las tensiones complejas en todos los nudos de las islas observables.

Para ello utiliza el modelo suministrado por el procesador topológico y las medidas disponibles. Con el estado estimado se obtienen también las estimaciones de las magnitudes medidas.

5. *Procesador de medidas erróneas*: Detecta, mediante las diferencias entre los valores medidos y estimados, en base a ciertas propiedades estadísticas, la existencia de posibles errores en las medidas que no se ajustan a las hipótesis de partida. Si la redundancia lo permite, identifica y elimina las medidas erróneas. Los estimadores más avanzados pueden también, con niveles de redundancia elevados, detectar estados de interruptores incorrectos (errores topológicos) y errores en las tomas de transformadores o parámetros de las líneas.

En la Figura 4.1 se muestra la dependencia funcional y relaciones entre los distintos módulos que se acaban de describir.

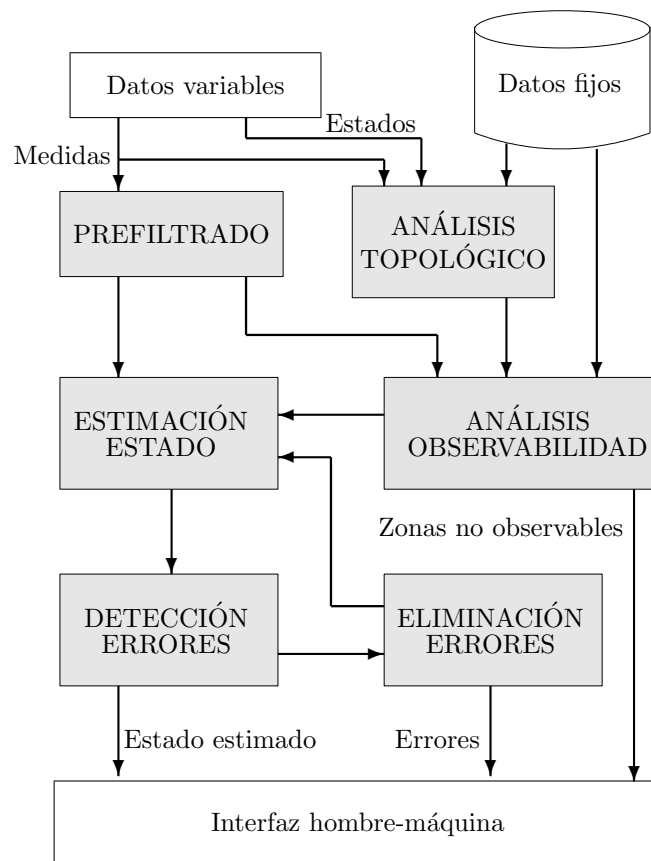


Figura 4.1. Componentes de un estimador de estado y relaciones entre los mismos.

El estimador de estado, por tanto, actúa como un filtro entre las medidas de campo y todas las aplicaciones del EMS, que requieren la base de datos más fiable posible. Sirve

además para que los operadores del sistema aumenten su confianza en los valores que se les muestran y dispongan de magnitudes importantes que no siempre se miden.

4.2. Formulación del problema

El conjunto de fasores compuesto por las tensiones complejas de los nudos de un sistema de potencia define, como sabemos, el *estado* de dicho sistema. Se asume implícitamente que la topología y parámetros de la red, por ejemplo las tomas de los transformadores, son conocidos, por lo que no forman parte del estado. Posteriormente, en la Sección 4.8, esta suposición será relajada con vistas a detectar parámetros erróneos.

El objetivo de lo que se conoce como *estimación de estado estática* es estimar las tensiones complejas en todos los nudos eléctricos de un sistema dado [44]. Esto se logra procesando las medidas disponibles y la información sobre el estado de los interruptores, seccionadores y tomas de transformadores, así como los parámetros de líneas, transformadores, bancos de condensadores y reactancias. El número de medidas, así como su ubicación, tipo y precisión dependen de cada sistema en concreto. Por motivos económicos, tan sólo los sistemas de transporte a muy alta tensión están dotados de un sistema de medidas completo y adecuado para la estimación de estado. En los niveles de distribución de mayor tensión y responsabilidad (antiguamente llamados de “reparto”) el sistema de medidas también permite llevar a cabo el proceso de estimación, aunque con ciertas limitaciones.

Los tipos de medidas más comúnmente utilizados son los siguientes:

1. Flujos: Flujos de potencia activa y reactiva medidos en ambos extremos de líneas y transformadores.
2. Inyecciones: Potencia neta activa y reactiva inyectada en los nudos. Estas inyecciones suelen ser a su vez flujos de potencia por elementos que caen fuera del ámbito del estimador, normalmente transformadores generación/transporte o transporte/distribución.
3. Módulos de tensiones: Lecturas de voltímetros en los embarrados. Puede haber varias medidas en un mismo nudo eléctrico compuesto por varios embarrados acoplados por interruptores.
4. Módulos de corriente: Lecturas de amperímetros en ambos extremos de líneas y transformadores.

Obsérvese que, por su propia naturaleza, los dos primeros tipos de medidas llevan aparejado un signo, mientras que los dos últimos tipos son siempre positivos (valores eficaces o rms).

Todas las medidas llevan asociado un cierto error, que proviene de los transformadores de medida (tensión e intensidad), del propio transductor, del proceso de conversión analógico-digital, y del posible sesgo o ruido introducido por el sistema de comunicaciones, como consecuencia del lapso de tiempo transcurrido entre la primera y la última medida.

Además de las medidas ordinarias mencionadas anteriormente, existen ciertas magnitudes que, sin provenir de un aparato de medida, pueden utilizarse como medidas en el proceso de estimación. Éstas son:

1. Medidas virtuales: Valores que vienen impuestos por restricciones de la propia red. Las más comunes son las inyecciones nulas en los denominados nudos de tránsito (o sea, nudos sin generación ni consumo).
2. Pseudo-medidas: Valores basados en datos históricos o en predicciones, utilizados para mejorar la redundancia en zonas pobremente monitorizadas. Ejemplos típicos son la predicción de demanda en un nudo de consumo o la generación planificada para una central eléctrica en un determinado momento del día.

Mientras que las medidas virtuales se consideran a todos los efectos libres de errores, las pseudo-medidas son casi siempre menos precisas que las medidas ordinarias.

4.2.1. Modelo de la red y del sistema de medidas

La función del estimador de estado es monitorizar la operación del sistema en funcionamiento normal, cuando la carga y la generación varían lentamente. En esta situación, el sistema puede suponerse en estado cuasi-permanente y equilibrado (líneas perfectamente traspuestas), por lo que puede utilizarse un circuito monofásico equivalente de secuencia directa para formular el problema (los circuitos desequilibrados se estudian en temas posteriores).

Dado el modelo de la red, todas las medidas anteriores pueden expresarse como funciones, generalmente no lineales, del estado del sistema. Estas expresiones no tienen en cuenta los posibles errores de las medidas, que deben modelarse como un término adicional. Considérese un vector z compuesto por m medidas. Éstas pueden ser expresadas en función de las n componentes del vector de estado x como sigue ($n = 2N - 1$, siendo N el número de nudos):

$$z = \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \vdots \\ z_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h_1(x_1, x_2, \dots, x_n) \\ h_2(x_1, x_2, \dots, x_n) \\ \vdots \\ h_m(x_1, x_2, \dots, x_n) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ \vdots \\ e_m \end{bmatrix} = h(x) + e \quad (4.1)$$

donde:

$$h^T = [h_1(x), h_2(x), \dots, h_m(x)].$$

$h_i(x)$ es la función no lineal que relaciona la medida i con el vector de estado x .

$x^T = [x_1, x_2, \dots, x_n]$ es el vector de estado.

$e^T = [e_1, e_2, \dots, e_m]$ es el vector de errores en las medidas.

Como en el caso del flujo de cargas, para trabajar con variables reales en lugar de complejas cada fasor tensión se expresa en coordenadas polares (lo más habitual) o cartesianas. Análogamente, el vector de medidas está compuesto por términos reales correspondientes a flujos o inyecciones de potencia activa o reactiva, o magnitudes de tensiones y corrientes. Realmente, como se verá a continuación, en las funciones $h_i(x)$ que relacionan el estado con las medidas sin errores aparecen también los parámetros y topología de la red. Sin embargo, en base a la suposición de que estos datos se conocen con absoluta precisión, tan sólo el vector de estado aparece en la dependencia funcional.

Utilizando coordenadas polares para las tensiones, y cartesianas para los elementos de la matriz de admitancias de nudos, las funciones $h_i(x)$ relativas a medidas de potencia son las siguientes:

- Medidas de inyección neta en el nudo i :

$$P_i = \sum_{j=1}^N V_i V_j (G_{ij} \cos \theta_{ij} + B_{ij} \operatorname{sen} \theta_{ij}) \quad (4.2)$$

$$Q_i = \sum_{j=1}^N V_i V_j (G_{ij} \operatorname{sen} \theta_{ij} - B_{ij} \cos \theta_{ij}) \quad (4.3)$$

- Medidas de flujo a través de una línea o transformador del nudo i al j :

$$P_{ij} = V_i V_j (G_{ij} \cos \theta_{ij} + B_{ij} \operatorname{sen} \theta_{ij}) - G_{ij} V_i^2 \quad (4.4)$$

$$Q_{ij} = V_i V_j (G_{ij} \operatorname{sen} \theta_{ij} - B_{ij} \cos \theta_{ij}) + V_i^2 (B_{ij} - b_{ij}^p) \quad (4.5)$$

siendo

V_i, V_j los módulos de las tensiones en los nudos i y j .

$\theta_{ij} = \theta_i - \theta_j$ el desfase entre los nudos i y j .

$G_{ij} + B_{ij}$ el elemento i, j -ésimo de la matriz de admitancias de nudos.

b_{ij}^p la admitancia paralelo del modelo en π de la línea que une i con j .

Las medidas de tensión están relacionadas trivialmente con la variable de estado respectiva, y las medidas de intensidad no son frecuentes en redes de transporte.

Resulta habitual, aunque no siempre justificable, hacer las siguientes suposiciones sobre las propiedades estadísticas de los errores de las medidas:

- Los errores siguen una distribución normal.
- El valor esperado de todos los errores es nulo, es decir, $E(e_i) = 0, \quad i = 1, \dots, m$.
- Los errores son independientes, es decir, $E[e_i e_j] = 0$.

Por tanto,

$$\operatorname{Cov}(e) = E[e \cdot e^T] = R = \operatorname{diag}\{\sigma_1^2, \sigma_2^2, \dots, \sigma_m^2\} \quad (4.6)$$

La desviación típica σ_i de cada medida i se calcula para reflejar la precisión esperada de los aparatos de medida involucrados. A modo de ejemplo, la fórmula empleada por la American Electric Power Company en su estimador de estado es [2]:

$$\sigma_i = 0,0067 S_i + 0,0016 F S_i$$

donde

$$S_i = \begin{cases} \sqrt{P_{km}^2 + Q_{km}^2} & \text{para el flujo } k - m \\ \sqrt{P_k^2 + Q_k^2} & \text{para la inyección en } k \\ V_k & \text{para la magnitud de tensión en } k \end{cases}$$

$$F S_i = \text{Fondo de escala del medidor}$$

La formulación del problema de estimación de estado se basa en el concepto de estimación de máxima verosimilitud, que se revisa brevemente a continuación. El *estimador de máxima verosimilitud* de una variable aleatoria maximiza una función de probabilidad que se define en base a las hipótesis realizadas para el problema en cuestión. Lógicamente, formulaciones basadas en hipótesis distintas darán resultados distintos. El desarrollo que sigue es el más común, y se basa en las hipótesis sobre los errores de medidas enunciadas anteriormente.

La primera suposición es que los errores siguen una distribución gaussiana o normal. Una variable aleatoria sigue una distribución normal si su función de densidad de probabilidad $f(z)$ viene dada por:

$$f(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{1}{2}\left\{\frac{z-\mu}{\sigma}\right\}^2}$$

donde z : variable aleatoria
 μ : valor medio o esperado de z , $E(z)$
 σ : desviación típica de z

Mediante el cambio de variable siguiente se obtiene una distribución normal estandarizada, $\Phi(u)$, con lo que sólo es preciso considerar una única distribución normal.

Sea $u = \frac{z-\mu}{\sigma}$, entonces $E(u) = 0$, $\text{Var}(u) = 1.0$.

$$\Phi(u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{u^2}{2}}$$

La segunda suposición se incorpora fácilmente haciendo cero el valor esperado de los errores en las expresiones anteriores.

La tercera suposición implica que la *función de probabilidad* del conjunto de m medidas se obtiene simplemente tomando el producto de las funciones correspondientes a cada medida, es decir,

$$f_m(z) = f(z_1)f(z_2)\cdots f(z_m)$$

Para simplificar la aritmética, se usa el logaritmo de dicha función, que se expresa entonces como:

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = \log f_m(z) &= \sum_{i=1}^m \log f(z_i) \\ &= -\frac{1}{2} \sum_{i=1}^m \left(\frac{z_i - \mu_i}{\sigma_i}\right)^2 - \frac{m}{2} \log 2\pi - \sum_{i=1}^m \log \sigma_i \end{aligned}$$

Debe observarse que maximizar \mathcal{L} y $f_m(z)$ dará la misma solución óptima, debido al carácter monótono creciente de la función logarítmica. Por tanto, el estado de máxima verosimilitud \hat{x} se puede obtener maximizando cualquiera de las dos funciones para un conjunto dado de observaciones z_1, z_2, \dots, z_m . Esto constituye un problema de optimización

que puede formularse como:

$$\begin{aligned} & \text{maximizar} && \log f_m(z) \\ & \text{o} \\ & \text{minimizar} && \sum_{i=1}^m \left(\frac{z_i - \mu_i}{\sigma_i} \right)^2 \end{aligned}$$

Definamos el *residuo* de la medida i como:

$$r_i = z_i - E(z_i) \tag{4.7}$$

donde $E(z_i) = h_i(x)$ y h_i es la función no lineal que relaciona el vector de estado x con la medida i .

Las inversas de las varianzas de las medidas pueden considerarse como “pesos” asignados a cada medida individual: valores altos para medidas precisas con pequeña varianza y pesos pequeños para medidas con gran incertidumbre. Denotemos este peso para la medida i como $W_{ii} = \sigma_i^{-2}$.

Con la notación y variables anteriormente introducidas, el estimador de máxima verosimilitud puede formularse como el siguiente problema de optimización:

$$\begin{aligned} \text{minimizar} & \quad J(x) = \sum_{i=1}^m W_{ii} r_i^2 && (4.8) \\ \text{sujeto a} & \quad z_i = h_i(x) + r_i, \quad i = 1, \dots, m \end{aligned}$$

La solución de este problema se conoce como el *Estimador de Mínimos Cuadrados Ponderados* (conocido por las siglas inglesas WLS) de x .

Obsérvese que la función objetivo del problema de optimización anterior se deduce directamente de la elección de la función de probabilidad. En la Sección 4.7 se discutirán formulaciones alternativas basadas en otras hipótesis sobre las propiedades estadísticas de los errores.

Ejemplo 4.1:

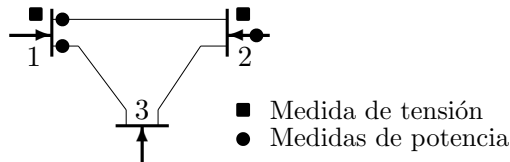


Figura 4.2. Diagrama unifilar y conjunto de medidas para un sistema de 3 nudos.

Considérese el sistema de 3 nudos mostrado en la Figura 4.2. Los datos eléctricos de esta red son los siguientes:

Línea		Resistencia	Reactancia	1/2 Susceptancia
De nudo	A nudo	R (pu)	X (pu)	b^p (pu)
1	2	0.01	0.03	0.0
1	3	0.02	0.05	0.0
2	3	0.03	0.08	0.0

El sistema se monitoriza a través de 8 medidas, es decir, $m = 8$ en la ecuación (4.1). Las medidas, sus valores y pesos asociados se muestran a continuación:

Índice, i	Tipo	Valor (pu)	W_{ii} (pu)
1	p_{12}	0.888	15 625
2	p_{13}	1.173	15 625
3	p_2	-0.501	10 000
4	q_{12}	0.568	15 625
5	q_{13}	0.663	15 625
6	q_2	-0.286	10 000
7	V_1	1.006	62 500
8	V_2	0.968	62 500

El vector de estado x tiene 5 elementos en este caso ($n = 5$),

$$x^T = [\theta_2, \theta_3, V_1, V_2, V_3]$$

$\theta_1 = 0$ se toma arbitrariamente como referencia de ángulos.

4.3. Solución mediante las ecuaciones normales

Como acabamos de ver, la estimación de estado cuando los errores en las medidas son independientes y siguen una distribución normal consiste en resolver el problema de mínimos cuadrados dado por (4.8), cuya función objetivo se puede reescribir del siguiente modo:

$$\begin{aligned}
 J(x) &= [z - h(x)]^T W [z - h(x)] \\
 &= \sum_{i=1}^m \frac{[z_i - h_i(x)]^2}{\sigma_i^2}
 \end{aligned}
 \tag{4.9}$$

donde $W = R^{-1}$.

En el mínimo, deben cumplirse las n condiciones de optimalidad de primer orden, que en este caso son

$$\frac{\partial J(x)}{\partial x} = 0 \Rightarrow H^T(x)W[z - h(x)] = 0
 \tag{4.10}$$

donde

$$H(x) = \frac{\partial h(x)}{\partial x}$$

es la matriz jacobiano del vector $h(x)$, de dimensión $m \times n$. Se trata de encontrar el valor \hat{x} que satisface la ecuación no lineal (4.10). Como ocurre con el problema del flujo de cargas, la forma más eficaz de resolver esta ecuación es mediante el método iterativo de Newton-Raphson (NR), que converge cuadráticamente a la solución [27, 44]. Despreciando los términos donde aparecen segundas derivadas de $h(x)$, el sistema lineal de n ecuaciones, denominadas *ecuaciones normales*, que debe resolverse en cada iteración es el siguiente:

$$G(x^k)\Delta x^k = H^T(x^k)W[z - h(x^k)] \quad (4.11)$$

donde x^k denota el valor de x en la iteración k -ésima y

$$G(x) = H^T(x)WH(x) \quad (4.12)$$

se conoce como *matriz de ganancia*. Si H es de rango completo entonces la matriz simétrica G es definida positiva, y el sistema (4.11) tiene solución única (véase la sección siguiente sobre observabilidad). Una vez resuelto el sistema, el vector de estado debe actualizarse para la siguiente iteración:

$$x^{k+1} = x^k + \Delta x^k$$

Ignorando por simplicidad de notación la dependencia de H respecto a x , el procedimiento completo puede resumirse en los siguientes pasos:

1. Tomar el perfil plano como valor inicial para x^0 ($V_i = 1$ p.u. $\theta_i = 0$). Hacer $k = 0$.
2. Calcular los residuos $\Delta z^k = z - h(x^k)$.
3. Obtener H y calcular $G = H^TWH$.
4. Resolver el sistema

$$G\Delta x^k = H^TW\Delta z^k \quad (4.13)$$

aprovechando la estructura dispersa de H y G . Para ello, como se explicó en el capítulo anterior, se realiza la ordenación óptima de las filas de G (esto es sólo necesario la primera vez) y se lleva a cabo su descomposición triangular $G = U^TU$, seguido de los procesos de eliminación hacia delante y sustitución hacia atrás.

5. Actualizar el vector de estado $x^{k+1} = x^k + \Delta x^k$ y hacer $k = k + 1$.
6. Si alguno de los elementos de Δx es mayor que una determinada tolerancia, volver al paso 2. En caso contrario, o si k excede un valor prefijado, detener el proceso.

Los términos del jacobiano correspondientes a medidas de flujo e inyección se recogen en la Tabla 4.1 (los términos debidos a medidas de tensión son todos nulos salvo el de la columna correspondiente a la tensión medida que vale 1).

Cuadro 4.1. Elementos de H correspondientes a inyecciones y flujos.

Inyección		Flujo	
$\frac{\partial P_i}{\partial V_i}$	$\sum_{j=1}^N V_j(G_{ij} \cos \theta_{ij} + B_{ij} \sin \theta_{ij}) + V_i G_{ii}$	$\frac{\partial P_{ij}}{\partial V_i}$	$V_j(G_{ij} \cos \theta_{ij} + B_{ij} \sin \theta_{ij}) - 2 G_{ij} V_i$
$\frac{\partial P_i}{\partial V_j}$	$V_i(G_{ij} \cos \theta_{ij} + B_{ij} \sin \theta_{ij})$	$\frac{\partial P_{ij}}{\partial V_j}$	$V_i(G_{ij} \cos \theta_{ij} + B_{ij} \sin \theta_{ij})$
$\frac{\partial Q_i}{\partial V_i}$	$\sum_{j=1}^N V_j(G_{ij} \sin \theta_{ij} - B_{ij} \cos \theta_{ij}) - V_i B_{ii}$	$\frac{\partial Q_{ij}}{\partial V_i}$	$V_j(G_{ij} \sin \theta_{ij} - B_{ij} \cos \theta_{ij}) + 2V_i(B_{ij} - b_{ij}^p)$
$\frac{\partial Q_i}{\partial V_j}$	$V_i(G_{ij} \sin \theta_{ij} - B_{ij} \cos \theta_{ij})$	$\frac{\partial Q_{ij}}{\partial V_j}$	$V_i(G_{ij} \sin \theta_{ij} - B_{ij} \cos \theta_{ij})$
$\frac{\partial P_i}{\partial \theta_i}$	$\sum_{j=1}^N V_i V_j (-G_{ij} \sin \theta_{ij} + B_{ij} \cos \theta_{ij}) - V_i^2 B_{ii}$	$\frac{\partial P_{ij}}{\partial \theta_i}$	$V_i V_j (-G_{ij} \sin \theta_{ij} + B_{ij} \cos \theta_{ij})$
$\frac{\partial P_i}{\partial \theta_j}$	$V_i V_j (G_{ij} \sin \theta_{ij} - B_{ij} \cos \theta_{ij})$	$\frac{\partial P_{ij}}{\partial \theta_j}$	$V_i V_j (G_{ij} \sin \theta_{ij} - B_{ij} \cos \theta_{ij})$
$\frac{\partial Q_i}{\partial \theta_i}$	$\sum_{j=1}^N V_i V_j (G_{ij} \cos \theta_{ij} + B_{ij} \sin \theta_{ij}) - V_i^2 G_{ii}$	$\frac{\partial Q_{ij}}{\partial \theta_i}$	$V_i V_j (G_{ij} \cos \theta_{ij} + B_{ij} \sin \theta_{ij})$
$\frac{\partial Q_i}{\partial \theta_j}$	$-V_i V_j (G_{ij} \cos \theta_{ij} + B_{ij} \sin \theta_{ij})$	$\frac{\partial Q_{ij}}{\partial \theta_j}$	$-V_i V_j (G_{ij} \cos \theta_{ij} + B_{ij} \sin \theta_{ij})$

Ejemplo 4.2:

Consideremos la solución del problema de estimación de estado mediante las ecuaciones normales para el sistema del Ejemplo 4.1 (Figura 4.2).

Tomando el perfil plano para inicializar el vector de estado,

$$x^0 = \begin{bmatrix} \theta_2 & 0 \\ \theta_3 & 0 \\ V_1 & 1,0 \\ V_2 & 1,0 \\ V_3 & 1,0 \end{bmatrix}$$

el jacobiano H en la primera iteración puede obtenerse de las expresiones dadas anteriormente

$$H(x^0) = \begin{bmatrix} \partial p_{12} & \partial \theta_2 & \partial \theta_3 & \partial V_1 & \partial V_2 & \partial V_3 \\ \partial p_{13} & -30,0 & -17,2 & 10,0 & -10,0 & -6,9 \\ \partial p_2 & 40,9 & -10,9 & -10,0 & 14,1 & -4,1 \\ \partial q_{12} & 10,0 & & 30,0 & -30,0 & \\ \partial q_{13} & & 6,9 & 17,2 & & -17,2 \\ \partial q_2 & -14,1 & 4,1 & -30,0 & 40,9 & -10,9 \\ \partial V_1 & & & 1,0 & & \\ \partial V_2 & & & & 1,0 & \end{bmatrix}$$

y también la matriz de ganancia:

$$G(x^0) = 10^7 \begin{bmatrix} 3,4392 & -0,5068 & 0,0137 & & -0,0137 \\ -0,5068 & 0,6758 & -0,0137 & 0,0137 & 0,0000 \\ 0,0137 & -0,0137 & 3,1075 & -2,9324 & -0,1689 \\ & 0,0137 & -2,9324 & 3,4455 & -0,5068 \\ -0,0137 & 0,0000 & -0,1689 & -0,5068 & 0,6758 \end{bmatrix}$$

A continuación, se aplican los 6 pasos del procedimiento iterativo descrito en la Sección 4.3 para estimar el estado de este sistema. Como criterio de convergencia se toma 10^{-4} . En la siguiente tabla se dan, para cada iteración, los incrementos del vector de estado Δx^k y el valor de la función objetivo, ecuación (4.9):

Iteración, k	1	2	3
$\Delta\theta_2^k$	$-2,1 \cdot 10^{-2}$	$-5,52 \cdot 10^{-4}$	0
$\Delta\theta_3^k$	$-4,52 \cdot 10^{-2}$	$-2,69 \cdot 10^{-3}$	$3,0 \cdot 10^{-6}$
ΔV_1^k	$1,67 \cdot 10^{-4}$	$-1,09 \cdot 10^{-4}$	$-2,0 \cdot 10^{-6}$
ΔV_2^k	$-2,53 \cdot 10^{-2}$	$-1,06 \cdot 10^{-4}$	$-2,0 \cdot 10^{-6}$
ΔV_3^k	$-5,68 \cdot 10^{-2}$	$1,15 \cdot 10^{-3}$	$2,0 \cdot 10^{-6}$
Función Objetivo $J(x^k)$	$49 \cdot 10^3$	59.1	9.1

Tras este proceso, el estimador converge a la siguiente solución:

Nudo,	\hat{V} (pu)	$\hat{\theta}$ (°)
1	1.0001	0.0
2	0.9746	-1.25
3	0.9443	-2.75

Finalmente, con ese estado pueden calcularse las medidas estimadas y sus residuos:

Índice, i	Tipo	Medido (pu)	Estimado (pu)	Residuo (pu)
1	p_{12}	0.888	0.893	-0.005
2	p_{13}	1.173	1.171	0.002
3	p_2	-0.501	-0.496	-0.005
4	q_{12}	0.568	0.558	0.01
5	q_{13}	0.663	0.668	-0.005
6	q_2	-0.286	-0.298	0.0123
7	V_1	1.006	1.000	-0.006
8	V_2	0.968	0.974	-0.006

Merece también la pena mostrar los valores de los coeficientes de G tras la tercera iteración,

$$G(x^3) = 10^7 \left[\begin{array}{cc|cc} 3,2086 & -0,4472 & -0,0698 & -0,0314 & 0,0038 \\ -0,4472 & 0,5955 & -0,0451 & 0,0045 & 0,0000 \\ \hline -0,0698 & -0,0451 & 3,2011 & -2,8862 & -0,2160 \\ -0,0314 & 0,0045 & -2,8862 & 3,3105 & -0,4760 \\ 0,0038 & 0,0000 & -0,2160 & -0,4760 & 0,6684 \end{array} \right]$$

que, como se puede apreciar, han cambiado relativamente poco respecto a la primera vez.

Cuanto más precisas sean las medidas, más elevados serán los coeficientes de la matriz W y, consecuentemente, los de G (en este ejemplo son del orden de 10^7). Es fácil demostrar que el estado

estimado no cambia si los coeficientes W_{ii} se normalizan dividiéndolos por una constante, por ejemplo el mayor de ellos. Debe tenerse en cuenta, no obstante, que este escalamiento afecta a la función objetivo en la misma proporción.

4.3.1. Estimador desacoplado rápido

Dado que el estimador de estado debe ejecutarse periódicamente en modo *on-line*, y que las redes involucradas pueden llegar a tener un tamaño considerable, cualquier simplificación que ahorre tiempo de cálculo será bienvenida. Como en el caso del flujo de cargas, las variantes más exitosas del procedimiento básico anterior provienen de realizar aproximaciones en la matriz de ganancia.

La idea más intuitiva consiste simplemente en no actualizar los coeficientes de dicha matriz (NR con jacobiano constante), con lo que nos ahorramos su descomposición *LU* que es una de las etapas más costosas en cada iteración.

Sin embargo, la versión simplificada más popular se basa en el conocido desacoplo entre los subproblemas activo y reactivo, que conduce a los denominados estimadores desacoplados [16, 53]. Denominemos z_a y z_r a las medidas relacionadas con el problema activo (potencia activa) y reactivo (potencia reactiva y tensiones) respectivamente. Análogamente, x_a y x_r denotan los argumentos y módulos de las tensiones nodales. En base a estas particiones, las matrices involucradas en el proceso iterativo pueden estructurarse como sigue:

$$\begin{aligned} H &= \begin{pmatrix} H_{aa} & H_{ar} \\ H_{ra} & H_{rr} \end{pmatrix} \\ W &= \begin{pmatrix} W_a & 0 \\ 0 & W_r \end{pmatrix} \\ G &= \begin{pmatrix} G_{aa} & G_{ar} \\ G_{ra} & G_{rr} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Los valores numéricos de los bloques no diagonales de H , y consecuentemente los de G , son significativamente menores que los de los bloques diagonales, y éstos cambian poco durante el proceso iterativo. Partiendo de las mismas hipótesis que en el caso del flujo de cargas, se obtiene una matriz de ganancia constante (evaluada para perfil plano) y desacoplada,

$$G = \begin{pmatrix} G_{aa} & 0 \\ 0 & G_{rr} \end{pmatrix} \quad ; \quad \begin{aligned} G_{aa} &= H_{aa}^T W_a H_{aa} \\ G_{rr} &= H_{rr}^T W_r H_{rr} \end{aligned}$$

y un vector independiente aproximado, en el que las medidas se han normalizado con las tensiones para que los valores de H sean más constantes,

$$\begin{pmatrix} T_a \\ T_r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} H_{aa}^T W_a \Delta z'_a \\ H_{rr}^T W_r \Delta z'_r \end{pmatrix} \quad ; \quad \begin{aligned} \Delta z'_a &= \Delta z_a / V \\ \Delta z'_r &= \Delta z_r / V \end{aligned}$$

Debe observarse que introducir aproximaciones en G sólo afecta a la convergencia del proceso iterativo, mientras que las aproximaciones del vector independiente modifican, aunque sea poco, la solución alcanzada.

Se obtienen de este modo dos sistemas de ecuaciones normales desacoplados y de coeficientes constantes, que pueden resolverse independientemente mediante el siguiente *Estimador WLS desacoplado rápido*:

1. Construir y factorizar G_{aa} y G_{rr} .
2. Calcular T_a .
3. Resolver $G_{aa}\Delta\theta = T_a$.
4. Actualizar los desfases: $\theta^{k+1} = \theta^k + \Delta\theta$.
5. Calcular T_r .
6. Resolver $G_{rr}\Delta V = T_r$.
7. Actualizar las tensiones: $V^{k+1} = V^k + \Delta V$.
8. Volver al paso 2 si no se ha alcanzado la convergencia.

El ahorro de operaciones proviene de los siguientes conceptos:

- Aproximadamente la mitad de los términos, tanto en las matrices como en el vector independiente, no se calculan.
- Resolver los dos sistemas desacoplados requiere menos de la mitad de operaciones que el sistema completo.
- Las matrices G_{aa} y G_{rr} sólo se construyen y factorizan una vez, por lo que en la solución de los sistemas de ecuaciones sólo debe realizarse la eliminación hacia delante y la sustitución hacia atrás.

Ejemplo 4.3:

Las matrices de ganancia constantes que se utilizan en el estimador desacoplado, para la red del Ejemplo 4.1, son las siguientes:

$$G_{aa} = 10^7 \begin{bmatrix} 3,837 & -0,5729 \\ -0,5729 & 0,7812 \end{bmatrix}$$

$$G_{rr} = 10^7 \begin{bmatrix} 2,777 & -2,635 & -0,1357 \\ -2,635 & 3,090 & -0,4489 \\ -0,1357 & -0,4489 & 0,5846 \end{bmatrix}$$

Puede observarse que estos valores son muy parecidos a los de las submatrices diagonales de la matriz G del Ejemplo 4.2.

El proceso iterativo converge, en 3.5 iteraciones (es decir, 3 soluciones del problema activo y 4 del reactivo), al estado siguiente:

Nudo	\hat{V} (pu)	$\hat{\theta}$ (°)
1	1.000	0.0
2	0.97438	-1.24
3	0.94401	-2.71

que difiere ligeramente del obtenido en el Ejemplo 4.2 debido a las aproximaciones realizadas en el vector derecho respecto al modelo acoplado exacto.

En realidad, los valores de resistencias adoptados para estos ejemplos son algo elevados para una red de transporte, por lo que la hipótesis de desacoplo es menos exacta. Con valores de resistencias del orden de $R \approx 0,1X$, el estimador desacoplado converge en las mismas 3 iteraciones que el estimador acoplado, a un coste computacional mucho menor.

4.4. Análisis de observabilidad

Dadas las m medidas del vector z , el estimador trata de encontrar la mejor solución posible para los n elementos del vector x . Una condición necesaria para que pueda obtenerse x es que se cumpla la desigualdad $m \geq n$. Por tanto, antes de realizar la estimación, hay que analizar el conjunto de medidas para asegurarse de que contiene al menos n medidas linealmente independientes. Este análisis se conoce como test de observabilidad. El propósito principal es chequear si puede estimarse el estado de todo el sistema en base a las medidas disponibles. Si el test falla, el análisis continúa para identificar todas las islas observables, que son aquellas partes de la red cuyo estado puede ser estimado independientemente de las demás tomando el ángulo de uno de sus nudos como origen de fases. En estas islas es posible calcular cualquier magnitud interior, sea tensión, flujo o inyección de potencia. Las islas observables están conectadas unas con otras por ramas no observables, cuyos flujos no pueden estimarse con las medidas disponibles.

El análisis de observabilidad puede describirse formalmente considerando el siguiente modelo de medidas linealizado:

$$\Delta z = H \Delta x + e$$

La estimación WLS, $\Delta \hat{x}$, vendrá dada por:

$$\Delta \hat{x} = (H^T R^{-1} H)^{-1} H^T R^{-1} \Delta z$$

Se puede calcular una solución única para Δx si $(H^T R^{-1} H)$ es no singular o, equivalentemente, si H es de rango completo ($\text{rango}[H] = n$).

Como se discutió en la sección sobre estimadores desacoplados, hay un acoplamiento débil entre las medidas de potencia activa y las tensiones, y entre las medidas de potencia reactiva y los desfases, lo que permite desacoplar el modelo linealizado anterior como sigue:

$$\Delta z_a = H_{aa} \Delta \theta + e_a \quad ; \quad \Delta z_r = H_{rr} \Delta V + e_r$$

donde:

z_a, z_r son las medidas de potencia activa y reactiva.

H_{aa} es la submatriz de H cuyas filas y columnas corresponden a las medidas de potencia activa y ángulos de fase respectivamente.

H_{rr} es la submatriz de H cuyas filas y columnas corresponden a las medidas de potencia reactiva y módulos de tensiones respectivamente.

Mediante estos modelos desacoplados, la observabilidad $P - \theta$ y $Q - V$ se puede analizar de forma separada. En la práctica, todas las medidas de potencia, sean flujos o inyecciones, incluyen activa y reactiva simultáneamente, por lo que sólo es preciso estudiar la observabilidad del modelo $P - \theta$. Tras este análisis, basta con comprobar que cada isla obtenida con dicho modelo tiene al menos una medida de tensión para que sea declarada una isla observable. Por tanto, en lo sucesivo sólo nos referiremos al modelo desacoplado $P - \theta$.

El último paso del análisis de observabilidad es la determinación del número de pseudo-medidas necesarias, y la ubicación de las mismas, en aquellos casos en que la red sea declarada como no observable con las medidas existentes. Esta información adicional procede de predicciones de demanda, generación programada con antelación u otras fuentes, y debe ser la mínima posible que haga observable al sistema, para no contaminar a las medidas reales.

El análisis de observabilidad puede hacerse por métodos numéricos y topológicos. Ambos métodos, usados ampliamente en programas comerciales, serán revisados brevemente a continuación.

4.4.1. Análisis numérico de observabilidad

La observabilidad de una red viene determinada esencialmente por el tipo y localización de las medidas. El punto de operación del sistema, y los parámetros de sus componentes, no afectarán a la observabilidad, salvo en algunos casos degenerados, de interés meramente teórico, que ocasionan cancelaciones numéricas en los coeficientes del jacobiano.

Consecuentemente, el análisis se simplifica suponiendo elementos artificiales cuya impedancia valga $1,0j$ p.u. y tensiones cuya magnitud sea 1.0 p.u. Con este modelo, similar al modelo *en continua* del flujo de cargas, los flujos de potencia por las ramas se expresan como:

$$P_b = C\theta$$

donde:

P_b es el vector de flujos de potencia activa *en continua* por las ramas.

C es la matriz de incidencias ramas-nodos reducida (excluyendo el nudo de referencia).

θ es el vector de ángulos de fase de las tensiones de nudos.

La observabilidad numérica se basa en la observación de que si todas las medidas son nulas, todos los flujos por las ramas deben ser nulos en una red observable [40, 41]. Si algún flujo no es nulo, entonces la rama correspondiente no es observable. Este requisito puede comprobarse fácilmente con el modelo desacoplado activo en continua

$$H_{aa}\theta = z_a$$

cuya solución WLS, $\hat{\theta}$, viene dada por:

$$\hat{\theta} = (H_{aa}^T H_{aa})^{-1} H_{aa}^T z_a$$

Tomando un vector z_a nulo, la estimación $\hat{\theta}$ debería conducir, si H_{aa} es de rango completo, a flujos estimados nulos, es decir, $P_b = C \hat{\theta} = 0$.

Si $H_{aa}\hat{\theta} = 0$, pero $P_b = C \hat{\theta} \neq 0$, entonces $\hat{\theta}$ se denomina un *estado no observable*. Aquellas ramas i , con $P_b(i) \neq 0$, serán las *ramas no observables* del sistema. Estas ramas dividen al sistema completo en *islas observables*.

Si una rama no tiene medidas incidentes (flujos o inyecciones en los extremos), entonces el estado estimado es independiente de los parámetros de dicha rama y de su estado (desconectada o en servicio). Por tanto, tales ramas pueden ignorarse en el análisis de observabilidad (ramas irrelevantes).

Consideremos de nuevo el modelo desacoplado linealizado:

$$\begin{aligned} (H_{aa}^T H_{aa}) \hat{\theta} &= 0 \\ G_{aa} \hat{\theta} &= 0 \end{aligned}$$

Si G_{aa} no es singular, el sistema será completamente observable. Si G_{aa} es singular, entonces las filas y columnas de la matriz pueden permutarse y reagruparse como sigue:

$$\begin{bmatrix} G_{11} & G_{12} \\ G_{21} & G_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{\theta}_a \\ \hat{\theta}_b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

donde G_{11} es la submatriz no singular de G_{aa} . Asignando valores arbitrarios pero diferentes $\bar{\theta}_b$ a los elementos de $\hat{\theta}_b$, obtenemos una de las infinitas soluciones posibles para $\hat{\theta}_a$:

$$\hat{\theta}_a = -G_{11}^{-1} G_{12} \bar{\theta}_b$$

Los flujos por las ramas correspondientes a esta solución $(\hat{\theta}_a, \bar{\theta}_b) = \hat{\theta}^*$ pueden obtenerse de:

$$C \hat{\theta}^* = P_b^*$$

Aquellas ramas i con $P_b^*(i) \neq 0$ serán identificadas como *no observables*.

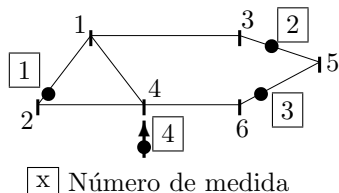
El algoritmo de análisis numérico de observabilidad está compuesto entonces por los siguientes pasos:

1. Eliminar todas las ramas irrelevantes.
2. Formar la matriz de ganancia del modelo linealizado $P - \theta$:

$$G_{aa} = H_{aa}^T R_a^{-1} H_{aa}$$

3. Si G_{aa} no es singular el sistema se declara totalmente observable. En caso contrario, las ramas no observables se identifican como se ha explicado anteriormente.
4. Eliminar las ramas no observables y todas las inyecciones incidentes en nudos extremos de ramas no observables.
5. Volver al paso 1 si se han eliminado ramas en el paso 4.

Ejemplo 4.4:



En este ejemplo la rama 1-3 es irrelevante (nótese la ausencia de inyecciones o flujos incidentes). Eliminando esta rama obtenemos las siguientes matrices:

$$G_{aa} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & -3 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & -3 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ -3 & -3 & 0 & 9 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & -3 & -1 & 2 \end{bmatrix}, \quad H_{aa} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & 0 & 3 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Reordenando las filas y columnas de G_{aa} de forma que

$$\theta_a^T = [\theta_1 \theta_2 \theta_3 \theta_5] \quad ; \quad \theta_b^T = [\theta_6 \theta_4]$$

resulta la siguiente matriz reordenada:

$$G_{aa}^{ord} = \left[\begin{array}{cccc|cc} 2 & 0 & 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ \hline 1 & 1 & 0 & -1 & 2 & -3 \\ -3 & -3 & 0 & 0 & -3 & 9 \end{array} \right]$$

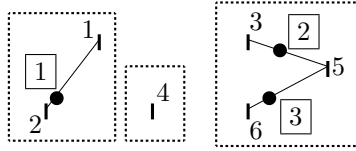
Sea $\theta_6 = 1, \theta_4 = 0$; entonces los valores restantes son:

$$\theta_1 = -0,5, \quad \theta_2 = -0,5, \quad \theta_3 = 1,0, \quad \theta_5 = 1$$

y los flujos calculados por las líneas:

Línea	Flujo	Observable
1-2	0	sí
1-4	-0.5	no
2-4	-0.5	no
4-6	-0.5	no
3-5	0	sí
5-6	0	sí
1-3	-0.5	no

A continuación, se eliminan todas las ramas no observables y la inyección 4, resultando las tres islas observables indicadas en la siguiente figura: rama 1-2, ramas 3-5, 5-6, y el nudo aislado 4. Esta última isla observable resulta irrelevante, puesto que no contiene ninguna rama.



4.4.2. Análisis topológico de observabilidad

Con el análisis de observabilidad se pretenden hallar al menos n medidas cuyas ecuaciones sean linealmente independientes para declarar al sistema observable. Las ecuaciones lineales desacopladas pueden expresarse también en términos de variables de ramas, es decir, diferencias angulares entre nudos de una rama, en lugar de las más comunes variables nodales. Con esa formulación, puede mostrarse que existe una correspondencia biunívoca entre un conjunto de n columnas linealmente independientes de la matriz de coeficientes, y un árbol del grafo de la red formado por asignación de medidas a ramas [26, 10, 9]. Dicha asignación se realiza mediante las siguientes reglas:

- Una medida de flujo se asigna a la propia rama cuyo flujo se mide.
- Una medida de inyección se asigna a alguna de las ramas incidentes al nudo cuya inyección se mide.
- Una rama sólo puede asociarse a una única medida.

En base a estas reglas pueden desarrollarse distintos procedimientos heurísticos para construir progresivamente un *árbol maximal* cuyas ramas llevan asociadas medidas distintas. La complejidad proviene de las combinaciones que surgen cuando se consideran las medidas de inyección. Este tipo de problemas se conocen en investigación operativa como de “asignación máxima”. Sin entrar en detalles algorítmicos que pueden encontrarse en la literatura, los pasos básicos del proceso son los siguientes:

1. En primer lugar, asignar las medidas de flujo a sus ramas respectivas. Esto da lugar a varias “islas de flujo” desconexas entre sí que constituyen los fragmentos iniciales del árbol que buscamos (en el hipotético caso de que existiese una sola isla de flujo que abarcase toda la red, ésta sería observable incluso sin medidas de inyección). Los flujos que en esta fase den lugar a bucles son redundantes.
2. A continuación, asignar las medidas de inyección a sus ramas en una secuencia arbitraria. El objetivo es que esta nueva rama haga crecer uno de los fragmentos de árbol o bien que interconecte dos de ellos de forma que constituyan uno solo. Una asignación inadecuada de estas medidas puede obligar después a deshacer parte del

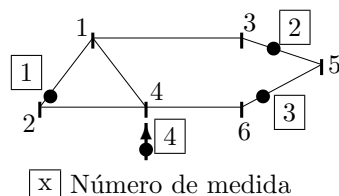
árbol para construirlo de otro modo. Si no hay forma de conseguir que una inyección haga crecer los fragmentos de árbol, ésta será declarada como redundante e ignorada en lo sucesivo.

Si, una vez procesadas todas las medidas, se consigue un árbol conexo que incluya todos los nudos, la red es completamente observable. En otro caso, hay que identificar las islas observables, lo cual se consigue iterativamente del siguiente modo:

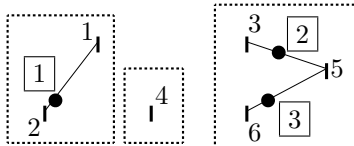
1. Descartar aquellas inyecciones que tienen *al menos una rama incidente* sin asignar cuyos nudos extremos pertenezcan a fragmentos de árbol distintos (es decir, que no formen bucle en un mismo subárbol). Estas inyecciones no pueden ser utilizadas por el estimador, al relacionar variables de estado de islas distintas.
2. Actualizar los subárboles eliminando las ramas afectadas y repetir el paso 1 hasta que no se quiten más inyecciones.

El ejemplo que sigue se utilizará para ilustrar los pasos principales involucrados en la implantación del método topológico.

Ejemplo 4.5:



- Asignar medidas a ramas: [1] \Rightarrow 1-2, [2] \Rightarrow 3-5, [3] \Rightarrow 5-6, [4] \Rightarrow 4-6. Se obtiene un “bosque” de dos subárboles, el 3-5, 4-6, 5-6 por un lado y el 1-2 por otro.
- Las ramas 1-4 y 2-4, que no están asignadas a medidas, interconectan subárboles distintos. Por tanto, la inyección del nudo 4 se elimina.
- Las islas resultantes son las mismas que se obtuvieron por el método numérico:



4.5. Técnicas de solución alternativas

La solución del estimador WLS mediante las ecuaciones normales resulta generalmente satisfactoria, especialmente con los ordenadores disponibles en la actualidad. No obstante, la utilización de dichas ecuaciones presenta algunos inconvenientes, relacionados sobre todo con el *mal condicionamiento* de la matriz de ganancia [22]. El mal condicionamiento de un sistema de ecuaciones es una medida de la proximidad de su matriz de coeficientes a la singularidad, y se materializa en el denominado *número de condición*, κ . Este número es igual a la unidad para la matriz identidad y tiende a infinito para matrices cuasi-singulares. En la práctica, el número de condición sirve para cuantificar la amplificación que sufren los errores de partida de los coeficientes del sistema y los errores de redondeo o truncamiento que se van cometiendo durante la solución del mismo. En ciertos casos, es posible que no se logre la convergencia del proceso iterativo si se cumple simultáneamente que el número de condición es elevado, la representación en punto flotante del ordenador es pobre y el criterio de convergencia exigente.

Puede demostrarse que $\kappa(H^T H) = \kappa(H)^2$, lo que explica el riesgo que se corre cuando interviene la matriz G . Pero además, en el caso concreto de la estimación WLS, hay diversas causas que pueden agravar este problema, como son:

- La utilización simultánea de pesos muy altos para medidas virtuales (nudos de tránsito) y relativamente baja para pseudo-medidas.
- La incidencia simultánea de líneas muy cortas y largas en el mismo nudo.
- La existencia de un porcentaje elevado de medidas de inyección frente a medidas de flujo.

Ejemplo 4.6:

Utilizaremos una modificación de la red del Ejemplo 4.1 en la que el nudo 2 es de inyección nula y el nudo 3 absorbe la carga que antes tenía el nudo 2. Las nuevas medidas se muestran a continuación:

Índice, i	Tipo	Valor (pu)	W_{ii} (pu)
1	p_{12}	0.6390	15 625
2	p_{13}	1.4150	15 625
3	p_2	0	10^7
4	q_{12}	0.4247	15 625
5	q_{13}	0.8780	15 625
6	q_2	0	10^7
7	V_1	1.0065	62 500
8	V_2	0.9795	62 500

Modelando las medidas de inyección nula en el nudo 2 con un peso 1000 superior a otras inyecciones, obtenemos una matriz de ganancia cuyo número de condición es $8,056 \cdot 10^5$, frente al de la matriz G del Ejemplo 4.2, donde sólo se utilizan medidas ordinarias, que vale $1,525 \cdot 10^3$. Después de 3 iteraciones, el proceso converge al siguiente estado:

Nudo,	\hat{V} (pu)	$\hat{\theta}$ (°)
1	0.9999	0.0
2	0.9860	-1,0498
3	0.9507	-3,9952

en el que las potencias estimadas en el nudo 2 son del orden de 10^{-4} pu. Si se desea que estas potencias se aproximen más a cero, deberían utilizarse pesos mayores para las medidas virtuales nulas, lo cual empeoraría aún más el condicionamiento.

La normalización de los coeficientes W_{ii} mencionada en el Ejemplo 4.2 no afecta en ningún caso al número de condición de G , tan sólo al rango de números con el que se trabaja y al valor de la función objetivo.

En esta sección se van a describir varias técnicas numéricas alternativas que evitan la utilización de G y/o aminoran las causas de mal condicionamiento mencionadas.

4.5.1. Factorización ortogonal

Para explicar esta variante conviene escribir las ecuaciones normales (4.11) de forma más compacta, sin que aparezca explícitamente la matriz de pesos,

$$\underbrace{\tilde{H}^T \tilde{H}}_G \Delta x = \tilde{H}^T \Delta \tilde{z} \quad (4.14)$$

donde

$$\tilde{H} = W^{1/2} H \quad (4.15)$$

$$\Delta \tilde{z} = W^{1/2} \Delta z \quad (4.16)$$

El método se basa en la factorización ortogonal de la matriz \tilde{H} ,

$$\tilde{H} = QR \quad (4.17)$$

donde Q es una matriz $m \times m$ ortogonal ($Q^T = Q^{-1}$) y R es una matriz $m \times n$ trapecial superior, es decir,

$$R = \begin{pmatrix} U \\ 0 \end{pmatrix}$$

siendo U precisamente, en ausencia de errores de redondeo, la matriz triangular superior que aparece en la factorización LU de G .

La ecuación (4.17) es equivalente a

$$Q^T \tilde{H} = R$$

de donde surgen las técnicas numéricas, como las rotaciones de Givens, que van transformando, por filas o por columnas, \tilde{H} en R .

Las ecuaciones normales compactas pueden transformarse sucesivamente del siguiente modo:

$$\begin{aligned}\tilde{H}^T Q Q^T \tilde{H} \Delta x &= \tilde{H}^T \Delta \tilde{z} \\ R^T R \Delta x &= R^T Q^T \Delta \tilde{z} \\ U^T U \Delta x &= U^T Q_n^T \Delta \tilde{z}\end{aligned}$$

donde Q_n representa las primeras n columnas de Q . Ahora bien, al ser U una matriz regular, la última ecuación anterior conduce a

$$U \Delta x = Q_n^T \Delta \tilde{z} \quad (4.18)$$

El cálculo de Δx en cada iteración mediante transformaciones ortogonales consta entonces de los siguientes pasos [45, 53, 50]:

1. Realizar la factorización ortogonal $\tilde{H} = QR$.
2. Calcular el vector independiente $\Delta z_q = Q_n^T \Delta \tilde{z}$.
3. Calcular Δx por sustitución hacia atrás en $U \Delta x = \Delta z_q$.

Como puede apreciarse, no es necesario formar la matriz G , cuyo condicionamiento es mucho peor que el de H . Por otro lado, la transformación ortogonal es una técnica mucho más robusta numéricamente ante problemas mal condicionados que la LU , por lo que la utilización de pesos muy dispares no provoca problemas significativos.

El precio a pagar es la necesidad de calcular la matriz Q , que siendo una matriz bastante más densa que G requiere un esfuerzo de cálculo notable. En la práctica, sin embargo, Q no se calcula explícitamente, sino en forma de producto de factores elementales, cada uno de ellos generado por una rotación de Givens.

La versión más utilizada en los estimadores comerciales utiliza una técnica híbrida que evita en parte el inconveniente mencionado al no almacenar ni utilizar Q . Los pasos anteriores se convierten en [39]:

1. Obtener U mediante transformaciones ortogonales de \tilde{H} . No es preciso guardar Q .
2. Calcular el vector independiente $\Delta z_h = \tilde{H}^T \Delta \tilde{z}$.
3. Calcular Δx resolviendo el sistema $U^T U \Delta x = \Delta z_h$.

La técnica es híbrida en la medida en que se resuelven las ecuaciones normales en el paso 3 pero U se obtiene transformando H y no mediante factorización triangular de G .

4.5.2. Utilización de restricciones de igualdad

Una forma numéricamente más robusta de modelar las medidas virtuales es tratándolas como restricciones de igualdad en el problema de optimización WLS, que se convierte entonces en [5]:

$$\begin{aligned}\text{minimizar} \quad & J(x) = \frac{1}{2} [z - h(x)]^T W [z - h(x)] \\ \text{sujeto a} \quad & c(x) = 0\end{aligned} \quad (4.19)$$

donde $c(x) = 0$ representa dichas restricciones. Consecuentemente, se eliminan de la matriz W los pesos excesivamente elevados, correspondientes a tales medidas.

Para resolver este problema se construye la función lagrangiana

$$\mathcal{L} = J(x) - \lambda^T c(x) \quad (4.20)$$

y se obtienen las condiciones de optimalidad de primer orden,

$$\begin{aligned} \partial \mathcal{L}(x) / \partial x = 0 &\Rightarrow H^T W [z - h(x)] + C^T \lambda = 0 \\ \partial \mathcal{L}(x) / \partial \lambda = 0 &\Rightarrow c(x) = 0 \end{aligned} \quad (4.21)$$

donde C es el jacobiano de $c(x)$. La solución del sistema no lineal anterior se obtiene iterativamente mediante el siguiente sistema lineal:

$$\begin{bmatrix} H^T W H & C^T \\ C & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta x \\ -\lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} H^T W \Delta z^k \\ -c(x^k) \end{bmatrix} \quad (4.22)$$

De este modo, aunque se calcula G , una de las principales causas de mal condicionamiento de dicha matriz desaparece. El inconveniente es que la matriz de coeficientes deja de ser definida positiva y su factorización LU se complica. Ello es debido a que hay que realizar pivotación de filas para garantizar la estabilidad numérica del proceso, y a la vez recurrir a estrategias de ordenación para reducir el llenado de una matriz que deja de ser simétrica.

4.5.3. Matriz aumentada de Hachtel

La idea básica de este método, también llamado formulación “tableau” porque retiene todas las ecuaciones, es utilizar los residuos como variables explícitas [17]. Se obtiene así el problema de optimización:

$$\begin{aligned} \text{minimizar} \quad & J(x) = \frac{1}{2} r^T W r \\ \text{sujeto a} \quad & c(x) = 0 \\ & r - z + h(x) = 0 \end{aligned} \quad (4.23)$$

La función lagrangiana que resulta es

$$\mathcal{L} = J(x) - \lambda^T c(x) - \mu^T (r - z + h(x)) \quad (4.24)$$

y sus condiciones de optimalidad

$$\begin{aligned} \partial \mathcal{L}(x) / \partial x = 0 &\Rightarrow C^T \lambda + H^T \mu = 0 \\ \partial \mathcal{L}(x) / \partial \lambda = 0 &\Rightarrow c(x) = 0 \\ \partial \mathcal{L}(x) / \partial r = 0 &\Rightarrow W r - \mu = 0 \\ \partial \mathcal{L}(x) / \partial \mu = 0 &\Rightarrow r - z + h(x) = 0 \end{aligned} \quad (4.25)$$

La tercera ecuación permite eliminar r ($r = R\mu$), conduciendo las tres restantes a un proceso iterativo en el que debe resolverse el sistema lineal siguiente:

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & C \\ 0 & R & H \\ C^T & H^T & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda \\ \mu \\ \Delta x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -c(x^k) \\ \Delta z^k \\ 0 \end{bmatrix} \quad (4.26)$$

cuya matriz de coeficientes se denomina matriz aumentada de Hachtel.

Lógicamente, si en la ecuación anterior eliminamos μ , obtenemos el sistema (4.22) donde aparece el producto H^TWH . Aunque la factorización de ambas matrices resulta igual de complicada, el número de condición de la matriz de Hachtel es bastante menor. El hecho de que esta matriz sea de mayor dimensión no supone necesariamente un mayor número de operaciones, puesto que el porcentaje de elementos nulos es también bastante más elevado, como puede apreciarse.

Es posible implementar la factorización de la matriz de Hachtel sin perder su simetría. Para ello es necesario realizar, previamente o sobre la marcha, permutaciones simétricas (o sea, de filas y columnas simultáneamente) de modo que, cuando aparezca un elemento diagonal nulo o muy pequeño, éste pueda asociarse con el siguiente en un bloque de 2×2 invertible. La factorización LU utilizará aritmética escalar si el pivote no es demasiado pequeño y aritmética de bloques de 2×2 en caso contrario.

Ejemplo 4.7:

Vamos a resolver el caso del Ejemplo 4.6, donde el nudo 2 es de tránsito, modelando las dos inyecciones nulas como restricciones de igualdad. Normalizando los coeficientes W_{ii} con el mayor de ellos, la matriz de coeficientes de la ecuación (4.22) en la primera iteración vale

$$F = \left[\begin{array}{ccccc|cc} 275,0275 & & 0,0000 & 0,0000 & & 45,3795 & -4,5380 \\ & 99,0099 & 0,0000 & & 0,0000 & -12,3762 & 1,2376 \\ 0,0000 & 0,0000 & 375,0374 & -275,0275 & -99,0099 & -3,3003 & -33,0033 \\ 0,0000 & & -275,0275 & 276,0275 & & 4,5380 & 45,3795 \\ & 0,0000 & -99,0099 & & 99,0099 & -1,2376 & -12,3762 \\ \hline 45,3795 & -12,3762 & -3,3003 & 4,5380 & -1,2376 & & \\ -4,5380 & 1,2376 & -33,0033 & 45,3795 & -12,3762 & & \end{array} \right]$$

cuyo número de condición resulta ser 932. Por otro lado, si se utilizase la matriz aumentada de Hachtel, su número de condición sería 165. Obsérvese la mejora significativa del condicionamiento de ambas matrices respecto a la matriz G del Ejemplo 4.6.

El estado estimado es prácticamente el mismo que cuando se tratan las restricciones como medidas de gran peso, salvo que las potencias estimadas en el nudo 2 se aproximan más a cero.

4.6. Detección e identificación de datos erróneos

La precisión y fiabilidad del estimador de estado depende de las telemidas recibidas en el centro de control para su posterior procesado. A los errores asociados a los dispositivos

de medida, analógicos o digitales, se suman también los originados en los canales de comunicaciones. Ocasionalmente, tras una labor de mantenimiento o reparación en la subestación, las conexiones de un medidor, o su calibración, pueden cambiarse inadvertidamente sin que se tenga constancia en el centro de control. Aunque no son muy comunes, incidentes de este tipo ocurren rutinariamente en la operación de los sistemas de potencia y generan un conjunto de medidas contaminado por datos incorrectos. A menos que estos datos erróneos sean detectados e identificados, el estado estimado en base a tales conjuntos de medidas será localmente deficiente.

Como se explicó en la introducción, todos los estimadores de estado disponen de filtros previos que descartan inconsistencias obvias en el conjunto de medidas, sobre todo signos cambiados o valores fuera de rango. Sin embargo, muchos errores no gaussianos escapan a este filtrado tosco, especialmente en subestaciones con pocas medidas.

El estimador de mínimos cuadrados ponderados utiliza procedimientos que se ejecutan tras la estimación, basados en los residuos de las medidas, para detectar e identificar datos erróneos [30, 21, 16, 37]. Otros tipos de estimadores, que serán descritos brevemente en la Sección 4.7, intentan eliminar dichos errores durante el proceso de estimación.

Los métodos de detección e identificación aprovechan las propiedades estadísticas de los residuos, que se discutirán a continuación.

4.6.1. Propiedades de los residuos de las medidas

Considérese la estimación obtenida con el modelo WLS linealizado,

$$\Delta\hat{x} = (H^T R^{-1} H)^{-1} H^T R^{-1} \Delta z$$

y el valor estimado de Δz :

$$\Delta\hat{z} = H \Delta\hat{x} = K \Delta z$$

donde $K = H(H^T R^{-1} H)^{-1} H^T R^{-1}$.

Los residuos de las medidas pueden expresarse en términos de los errores de las medidas como sigue:

$$\begin{aligned} r &= \Delta z - \Delta\hat{z} \\ &= (I - K)\Delta z \\ &= (I - K)(H\Delta x + e) \quad [\text{Se cumple que } KH = H] \\ &= (I - K)e \\ &= Se \end{aligned}$$

siendo la matriz S de la última expresión conocida como *matriz de sensibilidad residual*.

Suponiendo que la matriz de covarianzas de los errores de las medidas, R , se conoce, la matriz de covarianzas de los residuos Ω puede expresarse como:

$$\begin{aligned} E[rr^T] = \Omega &= S \cdot E[ee^T] \cdot S^T \\ &= SRS^T \\ &= SR \end{aligned}$$

La distribución del error de las medidas se supone normal (gaussiano) con media nula y matriz de covarianzas diagonal R , y se denota por:

$$e \sim N(0, R)$$

Consecuentemente, la distribución de los errores de los residuos será también normal, con los siguientes parámetros:

$$r \sim N(0, \Omega) \quad (4.27)$$

4.6.2. Clasificación de medidas

La detección e identificación de errores se basa en la redundancia del conjunto de medidas. Por tanto, si no hay redundancia tal posibilidad se pierde, sea cual sea el método utilizado. Las medidas pueden pertenecer a uno de los dos conjuntos mutuamente excluyentes siguientes, *críticas* y *redundantes* (o no críticas), caracterizados por las siguientes propiedades:

- Una medida pertenece al conjunto de *medidas críticas* si su eliminación resulta en un sistema no observable. En caso contrario, ésta pertenece al conjunto *redundante*.
- Los residuos de las medidas críticas siempre son cero, y por tanto sus errores no pueden ser detectados ni identificados.

4.6.3. Detección de datos erróneos

Los residuos pueden usarse para decidir si debe o no sospecharse la existencia de datos erróneos en el conjunto de medidas. Revisaremos dos test usados comúnmente para detectar datos erróneos: el test χ^2 y el test del *mayor residuo normalizado* (r^N). Mientras que el primero es estrictamente un test de detección, el segundo sirve también para identificar el dato erróneo.

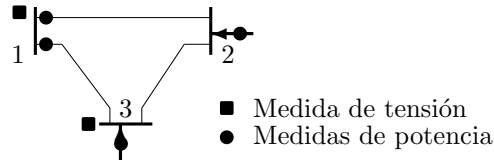
Test χ^2 para detección de medidas erróneas

La suma de cuadrados de variables aleatorias independientes con distribución normal sigue una distribución χ^2 . Considérese la función objetivo del estimador WLS dada por la ecuación (4.8). Puesto que los residuos de las medidas siguen una distribución normal por las hipótesis realizadas, puede mostrarse que la función objetivo obedece a una distribución χ^2 con $m - n$ grados de libertad, siendo n y m el número de variables de estado y medidas respectivamente.

El test χ^2 se realiza como sigue:

- Resolver el estimador WLS y calcular la función objetivo $J(\hat{x})$, donde \hat{x} es el estado estimado.
- Buscar en la tabla de distribución χ^2 para $m - n$ grados de libertad el valor correspondiente a la probabilidad p (por ejemplo, 95 %). Sea $\chi_{(m-n),p}^2$ este valor, donde $p = \Pr (J(\hat{x}) \leq \chi_{(m-n),p}^2)$.

- Comprobar si $J(\hat{x}) \geq \chi_{(m-n),p}^2$. Si la respuesta es afirmativa, se concluye que hay algún dato erróneo. En caso contrario, las medidas no son sospechosas de contener tales errores.

Ejemplo 4.8:


En el sistema de 3 nudos de la figura el número de variables de estado es 5, excluyendo el ángulo de fase, y el número de medidas 10 (2 de tensión, 2 parejas de flujos de potencia y 2 parejas de inyecciones). El número de grados de libertad es por tanto:

$$m - n = 10 - 5 = 5$$

Usando una probabilidad de 0.95, el valor de la tabla respectiva es $\chi_{5,0,95}^2 = 11.07$.

Por tanto, si la función objetivo del estimador WLS, evaluada en el punto estimado, $J(\hat{x})$, es mayor que 11.07, debe sospecharse que hay datos erróneos.

4.6.4. Identificación de datos erróneos

La identificación de datos erróneos se refiere a la selección de la medida incorrecta de entre el conjunto de medidas, cuando se sospecha que existen tales datos. Los dos métodos de identificación revisados en este texto son los siguientes:

- Test de residuos normalizados r^N , que es fácil de implantar y funciona satisfactoriamente, a menos que haya ciertas combinaciones de datos erróneos múltiples.
- Identificación mediante *test de hipótesis*, que es más complicado pero más fiable que el test r^N .

A continuación, se revisan con cierto detalle ambos métodos.

Test del mayor residuo normalizado (r^N)

Como se concluyó anteriormente, ecuación (4.27), las hipótesis de partida conducen a residuos de medidas con distribución normal. Normalizando el residuo de la medida i se obtiene:

$$r_i^N = \frac{r_i}{\sqrt{\Omega_{ii}}} = \frac{r_i}{\sqrt{R_{ii}S_{ii}}}$$

Por tanto, los residuos normalizados r_i^N son $N(0,1)$. Puede demostrarse que si hay una sola medida errónea no crítica el mayor residuo normalizado corresponde precisamente a dicha medida. Este resultado se aplica también a múltiples medidas erróneas siempre que la interacción entre las mismas sea despreciable. Los pasos del test de residuos normalizados para detectar e identificar errores simples o múltiples sin interacción son los siguientes:

1. Resolver el estimador WLS y obtener los elementos del vector de residuos:

$$r_i = z_i - h_i(\hat{x}), \quad i = 1, \dots, m$$

2. Calcular los residuos normalizados:

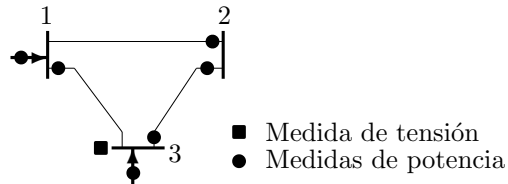
$$r_i^N = \frac{|r_i|}{\sqrt{\Omega_{ii}}} \quad i = 1, \dots, m$$

3. Encontrar el mayor residuo normalizado r_k^N .
4. Si $r_k^N > c$, entonces la medida k -ésima se considera errónea. En caso contrario, parar (no hay medidas erróneas). La constante c es un umbral de identificación adecuadamente elegido (típicamente $c = 3$).
5. Eliminar la medida sospechosa de los datos de entrada y volver al paso 1.

Datos erróneos múltiples

Como se ha dicho, el test r^N funciona correctamente en presencia de una sola medida errónea que no sea crítica. Si existen varias medidas erróneas pueden darse las tres situaciones siguientes, en las que dicho test funciona de forma distinta:

- Sin interacción: Si $S_{ik} \approx 0$ se dice que las medidas i y k no interactúan, es decir, un error en cualquiera de ellas no afecta al residuo de la otra (residuos independientes). Cuando hay varias medidas erróneas de este tipo, la prueba del mayor residuo normalizado puede identificarlas secuencialmente, una en cada pasada.
- Con interacción pero inconsistentes: Si S_{ik} tiene un valor no despreciable entonces existe interacción entre los residuos de i y k . Sin embargo, si ambos errores son inconsistentes entre sí, la prueba de los residuos normalizados puede identificarlos correctamente como en el caso anterior, aunque no necesariamente. La consistencia de errores se refiere, en este contexto, a la tendencia indicada por el signo del error. Ejemplos de errores inconsistentes son: dos medidas de tensión en un embarrado, una por exceso y otra por defecto, flujo de potencia activa por exceso y de reactiva en la misma línea por defecto, etc. (véase el ejemplo siguiente).
- Con interacción y consistentes: Como en el caso anterior, S_{ik} es grande, pero los errores de ambas medidas son coherentes. En este caso, el test de residuos normalizados puede fallar en la identificación de ambos, dependiendo de la redundancia local existente.

Ejemplo 4.9:

En la red de la figura todas las reactancias valen $x_i = j 0.1$, y el error de todas las medidas tiene la misma desviación típica $\sigma_i = 0.01$. Se introducen errores simples y dobles con interacción, consistentes o no, y los resultados se muestran en la tabla siguiente. Nótese que, para mayor claridad, todas las medidas valen cero salvo las erróneas. El mayor residuo normalizado se muestra en cada caso en negrita. El test basado en tal residuo identifica correctamente el origen del problema en el caso de error simple y múltiple inconsistente. Sin embargo, se equivoca y selecciona incorrectamente una medida buena (flujo 2-3) como errónea en el tercer caso referido a errores múltiples consistentes.

Medida	Dato erróneo					
	Simple		Múltiples correlados			
			Inconsistentes		Consistentes	
	z_i	r_i^N	z_i	r_i^N	z_i	r_i^N
Flujo 1-3	0	7.1	0	17.6	0	31.7
Flujo 2-1	0	18.7	0	11.2	0	26.2
Flujo 3-2	1	88.0	-1	120.9	1	55.0
Flujo 2-3	0	25.6	0	7.3	0	58.6
Iny. 1	0	15.5	0	41.5	0	10.4
Iny. 3	0	41.7	1	111.3	1	27.9

Identificación mediante Test de Hipótesis

Este método difiere del test de residuos normalizados en que calcula directamente una estimación de los errores de las medidas. A diferencia de los residuos, los errores de las medidas son independientes, y por tanto pueden detectarse errores consistentes en medidas relacionadas. La efectividad del método depende sin embargo de la elección de un conjunto inicial de medidas sospechosas, entre las que deben incluirse las medidas erróneas. Esta preselección, basada en los residuos normalizados, constituye la principal limitación de esta técnica, cuyos fundamentos se explican sucintamente a continuación.

Se parte de un conjunto de medidas no críticas y linealmente independientes designadas como sospechosas, siendo el número de tales medidas decidido por el usuario. El resto de

medidas se suponen libres de errores. Las matrices de sensibilidad S y de covarianza de los errores R se particionan correspondientemente:

$$\begin{aligned} r_s &= S_{ss}e_s + S_{st}e_t \\ r_t &= S_{ts}e_s + S_{tt}e_t \\ R &= \begin{bmatrix} R_s & 0 \\ 0 & R_t \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Considerando el último término de la primera ecuación como ruido, puede obtenerse una estimación para e_s de

$$\hat{e}_s = S_{ss}^{-1}r_s$$

El método del test de hipótesis comienza con un conjunto de medidas sospechosas relativamente grande y va eliminando progresivamente medidas de este conjunto en base a los errores estimados $\hat{e}_{s,i}$. En [33, 34] pueden encontrarse los detalles de cómo ajustar los umbrales en base a los cuales se decide eliminar medidas del conjunto inicial. Obviamente, esta técnica no puede identificar errores de medidas que no hayan sido incluidas previamente como sospechosas en la primera selección, y como esta selección se realiza en base a los residuos normalizados, el método es vulnerable al posible enmascaramiento de medidas erróneas con fuerte interacción.

4.7. Estimadores no cuadráticos

Como hemos visto, la estimación de estado se formula comúnmente como un problema de optimización sin restricciones. Si la función objetivo $J(x)$ se elige como en (4.9), entonces la solución del problema de optimización suministra la estimación de mínimos cuadrados ponderados (WLS) del estado del sistema. Esta estimación posee ciertas propiedades estadísticas deseables si los errores de las medidas siguen una distribución normal. Sin embargo, cuando esta hipótesis se viola, como ocurre en presencia de medidas erróneas o errores topológicos, la estimación WLS puede estar significativamente sesgada. Esta limitación del estimador WLS fue puesta de manifiesto desde un principio por Schweppe y ha dado lugar a formulaciones alternativas con funciones objetivo no cuadráticas. En general, la función objetivo puede escribirse como

$$J(x) = \rho(r) \tag{4.28}$$

donde $r = z - h(x)$ es el vector de residuos y $\rho(r)$ es una cierta función. En el caso de la estimación WLS esta función viene dada por

$$\rho(r) = r^T W r \tag{4.29}$$

La elección de ρ afecta a la robustez estadística del estimador resultante, entendiéndose como tal el grado de insensibilidad de la estimación a la presencia aleatoria de errores gran-

des (no gaussianos) en las medidas. El tratamiento formal de este tema puede encontrarse en [19, 42]. Una de las funciones objetivo alternativas utilizadas es

$$\rho(r) = C^T | r | \quad (4.30)$$

donde C es un vector de pesos asignados a cada residuo r_i . Esta función representa la suma ponderada de los valores absolutos de los residuos de las medidas, y conduce al problema de optimización:

$$\text{Minimizar } J(x) = C^T | z - h(x) | \quad (4.31)$$

La solución \hat{x} del problema anterior se conoce como la *estimación de mínimos valores absolutos ponderados* (WLAV).

Mediante la aproximación de primer orden de $J(x)$:

$$\begin{aligned} J(x) &\approx C^T | z - h(x^0) - H(x^0)(x - x^0) | \\ &\approx C^T | \Delta z - H(x^0)(\Delta x) | \end{aligned} \quad (4.32)$$

donde $\Delta z = z - h(x^0)$, $\Delta x = x - x^0$, $H(x^0) = \frac{\partial h(x^0)}{\partial x}$, el problema de optimización (4.31) puede resolverse iterativamente minimizando la función anterior hasta que los cambios en x sean insignificantes.

Puede demostrarse que la minimización de la función $J(x)$ linealizada, dada por (4.32), es equivalente a resolver el siguiente problema de programación lineal [23, 25, 6]:

$$\begin{aligned} &\text{Minimizar} && C^T \cdot (r_+ + r_-) \\ &\text{Sujeto a} && H(x^0) \cdot \Delta x_+ - H(x^0) \cdot \Delta x_- + r_+ - r_- = \Delta z \\ &&& \Delta x_+, \Delta x_-, r_+, r_- \geq 0 \end{aligned}$$

donde

$$\Delta x_+(i) = \begin{cases} \Delta x(i) & \text{si } \Delta x(i) \geq 0 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases} \quad \Delta x_-(i) = \begin{cases} \Delta x(i) & \text{si } \Delta x(i) \leq 0 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

$$C = [C_1, C_2, \dots, C_m]^T,$$

r_+, r_- son vectores de holgura no negativos de $m \times 1$ tales que:

$$\text{mín } [r_+(i), r_-(i)] = 0 \quad \text{y}$$

$$\text{máx } [r_+(i), r_-(i)] = |r_i|$$

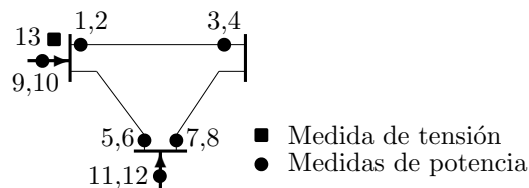
La solución de este problema de programación lineal satisface exactamente n de las m ecuaciones disponibles. Por tanto, en la solución, los residuos de esas n medidas serán nulos. Esta propiedad permite al estimador WLAV eliminar automáticamente medidas erróneas, suponiendo que el conjunto de medidas tiene suficiente redundancia.

Existen varios métodos para resolver el problema de optimización dado por (4.29). Algunos de ellos están basados en programación lineal [6, 52, 7, 8, 1], mientras que otros hacen uso de técnicas de punto interior [24, 4]. Es bien conocido que la estimación WLAV falla

cuando hay medidas denominadas “de palanca”. Estas medidas, por su tipo y ubicación, tienen una influencia desproporcionadamente alta en el estado estimado [14, 42, 32], que puede neutralizarse mediante otros métodos de estimación no cuadráticos, tales como el propuesto en [31].

Ejemplo 4.10:

Considérese el sistema de 3 nudos y la configuración de medidas de la figura siguiente, donde por simplicidad todas las medidas tienen el mismo peso. Las 13 medidas están compuestas por 4 parejas de flujos, 2 parejas de inyecciones y una tensión. Las medidas, obtenidas añadiendo errores gaussianos a las medidas perfectas generadas por un programa de flujo de cargas, se muestran en la segunda columna de la Tabla 4.2.



Inicialmente, se obtiene la estimación WLAV con el conjunto de medidas con errores normales. Después, se introduce un error grande en la medida de potencia activa 11 cambiando su signo (la medida pasa de 0.4 a $-0,4$ pu). Se ejecuta de nuevo el estimador WLAV, y el estado estimado, así como los residuos, se muestran en la Tabla 4.2.

Puede apreciarse que el estimador WLAV siempre satisface 5 de las 13 medidas. En el primer caso, se eligen las medidas 2, 7, 9, 12 y 13. En el segundo, el conjunto de medidas seleccionado por el estimador es distinto (1, 5, 8, 10 y 13). El estimador rechaza la medida errónea 11, que tiene un gran residuo en el segundo caso, lo cual refleja la discrepancia entre el valor medido y el óptimo. Los dos estados estimados son, por otro lado, bastante parecidos, demostrando la robustez del estimador WLAV frente a medidas erróneas.

4.8. Errores topológicos y en los parámetros

Si existe un elevado nivel de redundancia en el sistema de medidas, es posible desarrollar modelos de estimadores más sofisticados que los de las secciones anteriores con el objetivo de:

- Detectar, y si es posible identificar, errores en el estado de los elementos de corte.
- Estimar errores en los parámetros de ciertos elementos de red con vistas a mejorar las bases de datos. Estos parámetros pueden ser impedancias o, más comúnmente, tomas de transformadores.

El primer tipo de errores produce habitualmente grandes inconsistencias en las medidas estimadas, y son detectables con relativa facilidad. Por el contrario, los errores en las impedancias o tomas son menos visibles y se mantienen durante largos periodos de tiempo sin ser detectados, por lo que su efecto puede llegar a ser más nocivo.

Cuadro 4.2. Resultados del estimador WLAV.

Número de medida	Valor medido	Residuos	
		Errores normales	Medida 11 errónea
1	0.98422	0.00035	0
2	0.69696	0	0.00003
3	-0.98422	0.00052	0.00075
4	-0.55152	0.00160	0.00141
5	-0.71580	0.00064	0
6	0.02565	0.00064	0.00100
7	0.31578	0	-0.00039
8	0.65038	0.00050	0
9	1.69989	0	0.00094
10	0.72262	0.00002	0
11	-0.40000	-0.00001	0.79859
12	0.67603	0	-0.00009
13	1.00000	0	0
Nudo		Tensión estimada	
1		1,0008 ₀	1,00077 ₀
2		0,9363 _{-6,03}	0,9362 _{-6,03}
3		1,0008 _{-4,1}	1,0008 _{-4,09}

Mientras que la estimación de valores de impedancias más exactos es un problema que puede abordarse *off-line* utilizando datos históricos, dado que su evolución temporal es casi despreciable, la estimación de tomas y estado de interruptores debe hacerse cada vez que se ejecute el estimador de estado para que resulte de utilidad.

4.8.1. Estimación de parámetros

Aunque es posible, en teoría, estimar las impedancias de todas las líneas si la redundancia es suficientemente elevada, en la práctica sólo se estiman los parámetros de un subconjunto de líneas relativamente reducido. Algunas veces estas líneas se pueden seleccionar manualmente, por ejemplo cuando un tramo de una línea aérea en zona urbana se sustituye por un cable y la longitud sustituida no se conoce con exactitud. Pero lo deseable es establecer un mecanismo automático de selección, basado fundamentalmente en los residuos de las medidas [47].

Sea p_0 el valor supuesto de un parámetro cuyo valor exacto es p (en los desarrollos que siguen p puede ser un escalar o un vector columna compuesto por varios parámetros), y sea z_s el conjunto de medidas que son función de dicho parámetro. Estas medidas son

únicamente los flujos por los elementos en cuestión y las inyecciones en sus nudos extremos. El modelo no lineal de dichas medidas puede escribirse como

$$z_s = h_s(x, p) + e = h_s(x, p_0) + [h_s(x, p) - h_s(x, p_0)] + e$$

El término entre corchetes de la ecuación anterior equivale a un ruido adicional en las medidas afectadas provocado por el error en el parámetro $e_p = p - p_0$. Para pequeños errores se cumple aproximadamente que

$$h_s(x, p) - h_s(x, p_0) \approx \left[\frac{\partial h_s}{\partial p} \right] e_p \quad (4.33)$$

Si e_p es suficientemente grande, los residuos normalizados de dichas medidas serán mayores de lo esperado y éstas pueden ser clasificadas como erróneas. Por tanto, aquellas líneas o transformadores cuyas medidas asociadas tengan un residuo elevado deben clasificarse como sospechosas.

Obsérvese que una condición necesaria para que el valor de un parámetro pueda estimarse, o para que su error pueda detectarse, es que las medidas asociadas (flujos e inyecciones en los extremos) no sean críticas. Si estas medidas son críticas, sus residuos serán nulos, como se explicó en la Sección 4.6, y por tanto cualquier error en las mismas o en el parámetro pasarán desapercibidos.

También debe destacarse que la estimación de un parámetro es un proceso que puede llevarse a cabo localmente. En efecto, la influencia del error en un parámetro se aprecia sobre todo en sus medidas asociadas, disminuyendo drásticamente conforme nos alejamos del elemento en cuestión. Recíprocamente, tan sólo las medidas suficientemente próximas desde un punto de vista eléctrico tendrán una influencia significativa en el valor estimado para el parámetro. En la práctica, trabajar con una subred compuesta por las ramas incidentes en los nudos extremos del elemento más sus primeros y segundos “vecinos” es suficiente.

En términos generales, los métodos de estimación de parámetros pueden clasificarse en dos grandes grupos [56]:

1. Métodos basados en la matriz de sensibilidad residual, ejecutados tras finalizar el proceso de estimación [29].
2. Métodos que aumentan el vector de estado [12, 28, 55]. Estos métodos a su vez pueden utilizar las ecuaciones normales (con uno o varios conjuntos de medidas simultáneamente) o el filtro de Kalman.

A continuación, se expondrán brevemente las ideas principales en las que se basan ambas técnicas.

Como se explicó en la Sección 4.6, los residuos de las medidas estimadas pueden expresarse en función de sus errores mediante la matriz de sensibilidad residual

$$r = Se$$

De esta ecuación y de (4.33) puede obtenerse la siguiente relación (véase [49]):

$$r_s = \left(S_{ss} \frac{\partial h_s}{\partial p} \right) e_p + \bar{r}_s \quad (4.34)$$

donde S_{ss} es la submatriz $s \times s$ de S correspondiente a las s medidas involucradas y \bar{r}_s es el vector de residuos que se obtendría en ausencia de errores en los parámetros.

La ecuación (4.34) relaciona los residuos r_s con los errores paramétricos e_p en presencia de un “ruido” \bar{r}_s . Por tanto, la determinación de e_p puede interpretarse y llevarse a cabo como un problema lineal de mínimos cuadrados de dimensión reducida. El valor óptimo \hat{e}_p se obtiene de la ecuación aproximada siguiente:

$$\hat{e}_p = \left[\left(\frac{\partial h_s}{\partial p} \right)^T W_s S_{ss} \left(\frac{\partial h_s}{\partial p} \right) \right]^{-1} \left(\frac{\partial h_s}{\partial p} \right)^T W_s r_s \quad (4.35)$$

y permite mejorar el valor de los parámetros

$$\hat{p} = p_0 + \hat{e}_p$$

Eventualmente, puede repetirse el proceso de estimación con los parámetros actualizados.

El desarrollo anterior se basa en que no existen simultáneamente medidas erróneas relacionadas con los parámetros sospechosos, lo cual es su principal limitación puesto que se asume que los residuos de las medidas estimadas se deben exclusivamente a errores en los parámetros.

La otra posibilidad consiste, como se ha dicho, en incluir los parámetros p , a todos los efectos, en el vector de estado. Debe tenerse en cuenta en este caso que, al aumentar el número de variables de estado, la redundancia local disminuye y la observabilidad puede verse comprometida. Por tanto, las variables añadidas deben ser sólo las estrictamente necesarias.

Un caso típico se presenta cuando se sospecha que los parámetros unitarios (impedancia y admitancia por km) son correctos, y que el error proviene de una incorrecta estimación de la longitud de la línea. En ese caso, sólo es preciso añadir una única variable en el vector de estado en lugar de considerar los tres parámetros del modelo en p_i como variables independientes a estimar. Para una línea entre los nudos i y j deben usarse las siguientes admitancias:

$$\begin{aligned} \text{serie:} & \quad (g_{ij} + jb_{ij})/L \\ \text{paralelo:} & \quad jb_{ij}^p L \end{aligned} \quad (4.36)$$

en cualquier expresión donde éstas aparezcan, siendo L la longitud a estimar dividida por la que aparece en la base de datos.

La nueva variable amplía el jacobiano en una columna, cuyos términos son nulos salvo los relativos a las medidas de potencia relacionadas con la línea y sus nudos extremos. Es fácil deducir que las derivadas en el extremo i valen

$$\begin{aligned} \frac{\partial P_{ij}}{\partial L} &= \frac{\partial P_i}{\partial L} = -P_{ij}/L^2 \\ \frac{\partial Q_{ij}}{\partial L} &= \frac{\partial Q_i}{\partial L} = -[Q_{ij} + V_i^2 b_{ij}^p (1 + L^2)]/L^2 \end{aligned}$$

donde P_{ij} y Q_{ij} son los flujos calculados con $L = 1$. Y análogamente para el extremo j (basta con intercambiar los subíndices).

Obsérvese que los valores de las derivadas anteriores son nulos o muy pequeños para perfil plano, por lo que la nueva columna provocaría mal condicionamiento o singularidad del jacobiano en la primera iteración. Para evitarlo, el parámetro L sólo debe incluirse en el modelo a partir de la segunda iteración.

Algunos autores proponen utilizar el valor conocido de p como una pseudomedida, con vistas a no comprometer la observabilidad. Sin embargo, el peso adoptado para esa pseudomedida tiene una gran influencia en el valor estimado, lo cual no es deseable. Con pseudomedida o sin ella, paradójicamente, si el valor inicial p_0 del parámetro es bueno y la calidad de las medidas no lo es tanto, podemos estimar un valor \hat{p} peor que p_0 , lo cual pasará desapercibido al no conocerse el valor exacto. Por tanto, sólo deben estimarse aquellos parámetros cuyo error esperado sea mayor que el error medio de las medidas.

La estimación basada en residuos y sensibilidades tiene la ventaja respecto a la ampliación del vector de estado de que no hay que cambiar el código de los estimadores existentes, al constituir una rutina que se ejecuta de forma independiente.

Ejemplo 4.11:

Con los mismos datos del Ejemplo 4.2 vamos a estimar la longitud relativa de la línea 1-2, para lo cual, como se acaba de explicar, añadimos este parámetro al vector de estado.

Utilizando la misma tolerancia, el proceso iterativo converge, en 4 iteraciones, al siguiente estado,

Nudo,	\hat{V} (pu)	$\hat{\theta}$ (°)
1	0.9998	0.0
2	0.9740	-1.2605
3	0.9440	-2.7466

que es algo distinto del obtenido en el Ejemplo 4.2. La iteración extra se debe al retraso introducido por la nueva variable de estado, que sólo se actualiza a partir de la segunda iteración.

La longitud relativa estimada vale $L = 1,0119$, es decir, algo más del 1% superior a la que constaba en base de datos. La validez de esta longitud dependerá de la precisión y del nivel de redundancia de las medidas. Si las medidas son de poca calidad, puede ocurrir, como ya se ha comentado, que el valor estimado sea peor que el de partida. Para evitar en la medida de lo posible este riesgo, además de estimar solamente los parámetros de líneas sospechosas, es recomendable aumentar localmente la redundancia utilizando simultáneamente tantas “fotografías” de la red como sea posible.

Debe destacarse, además, que tanto los residuos como la función objetivo son ligeramente menores que en el Ejemplo 4.2, lo cual es un resultado esperable al haber disminuido la redundancia

($m = 8, n = 6$). De hecho, si se añadiesen dos variables de estado adicionales, tanto los residuos como la función objetivo serían nulos al ser $m = n$. Este es precisamente el caso del flujo de cargas.

Los valores de los coeficientes de G tras la cuarta iteración son:

$$G^{(4)} = 10^7 \left[\begin{array}{cc|cc|c|c} 3,1437 & -0,4433 & -0,0689 & -0,0312 & 0,0038 & 0,0589 \\ -0,4433 & 0,5957 & -0,0451 & 0,0046 & 0,0000 & -0,0070 \\ \hline -0,0689 & -0,0451 & 3,1415 & -2,8229 & -0,2204 & -0,0646 \\ -0,0312 & 0,0046 & -2,8229 & 3,2436 & -0,4717 & 0,0702 \\ 0,0038 & 0,0000 & -0,2204 & -0,4717 & 0,6685 & -0,0088 \\ \hline 0,0589 & -0,0070 & -0,0646 & 0,0702 & -0,0088 & 0,0027 \end{array} \right]$$

El menor valor de los coeficientes de la última fila y columna hace que el número de condición de esta matriz se eleve hasta $1,04 \cdot 10^5$. Obsérvese que la nueva variable está débilmente acoplada con variables de estado que no sean las tensiones complejas en los nudos extremos de la línea en cuestión.

4.8.2. Estimación de tomas

Las tomas de los transformadores constituyen un caso particular de parámetros, y por tanto pueden hacerse prácticamente las mismas consideraciones y emplearse las mismas técnicas descritas en el apartado anterior [15, 20, 48]. Los aspectos diferenciadores respecto a la estimación de impedancias son los siguientes:

- La estimación tiene que hacerse *on-line*, por lo que deben descartarse técnicas costosas como el filtro de Kalman, a menos que se apliquen localmente a una subred pequeña.
- La toma es una variable discreta, por lo que el valor estimado debe finalmente redondearse a la toma real más próxima.
- La presencia de medidas de tensión en bornas del transformador y/o de flujos de reactiva a través del mismo resulta crítica para conseguir una estimación de calidad, ya que la toma afecta fundamentalmente a estas variables. En algún caso se ha propuesto incluso utilizar la diferencia entre el flujo de potencia reactiva medido y el estimado para subir o bajar el valor de la toma, ya que existe una relación prácticamente lineal entre ambas magnitudes para pequeñas desviaciones de la toma ($\pm 10\%$).

El modelo y las ecuaciones del transformador con tomas fueron estudiados en el Capítulo 2. De forma análoga a la longitud de la línea, cuya influencia en los parámetros viene dada por la ecuación (4.36), existe una dependencia funcional entre la toma y las admitancias serie y paralelo del transformador. De dichas ecuaciones pueden derivarse los términos no nulos que aparecen en las nuevas columnas del jacobiano cuando la toma respectiva se incluye en el vector de estado.

4.8.3. Errores topológicos

Como se explicó en la introducción de este capítulo, el procesador topológico obtiene el modelo eléctrico del sistema analizando el estado de interruptores y seccionadores. Los seccionadores asociados a un interruptor permiten modificar la topología temporalmente, en

situaciones de emergencia o mantenimiento, o bien para atender cambios estacionales, pero por motivos económicos y de seguridad no suelen estar telemandados. El conjunto formado por un interruptor real y sus seccionadores asociados da lugar a uno o varios “interruptores lógicos”, que son a los que nos referiremos a partir de ahora.

En la inmensa mayoría de casos, el estado de los interruptores se conoce con certeza, puesto que para aumentar la fiabilidad se utiliza doble señalización (dos bits para un mismo interruptor). Sin embargo, por mal funcionamiento o avería de los contactos de señalización de las celdas, o por pérdida de información, hay ocasiones en que se ignora el estado de un interruptor o éste es ambiguo. La ambigüedad proviene de una discordancia en el estado de los dos bits asociados, que suministran información contradictoria. En esas situaciones anómalas, los procesadores topológicos convencionales recurren a información adicional, como los valores de las medidas relacionadas con la subestación o la historia pasada, con el objetivo de asignar un estado definido a todos los interruptores. Consecuentemente, existe el riesgo de equivocarse.

Suponer que un interruptor está cerrado cuando en realidad está abierto, o viceversa, constituye un error topológico que puede implicar consecuencias catastróficas para la calidad del estimador, al menos localmente, e incluso puede afectar globalmente a su convergencia [36]. Ello explica que en los últimos años se haya hecho un gran esfuerzo por desarrollar técnicas capaces de detectar estos errores, llegando a cuestionarse incluso el papel asignado a los procesadores topológicos convencionales [46, 11, 38, 35].

Según la función que realiza el interruptor, pueden identificarse dos tipos distintos de errores topológicos, a saber:

- Errores en el estado (conectado/desconectado) de un elemento de red (línea, transformador, reactancia o batería de condensadores). Se denomina *error de exclusión* cuando un elemento realmente cerrado se supone abierto, y *error de inclusión* cuando ocurre lo contrario. En este tipo de errores, que afectan a uno o varios interruptores, siempre se ve involucrada una impedancia no nula.
- Errores en el estado de un interruptor interno a la subestación, que sirve como acople entre dos embarrados o entre secciones de embarrados en las configuraciones en anillo. Un error de este tipo puede dar lugar a un nudo eléctrico de más o de menos respecto a la realidad. La principal característica en este caso es que la impedancia involucrada es nula, al no intervenir ningún elemento de red.

Considerar a todos los interruptores como sospechosos sería inviable por el volumen de información que habría que manejar, y poco práctico porque el estado de la mayoría de ellos no ofrece dudas. Se requiere, por tanto, un mecanismo que seleccione los interruptores que tienen que ser analizados. Esta selección puede hacerse en base a la siguiente información:

- La suministrada *a priori* por el procesador topológico, como consecuencia de estados ambiguos, contradictorios con las medidas o simplemente desconocidos.
- La suministrada por los residuos de las medidas tras una primera ejecución del estimador. Como en el caso de la estimación de parámetros, si los residuos de las medidas de una subestación son anormalmente altos, los interruptores de dicha subestación

deben declararse como sospechosos. La ventaja en este caso es que los errores topológicos dan lugar normalmente a residuos mucho mayores, y por tanto son más fácilmente detectables.

Las técnicas disponibles para estimar el estado de los interruptores previamente seleccionados responden de nuevo a dos categorías, aunque sólo la segunda aborda el problema de forma integral.

El primer grupo de técnicas aprovecha el hecho de que el estado de un interruptor es una variable binaria, y por tanto la determinación de los estados de un grupo reducido de interruptores puede hacerse probando todas las combinaciones factibles y quedándose con la que más minimice el valor de la función objetivo $J(\hat{x})$ (es decir, la más compatible con las medidas disponibles localmente). El número de combinaciones coincide con el de interruptores o elementos sospechosos cuando se trata de detectar un único error topológico, pero en general hay que recurrir a datos históricos y otras reglas más sofisticadas para reducir el número de casos a estudiar. Como se comentó anteriormente, todas estas estimaciones se realizan a nivel local para disminuir el coste computacional.

El segundo grupo de métodos responde al esquema de ampliar el vector x con una serie de variables que modelen el estado de los interruptores. Dentro de este grupo, analizaremos por separado el tratamiento de los dos tipos de errores topológicos, según que lleven o no aparejada una impedancia.

Consideremos el caso de una línea cuyo estado quiere estimarse (análogamente se tratarían los otros componentes). Puesto que el estado desconectado implica admitancias nulas, los dos estados posibles de la línea se pueden incorporar en el modelo en pi siguiente:

$$\text{serie: } (g_{ij} + jb_{ij})k \quad ; \quad \text{paralelo: } jb_{ij}^p k \quad (4.37)$$

donde $k = 1$ representa una línea conectada y $k = 0$ desconectada. Por tanto, sólo es preciso añadir una única variable para modelar el estado de la línea. Obsérvese la similitud entre la ecuación anterior y la (4.36). Los términos no nulos de la columna extra del jacobiano vienen dados en el extremo i por

$$\begin{aligned} \frac{\partial P_{ij}(k)}{\partial k} &= \frac{\partial P_i(k)}{\partial k} = P_{ij} \\ \frac{\partial Q_{ij}(k)}{\partial k} &= \frac{\partial Q_i(k)}{\partial k} = Q_{ij} \end{aligned}$$

donde P_{ij} y Q_{ij} son los flujos de potencia convencionales calculados con $k = 1$. Y análogamente para el extremo j .

En la práctica, el valor estimado de k puede diferir significativamente de los valores 0 o 1 debido a los errores de las medidas. Si existen errores no gaussianos en las proximidades de la línea en cuestión, el valor estimado de k puede incluso estar en torno a 0.5, quedando la duda de si la línea se encuentra cerrada o abierta. Además, los valores estimados del vector de estado serán menos exactos si k no toma uno de sus dos valores enteros.

Estos problemas pueden evitarse añadiendo una restricción de igualdad como la siguiente, que sólo permite a k tomar uno de sus dos posibles valores:

$$k(1 - k) = 0 \quad (4.38)$$

Si las medidas de la línea no son críticas, entonces k es observable, y la anterior restricción constituye una información redundante cuyo único objetivo es refinar el valor estimado de k . Por otro lado, cuando k no es observable, la restricción de igualdad propuesta la hace observable, pero no evita que se converja a cualquiera de los dos valores (multiplicidad de soluciones).

Para evitar singularidades en el jacobiano la primera vez que se calcula, esta técnica sólo debe aplicarse a partir de la segunda iteración.

Claramente, la estimación de interruptores cuya impedancia serie es nula, como por ejemplo los acoples de barras, no puede realizarse siguiendo la técnica descrita anteriormente. El método empleado en estos casos [35] consiste en incorporar como variables de estado los flujos de potencia activa y reactiva por el interruptor, P_{ij} y Q_{ij} .

Para compensar las nuevas variables, deben añadirse también tantas restricciones de igualdad como sea posible. Si se desea modelar un interruptor cerrado, se imponen las restricciones

$$\theta_i - \theta_j = 0 \quad ; \quad V_i - V_j = 0$$

mientras que si el interruptor se considera abierto debe cumplirse que

$$P_{ij} = 0 \quad ; \quad Q_{ij} = 0$$

Al modelar los interruptores de esta forma pueden aparecer nuevos nudos eléctricos respecto a los que generaría un procesador topológico convencional. Puesto que muchos de estos nudos virtuales son de inyección nula, no debe olvidarse añadir también la restricción respectiva.

El lector puede preguntarse cuál es la necesidad de modelar explícitamente interruptores cuyo estado conocemos. Parece ocioso incorporar dos variables de estado y decir a la vez que valen cero si el interruptor está abierto. El motivo de proceder así radica en la información que obtenemos de los multiplicadores de Lagrange de cualquier restricción de igualdad. Puede demostrarse que, en el óptimo, los multiplicadores normalizados con sus covarianzas juegan para las restricciones el mismo papel que los residuos normalizados para las medidas ordinarias. Por tanto, un multiplicador normalizado alto indicará una restricción errónea, o sea, un error topológico, que en un estimador convencional aparecería enmascarado como un error en varias medidas adyacentes.

Este método es totalmente general, y por tanto puede aplicarse también para estudiar la conexión y desconexión de líneas, aunque a un coste computacional mayor que cuando sólo se utiliza k .

La incorporación de todas las funciones discutidas en esta última sección, y otras más que escapan al ámbito de este texto, está dando lugar a un concepto moderno de estimador de estado que se ha dado en llamar “estimador de estado generalizado” [3, 36, 18, 51].

Ejemplo 4.12:

De nuevo se utilizan los datos del Ejemplo 4.2 para estimar el estado de la línea 1-2, para lo cual se añade la variable de estado k multiplicando a todas las admitancias de dicha línea. El número de iteraciones requerido para obtener convergencia depende del valor inicial adoptado para k , como se indica en la siguiente tabla:

Valor inicial	Número iteraciones
1	4
0.5	6
0.001	7

En todos los casos, el estado estimado coincide con el del Ejemplo 4.11, siendo $\hat{k} = 0,9882$ justamente el valor inverso de \hat{L} en dicho ejemplo, lo cual es lógico al ser $b^p = 0$. Obsérvese que, incluso partiendo de una línea abierta inicialmente, $k^0 \approx 0$, se converge al estado cerrado, $\hat{k} \approx 1$, que es el que minimiza la función objetivo.

Si se desea obtener un estado “100 % cerrado”, puede añadirse la restricción cuadrática (4.38), bien como medida de gran peso o bien como restricción. En este caso, el proceso converge en 6 iteraciones al mismo estado del Ejemplo 4.2 partiendo de $k^0 \geq 0,5$, pero converge al estado erróneo si se parte de $k^0 < 0,5$. Como el estado verdadero se desconoce, es preciso entonces comenzar a iterar con el valor “neutro” $k^0 = 0,5$. Esto se debe al gran peso que en la función objetivo tiene la nueva restricción, que puede hacer converger el proceso iterativo hacia un mínimo local.

Bibliografía

- [1] A. Abur y M. Çelik, “A Fast Algorithm for the Weighted Least Absolute Value State Estimation”, *IEEE Trans. on Power Systems*, vol. 6(1), febrero 1991, pp. 1-8.
- [2] J. J. Allemong, L. Radu y A. M. Sasson, “A Fast and Reliable State Estimation Algorithm for AEP’s New Control Center”, *IEEE Trans. on Power Apparatus and Systems*, abril 1982, pp. 933-944.
- [3] O. Alsac, N. Vempati, B. Stott y A. Monticelli, “Generalized State Estimation”, *IEEE Transactions on Power Systems*, vol. 13(3), agosto 1998, pp. 1069-1075.
- [4] A. Arbel, *Exploring Interior-Point Linear Programming Algorithms and Software*, The MIT Press, Cambridge, Mass., 1993.
- [5] F. Aschmoneit, N. Peterson y E. Adrian, “State Estimation with Equality Constraints” 10-th PICA Conference Proceedings, Toronto, mayo 1977, pp. 427-430.
- [6] R. H. Bartels, A. R. Conn y J. W. Sinclair, “Minimization Techniques for Piecewise Differentiable Functions: The ℓ_1 Solution To An Overdetermined Linear System”, *SIAM J. Numer. Anal.*, vol. 15(2), abril 1978, pp. 224-241.
- [7] I. Barrodale y F. D. K. Roberts, “An Improved Algorithm for Discrete ℓ_1 Linear Approximation”, *SIAM Journal Numer. Anal.*, vol. 10(5), octubre 1973, pp. 839-848.
- [8] I. Barrodale y F. D. K. Roberts, “Applications of Mathematical Programming to ℓ_p Approximation”, *Nonlinear Programming*, J. B. Rosen, O. L. Mangasarian y K. Ritter, Eds., Academic Press, New York, 1970, pp. 447-464.
- [9] K. A. Clements, G. R. Krumpholz y P. W. Davis, “Power System State Estimation with Measurement Deficiency: An Algorithm that Determines the Maximal Observable Subnetwork”, *IEEE Trans. on Power Apparatus and Systems*, vol. 101(7), 1982, pp. 3044-3052.
- [10] K. A. Clements, G. R. Krumpholz y P. W. Davis, “Power System State Estimation with Measurement Deficiency: An Observability / Measurement Placement Algorithm”, *IEEE Trans. on Power Apparatus and Systems*, vol. 102(7), 1983, pp. 2012-2020.

- [11] K. A. Clements y A. Simoes-Costa, "Topology Error Identification Using Normalized Lagrange Multipliers", *IEEE Transactions on Power Systems*, vol. 13(2), mayo 1998, pp. 347-353.
- [12] A. Debs, "Estimation of Steady-State Power System Model Parameters", *IEEE Transactions on Power Apparatus and Systems*, vol. PAS-93(5), 1974, pp. 1260-1268.
- [13] T. Dy Liacco, "The Role and Implementation of State Estimation in an Energy Management System", *Electrical Power & Energy Systems*, vol. 12(2), abril 1990, pp. 75-79.
- [14] S. P. Ellis y S. Morgenthaler, "Leverage and Breakdown in L_1 Regression", *J. Amer. Stat. Association*, vol. 87(417), marzo 1992, pp. 143-148.
- [15] D. Fletcher y W. Stadlin, "Transformer Tap Position Estimation", *IEEE Transactions on Power Apparatus and Systems*, vol. PAS-102(11), noviembre 1983, pp. 3680-3686.
- [16] A. García, A. Monticelli y P. Abreu, "Fast Decoupled State Estimation and Bad Data Processing", *IEEE Trans. on Power Apparatus and Systems*, vol. PAS-98, septiembre 1979, pp. 1645-1652.
- [17] A. Gjelsvik, S. Aam y L. Holten, "Hachtel's Augmented Matrix Method - A Rapid Method Improving Numerical Stability in Power System Static State Estimation", *IEEE Transactions on Power Apparatus and Systems*, vol. PAS-104, noviembre 1985, pp. 2987-2993.
- [18] A. Gómez Expósito y A. de la Villa, "Reduced Substation Models for Generalized State Estimation", *IEEE Transactions on Power Systems*, vol. 16(4), noviembre 2001, pp. 839-846.
- [19] F. R. Hampel, E. M. Ronchetti, P. J. Rousseeuw y W. A. Stahel, *Robust Statistics: The Approach Based on Influence Functions*, John Wiley & Sons, 1986.
- [20] E. Handschin y E. Kliokys, "Transformer Tap Position Estimation and Bad Data Detection Using Dynamic Signal Modelling", *IEEE Transactions on Power Systems*, vol. 10(2), mayo 1995, pp. 810-817.
- [21] E. Handschin, F. C. Schweppe, J. Kohlas y A. Fiechter, "Bad Data Analysis for Power System State Estimation", *IEEE Trans. on Power Apparatus and Systems*, vol. PAS-94(2), 1975, pp. 329-337.
- [22] L. Holten, A. Gjelsvik, S. Aam, F. Wu y W. Liu, "Comparison of Different Methods for State Estimation", *IEEE Transactions on Power Systems*, vol. 3, noviembre 1988, pp. 1798-1806.
- [23] M. R. Irving, R. C. Owen y M. J. Sterling, "Power System State Estimation Using Linear Programming", *Proceedings of IEE*, vol. 125, 1978, pp. 879-885.
- [24] N. K. Karmarkar, "A New Polynomial Time Algorithm for Linear Programming", *Combinatorica*, vol. 4, pp. 373-395.
- [25] W. W. Kotiuga y M. Vidyasagar, "Bad Data Rejection Properties of Weighted Least Absolute Value Techniques Applied to Static State Estimation", *IEEE Trans. on Power Apparatus and Systems*, vol. PAS-101(4), abril 1982, pp. 844-851.
- [26] G. R. Krumpholz, K. A. Clements y P. W. Davis, "Power System Observability: A Practical Algorithm Using Network Topology", *IEEE Trans. on Power Apparatus and Systems*, vol. PAS-99(4), julio/agosto 1980, pp. 1534-1542.
- [27] R. Larson, W. Tinney, L. Hajdu y D. Piercy, "State Estimation in Power Systems. Part II: Implementation and Applications", *IEEE Transactions on Power Apparatus and Systems*, vol. PAS-89(3), marzo 1970, pp. 353-362.
- [28] W. Liu y S. Lim, "Parameter Error Identification and Estimation in Power System State Estimation", *IEEE Transactions on Power Systems*, vol. 10(1), febrero 1995, pp. 200-209.
- [29] W. Liu, F. Wu y S. Lun, "Estimation of Parameter Errors from Measurement Residuals in State Estimation", *IEEE Transactions on Power Systems*, vol. 7(1), febrero 1992, pp. 81-89.

- [30] H. M. Merrill y F. C. Schweppe, "Bad Data Suppression in Power System Static Estimation", *IEEE Trans. on Power Apparatus and Systems*, vol. PAS-90, noviembre/diciembre 1971, pp. 2718-2725.
- [31] L. Mili, M. G. Cheniae, N. S. Vichare y P. J. Rousseeuw, "Robust State Estimation Based on Projection Statistics", *IEEE Trans. on Power Systems*, vol. 11(2), mayo 1996, pp. 1118-1127.
- [32] L. Mili, V. Phaniraj y P. J. Rousseeuw, "Robust Estimation Theory for Bad Data Diagnostics in Electric Power Systems", *Advances in Control and Dynamic Systems*, C.T. Leondes (ed.), Academic Press, vol. XXXVI.
- [33] L. Mili, T. Van Cutsem y M. Pavella, "Hypothesis Testing Identification: A New Method for Bad Data Analysis in Power System State Estimation", *IEEE Trans. on Power Apparatus and Systems*, vol. PAS-103(11), 1984, pp. 3239-3252.
- [34] L. Mili y T. Van Cutsem, "Implementation of HTI Method in Power System State Estimation", *IEEE Trans. on Power Systems*, vol. 3(3), agosto 1988, pp. 887-893.
- [35] A. Monticelli, "Modeling Circuit Breakers in Weighted Least Squares State Estimation", *IEEE Transactions on Power Systems*, vol. 8(3), agosto 1993, pp. 1143-1149.
- [36] A. Monticelli, *State Estimation in Electric Power System. A Generalized Approach*, Kluwer Academic Publishers, 1999.
- [37] A. Monticelli y A. García, "Reliable Bad Data Processing for Real-Time State Estimation", *IEEE Trans. on Power Apparatus and Systems*, vol. PAS-102(3), 1983, pp. 1126-1139.
- [38] A. Monticelli y A. García, "Modeling Zero Impedance Branches in Power Systems State Estimation", *IEEE Transactions on Power Systems*, vol. 6(4), noviembre 1991, pp. 1561-1570.
- [39] A. Monticelli, C. Murari y F. Wu, "A Hybrid State Estimator: Solving Normal Equations by Orthogonal Transformations", *IEEE Transactions on Power Apparatus and Systems*, vol. PAS-105(2), diciembre 1985, pp. 3460-3468.
- [40] A. Monticelli y F. Wu, "Network Observability: Identification of Observable Islands and Measurement Placement", *IEEE Transactions on Power Apparatus and Systems*, vol. PAS-104(5), mayo 1985, pp. 1035-1041.
- [41] A. Monticelli y F. Wu, "Network Observability: Theory", *IEEE Transactions on PAS*, vol. PAS-104(5), mayo 1985, pp. 1042-1048.
- [42] P. J. Rousseeuw y A. M. Leroy, *Robust Regression and Outlier Detection*, John Wiley & Sons, 1987.
- [43] F. Schweppe y B. Douglas, "Power System Static-State Estimation", *IEEE Transactions on Power Apparatus and Systems*, vol. PAS-89, 1970, pp. 120-135.
- [44] F. Schweppe y E. Handschin, "Static State Estimation in Electric Power Systems", *Proceedings IEEE*, vol. 62, julio 1974, pp. 972-983.
- [45] A. Simões-Costa y V. Quintana, "A Robust Numerical Technique for Power System State Estimation", *IEEE Transactions on Power Apparatus and Systems*, vol. PAS-100, febrero 1981, pp. 691-698.
- [46] N. Singh y H. Glavitsch, "Detection and Identification of Topological Errors in Online Power System Analysis", *IEEE Transactions on Power Systems*, vol. 6(1), febrero 1991, pp. 324-331.
- [47] I. Slutsker y K. Clements, "Real Time Recursive Parameter Estimation in Energy Management Systems", *IEEE Transactions on Power Systems*, vol. 11(3), agosto 1996, pp. 1393-1399.
- [48] P. Teixeira, S. Brammer, W. Rutz, W. Merritt y J. Salmonsén, "State Estimation of Voltage and Phase-Shift Transformer Tap Settings", *IEEE Transactions on Power Systems*, vol. 7(3), agosto 1992, pp. 1386-1393.

- [49] T. Van Cutsem y V. Quintana, "Network Parameter Estimation Using Online Data with Application to Transformer Tap Position Estimation", *IEE Proceedings part C*, vol. 135(1), enero 1988, pp. 31-40.
- [50] M. Vempati, I. Slutsker y W. Tinney, "Enhancements to Givens Rotations for Power System State Estimation", *IEEE Transactions on Power Systems*, vol. 6(2), mayo 1991, pp. 842-849.
- [51] A. de la Villa y A. Gómez Expósito, "Implicitly-Constrained Substation Model for State Estimation", aceptado en *IEEE Transactions on Power Systems*.
- [52] H. M. Wagner, "Linear Programming Techniques for Regression Analysis", *Jour. Amer. Statist. Assoc.*, vol. 54, 1959, pp. 206-212.
- [53] J. Wang y V. Quintana, "A Decoupled Orthogonal Row Processing Algorithm for Power System State Estimation", *IEEE Transactions on Power Apparatus and Systems*, vol. PAS-103, agosto 1984, pp. 2337-2334.
- [54] F. Wu, "Power System State Estimation", *Electrical Power & Energy Systems*, vol. 12(2), abril 1990, pp. 80-87.
- [55] P. Zarco y A. Gómez Expósito, "Off-line Determination of Network Parameters in State Estimation", Proceedings 12th. Power System Computation Conference, Dresden, Germany, agosto 1996, pp. 1207-1213.
- [56] P. Zarco y A. Gómez Expósito, "Power System Parameter Estimation: A Survey", *IEEE Transactions on Power Systems*, vol. 15(1), febrero 2000, pp. 216-222.

Capítulo 5

Control de frecuencia y de tensiones

CARLOS ÁLVAREZ BEL Y ANTONIO J. CONEJO

5.1. Introducción

Uno de los problemas que mayor repercusión económica tiene en la operación de los sistemas de energía eléctrica se deriva de la necesidad de mantener todas sus variables de funcionamiento dentro de unos límites relativamente estrictos. Las variables que más inciden en el usuario del sistema (consumidor) se refieren a las características de la tensión a la que se realiza el suministro, fundamentalmente: valor eficaz, frecuencia fundamental y pureza de la onda. Estas variables no permanecen constantes como consecuencia de la variación continua de la demanda, tanto de potencia activa como de reactiva.

Desde el punto de vista del usuario, algunas de estas variables requieren un control más preciso que otras. Por ejemplo, el valor eficaz de la tensión puede variar en una banda, centrada en el valor nominal, del 15 %, sin repercusiones apreciables en la mayor parte de las aplicaciones industriales o domésticas. Las variaciones en la frecuencia tienen cada vez más importancia debido al número creciente de relojes y automatismos que hay conectados a la red eléctrica, para los que es importante no sólo el error en un instante determinado sino el error que se acumula a lo largo del tiempo.

Además de para ajustar estas variables de cara al usuario, el control del sistema eléctrico es fundamental para controlar los flujos de potencia activa y reactiva. Estos flujos inciden directamente en la calidad de la operación, calidad que tradicionalmente se ha evaluado utilizando dos criterios: seguridad y coste.

La regulación del valor eficaz de la tensión y de la frecuencia se ha planteado, tradicionalmente, de una forma centralizada a través de una estructura jerárquica de control, siendo el problema de la consecución de la pureza de onda un problema que hay que resolver de una forma mucho más local.

El problema de la regulación de la tensión y de la frecuencia es un problema que debe ser resuelto tanto a nivel de planificación, donde hay que prever los requerimientos de control

necesarios, como de operación, donde hay que asignar los recursos disponibles para un correcto funcionamiento del sistema eléctrico.

Estos recursos de control pueden ser, en función de cómo se efectúe la regulación, de carácter discreto, como por ejemplo la conexión/desconexión de condensadores/reactancias, o continuo como es el caso de la regulación de un generador.

El valor de la tensión y de la frecuencia en un sistema eléctrico están muy ligados, respectivamente, como se ha demostrado en capítulos anteriores, a los flujos y balances de potencia reactiva y activa en las líneas y generadores del sistema. Los flujos de potencia reactiva están relacionados con los valores de las tensiones en los nudos, relación que tiene un carácter marcadamente local en el sentido de que esta relación es muy fuerte entre flujos en líneas y tensiones en sus extremos y se va debilitando rápidamente a medida que se consideran nudos más alejados. En este sentido, se puede concluir que desequilibrios en la generación y consumo de energía reactiva producen desequilibrios locales en las tensiones del sistema (interacción QV).

Aunque pueda pensarse que la relación entre potencias activas y ángulos podría presentar este carácter local, no es así, dado que el valor de los ángulos está directamente relacionado con el valor de la frecuencia, y los valores relativos de los ángulos, con el valor acumulado de las desviaciones de frecuencia. Se puede concluir, por tanto, que los desequilibrios de potencia activa se traducen en modificaciones en la frecuencia que se “hacen sentir” en todo el sistema, modificación que se corrige modificando la potencia activa que producen los generadores (interacción Pf). Esta interacción se analiza en el siguiente ejemplo.

Ejemplo 5.1:

Alteración de la frecuencia.

Sea un sistema eléctrico de las siguientes características. La frecuencia es de 50 Hz. La potencia demandada es 1000 MW y la energía cinética almacenada en todas las máquinas del sistema es 10000 MJ. Considerando que se produce un repentino incremento de la demanda de 10 MW, que no se modifica inicialmente la potencia de los generadores y que las variaciones de frecuencia son uniformes en todo el sistema, se calcula a continuación la velocidad de decrecimiento de la frecuencia en el instante inicial.

La energía cinética del sistema se puede expresar como:

$$W_{\text{CIN}} = \frac{1}{2} I \omega^2$$

También

$$W_{\text{CIN}} = W_{\text{CIN}}^0 \left(\frac{\omega}{\omega^0} \right)^2 = W_{\text{CIN}}^0 \left(\frac{f}{f^0} \right)^2$$

Por tanto, y puesto que inicialmente toda la potencia se suministra a expensas de la energía cinética, se tiene:

$$10 = -\frac{\partial W_{\text{CIN}}}{\partial t} = -W_{\text{CIN}}^0 \frac{\partial \left(\frac{f^0 + \Delta f}{f^0} \right)^2}{\partial t} \approx -\frac{2W_{\text{CIN}}^0}{f^0} \frac{\partial \Delta f}{\partial t}$$

que, sustituyendo los valores correspondientes, implica una disminución inicial de la frecuencia de valor $\left. \frac{\partial \Delta f}{\partial t} \right|_0 = 25 \text{ mHz/s}$.

Los mecanismos QV y Pf de interacción entre variables no están desacoplados, en el sentido de que modificaciones en las tensiones de los nudos tienen influencia en la potencia activa que consumen las cargas del sistema y, por tanto, cualquier variación en la producción de energía reactiva del sistema se traducirá, necesariamente y de cara a mantener la frecuencia, en cambios en la producción de potencia activa. Análogamente, un cambio en el perfil de producción de potencia activa se manifiesta, aunque en menor medida, en variaciones en las tensiones del sistema.

Una diferencia fundamental en estos dos mecanismos de interacción de variables se refiere a los tiempos de actuación de los elementos que se utilizan para el control. La respuesta de los elementos de control en el mecanismo QV es mucho más rápida (de algunos segundos) que en el Pf donde, debido al papel que juegan las inercias en el proceso, los tiempos de respuesta pueden ser de algunos minutos.

El material analizado en este capítulo puede completarse en los excelentes manuales de Elgerd [1] y Nagrath y Kothari [2], o en los más recientes de Bergen y Vittal [3] y Machowski y cols. [4]. El control secundario de tensiones es un tema menos clásico, todavía abierto a la investigación. Referencias relevantes sobre el mismo son [5], [6] y [7].

5.1.1. Estructura del control

Como consecuencia de las características mencionadas, el control de la tensión y frecuencia de los sistemas de energía eléctrica se ha planteado tradicionalmente de forma jerárquica y desacoplada. La jerarquía se ha establecido, normalmente, en tres niveles: el primero a nivel de planta o control local, el segundo referido a áreas o regiones de control, y el tercero, donde normalmente se integran todas las variables y mecanismos, a nivel de todo el sistema.

En el último nivel, común a los dos mecanismos de control Pf y QV y tradicionalmente muy centralizado, es donde se considera la optimización del funcionamiento del sistema eléctrico en su conjunto mediante un reparto óptimo de cargas, siendo el horizonte de actuación de este control superior a los 10 minutos.

El primer y segundo nivel de control están claramente diferenciados para los controles Pf y QV, siendo, teóricamente, el nivel primario de actuación más rápida que el secundario. Típicamente, la respuesta del control secundario Pf puede estar entre 20 segundos y 2 minutos y la del primario entre 2 y 20 segundos. Para el control QV, la respuesta de control primario es muy rápida, como máximo, de algún segundo.

Se consideran elementos básicos de control aquellos dispositivos que son capaces de generar/consumir potencia activa o reactiva cuando se les solicita. Las variaciones en la potencia producida pueden ser continuas o discretas (por escalones), y pueden estar controladas bien directamente o a través de otra variable, como puede ser la tensión en un determinado nudo, la velocidad de una máquina o la frecuencia del sistema.

El elemento de control más importante y versátil es el generador síncrono, elemento utilizado tanto para el control continuo de la frecuencia como de la tensión. Una variante de este elemento también tradicionalmente muy utilizada es el compensador síncrono, que es un generador que no genera potencia activa. Para el suministro/consumo de energía reactiva en determinados nudos de la red se instalan, normalmente accionados de forma discreta,

baterías de condensadores y/o de reactancias. Estos elementos pueden ser accionados por interruptores mecánicos o electrónicos. La potencia reactiva que absorbe una reactancia se puede controlar de forma continua mediante el control del ángulo de disparo de un elemento electrónico de potencia (tiristor, GTO, IGBT, etc.) y la potencia reactiva que se genera con una batería de condensadores puede ser controlada mediante la conmutación de los mismos utilizando los elementos electrónicos de potencia antes mencionados. Los sistemas electrónicos utilizados en estas dos aplicaciones se engloban en los que se conocen como elementos FACTS (acrónimo que proviene de la denominación en inglés *Flexible Alternating Current Transmission System*) y de forma más específica SVC (*Static VAR Compensator*) en contraposición a los compensadores síncronos.

5.1.2. El control como servicio complementario

El control de las variables que reflejan un correcto funcionamiento del sistema eléctrico, tensión y frecuencia, se ha realizado tradicionalmente de una forma integrada. Por ejemplo, en el caso de los generadores no se separa su capacidad de realizar el control de su capacidad de generar energía eléctrica. El resto de elementos de control, todos propiedad de la empresa eléctrica concesionaria de la zona, recibían un tratamiento igualmente integrado tanto en planificación como en operación.

Como consecuencia de la separación de actividades impuesta por la mayoría de las nuevas reglamentaciones del sector eléctrico en diferentes países, se contempla la separación de las actividades de producción de energía (en régimen de competencia), de transporte y distribución (reguladas) y las de soporte técnico de la red.

Estas últimas, entre las que se encuentra el control del sistema, están parcialmente liberalizadas en el sentido de que agentes independientes de otras actividades pueden ofertar la realización del control. Las actividades relacionadas con el control son la capacidad de producción de potencia activa y reactiva de acuerdo con unos patrones y requerimientos especificados por el operador del sistema o gestor técnico de la red.

Puesto que el control adecuado del sistema es básico para su funcionamiento, la separación del mismo en servicios que pueden ser ofrecidos por diferentes agentes es bastante problemática. Estos problemas serán discutidos más adelante.

5.2. Control primario: el generador síncrono

En este apartado, se estudian los modelos necesarios para el análisis del efecto de las acciones de control sobre el conjunto del sistema eléctrico en régimen estacionario o cuasi-estacionario. Las acciones de control orientadas a la mejora del comportamiento transitorio del sistema, tales como la inserción de resistencias de frenado, se estudian en el capítulo sobre estabilidad.

A continuación, se considera que los mecanismos de interacción Pf y QV son independientes en lo que respecta a aquellos elementos con capacidad de ejercer control en uno u otro mecanismo. Posteriormente, se analiza el efecto del posible acoplamiento entre ellos. El generador síncrono es el principal elemento con esta capacidad y es el que se analiza en primer lugar.

El generador síncrono es un elemento capaz de modificar su producción de potencia activa y reactiva de una forma continua y controlada. La potencia activa se controla mediante la modificación de la admisión de caudal en la correspondiente turbina (gas, vapor o agua) a la vez que la regulación de tensión se realiza mediante el control de la intensidad de excitación que, en consecuencia, modifica la fuerza electromotriz interna de la máquina.

La estructura física del control del generador, tanto de frecuencia como de tensiones, se muestra en el diagrama de la Figura 5.1.

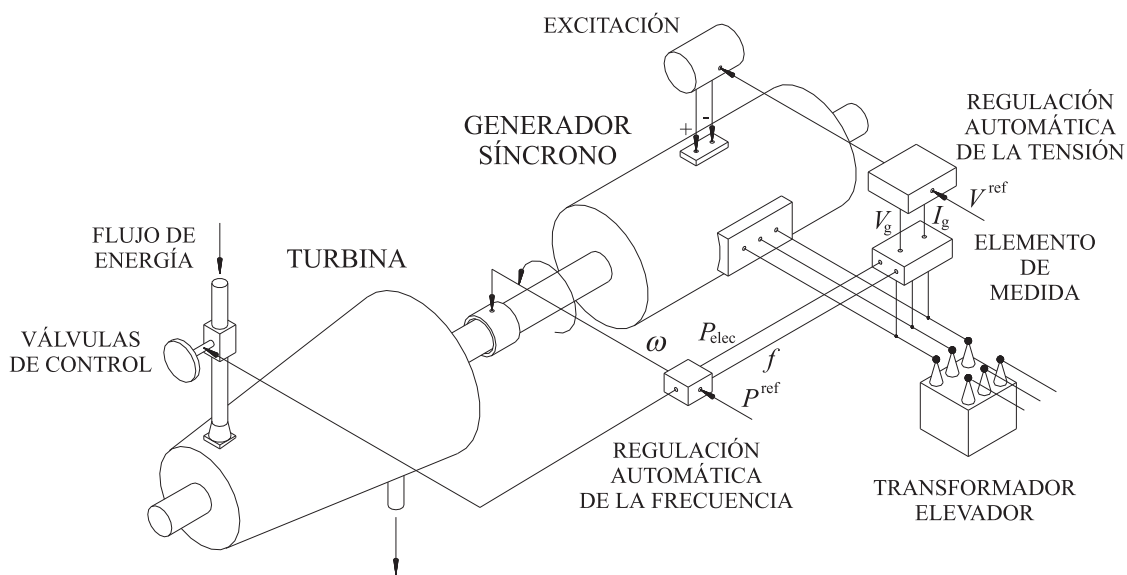


Figura 5.1. Estructura física del control del generador síncrono.

Las variables significativas de funcionamiento de todo generador síncrono se describen a continuación. La potencia activa, P_{elec} , que se genera es igual en todo momento a la potencia electromagnética que se transmite del rotor al estátor. Esta potencia es igual, en régimen permanente, a la potencia mecánica, P_{mec} , que está suministrando el elemento motriz (turbina) correspondiente. Se considera que no hay pérdidas, ni eléctricas ni mecánicas. Estas dos potencias se relacionan a través de la velocidad angular, ω , proporcional a la frecuencia, f , con los correspondientes pares eléctrico, T_{elec} , y mecánico, T_{mec} . Como resultado de la corriente que circula por el inductor, denominada I_e , y de la velocidad de giro de la máquina se induce una fuerza electromotriz, E_0 , que, con la máquina en vacío, equivale a la tensión en bornes de la misma.

Aparecen, tal como se ha establecido con anterioridad, dos bloques de control bien diferenciados y cuyo grado de acoplamiento depende, fundamentalmente, de la estructura de la red eléctrica. Esto se pone de manifiesto fácilmente si la potencia activa que absorbe la red eléctrica a la que está conectada un determinado generador varía de forma importante al modificar la tensión del generador. Estableciendo la premisa de un acoplamiento débil entre los dos lazos de control, se estudia, en las próximas secciones, este control primario cuando se producen pequeñas desviaciones frente a un punto de operación, desviaciones en las variables que se expresan como incrementos (Δ) respecto a las magnitudes de referencia. Esta última consideración justifica la utilización de modelos lineales para reproducir el comportamiento de los sistemas de control correspondientes. La respuesta de los diferentes componentes de los elementos que se modelan en este capítulo, bajo los supuestos establecidos en este párrafo, se estudia indistintamente en el dominio temporal y en el de Laplace, mediante la utilización de funciones de transferencia.

5.2.1. Control de tensión

El control de tensiones tiene por objeto mantener un adecuado perfil de tensiones en la red de transporte de energía eléctrica. Debe asimismo mantener reservas de potencia reactiva en distintas áreas del sistema para hacer frente a incidencias de tensión. Téngase en cuenta que los problemas de tensión han de corregirse localmente ya que la mayoría de las medidas a llevar a cabo para solventar estos problemas tienen alcance fundamentalmente local.

El control de tensiones es un control jerárquico en tres niveles: primario, secundario y terciario. El control primario tiene por objeto mantener una consigna de tensión en un determinado nudo del sistema. Se trata asimismo de un control automático cuyo tiempo de actuación es del orden de segundos. A menudo este control se denomina AVR, acrónimo que proviene de su nombre en inglés: *Automatic Voltage Regulator*. El generador que mantiene la tensión en un determinado nudo lo hace con información local, sin “visión” del área en la que está y sin visión del sistema en su conjunto.

Estructura

Como ya se ha establecido, el objeto del control primario de tensión es mantener la tensión de consigna de un determinado nudo.

Si la tensión de referencia se denomina V^{ref} y el módulo de la tensión de control fase-neutro, V , el error de la tensión es

$$e = V^{\text{ref}} - V \quad (5.1)$$

Puesto que el modelado que se utiliza es para pequeños cambios frente a un estado de referencia, se puede trabajar con incrementos y, por tanto,

$$\Delta e = \Delta V^{\text{ref}} - \Delta V \quad (5.2)$$

La tensión continua de entrada al sistema de excitación (V_R) es proporcional a este error, por tanto,

$$\Delta V_R = K_a \Delta e \quad (5.3)$$

donde K_a es una constante de proporcionalidad.

La expresión anterior en el dominio de Laplace es

$$\Delta V_R(s) = K_a \Delta e(s) \quad (5.4)$$

Esta última expresión permite establecer la ganancia del amplificador que relaciona el error de consigna y la tensión de entrada al sistema de excitación. La función de transferencia de este amplificador es

$$G_a = \frac{\Delta V_R(s)}{\Delta e(s)} = K_a \quad (5.5)$$

siendo K_a la ganancia del mismo.

En la práctica, este amplificador presenta un retraso que se puede modelar mediante una constante de tiempo T_a ; por tanto, la expresión final de la función de transferencia es

$$G_a = \frac{\Delta V_R(s)}{\Delta e(s)} = \frac{K_a}{1 + s T_a} \quad (5.6)$$

El valor de la constante T_a oscila típicamente entre 0.02 y 0.1 segundos.

El circuito de excitación de la máquina excitatriz, al que alimenta la salida del amplificador, puede modelarse mediante un circuito de primer orden que responde a la siguiente expresión:

$$\Delta V_R = R_e \Delta I_e + L_e \frac{d}{dt}(\Delta I_e) \quad (5.7)$$

donde V_R e I_e son la tensión y la corriente de excitación de la excitatriz, y R_e y L_e la resistencia e inductancia del circuito de excitación de esta máquina.

La excitatriz se encuentra acoplada a un rectificador cuya tensión de salida, V_f , está relacionada linealmente (constante K_1) con la corriente de excitación de la excitatriz, por tanto,

$$\Delta V_f = K_1 \Delta I_e \quad (5.8)$$

Esta tensión es la finalmente aplicada al circuito de excitación del generador.

Las dos expresiones anteriores pueden escribirse en el dominio de Laplace tal como aparecen a continuación:

$$\Delta V_R(s) = R_e \Delta I_e(s) + L_e s \Delta I_e(s) \quad (5.9)$$

$$\Delta V_f(s) = K_1 \Delta I_e(s) \quad (5.10)$$

Combinando estas dos expresiones se obtiene

$$\Delta V_R(s) = \frac{R_e}{K_1} \Delta V_f(s) + \frac{L_e}{K_1} s \Delta V_f(s) \quad (5.11)$$

y finalmente

$$\frac{\Delta V_f(s)}{\Delta V_R(s)} = \frac{1}{\frac{R_e}{K_1} + s \frac{L_e}{K_1}} = \frac{\frac{K_1}{R_e}}{1 + s \frac{L_e}{R_e}} = \frac{K_e}{1 + s T_e} \quad (5.12)$$

donde

$$K_e = \frac{K_1}{R_e} \quad y \quad T_e = \frac{L_e}{R_e} \quad (5.13)$$

La función de transferencia del circuito de excitación del generador (excitatriz y rectificador) es por tanto

$$G_e = \frac{K_e}{1 + s T_e} \quad (5.14)$$

La constante de tiempo T_e oscila entre 0.5 y 1 segundo.

El arrollamiento de excitación del propio generador puede modelarse también mediante un circuito de primer orden:

$$\Delta V_f = R_f \Delta I_f + L_{ff} \frac{d}{dt}(\Delta I_f) \quad (5.15)$$

donde I_f es la corriente de excitación, y R_f y L_{ff} la resistencia e inductancia respectivamente del circuito de excitación del generador.

Por otra parte, la relación entre la corriente de excitación y el valor eficaz de la fuerza electromotriz (fase-neutro) generada, tal como se establece en [1, 8], es

$$I_f = \frac{\sqrt{2}}{\omega L_{fa}} E \quad (5.16)$$

donde L_{fa} es el coeficiente de inducción mutua entre el arrollamiento de excitación y el estátor del generador.

Combinando las dos expresiones anteriores se obtiene

$$\Delta V_f = \frac{\sqrt{2}}{\omega L_{fa}} \left[R_f \Delta E + L_{ff} \frac{d}{dt}(\Delta E) \right] \quad (5.17)$$

que en el dominio de Laplace tiene la forma

$$\Delta V_f(s) = \frac{\sqrt{2}}{\omega L_{fa}} [R_f \Delta E(s) + s L_{ff} \Delta E(s)] \quad (5.18)$$

De esta última expresión se obtiene la función de transferencia del circuito de excitación del generador

$$G_g = \frac{\Delta E(s)}{\Delta V_f(s)} = \frac{K_f}{1 + s T'_{d0}} \quad (5.19)$$

donde, tal como se deduce del estudio de la máquina síncrona [8],

$$K_f = \frac{\omega L_{fa}}{\sqrt{2} R_f} \quad y \quad T'_{d0} = \frac{L_{ff}}{R_f} \quad (5.20)$$

siendo T'_{d0} la constante de tiempo del inductor con el inducido abierto.

Teniendo en cuenta que la fuerza electromotriz y la tensión (fase-neutro) de salida del generador son aproximadamente iguales para condiciones normales de funcionamiento, se puede escribir

$$G_g = \frac{\Delta E(s)}{\Delta V_f(s)} \approx \frac{\Delta V(s)}{\Delta V_f(s)} = \frac{K_f}{1 + s T'_{d0}} \quad (5.21)$$

La aproximación que supone igualar la fuerza electromotriz y la tensión de salida se analiza con más detalle posteriormente.

El valor de la constante T'_{d0} oscila típicamente entre 5 y 10 segundos.

La función de transferencia del control primario de tensión en su conjunto es pues

$$G(s) = G_a G_e G_g = \frac{K}{(1 + s T_a)(1 + s T_e)(1 + s T'_{d0})} \tag{5.22}$$

donde $K = K_a K_e K_f$.

La Figura 5.2 muestra en el dominio de Laplace la estructura del control primario de tensión.

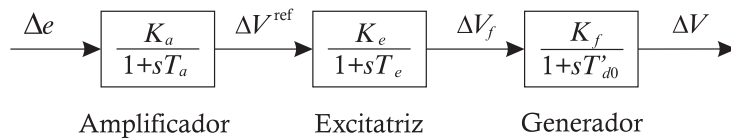


Figura 5.2. Control primario de tensión. Estructura.

A continuación, se ilustra mediante un ejemplo típico la respuesta temporal del control primario.

Ejemplo 5.2:

Respuesta del control primario de tensión.

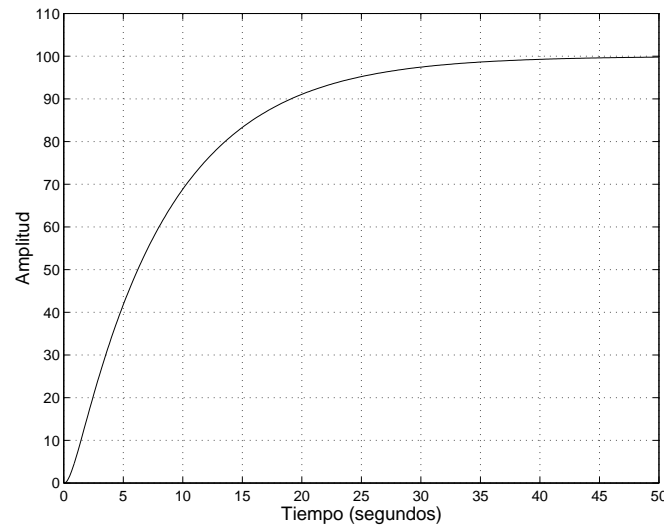


Figura 5.3. Generador síncrono. Respuesta temporal del control primario de tensión.

La respuesta temporal a un escalón de un control primario con una función de transferencia

$$\frac{100}{(1 + s 0,05)(1 + s 0,6)(1 + s 8)}$$

se muestra en la Figura 5.3. Obsérvese que el tiempo de actuación es del orden de 40 segundos.

Respuesta del control primario en bucle cerrado

Se analizan en esta sección las respuestas estática y dinámica del control primario.

Respuesta estática

El control primario ha de regular la tensión de salida del generador con una precisión establecida, y ha de ser rápido y estable. Se analiza la respuesta estática de este control mediante la Figura 5.4.

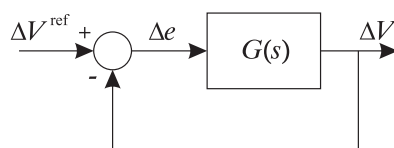


Figura 5.4. Control primario de tensión. Bucle cerrado.

Si se considera un incremento de tensión de referencia ΔV_0^{ref} , el incremento del error es

$$\Delta e_0 = \Delta V_0^{\text{ref}} - \Delta V_0 \quad (5.23)$$

Como resultado del bucle cerrado que se muestra en la Figura 5.4, aplicando el teorema del valor final en el dominio de Laplace, se obtiene

$$\Delta V_0 = \frac{G(0)}{1 + G(0)} \Delta V_0^{\text{ref}} \quad (5.24)$$

donde se ha impuesto $s = 0$ para obtener la respuesta estática.

Combinando las dos ecuaciones anteriores se obtiene

$$\Delta e_0 = \Delta V_0^{\text{ref}} - \frac{G(0)}{1 + G(0)} \Delta V_0^{\text{ref}} = \frac{1}{1 + G(0)} \Delta V_0^{\text{ref}} \quad (5.25)$$

y finalmente

$$\Delta e_0 = \frac{1}{1 + K} \Delta V_0^{\text{ref}} \quad (5.26)$$

donde $K = G(0)$.

Para un error menor del $p\%$ del valor de V_0^{ref} , puede determinarse el valor requerido de K mediante las expresiones

$$\Delta e_0 < \frac{p}{100} \Delta V_0^{\text{ref}} \quad (5.27)$$

$$\Delta e_0 = \frac{1}{1 + K} \Delta V_0^{\text{ref}} \quad (5.28)$$

Por tanto,

$$\frac{p}{100} > \frac{1}{1 + K} \quad \text{y finalmente} \quad K > \frac{100}{p} - 1 \quad (5.29)$$

Por ejemplo, para un error menor del 1% se requiere una constante K mayor que 99.

Respuesta dinámica

Como se establece en teoría de control [9], la respuesta dinámica del control primario de tensión depende de los polos de la función de transferencia en bucle cerrado. Esta función tiene la forma

$$\frac{G(s)}{1 + G(s)} \quad (5.30)$$

Los polos de esta función se determinan pues hallando las raíces de la ecuación de tercer grado

$$1 + G(s) = 0 \quad (5.31)$$

Puesto que se trata de una ecuación de tercer grado, existen dos posibilidades: (i) que las tres raíces sean reales, y (ii) que una raíz sea real y las otras dos complejas conjugadas.

La Figura 5.5 muestra el lugar de las raíces para el control primario del Ejemplo 5.2. Este lugar de las raíces muestra cómo varían las raíces de $1 + G(s) = 0$ al variar la constante K .

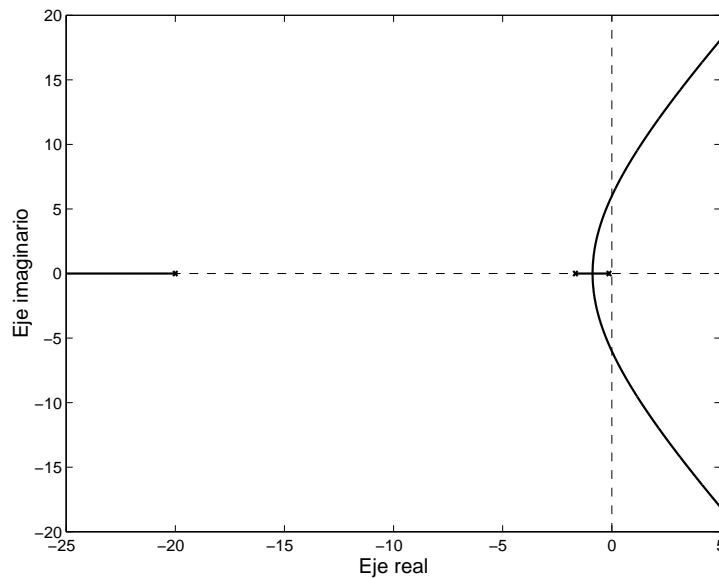


Figura 5.5. Ejemplo 5.3. Lugar de las raíces del control primario.

Puede observarse que a medida que aumenta K dos raíces reales se hacen complejas conjugadas. Es más, si K aumenta suficientemente, las dos raíces complejas conjugadas pueden llegar a tener parte real positiva, lo que quiere decir que el control se hace inestable.

Ejemplo 5.3:

Lugar de las raíces del control primario de tensión.

El lugar de las raíces del control primario del Ejemplo 5.2 se muestra en la Figura 5.5.

Para evitar esta situación se puede añadir al control un adelanto de fase. Añadiéndolo, la función de transferencia en ciclo abierto tiene la forma

$$G(s) = \frac{K(1 + s T_c)}{(1 + s T_a)(1 + s T_e)(1 + s T'_{d0})} \quad (5.32)$$

donde $(1 + s T_c)$ representa el adelanto de fase. Obsérvese que el adelanto de fase no altera el valor de K ; esto es, la respuesta estática no se altera.

La constante de tiempo del adelanto de fase ha de elegirse para que desaparezca una raíz del denominador de $G(s)$. Se puede elegir $T_c = T_e$, por lo que la función de transferencia resultante es

$$G(s) = \frac{K}{(1 + s T_a)(1 + s T'_{d0})} \quad (5.33)$$

Las dos raíces de $1+G(s)$ pueden ser reales o complejas conjugadas pero no desestabilizan el control al aumentar K , tal como se aprecia en la Figura 5.6 del Ejemplo 5.4, en la que aparece el lugar de las raíces para el control primario con adelanto de fase. Sin embargo, pueden producirse oscilaciones inaceptables. Estas oscilaciones se amortiguan mediante el empleo de estabilizadores que se estudian en el capítulo sobre estabilidad.

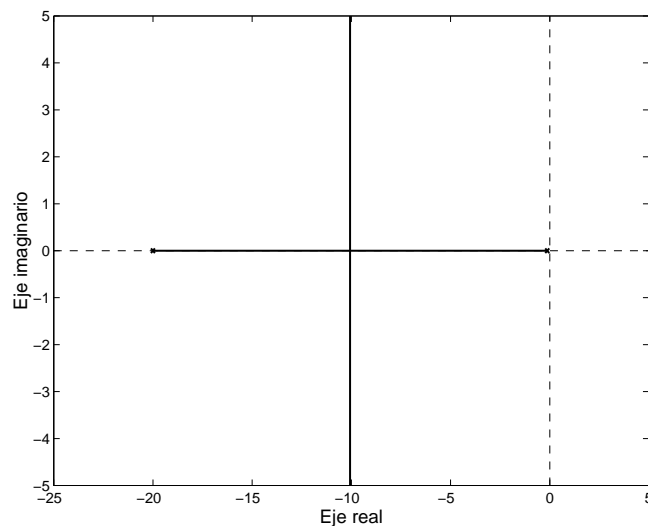


Figura 5.6. Ejemplo 5.4. Lugar de las raíces del control primario de tensión con adelanto de fase.

Ejemplo 5.4:

Lugar de las raíces del control primario de tensión con adelanto de fase.

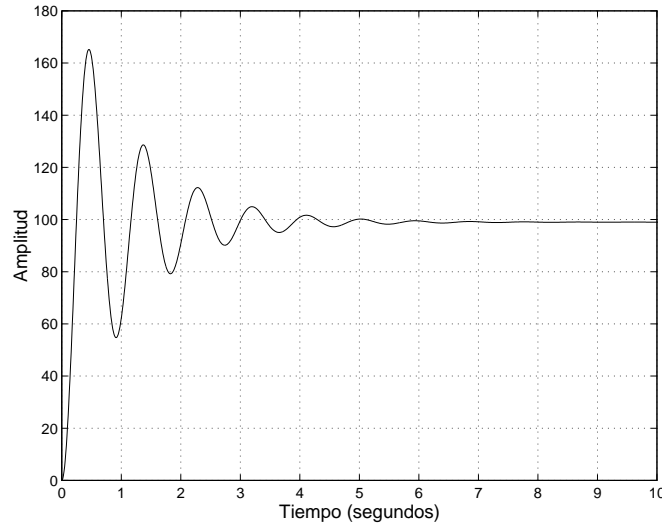


Figura 5.7. Ejemplo 5.4. Respuesta temporal del control con adelanto de fase. Oscilación inaceptable.

El lugar de las raíces del control primario con adelanto de fase del Ejemplo 5.2, cuya función de transferencia es

$$\frac{100}{(1 + s 0,05)(1 + s 8)}$$

se muestra en la Figura 5.6.

Considérese a continuación la función de transferencia del control primario de tensión

$$\frac{100}{(1 + s 0,7)(1 + s 3)}$$

Para esta función de transferencia, la respuesta a un escalón del control se muestra en la Figura 5.7. Obsérvese que el nivel de oscilación es inaceptable.

En la Figura 5.8 se muestra un circuito comúnmente utilizado para estabilizar el control primario de tensión. Se puede establecer la siguiente relación entre las variables incrementales, suponiendo que el secundario está conectado a una impedancia muy elevada ($\Delta I_2 = 0$):

$$\Delta V_1 = R_1 \Delta I_1 + L_1 \frac{d\Delta I_1}{dt} \tag{5.34}$$

$$\Delta V_2 = M \frac{d\Delta I_1}{dt} \tag{5.35}$$

que en el dominio de Laplace tiene la forma

$$\Delta V_1(s) = R_1 \Delta I_1(s) + L_1 s \Delta I_1(s) \tag{5.36}$$

$$\Delta V_2(s) = M s \Delta I_1(s) \tag{5.37}$$

La correspondiente función de transferencia tiene la forma:

$$\frac{\Delta V_2}{\Delta V_1} = G_{ST} = \frac{K_{ST}s}{1 + sT_{ST}} \quad (5.38)$$

donde

$$K_{ST} = \frac{M}{R_1} \quad \text{y} \quad T_{ST} = \frac{L_1}{R_1} \quad (5.39)$$

Los valores típicos de estas constantes están en el rango de 0.01 a 1 segundo para K_{ST} y 0.5 a 1 segundo para T_{ST} .

Este circuito estabilizador se puede conectar realimentando la señal del error con la señal de salida, bien del amplificador o de la excitación. Esta última posibilidad se muestra en la Figura 5.9.

Se deja al lector el ejercicio de probar teóricamente, mediante la deducción del diagrama de bloques resultante, las propiedades estabilizadoras de este montaje. Asimismo, se sugiere aplicar el citado circuito, determinando los parámetros más adecuados de K_{ST} y T_{ST} , para estabilizar el control automático de tensión propuesto en la Figura 5.2, cuando se dispone en bucle cerrado, como indica la Figura 5.4. Considérense los valores $K_a = 20$, $K_e = 5$, $K_f = 2$, y $T_a = 0,05$, $T_e = 0,6$, $T'_{d0} = 8$ segundos.

Efecto de la carga

Por último, se describe brevemente el efecto de la carga en el generador. Hasta ahora se ha supuesto que

$$E \approx V \quad (5.40)$$

lo que no es cierto si el generador está suficientemente cargado.

Los efectos de la carga, que son fundamentalmente dos, se analizan a continuación.

A igualdad de corriente de excitación, y si el generador está suficientemente cargado, por efecto de la saturación, la fuerza electromotriz inducida es menor que cuando el generador está ligeramente cargado. Este fenómeno se refleja en una disminución efectiva de la constante K_e . Por tanto, esta constante habrá de seleccionarse con suficiente margen.

Asimismo, en un generador fuertemente cargado la constante T'_{d0} varía aproximadamente (tal como se establece en [1]) según la expresión

$$T'_d = \frac{X'_d + X_e}{X_d + X_e} T'_{d0} \quad (5.41)$$

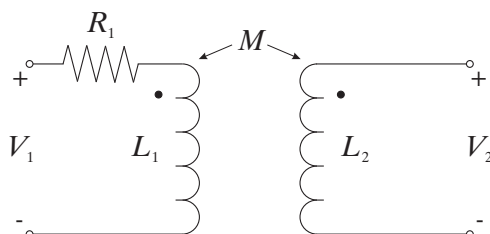


Figura 5.8. Circuito estabilizador.

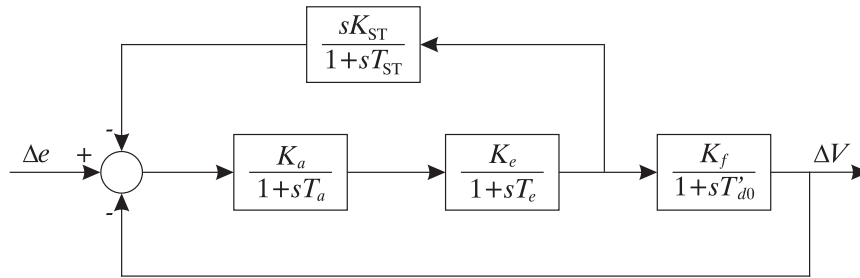


Figura 5.9. Conexión del circuito de estabilización.

donde el subíndice d indica bajo carga y el subíndice $d0$ en vacío. La constante X'_d es la reactancia transitoria, X_d la reactancia de eje directo del generador, y X_e la reactancia equivalente de la carga.

5.2.2. Control de velocidad

Estructura

El objetivo de este control es doble: por una parte mantener constante la velocidad de giro del generador y por otra modificar a voluntad la potencia generada por el mismo. Puesto que la velocidad de giro ω del generador está directamente relacionada con la frecuencia de la red, el mantenimiento de la velocidad tiene que ser el resultado de una acción coordinada entre todos los generadores del sistema. En este sentido, el nivel de participación de un generador, como resultado de un desequilibrio brusco de potencia activa, es, típicamente, proporcional a su potencia nominal.

Puesto que los únicos generadores capaces de ejercer control de velocidad son los accionados por turbinas, éstas deben reaccionar frente a una desviación de su velocidad respecto a la de sincronismo modificando la potencia mecánica que se transmite al generador por medio del control del caudal de vapor, de agua o de combustible que la turbina recibe. Los reguladores tradicionalmente utilizados están basados en el mecanismo centrífugo de Watt como sensor de la velocidad, donde la señal de error generada como resultado de una desviación en la velocidad del generador se introduce en un sistema mecánico de control.

Se analiza a continuación el control primario de velocidad, que es un control local. Un modelo de control primario de velocidad, requiere considerar la respuesta de todos los elementos o subsistemas que intervienen, a saber, (i) el sistema mecánico turbina-generador, (ii) el sistema eléctrico formado por los devanados y conexión del generador y (iii) el sistema de control específicamente implementado para la regulación de la velocidad de la máquina y/o para el control de la potencia que cede el generador.

Sistema mecánico turbina-generador

La respuesta de este subsistema permite obtener el incremento en la potencia mecánica, ΔP_{mec} , que la turbina transmite, por el eje común, al generador en función de un incremento en el paso de la válvula de admisión expresado en función de la potencia de entrada ΔP_{val} .

La función de transferencia $G_T(s)$ es:

$$G_T(s) = \frac{\Delta P_{\text{mec}}}{\Delta P_{\text{val}}} \quad (5.42)$$

que, claramente, es específica para cada tipo de turbina.

Aunque los procesos que tienen lugar en el conjunto turbina-generador son complicados, se suele utilizar modelos sencillos para analizar el comportamiento de estos procesos. Este comportamiento dinámico depende del tipo de fluido motriz —agua, gas o vapor— y de la forma en que se realiza el control primario, tal como se discutirá detalladamente en el próximo apartado.

En el caso de centrales térmicas de vapor, es fundamental la forma en que se produce el control del flujo de vapor que entra en la turbina. Éste se puede hacer de dos formas diferentes. En la primera forma, se controlan directamente las válvulas que regulan la admisión de vapor a la turbina (control dirigido por turbina). De esta manera se consiguen velocidades de respuesta rápidas a costa de la energía almacenada en la caldera, que reacciona a los cambios de una forma más lenta. Los tiempos de respuesta de este tipo de control son del orden de segundos para variaciones no muy grandes en la potencia de salida (inferiores al 5%). La respuesta es más lenta (del orden de minutos) para variaciones más grandes, debido a que la energía almacenada en la caldera es limitada y el control de la misma relativamente más lento.

La segunda forma consiste en controlar directamente la caldera (control dirigido por caldera) frente a cambios grandes o pequeños en la potencia demandada lo que da lugar a un control más lento.

Para turbinas de vapor sin recalentador se puede suponer que $G_T(s)$ es una función de primer orden de la forma

$$G_T(s) = \frac{1}{1 + s T_T} \quad (5.43)$$

donde T_T es la constante de tiempo, que suele estar entre 0.1 y 0.5 segundos (0.3 segundos es un valor típico). Turbinas de vapor más complejas requieren funciones de transferencia más complicadas, en las que aparecen más constantes de tiempo.

En general, la forma de respuesta de la turbina depende de la configuración de la misma en la que, generalmente, y para aprovechar al máximo la energía contenida en el vapor, se disponen varias etapas. Esto da lugar a un conjunto de turbinas montadas sobre el mismo eje, y en las que se utiliza el vapor en sus diferentes fases y temperaturas. Es habitual encontrar montajes donde existe una etapa de alta presión conectada directamente a la caldera; el vapor a la salida de esta unidad se introduce, después de ser recalentado, en una etapa que trabaja a una presión inferior. La respuesta del conjunto depende de la relación de potencias en cada una de las etapas. Además, la presencia del recalentador implica un retraso adicional. Una función de transferencia típica para este tipo de montajes es la siguiente:

$$G_T(s) = \frac{1}{1 + s T_T} \frac{1 + s \alpha T_{RC}}{1 + s T_{RC}} \quad (5.44)$$

siendo α la potencia, en magnitudes unitarias frente a la total, de la etapa de alta presión, y T_{RC} la constante de tiempo del recalentador, cuyo valor oscila entre 4 y 11 segundos.

Es frecuente encontrar montajes con una tercera etapa de baja presión, etapa que introduce una tercera constante de tiempo, T_{BP} , de valor entre 0.3 y 0.5 segundos. Este tipo de unidades se modela frecuentemente mediante el diagrama de bloques de la Figura 5.10.

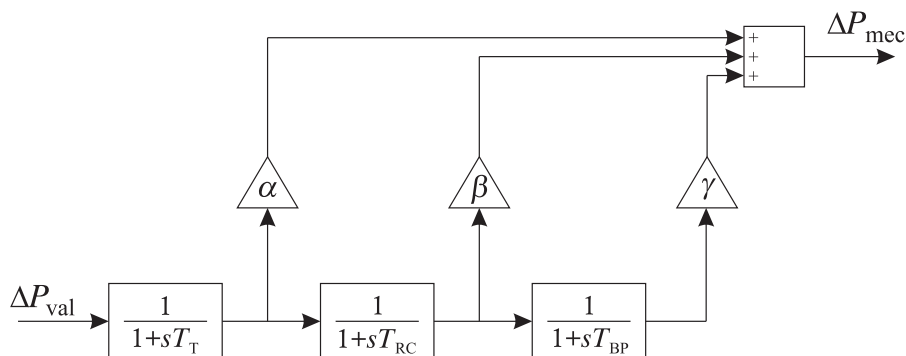


Figura 5.10. Turbina de vapor de tres etapas. Diagrama de bloques.

En la Figura 5.10 las constantes α , β y γ son las contribuciones a la potencia nominal de cada una de las etapas de alta presión, presión intermedia y baja presión, en magnitudes unitarias.

La respuesta de turbinas hidráulicas depende del tipo de turbina (Pelton, Francis o Kaplan) aunque, esencialmente, tienen todas la misma forma, caracterizada por la función de transferencia [4]:

$$G_T(s) = \frac{1 - 2s T_\omega}{1 + s T_\omega} \quad (5.45)$$

estando T_ω comprendida entre 0.25 y 2.5 segundos.

Las turbinas de vapor presentan una complejidad adicional frente a las hidráulicas cuando participan en el control de la frecuencia: existen limitaciones en la velocidad con la que el generador puede incrementar (o decrementar) su potencia generada, restricciones resultantes de la inercia térmica de los procesos de la caldera. Estas restricciones (restricciones de rampa de subida y de bajada) pueden imponer limitaciones en la forma en que una turbina de vapor puede realizar el control primario y participar en el control secundario.

Estas restricciones de rampa son importantes en el control Pf y una forma útil de representar el comportamiento de una turbina específica en ese aspecto es la recomendada por el IEEE [10, 11].

Amplificador hidráulico

La actuación sobre la posición de la válvula de entrada a la turbina no se realiza normalmente de forma directa puesto que ésta es un elemento pesado de accionar, sino que se realiza a través de un amplificador hidráulico. En este caso, la actuación sobre la entrada a la turbina se realiza por medio de la variación de la posición de entrada a este regulador, ΔP_{ah} , y la forma en que actúa este amplificador hidráulico es tal que siempre que la señal de entrada es positiva (negativa) se produce un incremento (decremento) de la admisión a la turbina, que es proporcional a la magnitud de la entrada y al tiempo en que está presente.

La señal de entrada a la turbina es por tanto proporcional a la integral de ΔP_{ah} . La función de transferencia de este amplificador es

$$G_H(s) = \frac{\Delta P_{\text{val}}}{\Delta P_{\text{ah}}} = \frac{K_H}{s} \quad (5.46)$$

Modelo eléctrico del generador

Desde el punto de vista eléctrico, el generador transforma en energía eléctrica la energía electromagnética que recibe a través del acoplamiento electromagnético. Este proceso es, por su naturaleza y puesto que no hay ningún tipo de inercias, mucho más rápido que los anteriores y, por tanto, se considera que la transformación de energía mecánica en electromagnética y en eléctrica es instantánea, igualando esta potencia eléctrica transferida, en todo momento, a la potencia eléctrica que se demanda. La potencia eléctrica transferida depende de la forma en que está funcionando el generador. En el caso más general, y tal como se ha visto en capítulos anteriores, cuando el generador está conectado a una red, la potencia activa, es función del ángulo de la fuerza electromotriz interna, magnitud a la que se le puede asociar una variable vectorial cuya posición está solidariamente ligada al rotor. En este sentido, las relaciones entre las perturbaciones en la velocidad, el ángulo y la frecuencia son

$$\Delta\delta = \int \Delta\omega dt = 2\pi \int \Delta f dt \quad (5.47)$$

siendo este ángulo el relativo a un eje que gira a la velocidad de sincronismo.

La potencia activa que entrega el generador en función de ese ángulo depende del resto de la red, siendo esta dependencia inexistente si el generador está localmente suministrando una carga pasiva. En cualquier otro caso, la potencia activa es función de que la máquina esté en régimen permanente o transitorio y de que, adicionalmente, se pueda despreciar o no el efecto de los polos salientes.

Modelo del regulador primario

El regulador primario es un elemento específicamente diseñado con el fin de actuar sobre la entrada del amplificador hidráulico para modificar la admisión de la turbina con un doble objetivo: (i) mantener la velocidad de giro de la máquina (y por tanto la frecuencia) en su valor de sincronismo y (ii) fijar la energía que cede el generador. Las variaciones de velocidad son resultado de perturbaciones normales durante el funcionamiento del generador, mientras que la variación de la potencia a generar depende de las consignas de otro controlador o de un criterio de producción de una potencia determinada.

El control de la velocidad se puede llevar a cabo mediante la utilización de un control integral de la forma que se indica en la Figura 5.11, donde $G_H(s)$ se corresponde con la función de transferencia del amplificador hidráulico anteriormente mencionado.

De acuerdo con el diagrama de la Figura 5.11, siempre que la velocidad de la máquina (ω) sea superior a la velocidad de referencia (ω^{ref}) se produce un error positivo como salida del correspondiente sumatorio lo que implicará una entrada positiva al integrador y, por tanto, una disminución progresiva de la entrada al amplificador hidráulico (y después del retardo

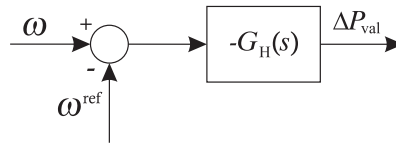


Figura 5.11. Realización del control de velocidad.

correspondiente, de la potencia de entrada a la turbina) hasta que el error en velocidad sea cero. Lo contrario ocurre ante una disminución de la velocidad.

El control descrito en el párrafo anterior no tiene aplicación práctica puesto que el generador tendería a regular la velocidad aún a costa de suministrar una potencia excesiva y, además, en el caso de haber dos o más generadores estos competirían entre sí para regular la velocidad, provocando un control inestable. Con el fin de evitar este problema, es necesario renunciar al mantenimiento de la velocidad (frecuencia) constante y, además, incorporar una consigna, ΔP^{ref} , que sirve de referencia para la potencia que se quiera que produzca el generador. Estas nuevas especificaciones se han implantado tradicionalmente en los controles primarios de los generadores mediante ingeniosos sistemas mecánicos cuya descripción se puede encontrar en múltiples referencias. Estos sistemas tienen el problema de la existencia de zonas muertas, cuya amplitud aumenta con el desgaste propio del funcionamiento prolongado. En la actualidad este tipo de controladores se construyen mediante sistemas de control electrónicos. El diagrama de bloques correspondiente a este control es el que se muestra en la Figura 5.12.

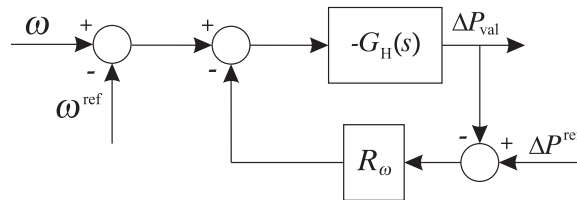


Figura 5.12. Diagrama de bloques del control primario Pf del generador.

La función de transferencia del conjunto se puede obtener fácilmente y resulta

$$\Delta P_{\text{val}} = \frac{1}{1 + s T_R} \left(\Delta P^{\text{ref}} - \frac{1}{R_\omega} \Delta \omega \right) = G_R \left(\Delta P^{\text{ref}} - \frac{1}{R_\omega} \Delta \omega \right) \quad (5.48)$$

cuyo diagrama de bloques equivalente aparece en la Figura 5.13.

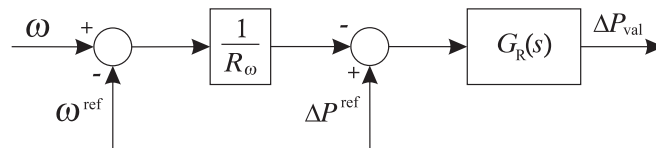


Figura 5.13. Diagrama de bloques equivalente del control primario Pf.

En la ecuación anterior R_ω es una constante propia del regulador y $T_R = 1/(K_H R_\omega)$ la constante de tiempo del retraso introducido por el regulador.

Una vez alcanzado el régimen permanente, la fórmula anterior indica que el incremento que sufre la potencia que cede el generador es

$$\Delta P_{\text{val}}(0) = \Delta P_{\text{mec}}(0) = \Delta P_g(0) = \left(\Delta P^{\text{ref}} - \frac{1}{R_\omega} \Delta \omega \right) \quad (5.49)$$

El término $\Delta \omega / R_\omega$ es el incremento de potencia con que el generador contribuye al mantenimiento de la frecuencia. La constante R_ω se puede expresar en rad/s MW (denominada entonces R_ω) o, más usualmente, en Hz/MW (denominada R). Una forma común de especificar R es mediante el incremento que debe sufrir la frecuencia para que el generador varíe el 100 % de su potencia nominal. El sentido físico de la constante R se analiza en el siguiente ejemplo.

Ejemplo 5.5:

Característica frecuencia-potencia de un generador.

Sea un generador de 250 MW de potencia máxima que genera 200 MW a su frecuencia nominal de 50 Hz. La constante R de su regulador primario es tal que para que su potencia nominal se incremente un 100 %, la frecuencia se ha de reducir un 10 %. Por tanto,

$$R = \frac{0,1 \times 50}{250} = 0,02 \text{ Hz / MW}$$

Suponiendo que no se producen modificaciones en la potencia de referencia del generador (ajustada para que la potencia cedida sea de 200 MW a frecuencia nominal), la ecuación incremental (5.49)

$$P_g(0) - 200 = -\frac{1}{R}(f - 50)$$

se puede representar gráficamente tal como se muestra en la Figura 5.14.

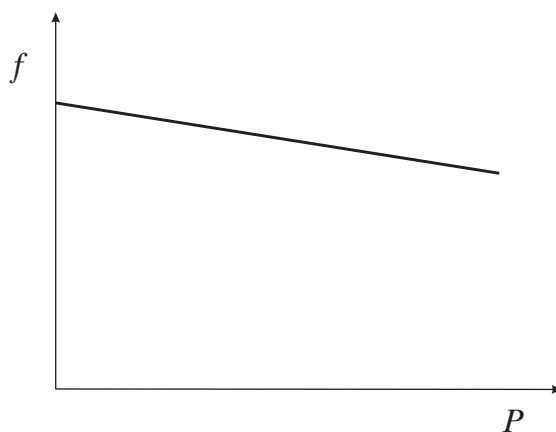


Figura 5.14. Ejemplo 5.5. Característica frecuencia-potencia en un generador síncrono.

En el caso de que este generador esté trabajando en paralelo con otros generadores de diferente potencia nominal, es deseable que cada uno de ellos participe en el control de la frecuencia en

función de su potencia nominal. En ese sentido, supóngase que se tiene un generador de 1000 MW de potencia nominal conectado a la misma red que el anterior. ¿Qué parámetro R debe tener su regulador para que, ante un cambio en la frecuencia, su contribución al mantenimiento de la frecuencia sea proporcional a su potencia nominal?

El segundo generador debe contribuir aportando una potencia 4 veces mayor, puesto que la relación entre potencias nominales es $1000/250 = 4$. Esto implica que, ante una variación de 0.02 Hz, el segundo generador debe incrementar su producción en 4 MW. Por tanto,

$$R_2 = \frac{0,02}{4} = 0,005 \text{ Hz/MW}$$

lo que implica que ambos generadores tienen el mismo parámetro de regulación R referido a sus valores nominales, es decir,

$$R_{1,\text{pu}} = R_{2,\text{pu}} = 0,02 \frac{\text{Hz}}{\text{MW}} \times 250 \text{ MW} = 0,005 \frac{\text{Hz}}{\text{MW}} \times 1000 \text{ MW} = 5 \frac{\text{Hz}}{\text{puMW}}$$

Respuesta del sistema eléctrico

Los subsistemas estudiados y modelados anteriormente se refieren a elementos directamente relacionados con el generador síncrono, su sistema motriz o sus elementos de control. Tal como se ha establecido anteriormente, se considera que la potencia mecánica que recibe el generador se transforma, inmediatamente, en potencia eléctrica que a su vez es consumida por un conjunto de cargas eléctricas. Por tanto, un desequilibrio en la potencia mecánica del generador y la potencia eléctrica consumida por las cargas se traduce con un cierto retraso, en una perturbación en la velocidad de giro del generador y, por tanto, en una perturbación en la frecuencia.

Un exceso de potencia mecánica, si no se actúa sobre la potencia de referencia P^{ref} , implicará una aceleración del sistema generador-turbina y un aumento de la frecuencia hasta que se alcance un nuevo equilibrio, a una frecuencia superior, donde la potencia eléctrica consumida por las cargas vuelve a equilibrar a la potencia mecánica suministrada por la turbina. El mismo razonamiento, pero a la inversa, se puede emplear ante un incremento en la potencia absorbida por las cargas.

La respuesta del sistema, en régimen permanente y en un determinado punto de operación, viene condicionada por un parámetro denominado D [cuyas unidades son MW/Hz o MW/(rad/s)] que expresa la variación de la potencia que el sistema eléctrico consume cuando se produce una variación en la frecuencia, suponiendo que la variación en la frecuencia es uniforme para todos los consumos que alimenta el generador (o los generadores). No obstante, ante una variación brusca de la demanda o de la potencia de entrada al generador, el sistema no responde con una variación brusca de la frecuencia, debido a la inercia de todos los elementos que están girando en el sistema (generadores y motores de muy diversa índole). Por tanto, un desequilibrio de potencia en el generador (potencia mecánica, ΔP_{mec} , menos potencia eléctrica demandada, ΔP_{D}) se traduce en una variación de la energía cinética almacenada en el sistema eléctrico de acuerdo con la siguiente ecuación:

$$\Delta P_{\text{mec}} - \Delta P_{\text{D}} = \frac{dW_{\text{CIN}}}{dt} \quad (5.50)$$

Además, puesto que una variación en la energía cinética se traduce en una variación de la velocidad de giro de los generadores y, por tanto, en la frecuencia, se produce una variación en la potencia que absorben las cargas, que se puede cuantificar como $D_\omega \Delta\omega$ (o $D\Delta f$). Por tanto, el balance de potencia implica

$$\Delta P_{\text{mec}} - \Delta P_{\text{D}} = D_\omega \Delta\omega + \frac{dW_{\text{CIN}}}{dt} \quad (5.51)$$

A su vez, es fácil relacionar una variación de energía cinética con la variación correspondiente de la velocidad angular:

$$\frac{dW_{\text{CIN}}}{dt} = \frac{d(\frac{1}{2}I\omega^2)}{dt} = \omega I \frac{d(\omega_0 + \Delta\omega)}{dt} = \omega I \frac{d(\Delta\omega)}{dt} \quad (5.52)$$

por tanto,

$$\frac{dW_{\text{CIN}}}{dt} \approx \omega_0 I \frac{d(\Delta\omega)}{dt} = M_0 \frac{d(\Delta\omega)}{dt} \quad (5.53)$$

Es fácil deducir, de las ecuaciones anteriores, la función de transferencia que relaciona, en función del operador de Laplace s , desequilibrios en la potencia e incrementos en la velocidad angular, que queda de la forma:

$$\frac{\Delta\omega}{\Delta P_{\text{mec}} - \Delta P_{\text{D}}} = \frac{K'_s}{1 + s T_s} \quad (5.54)$$

donde

$$K'_s = \frac{1}{D_\omega} \quad \text{y} \quad T_s = \frac{M_0}{D_\omega} = \frac{2 W_{\text{CIN}}^0}{\omega_0 D_\omega} \quad (5.55)$$

o bien, referido a incrementos en la frecuencia Δf :

$$\frac{\Delta f}{\Delta P_{\text{mec}} - \Delta P_{\text{D}}} = \frac{K_s}{1 + s T_s} \quad (5.56)$$

donde

$$K_s = \frac{1}{D} \quad \text{y} \quad T_s = \frac{2 W_{\text{CIN}}^0}{f_0 D} \quad (5.57)$$

Se puede comprobar fácilmente que $K'_s = 2\pi K_s$ y que T_s tiene el mismo valor en (5.54) y (5.56).

De acuerdo con estas últimas expresiones, se puede determinar el efecto que producen variaciones de demanda o de potencia generada en un sistema regulado mediante el control primario de generación, tal como se estudia en el siguiente ejemplo.

Ejemplo 5.6:

Variación de la frecuencia con la carga en un sistema eléctrico.

Se obtiene a continuación la evolución de la frecuencia en un sistema formado por un conjunto de consumos eléctricos que están conectados a través de líneas cortas (se puede suponer que la frecuencia es la misma en todos ellos), que tienen una potencia nominal de 1000 MW y que experimentan instantáneamente la conexión de una carga de 50 MW. Las cargas presentan una sensibilidad a la

frecuencia D de 20 MW/Hz, y la energía cinética que inicialmente tienen almacenados todos los elementos que están girando en el sistema es de 10 GJ. Las cargas están alimentadas por un único generador térmico, caracterizado por unas constantes de tiempo $T_R = 0,08$ segundos y $T_T = 0,3$ segundos, y por una constante de regulación $R = 0,005$ Hz/MW.

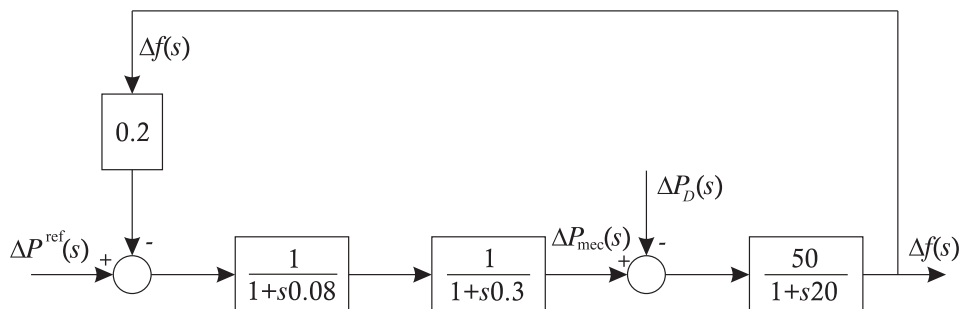


Figura 5.15. Ejemplo 5.6. Diagrama de bloques de variación de la frecuencia con la carga.

Se hacen los cálculos en pu, adoptando como potencia base 1 GW. Por tanto, los nuevos parámetros R y D son, respectivamente, 5 Hz/puMW y 0.02 puMW/Hz. Es necesario, además, normalizar respecto a la potencia base la energía cinética.

$$W_{\text{CIN,pu}}^0 = \frac{W_{\text{CIN}}^0}{\text{Potencia Base}} = \frac{10\text{GWs}}{1\text{GW}} = 10 \text{ s}$$

A esta energía cinética referida a los valores base se le suele denominar constante de inercia H del sistema.

Las constantes T_s y K_s son:

$$T_s = \frac{2W_{\text{CIN}}^0}{f_0 D} = \frac{2 \times 10}{50 \times 0,02} = 20 \text{ s}$$

$$K_s = \frac{1}{D} = \frac{1}{0,02} = 50 \frac{\text{Hz}}{\text{puMW}}$$

Sin más que tener en cuenta que la frecuencia y la velocidad están ligadas por la constante 2π , y la relación que existe entre la energía cinética y el momento angular, se obtiene el diagrama de bloques de la Figura 5.15.

En el gráfico de la Figura 5.16 se observa la evolución de la frecuencia, siendo el error en régimen permanente:

$$\Delta f(0) = -\frac{\Delta P_D}{D + \frac{1}{R}} = -\frac{0,05}{0,02 + 1/5} = -0,2273 \text{ Hz}$$

lo que, una vez alcanzado este régimen, el generador ha incrementado su producción de energía en

$$\Delta P_{\text{mec}} = -\frac{-0,2273}{5} \text{ puMW} = 0,04546 \text{ puMW} = 45,46 \text{ MW}$$

El resto, hasta los 50 MW del incremento sufrido en la carga, se debe, lógicamente, a la potencia que han dejado de consumir las cargas al disminuir la frecuencia, de acuerdo con

$$\Delta P_{\text{con}} = D \Delta f = 20 \times (-0,2273) = -4,54 \text{ MW}$$

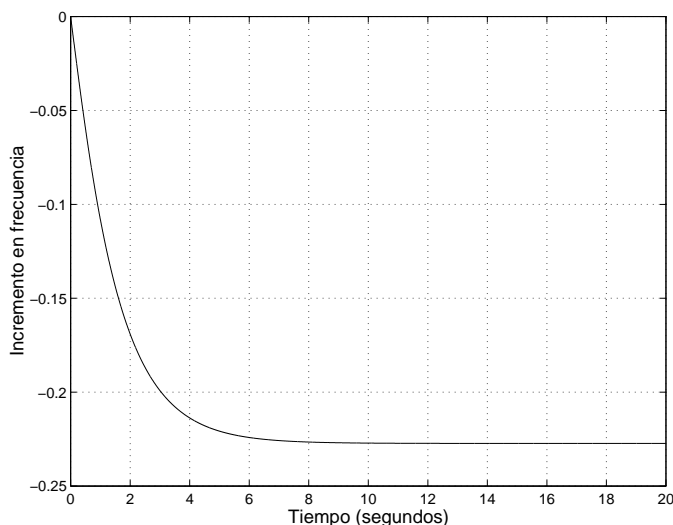


Figura 5.16. Evolución de la frecuencia frente a una alteración de la carga en el Ejemplo 5.6.

Al parámetro $\beta = D + 1/R$ (en MW/Hz), que mide la relación entre un incremento de demanda y el error en frecuencia (en ausencia de control secundario), se le denomina respuesta estática en frecuencia del área.

Aunque la evolución temporal de la frecuencia debe responder a una función de transferencia con tres polos, ésta se asemeja a una respuesta de primer orden. Esto es debido a que las respuestas del regulador y de la turbina se pueden considerar instantáneas. Teniendo en cuenta que $T_s = 20$ segundos y $K_s = 50 \frac{\text{Hz}}{\text{puMW}}$, y despreciando la dinámica del regulador y de la turbina, la función de transferencia equivalente tiene la ganancia y la constante de tiempo siguientes:

$$K_{\text{eq}} = \frac{K_s R_f}{K_s + R_f} = \frac{50 \times 5}{50 + 5} = 4,54 \quad \text{y} \quad T_{\text{eq}} = \frac{R_f T_s}{R_f + K_s} = \frac{5 \times 20}{50 + 5} = 1,82 \text{ s}$$

con lo que, ante un incremento de 50 MW (0,05 puMW) de la carga, se produce una variación temporal de la frecuencia

$$f(t) = -0,2273(1 - e^{-t/1,82})$$

Es fácil concluir de esta expresión que, inicialmente, la variación de la energía cinética almacenada en el sistema es igual a

$$\left. \frac{d(W_{\text{CIN}})}{dt} \right]_0 = \left. \frac{d\left(\frac{1}{2} I \omega^2\right)}{dt} \right]_0 = \frac{2W_{\text{CIN}}^0}{f_0} \left. \frac{df}{dt} \right]_0 = \frac{2 \times 10}{50} \times \frac{0,2273}{1,82} = 0,05 \text{ puMW}$$

que coincide, lógicamente, con los 50 MW demandados.

Este ejemplo representa un sistema donde se ha supuesto, aparte de uniformidad en la frecuencia, que un solo generador proporciona la demanda. En caso de que existieran varios generadores, con parámetros R iguales (referidos a su potencia nominal), y con exactamente el mismo comportamiento dinámico, la respuesta sería la misma que la obtenida en este ejemplo.

En la Figura 5.17 se muestra la evolución de la frecuencia en el caso de que se hubieran impuesto limitaciones a la velocidad con la que se puede subir y bajar la potencia producida por el generador (rampas de subida y bajada de carga, respectivamente), a un máximo de 10 MW/s. Obsérvese que en este caso las variaciones de frecuencia son mayores.

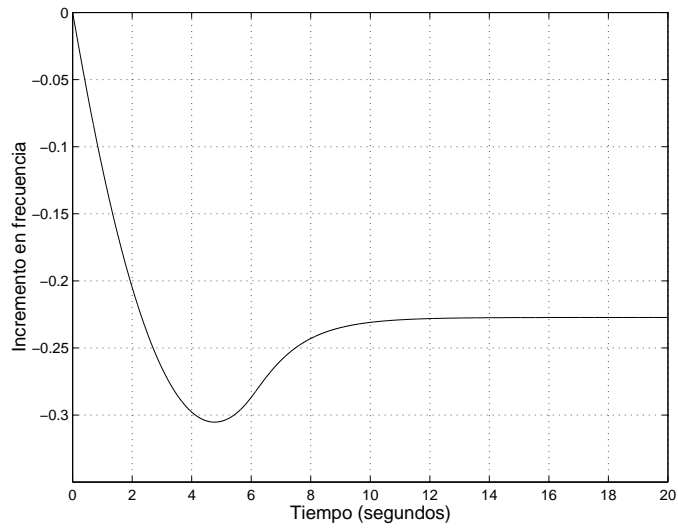


Figura 5.17. Ejemplo 5.6. Evolución de la frecuencia en presencia de rampas.

Tal como se ha discutido anteriormente, es habitual que todos los generadores existentes en un sistema eléctrico participen en el control primario de velocidad, como se muestra en el siguiente ejemplo.

Ejemplo 5.7:

Considérese un sistema de energía eléctrica caracterizado por una potencia nominal de 5 GW, en el que se puede considerar que la frecuencia es uniforme, y en el que el control de la velocidad lo realizan cuatro generadores diferentes (o grupos de generadores con la misma dinámica): uno hidráulico (G1), uno térmico de una etapa (G2) y dos térmicos (G3 y G4) con etapas de presión alta, intermedia y baja. Los parámetros de estos generadores aparecen en la siguiente tabla. Los parámetros R están referidos a la potencia base, las constantes de tiempo están expresadas en segundos, y los parámetros α , β y γ en magnitudes unitarias.

Generador	Tipo	R	T_R	T_ω	T_T	T_{RC}	T_{BP}	α	β	γ
G1	Hidráulico	30	0.20	0.50	-	-	-	-	-	-
G2	Térmico de 1 etapa	15	0.15	-	0.30	-	-	-	-	-
G3	Térmico de 3 etapas	10	0.12	-	0.30	9	0.40	0.3	0.3	0.4
G4	Térmico de 3 etapas	7.52	0.15	-	0.35	10	0.45	0.3	0.3	0.4

Las constantes del sistema eléctrico son $K_s = 100$ Hz/puMW y $T_s = 32$ segundos.

En la Figura 5.18 se observa el comportamiento de la frecuencia cuando se produce un incremento en la potencia demandada de 10 MW. Según se puede observar, la respuesta dinámica de la frecuencia es diferente que en el caso del ejemplo anterior.

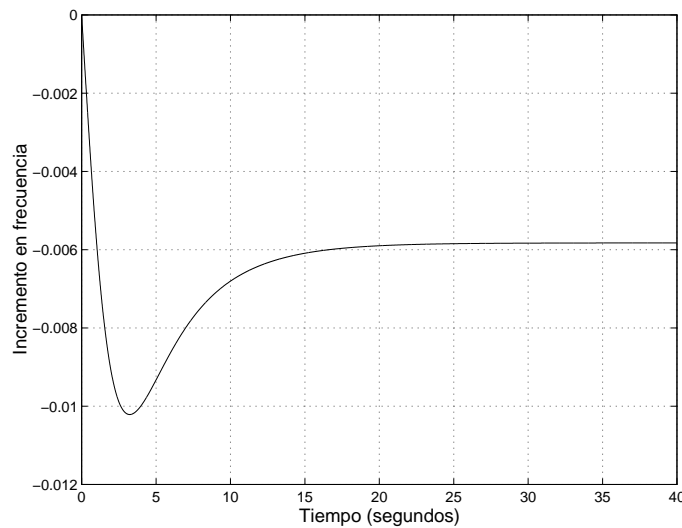


Figura 5.18. Ejemplo 5.7. Evolución de la frecuencia con una respuesta conjunta de cuatro generadores.

5.3. Control secundario de tensiones

El control de tensiones tiene por objeto mantener un adecuado perfil de tensiones en la red de transporte de energía eléctrica. Debe asimismo mantener reservas de potencia reactiva en distintas áreas del sistema para hacer frente a incidencias de tensión. Debe tenerse en cuenta que los problemas de tensión han de corregirse localmente puesto que la mayoría de las medidas que pueden tomarse para solventar estos problemas tienen alcance fundamentalmente local.

El control secundario tiene por objeto proporcionar una visión de área o regional. El control secundario mantiene las tensiones de un grupo pequeño pero representativo de nudos de cada área de control en determinados valores de consigna. Estos nudos se denominan nudos pilotos. Para implantar el control secundario, se asigna a cada nudo piloto un grupo de generadores cuya misión es mantener la consigna de tensión de ese nudo piloto. El control secundario es un control automático y algorítmico, con un tiempo de actuación de algunos segundos, que permite coordinar las acciones de los generadores de un área del sistema para mantener las tensiones de los nudos pilotos de la misma. Una tensión adecuada en estos nudos pilotos garantiza un adecuado perfil de tensiones en el área. Por tanto, los nudos pilotos han de elegirse empleando dos criterios básicos: (i) han de representar adecuadamente, en cuanto a tensiones, el conjunto de los nudos del área y (ii) han de ser fácilmente controlables.

El control secundario se implanta normalmente de forma descentralizada en las distintas áreas del sistema a controlar. Sin embargo, y por motivos de simplicidad y claridad, se considera a continuación un único área de control.

5.3.1. Flujo de cargas extendido

Para que el control secundario funcione satisfactoriamente, es necesario elegir adecuadamente los nudos pilotos. La elección de nudos pilotos debe hacerse reflejando el funcionamiento del control secundario. Para esto se requiere modificar las ecuaciones del flujo de cargas. Esto es así ya que al estudiar el flujo de cargas no se han tenido en cuenta nudos PQ en los que se controla la tensión, que son los nudos pilotos. Por tanto, en la terminología del flujo de cargas, estos nudos se denominarán nudos PQV ya que son nudos en los que se especifican las potencias inyectadas activa y reactiva y el módulo de la tensión.

Los generadores del control secundario no mantienen la tensión de su nudo de alta, no son pues nudos PV. Son, de hecho, nudos en los que sólo se especifica la inyección de potencia activa. A estos nudos se les denomina nudos P, y constituyen una nueva categoría de nudos en el contexto del flujo de cargas.

En general, el número de nudos P es mayor que el número de nudos PQV, por lo que en el problema del flujo de cargas aparecen más incógnitas que ecuaciones. Hay pues que añadir un número de ecuaciones adicionales igual a la diferencia entre el número de nudos P, n_P , y el número de nudos PQV, n_{PQV} .

Estas ecuaciones adicionales se emplean, normalmente, para equilibrar la carga relativa de potencia reactiva de los generadores de control. Por ejemplo, se puede imponer que los $n_P - n_{PQV}$ generadores de mayor tamaño estén porcentualmente idénticamente sobrecargados. Esta condición hace que el flujo de cargas sea un sistema de ecuaciones no lineales con igual número de incógnitas que de ecuaciones.

La resolución de este flujo de cargas extendido puede hacerse fácilmente empleando el método de Newton. Sin embargo, debe tenerse en cuenta que el jacobiano se ve modificado por las ecuaciones de equilibrio de la carga de potencia reactiva de los generadores.

5.3.2. Selección de nudos pilotos

Los nudos pilotos han de elegirse de entre todos los nudos de carga. Se seleccionarán de tal forma que el perfil de tensiones se mantenga lo más estable posible frente a alteraciones del sistema que afectan a la tensión. Este objetivo se explicita en la función objetivo que se describe a continuación.

Se parte de un conjunto de casos base que incluye diferentes situaciones en cuanto a topología y carga. Este conjunto de casos base ha de ser suficientemente extenso para reflejar adecuadamente las distintas situaciones en la que se puede encontrar el sistema. A cada caso base se le asocia un grupo de incidencias relevantes de potencia reactiva. Lógicamente, las perturbaciones asociadas a cada caso base han de reflejar adecuadamente el conjunto de perturbaciones posibles. De esta forma se genera un conjunto de escenarios que ha de representar el conjunto posible de situaciones perturbadas en las que puede encontrarse el sistema.

Para cada conjunto de nudos pilotos examinado, y cada escenario, se ejecuta un flujo de cargas extendido. El resultado de este flujo de cargas extendido permite calcular un índice que mide el estado de las tensiones para ese escenario y conjunto de nudos pilotos examinado. El índice elegido es la desviación cuadrática media con respecto a las tensiones del caso base. Este índice es apropiado ya que refleja adecuadamente tanto el efecto de las

tensiones bajas como el de las tensiones altas. Este índice de tensiones puede expresarse de la siguiente forma

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \left(V_i^{\text{base}} - V_i \right)^2 \quad (5.58)$$

donde n es el número de nudos, V_i^{base} la tensión del nudo i en el caso base y V_i la tensión de ese mismo nudo obtenida al resolver el flujo de cargas extendido.

A continuación, se calcula un índice medio de desviación de tensiones que tiene en cuenta todos los escenarios. Cada escenario puede tener un peso relativo diferente. Este índice medio constituye una evaluación de la función objetivo a minimizar.

Dado que la función objetivo a minimizar que se ha descrito no puede expresarse analíticamente, es necesario el empleo de algoritmos de minimización heurísticos [12]. Se analizan a continuación dos algoritmos que pueden emplearse sucesivamente y que se denominan “algoritmo miope” y “búsqueda global”.

Algoritmo miope

El algoritmo miope parte del conjunto vacío (ningún nudo piloto seleccionado) y elige estos nudos de uno en uno. El “siguiente” nudo a elegir es aquel que mayor mejora produce en el valor de la función objetivo. Además, una vez que un determinado nudo ha sido elegido como nudo piloto, permanece como tal.

El algoritmo miope concluye cuando se ha elegido un número suficiente de nudos pilotos, si es que este número se establece *a priori*. Alternativamente, este algoritmo puede parar cuando la función objetivo empeora o no mejora suficientemente con la elección del último nudo piloto.

Búsqueda global

La búsqueda global se emplea una vez que se dispone de un conjunto de nudos pilotos y se ha fijado el número de éstos.

Esta búsqueda procesa uno a uno los nudos inicialmente seleccionados. Para cada uno de estos nudos se ensayan cambios con el total de los nudos que no han sido seleccionados. Si la función objetivo mejora para un cambio determinado, este cambio se lleva a cabo.

Esta búsqueda global se reinicia tantas veces como sea necesario hasta que no se detectan cambios en una pasada completa.

Por último, téngase en cuenta que si se emplea una ley integral para mantener las tensiones de consigna, a la vez que se equilibran los niveles relativos de carga de potencia reactiva del mayor número posible de generadores de control, la función objetivo y el procedimiento descritos proporcionan la mejor selección posible de nudos pilotos. Una selección empleando procedimientos lineales siempre se comportará peor.

5.3.3. Ley de control

En cada paso del control secundario se resuelve un problema de programación cuadrática para determinar las acciones de los generadores de control.

La notación “'” indica que el vector correspondiente ha sufrido un desplazamiento de una posición hacia abajo, de forma que la posición primera pasa a la segunda, la segunda a la tercera y así sucesivamente hasta la posición última que pasa a la primera. El superíndice “max” indica valor máximo y el superíndice “min”, valor mínimo. Asimismo, téngase en cuenta que el cociente de vectores se define elemento a elemento.

Este problema de programación cuadrática tiene la forma:

$$\begin{aligned} & \text{minimizar} \\ & \Delta V_P \\ & (\alpha \Delta V_{PQV} - C_{PQV} \Delta V_P)^T (\alpha \Delta V_{PQV} - C_{PQV} \Delta V_P) \\ & + m \left(\frac{Q_P + C_P \Delta V_P}{Q_P^{max}} - \frac{Q'_P + C'_P \Delta V_P}{Q'_P^{max}} \right)^2 \end{aligned} \quad (5.59)$$

sujeto a

$$V_P^{\min} \leq V_P + \Delta V_P \leq V_P^{\max} \quad (5.60)$$

$$V_{PQ}^{\min} \leq V_{PQ} + C_{PQ} \Delta V_P \leq V_{PQ}^{\max} \quad (5.61)$$

$$Q_{PV}^{\min} \leq Q_{PV} + C_{PV} \Delta V_P \leq Q_{PV}^{\max} \quad (5.62)$$

$$Q_P^{\min} \leq Q_P + C_P \Delta V_P \leq Q_P^{\max} \quad (5.63)$$

$$-\Delta V_P^{\max} \leq \Delta V_P \leq \Delta V_P^{\max} \quad (5.64)$$

donde ΔV_{PQV} es el vector de desviaciones de tensión en los nudos pilotos, ΔV_P es el vector de desviaciones de tensión en los generadores de control (vector de variables de optimización), V_P es el vector de tensiones de los generadores de control (secundario), V_{PQ} es el vector de tensiones de los nudos de carga que no son nudos pilotos, Q_{PV} es el vector de inyecciones de potencia reactiva de aquellos generadores que no son de control (secundario), Q_P es el vector de inyecciones de potencia reactiva de los generadores de control (secundario), C_{PQV} es una matriz de sensibilidad que relaciona los incrementos de tensión en los generadores de control y los incrementos de tensión en los nudos pilotos, C_{PQ} es una matriz de sensibilidad que relaciona los incrementos de tensión en los generadores de control y los incrementos de tensión en los nudos de carga que no son nudos pilotos, C_{PV} es una matriz de sensibilidad que relaciona los incrementos de tensión en los generadores de control y los incrementos en inyecciones de potencia reactiva en los generadores que no son de control, C_P es una matriz de sensibilidad que relaciona los incrementos de tensión en los generadores de control y los incrementos en inyecciones de potencia reactiva en los generadores de control.

Estas matrices de sensibilidad pueden calcularse fácilmente a partir del jacobiano de las ecuaciones del flujo de cargas tal como se establece en [13].

Además, α es un parámetro ($0 < \alpha < 1$) que hace posible una actuación suave del control, y m es un parámetro de peso que permite darle mayor o menor importancia relativa a cada uno de los dos términos de la función objetivo.

La función objetivo consta de dos términos. El primer término minimiza las desviaciones de tensión en los nudos pilotos, mientras que el segundo equilibra la carga porcentual de potencia reactiva de los generadores de control. La importancia relativa de un término frente al otro se impone mediante el parámetro m . El parámetro α que actúa sobre el primer término busca suavizar las actuaciones del control, haciendo que las tensiones en los nudos pilotos se restablezcan suavemente en varios pasos de control.

El primer conjunto de restricciones establece los valores mínimos y máximos de las tensiones de los generadores de control. El segundo conjunto fija los valores mínimos y máximos de las tensiones en los nudos de carga que no son nudos pilotos.

El tercer conjunto de restricciones especifica límites mínimos y máximos a las inyecciones de potencia reactiva de generadores que no intervienen en el control secundario. El cuarto conjunto establece límites análogos en la producción y el consumo de potencia reactiva para los generadores del control secundario.

El quinto conjunto de restricciones limita la magnitud de la corrección de tensión en los generadores de control.

5.3.4. Funcionamiento del control secundario de tensiones

El control secundario funciona permanentemente según los siguientes pasos:

Paso 1. Se resuelve el problema cuadrático de control y se determinan las correcciones de tensión que han de llevar a cabo los generadores del control. Estas acciones se comunican a los generadores de control.

Paso 2. Los generadores de control implantan las correcciones calculadas.

Paso 3. Mediante un estimador de estado y un flujo de cargas se determina el nuevo “estado” del sistema y se calculan las matrices de sensibilidad del control. Se va al Paso 1.

En general, el control secundario tiene un comportamiento robusto y estable. El problema de optimización que se resuelve en cada paso de control tiene solución única por tratarse de un problema de programación cuadrática. Obsérvese que las acciones de control calculadas siempre tienden a mejorar el estado del sistema. Por último, téngase en cuenta que el sistema sobre el que actúa el control secundario es un sistema de orden 0.

5.4. Control secundario de frecuencia e intercambios

Del comportamiento de los controladores primarios P_f de los generadores presentes en un sistema eléctrico se deduce que, ante una perturbación, el sistema responde modificando la generación y conduciendo al sistema a un estado en el que la frecuencia difiere de la frecuencia nominal. Este error en frecuencia es inaceptable en general y se puede corregir diseñando un control secundario frecuencia-potencia que será más lento que el control primario. Este control es el que tradicionalmente se denomina Control Automático de Generación, CAG (*Automatic Generation Control*, AGC en lengua inglesa) y tiene como objetivo conducir el error en la frecuencia a cero, de forma estable, mediante la determinación de la potencia

de referencia que ha de producir cada generador que debe contribuir al control secundario. Además, estas modificaciones en las potencias generadas deben respetar los intercambios de potencia que pudieran haberse pactado entre diferentes áreas en el sistema.

La realización de este control secundario depende de las características del sistema a controlar. No se puede separar, puesto que implica la existencia de un control que actúa sobre muchos generadores del sistema, de los criterios generales implícitos en el funcionamiento interconectado de los sistemas eléctricos hoy en día. Estos criterios generales imponen respetar, en condiciones normales, los intercambios pactados entre agentes, y prestar el máximo apoyo en condiciones de emergencia.

La estructura jerárquica de este control ya se ha discutido anteriormente, y la estructura espacial (o geográfica) resulta de las características eléctricas del sistema que se está controlando. Esta estructura espacial resulta de la consideración de diferentes áreas de control en el sistema, estando cada área de control caracterizada porque las variaciones de frecuencia en el área se propagan, de forma instantánea a todos los nudos eléctricos de la misma. Esto implica que todas las cargas y generadores pertenecientes al área “ven” la misma frecuencia, hipótesis que será tanto más cierta cuanto más rígidas sean las conexiones eléctricas entre los diferentes nudos (impedancias despreciables en las líneas que los conectan) del área.

Lógicamente, los generadores que existen dentro del área pueden ser diferentes (diferente tipo y con diferentes parámetros) lo que resulta en diferentes respuestas dinámicas frente a perturbaciones y sollicitaciones de control a las que están sometidos.

La forma de realizar el CAG es mediante la actuación sobre la potencia de entrada en cada uno de los generadores que participan en el control secundario Pf, generadores que estarán distribuidos en todo el sistema y que, generalmente, pertenecerán a diferentes áreas de control. Esta potencia es la que se ha denominado, en el modelo de perturbaciones incrementales mostrado en la Figura 5.12, como ΔP^{ref} .

El comportamiento de un área de control, formada en principio por varios generadores diferentes sujetos a la hipótesis de estar rígidamente acoplados desde el punto de vista eléctrico, se puede representar por medio del diagrama de bloques de la Figura 5.19, donde cada generador tiene su potencia de referencia y, generalmente, recibirán la consigna correspondiente de un mismo centro de control secundario CAG.

El CAG, como todo esquema de control de un sistema complejo, está sujeto a especificaciones que garantizan el cumplimiento de los objetivos de control (error en frecuencia cero e intercambios nulos), lo más rápidamente posible, evitando actuaciones bruscas de los equipos de control y garantizando la estabilidad del sistema. Además de cumplir los objetivos de control citados, suele ser necesario que el error acumulado en la frecuencia y en la potencia intercambiada esté acotado, siendo la razón el que los errores que resultan en relojes y elementos de control conectados a la red son proporcionales al error acumulado en la frecuencia y el que el error en la energía intercambiada entre dos agentes que realizan transacciones en el sistema es igual al error acumulado en el intercambio programado de potencia.

Para conseguir estos objetivos de control, se define para cada área una señal de error (error de área, EA) que, generalmente, tiene una componente proporcional al error en la frecuencia de esa área y otra señal proporcional al error de todos los intercambios de potencia comprometidos con esa área. Esta señal de error se introduce a un integrador de forma que

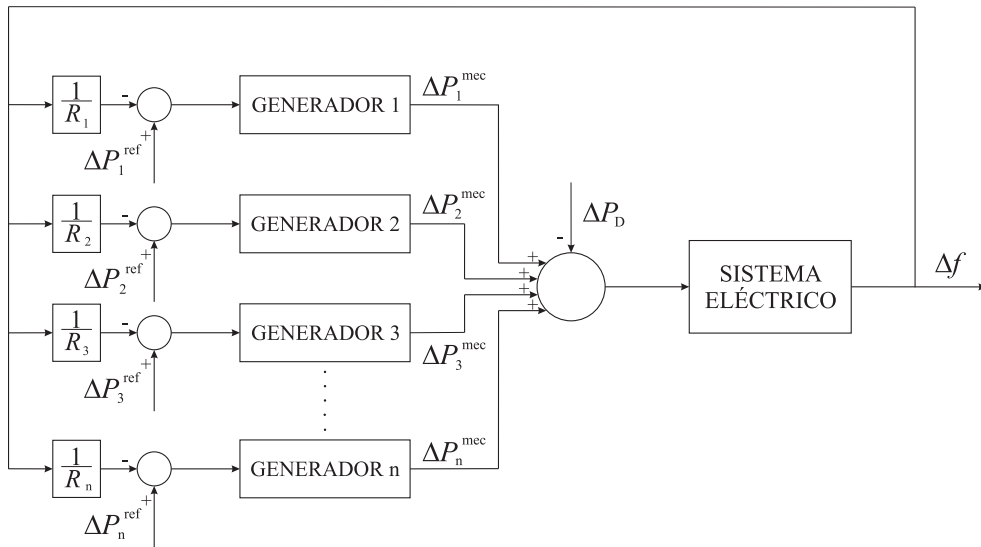


Figura 5.19. Diagrama de bloques del control primario de frecuencia en un área de control.

garantiza el que la potencia mecánica de los generadores se va a modificar hasta que el error de área sea cero.

A continuación, se discuten las características de este control secundario de generación por medio de ejemplos de complejidad progresiva.

Ejemplo 5.8:

Corrección de la desviación de frecuencia.

Considérese el sistema del Ejemplo 5.6, donde se plantea el requisito adicional de que el error de frecuencia en régimen permanente sea cero. La forma más sencilla de conseguir esto es introduciendo una señal, ΔP^{ref} , al generador, proporcional a la integral del error en frecuencia y cambiada de signo, de la forma

$$\Delta P^{ref} = -K_I \int \Delta f(t) dt$$

La ecuación anterior equivale en el dominio de Laplace a

$$\Delta P^{ref}(s) = -\frac{K_I}{s} \Delta f(s)$$

donde el valor de la constante K_I (Hz/MW) indica la rapidez con que disminuye el error de la frecuencia. Esta constante es fundamental en el comportamiento del control y, dependiendo de su valor, éste será estable o inestable y, en el caso estable, la respuesta será oscilatoria o no. Para valores muy grandes de K_I el sistema será inestable. Se deja como ejercicio al lector la determinación de los valores críticos de K_I para el Ejemplo 5.6. En la Figura 5.20 se representa la evolución de la frecuencia para un valor de K_I de 0.3 Hz/puMW.

En este caso, el sistema está formado por una única área de control en la que existe un único generador (o generador equivalente). La señal que se introduce al integrador del CAG se denomina “error de área”, que en este caso coincide con la desviación en la frecuencia frente a la nominal

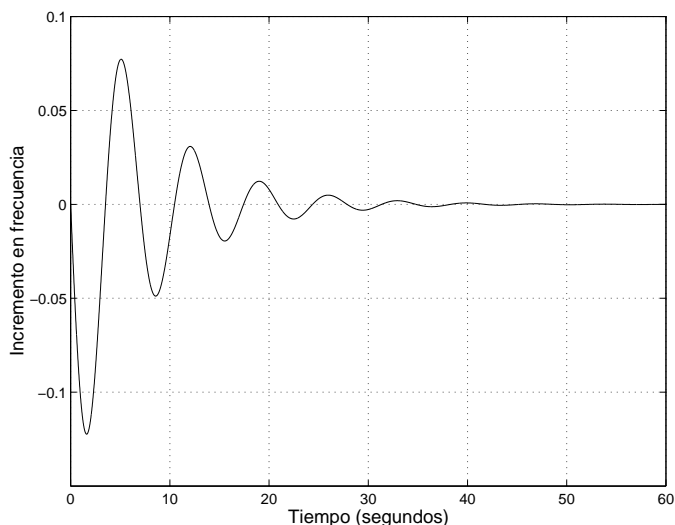


Figura 5.20. Ejemplo 5.8. Corrección de la frecuencia mediante el CAG.

$$[EA = \Delta f(t)].$$

Tradicionalmente, se ha confiado la regulación de la frecuencia a las centrales hidráulicas, fundamentalmente por dos razones: 1) la respuesta de estas centrales hidráulicas frente a sollicitaciones en el cambio de la potencia generada es rápida, y comparable, para pequeñas variaciones en la carga, a las turbinas de gas; 2) estas centrales no suelen presentar más restricciones de rampa que las impuestas por el valor de la potencia máxima que se puede generar.

En muchos sistemas, ya sea por no disponibilidad u otras razones, se ha hecho necesario que centrales de otro tipo, térmico fundamentalmente, participen en el control de la frecuencia. Esto supone una complicación adicional, tanto por las diferentes características dinámicas como por las limitaciones que éstas centrales tienen, principalmente en lo referente a capacidad de aumentar y disminuir la potencia generada en un intervalo corto de tiempo (restricciones de rampa).

Estrategias de participación

La participación de las centrales térmicas en el CAG es uno de los aspectos que inciden de forma determinante en este control. Se entiende como participación en el control de una determinada central el peso que esta central, ya sea hidráulica o térmica, tiene en la corrección del error de área.

La participación de las diferentes centrales en el control de la frecuencia y, por tanto, en el control de los incrementos que se producen en la demanda, se puede determinar con criterios económicos y como resultado de las herramientas disponibles de explotación. Esto implica que, previo a la determinación de los factores de participación, se conoce la fracción de demanda a cubrir con generación hidráulica y térmica y, en lo que respecta a esta últi-

ma, los grupos que están conectados al sistema y las potencias que están produciendo. En este caso, y de acuerdo con los criterios de explotación (despacho económico), los incrementos/decrementos de demanda se deben realizar de acuerdo a unos factores de participación fácilmente evaluables una vez conocidas las funciones de oferta (coste) de los generadores acoplados. Estos factores varían al cambiar la demanda y deben ser recalculados en intervalos de 5-15 minutos. La participación de las centrales térmicas en este caso está orientada a respetar, en la medida de lo posible y cumpliendo las restricciones de rampa, la producción de las centrales hidráulicas y compensar con centrales térmicas los cambios en la carga. Esta estrategia tiene la ventaja adicional de que se dispone durante la operación de toda la reserva hidráulica.

Otra posible estrategia de participación que se adapta mejor a la nueva estructura de mercado competitivo del sector eléctrico, donde la regulación de la frecuencia es un servicio que ofertan los generadores, es el tratamiento indiscriminado de todas las centrales que participan en el control con independencia de su tipo.

Se pueden plantear otras posibles estrategias, tal como la que resulta de dejar que sólo participen las centrales más rápidas (térmicas de gas e hidráulicas) en la regulación de la frecuencia. Las diferentes posibilidades se ilustran mediante el siguiente ejemplo.

Ejemplo 5.9:

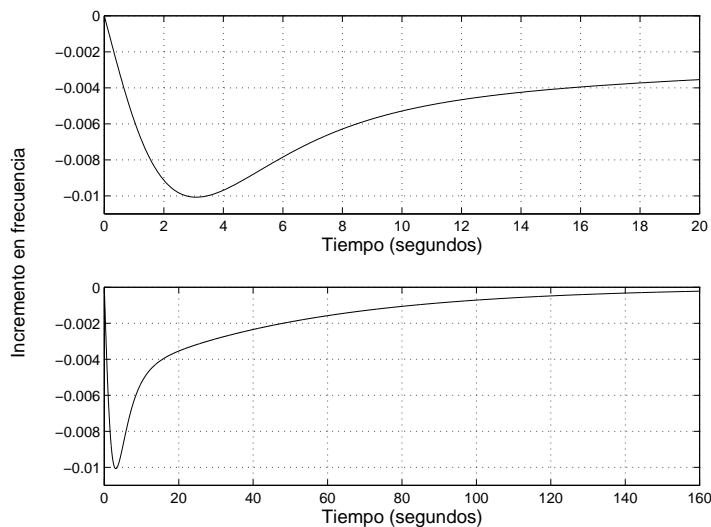


Figura 5.21. Ejemplo 5.9. Participación de los generadores en el restablecimiento de la frecuencia.

Considérese el área de control del Ejemplo 5.7, en el que los cuatro generadores disponibles pueden participar en el CAG. Se analiza en este ejemplo el efecto en la frecuencia de las diferentes estrategias de participación. El valor de la constante del CAG es $K_I = 0,3433$. En la Figura 5.21 se representa la frecuencia cuando la participación de cada generador es la misma (25%) y se produce un incremento en la demanda de 10 MW. El gráfico superior es un detalle del inferior, mostrándose en aquél los primeros 20 segundos de evolución de la frecuencia.

Se puede observar fácilmente, que la respuesta de la frecuencia es muy parecida aunque más

rápida o más lenta si, en las mismas condiciones de regulación primaria, se aumenta o disminuye el peso de las centrales hidráulicas o térmicas rápidas en la regulación secundaria. En caso de disminuir el peso relativo de las centrales hidráulicas en la regulación (por ejemplo, todas las potencias nominales equivalentes iguales, o igual parámetro $R = 15,5$), se observa que la respuesta en frecuencia sufre una excursión mayor en sus valores temporales. Se deja como ejercicio al lector el interpretar estos resultados.

En caso de que participen en el control únicamente centrales térmicas de varias etapas, la respuesta en frecuencia del sistema ante un cambio en la demanda se hace apreciablemente más lenta, tal como se observa en la Figura 5.22. En esta figura, el gráfico superior es un detalle del inferior, mostrándose en aquél los primeros 40 segundos de evolución de la frecuencia.

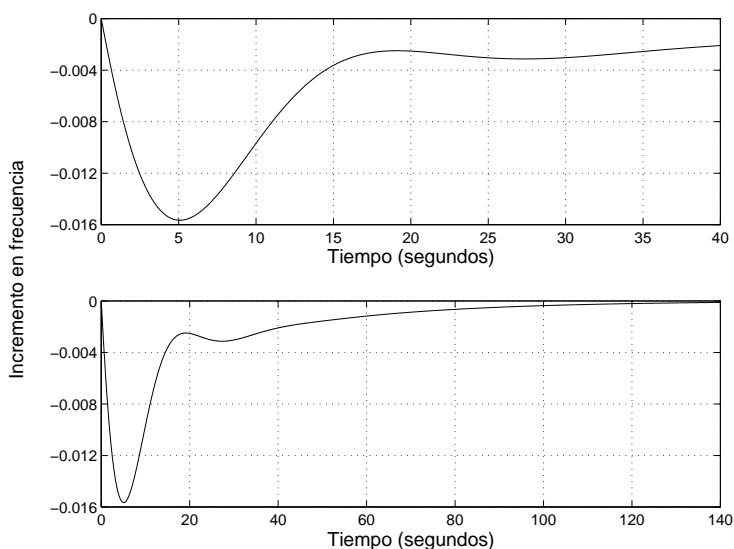


Figura 5.22. Ejemplo 5.9. Restablecimiento de la frecuencia mediante centrales térmicas solamente.

5.4.1. Sistemas multiárea

En todos los ejemplos planteados hasta ahora, se ha supuesto que la frecuencia es uniforme en el sistema, por lo que es razonable suponer que sólo existe un área de control.

Aparte de consideraciones de tipo físico, a veces se consideran en un sistema eléctrico más o menos áreas de control por cuestiones de otro tipo como, por ejemplo, zonas suministradas por distintas compañías. Tradicionalmente se ha asociado un único control secundario a cada área de control y esto ha respondido a la estructura que generalmente tenía el sector eléctrico en diferentes países, donde cada empresa eléctrica operaba, de forma exclusiva, en una determinada área geográfica, en la que estaban localizados sus generadores, líneas de transporte y zona de distribución. Estas empresas eran, en mayor o menor medida, responsables de que la frecuencia en su zona fuera lo más próxima posible a la nominal, para lo cual realizaba el control de sus propios generadores. El área geográfica de la compañía se consideraba, al menos inicialmente, como un área de control, que a veces no cumplía las

características físicas y eléctricas que se han definido para este tipo de áreas.

Esta empresa tradicional establecía, generalmente, contratos de compraventa de energía con empresas vecinas, contratos que implicaban el intercambio de la energía pactada bajo unos límites estrictos, intercambio que se efectuaba en las interconexiones a nivel de red de transporte entre las compañías afectadas y, ocasionalmente, utilizando la red de un tercero.

La tendencia, hoy en día, es al establecimiento de contratos de intercambio de energía (contratos físicos) entre los diferentes agentes que participan en el sistema, especialmente entre agentes productores y consumidores de energía, pudiendo este tipo de transacciones coexistir con intercambios de energía como los descritos en el párrafo anterior (como, por ejemplo, intercambio de energía entre distintos países). Esta tendencia se refuerza con la existencia de sistemas cada vez más fuertemente interconectados, en los que el concepto geográfico para los intercambios de energía es más difuso y tiene, por tanto, cada vez menos validez.

Por tanto, a la hora de establecer el control de generación en un sistema interconectado, hay que tener en cuenta dos factores fundamentales: (i) las características eléctricas del sistema y (ii) la naturaleza de las transacciones que en él se van a efectuar. El primero de ellos está relacionado con la “rigidez” eléctrica y dinámica del mismo y, de acuerdo con la misma, se pueden establecer una o varias áreas de control en el sistema (estructura geográfica). El segundo factor condiciona la estructura del control y la determinación de los errores de área necesarios para el control secundario. Una vez definidas las áreas de control, se deben definir las estrategias de cara al completo diseño del mismo. Normalmente, éstas son:

1. Los generadores de cada área deben contribuir al mantenimiento de la frecuencia del área.
2. En condiciones normales se deben respetar los intercambios de forma que cada área cubra su demanda y sus compromisos de intercambio.

La presencia de diferentes áreas de control en un sistema se puede modelar utilizando los conceptos ya expuestos que se resumen en el diagrama de bloques de la Figura 5.19, sin más que añadir en el sumatorio donde se efectúa el balance entre la potencia eléctrica generada y consumida, la potencia entrante o saliente debida a los intercambios que instantáneamente se realizan en el correspondiente área.

En la Figura 5.23 se representa el diagrama de bloques correspondiente a un sistema formado por dos áreas de control, donde aparecen dos nuevas variables, ΔP_{12} , que representa la potencia que se transmite del área 1 a la 2, y ΔP_{21} , que es la que se transmite de la 2 a la 1. En caso de que el transporte de potencia se realice mediante líneas con pérdidas despreciables, estas dos variables son iguales y de sentido contrario, y su valor depende de las variables de estado del sistema.

Como abstracción necesaria para realizar un completo análisis del control secundario se considera la existencia de dos posibles situaciones. La primera corresponde a un sistema formado por diferentes áreas de control, donde cada una de ellas se caracteriza por una frecuencia única y una estructura de generación conocida; las áreas que están conectadas por líneas de transporte de impedancia elevada que constituyen enlaces elásticos desde el punto de vista eléctrico.

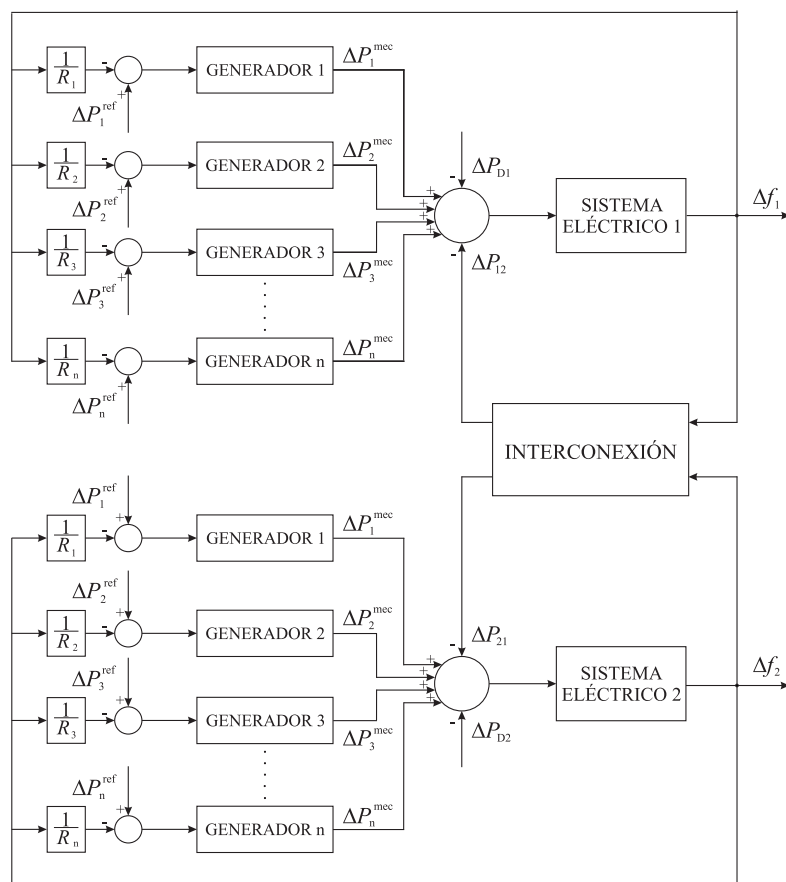


Figura 5.23. Diagrama de bloques del control primario en un sistema con dos áreas.

Como contraposición, se considera un sistema caracterizado por una frecuencia única, donde se plantea la existencia de dos áreas de control, o grupos independientes de generadores controlados cada uno de ellos desde un centro de control secundario, donde se genera un único error de área.

5.4.2. Modelo de interconexión elástica

Sea un sistema formado por dos áreas de control, cada una caracterizada por una frecuencia y la correspondiente respuesta dinámica, que están interconectadas por una línea de transporte por la que se intercambia una potencia P_{12} del área 1 a la 2, cuyo valor debe permanecer constante. Todos los generadores de cada área están comandados por un CAG de área y se supone que no existen pérdidas en el transporte (línea de impedancia X_L en Ω /fase).

Las diferencias entre los incrementos de la frecuencia entre las dos áreas se traduce en un incremento de la potencia que transporta la línea de interconexión, de acuerdo con la

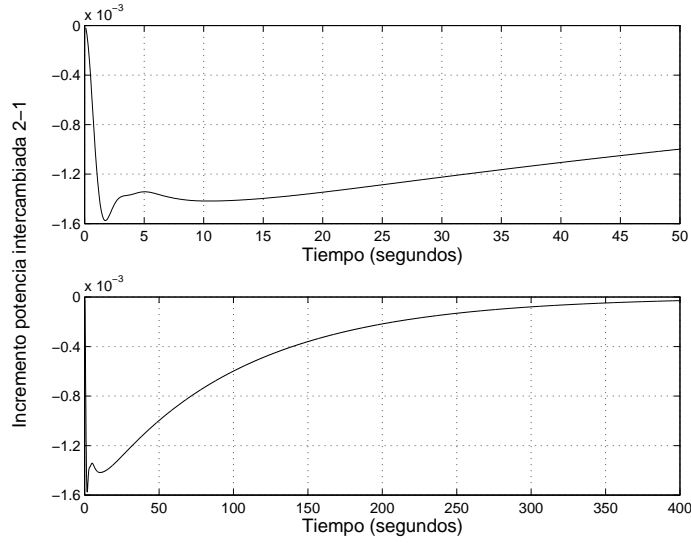


Figura 5.24. Evolución de la potencia intercambiada entre los dos áreas del Ejemplo 5.10.

expresión aproximada [14]:

$$\Delta P_{12} = \left. \frac{V_1 V_2}{X_L} \cos(\delta_1 - \delta_2) \right]_0 (\Delta \delta_1 - \Delta \delta_2) = T_{12}^0 \left(\int \Delta f_1 dt - \int \Delta f_2 dt \right) \quad (5.65)$$

siendo

$$T_{12}^0 = \left. \frac{2\pi V_1 V_2}{X_L} \cos(\delta_1 - \delta_2) \right]_0 \quad (5.66)$$

la rigidez eléctrica de la línea de interconexión, en el punto de operación alrededor del que se estudian las perturbaciones.

De acuerdo con las ecuaciones anteriores, y con las especificaciones del control secundario anteriormente mencionadas, los errores de área de entrada a los correspondientes integradores son:

$$EA_1 = B_1 \Delta f_1 + P_{12} \quad (5.67)$$

$$EA_2 = B_2 \Delta f_2 - P_{12} \quad (5.68)$$

Estos errores deben ser cero en régimen permanente, por lo que si una de las dos constantes B es distinta de cero, se cumplirá que el error en frecuencia y en potencia de intercambio será cero (lo que no ocurrirá con las integrales de dichas magnitudes), independientemente de los valores B adoptados. Tradicionalmente se han adoptado coeficientes relacionados con las respuestas estáticas en frecuencia de cada área, β_1 y β_2 . El siguiente ejemplo ilustra el comportamiento de una conexión elástica.

Ejemplo 5.10:

Interconexión elástica. Transferencia de energía entre áreas.

Considérense dos áreas interconectadas, siendo una de ellas de las características expuestas en los Ejemplos 5.7 y 5.9. Este área se encuentra unida a otra, formada por generadores térmicos impulsados por turbinas de vapor de una etapa, con reguladores muy rápidos cuyas características se detallan en la siguiente tabla. En esta tabla también aparecen las constantes de tiempo de las turbinas respectivas, y el factor de participación de cada grupo generador.

Generador	Tipo	R	T_R	T_T	Participación
G1	Térmico	24	0.08	0.30	0.4
G2	Térmico	40	0.07	0.25	0.3
G3	Térmico	60	0.06	0.20	0.3

Las constantes de este segundo sistema eléctrico son $K_s = 500$ Hz/puMW y $T_s = 20$ segundos, referidos a los mismos valores base del Ejemplo 5.7. Las constantes del área 1 son $K_s = 100$ y $T_s = 30$ segundos. Estas dos áreas están interconectadas por una línea cuya impedancia es $X_L = 13.26$ pu Ω /fase y el valor de la constante del CAG es $K_I = 0,08533$.

En la Figura 5.24 se representa el valor de los incrementos en la potencia transmitida del área 2 al 1, durante la perturbación introducida por un incremento de la demanda en el área 2 de 10 MW. En esta figura, el gráfico superior es un detalle del inferior, mostrándose en aquél los primeros 50 segundos de evolución de la potencia intercambiada.

Aunque este modelo elástico se podría extender, en principio, a cualquier número de áreas de control interconectadas, sin más que generar una señal de error de área para cada una que incluya los errores en la frecuencia propia y en los intercambios que hay pactados entre ese área y las demás, resulta que el control conjunto no es estable, siempre que se presenta un posible anillo entre líneas de interconexión, tal y como se puede comprobar fácilmente sin más que plantear un sistema con tres o más áreas similares a las utilizadas en el ejemplo anterior. En este caso inestable es conveniente plantear una estructura de control que siga respetando, de alguna forma, los conceptos de área de control. En el próximo apartado se completa el modelado de las interconexiones eléctricas cuando no se puede aplicar el modelo de interconexión elástica discutido en este último apartado. Posteriormente, se volverá a tratar el problema del funcionamiento inestable ya planteado.

5.4.3. Modelo de interconexión rígida

El sistema modelado de esta forma se caracteriza porque la frecuencia es prácticamente uniforme en todas las partes del mismo y, por tanto, no es posible asociar un modelo de comportamiento al intercambio de potencias entre las posibles áreas de control que se pueden especificar en el sistema. En este caso, los incrementos en las potencias de intercambio deben ser evaluados como la diferencia entre la potencia generada por los generadores y la demanda local ($\Delta P_{Gi} - \Delta P_{Di}$). Este modelo de interconexión se ilustra en el Ejemplo 5.11.

Ejemplo 5.11:

Interconexión rígida. Transferencia de energía entre áreas.

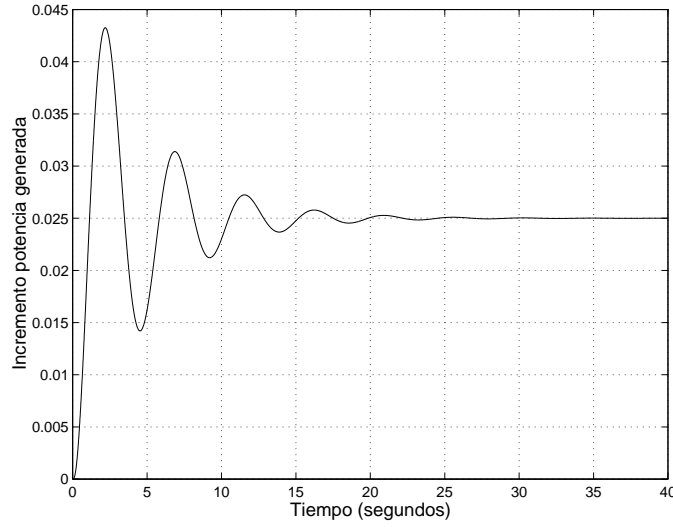


Figura 5.25. Ejemplo 5.11. Interconexión rígida: transitorio de balance de potencia.

Supóngase un sistema eléctricamente rígido, de las características del considerado en el Ejemplo 5.8 y en el que existen dos áreas de control iguales, con las características y parámetros especificadas en dicho ejemplo. En caso de producirse un incremento en la demanda en el área 2 de 50 MW (0.05 pu), tiene lugar un transitorio en el balance de potencias de cada área, tal como se muestra en la Figura 5.25.

Se observa que existe un error permanente en el intercambio de la mitad del incremento de la demanda (cada área tiende a suministrar la mitad de la potencia en este caso).

Claramente, esto se puede corregir añadiendo a la señal de error de área, los errores entre la potencia generada y la demandada ($\Delta P_{Gi} - \Delta P_{Di}$). La evolución en el tiempo de los incrementos de potencia en cada área se muestran en la Figura 5.26.

En la Figura 5.26 del Ejemplo 5.11 se observa que claramente se consigue un error de intercambio nulo. Sin embargo, este tipo de control puede ser problemático en el caso de que existan áreas de control, rígidamente unidas, y de tamaños muy diferentes. Para mejorar la respuesta en este caso, se han propuesto estrategias de control que tienen en cuenta el comportamiento dinámico de las diferentes áreas. Puede emplearse por ejemplo la siguiente estrategia:

$$\Delta P_{12} = -\Delta P_{21} = (\Delta P_{G1} - \Delta P_{D1})(1 - \alpha) - (\Delta P_{G2} - \Delta P_{D2})\alpha - \beta \Delta f$$

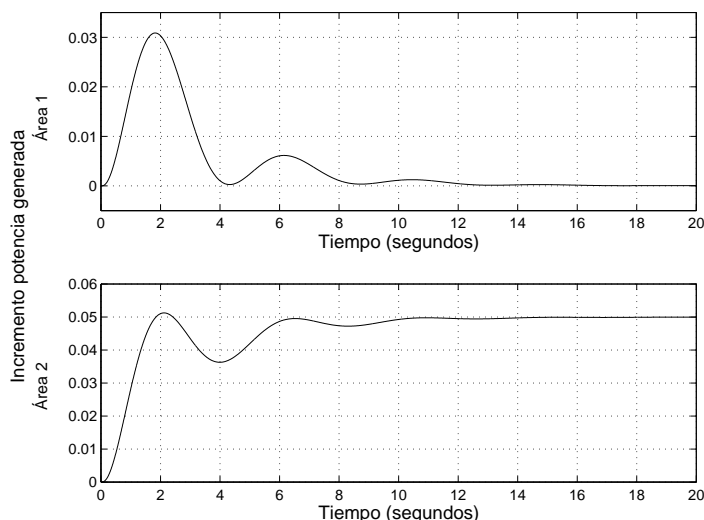


Figura 5.26. Ejemplo 5.11. Interconexión rígida: evolución del balance de potencia intercambiada.

En la expresión anterior los parámetros α y β se calculan mediante las expresiones que aparecen a continuación:

$$\alpha = \frac{H_1 P_{G1}}{H_1 P_{G1} + H_2 P_{G2}} \quad \text{y} \quad \beta = D_1 - \alpha(D_1 + D_2)$$

Se propone como ejercicio al lector evaluar las ventajas de esta estrategia en el caso del sistema considerado en el Ejemplo 5.11. Para ello, considérese que una de las áreas conectadas tiene un tamaño 10 veces superior a la otra y evalúese el comportamiento del control con $\alpha = 1$ y con el α resultante de la expresión anterior.

5.4.4. Control en un sistema multiárea

El control de un sistema eléctrico donde existen diferentes áreas, tanto desde el punto de vista eléctrico como de organización, es complicado, sobre todo si se tiene en cuenta que este servicio complementario podría ser ofertado, en principio, por cualquier generador o grupos de generadores conectados al sistema. Los modelos de interconexión elástica presentan el problema de su posible falta de estabilidad cuando las líneas de interconexión presentan bucles, y el modelo rígido puede presentar problemas de excesivo estrés en el control.

La elección del esquema de control es particularmente importante si se tiene en cuenta que hoy en día la tendencia es a crear interconexiones cada vez mayores por razones de seguridad y economía. Tradicionalmente, e independientemente de la estructura de la red de transporte, cada país ha funcionado de acuerdo a unos criterios propios, que van desde un único controlador (como es el caso de Francia y Suiza, en Europa), al de varios controladores, normalmente correspondientes a las áreas de influencia de las empresas eléctricas, coordinados por un coordinador único, que determina las señales de error de área para garantizar, junto al cumplimiento de los intercambios de energía con países vecinos, la estabilidad del sistema. Este último es el caso de la España peninsular.

Por último, se recomienda que el lector diseñe un sistema formado por cuatro áreas interconectadas elásticamente, cuyas características pueden ser similares a las de las utilizadas en los ejemplos anteriores y se le anima a investigar los diferentes esquemas planteados con el fin de conseguir un control de frecuencia e intercambios robusto.

5.5. Control terciario de frecuencia y de tensiones

El control terciario es un control conjunto de la frecuencia y de las tensiones. Se basa en un reparto óptimo de cargas y considera el sistema en su conjunto desde las perspectivas de seguridad y economía. Este control determina las acciones de los controles discretos y los valores de consigna de los nudos pilotos. Es un control no automático, con tiempo de actuación de algunos minutos, que se cierra a través del operador del sistema. Este control se analiza con más detalle en el capítulo del reparto óptimo de cargas.

En muchas implantaciones prácticas el control secundario de tensión no existe. En esta situación, el control terciario establece el estado de las baterías de condensadores y de reactancias, el estado de las tomas de los transformadores con capacidad de regulación y las consignas de los nudos de alta de los generadores del sistema. El control primario de tensión de cada uno de los generadores mantiene la consigna de tensión de su correspondiente nudo de alta. Cuando el sistema dispone de los tres niveles jerárquicos del control de tensiones, la asignación de funciones es la siguiente: el control terciario determina, empleando información de todo el sistema, el estado de las baterías de condensadores y reactancias, y de las tomas de los transformadores de regulación, así como las consignas de tensión de los nudos pilotos, que envía al control secundario. En cada área, el control secundario de tensión mantiene las consignas de tensión de los nudos pilotos de ese área. Para hacerlo determina las consignas de tensión del nudo de alta de cada generador del área, así como su nivel de reserva de potencia reactiva. Estas consignas se envían a los generadores del área, y son las consignas que ha de mantener, finalmente, el control primario.

Por otra parte, los controles primario y secundario de frecuencia siempre están presentes en los sistemas de energía eléctrica. Por tanto, el control terciario simplemente establece la consigna de producción de potencia activa de los generadores.

Bibliografía

- [1] O. I. Elgerd, *Electric Energy Systems Theory. An Introduction*, Second Edition. McGraw-Hill Book Company. New York, 1982.
- [2] I. J. Nagrath y D. P. Kothari, *Modern Power System Analysis*, Second Edition. Tata McGraw-Hill Publishing Company Limited. New Delhi, 1989.
- [3] A. R. Bergen y V. Vittal, *Power System Analysis*, Second Edition. Prentice Hall, New Jersey, 2000.
- [4] J. Machowski, J. W. Bialek y J. R. Bumby, *Power System Dynamics and Stability*. John Wiley and Sons. New York, 1998.
- [5] V. Arcidiacono, "Automatic Voltage and Reactive Power Control in Transmission Systems", *CIGRE-IFAC Symposium*, Survey Paper E, Florence, Italy, 1983, pp. 39-83.

- [6] P. Lagonotte, J. C. Sabonnadière, J. Y. Léost y J. P. Paul, "Structural Analysis of the Electrical System: Application to the Secondary Voltage Control in France", *IEEE Transactions on Power Systems*, vol. 4, n.º 2, 1989, pp. 479-484.
- [7] A. J. Conejo y M. J. Aguilar, "Secondary Voltage Control: Nonlinear Selection of Pilot Buses, Design of an Optimal Control Law, and Simulation Results", *IEEE Proceedings-Generation, Transmission and Distribution*, vol. 145, n.º 1, enero 1998, pp. 77-81.
- [8] J. Fraile Mora, *Máquinas Eléctricas*, 4.^a edición. Servicio de Publicaciones. Colegio de Ingenieros de Caminos, Canales y Puertos. Colección Escuelas. Madrid, marzo 2001.
- [9] G. F. Franklin, J. D. Powell y A. Emami-Naeini, *Feedback Control of Dynamic Systems*, Third Edition, Addison-Wesley Series in Electrical and Computer Engineering. Control Engineering. Addison-Wesley Publishing Company. Reading, Massachusetts, noviembre 1993.
- [10] Working Group on Prime Mover and Energy Supply Model for System Dynamic Performance Studies, "Dynamic Models for Fossil Fueled Steam Units in Power System Studies", *IEEE Transactions on Power Systems*, vol. 6, n.º 2, mayo 1991, pp. 753-761.
- [11] Working Group on Prime Mover and Energy Supply Model for System Dynamic Performance Studies, "Hydraulic Turbine and Turbine Control Models for System Dynamic Studies", *IEEE Transactions on Power Systems*, vol. 7, n.º 1, febrero 1992, pp. 167-179.
- [12] G. L. Nemhauser y L. A. Wolsey, *Integer and Combinatorial Optimization*. John Wiley and Sons. New York, 1988.
- [13] A. J. Conejo, T. Gómez y J. I. de la Fuente, "Pilot Bus Selection for Secondary Voltage Control", *European Transactions on Electric Power Engineering*, vol. 3, n.º 5, 1993, pp. 359-366.
- [14] A. J. Wood y B. F. Wollenberg, *Power Generation Operation and Control*. Second Edition, John Wiley and Sons. New York, 1996.

Capítulo 6

Operación del sistema de generación

FRANCISCO D. GALIANA Y ANTONIO J. CONEJO

6.1. Introducción

Este capítulo comprende dos partes. La primera está centrada en la operación de un sistema de energía eléctrica por un operador con acceso a todos los datos económicos y técnicos de las centrales, de los consumidores, y de la red de transporte. Este modo de operación es pues el monopolio clásico, con un operador centralizado controlando todos los componentes del sistema. Esta explotación centralizada comprende los apartados 6.2 y 6.3. La segunda parte examina también la operación de un sistema de energía eléctrica, pero bajo un entorno de libre acceso a la red por parte de los generadores y los consumidores, siendo ambos agentes independientes que compiten entre sí según las reglas del mercado eléctrico. La explotación competitiva comprende del apartado 6.4 al apartado 6.8. Tanto en la explotación centralizada como en la competitiva, se considera un horizonte temporal de corto plazo, esto es, de varios minutos a una semana. A continuación, en el apartado 6.9, aparece un resumen del capítulo. Finalmente, se proporciona bibliografía de interés.

Muchos de los problemas planteados en este capítulo son problemas de optimización, más concretamente de programación (i) lineal, (ii) lineal entera-mixta, o (iii) no lineal. Pueden resolverse mediante el empleo de un entorno de definición y resolución de problemas de optimización como es GAMS [1], que emplea optimizadores de alta calidad, como son CPLEX [2] para programación lineal y lineal entera-mixta, y MINOS [2] para programación no lineal. Problemas continuos de tamaño moderado pueden resolverse empleando el entorno de cálculo MATLAB [3]. En el Apéndice B se resumen las técnicas computacionales de resolución más habituales de la programación matemática, incluyendo programación lineal, lineal entera-mixta y no lineal.

6.2. Despacho económico

Uno de los problemas fundamentales de la operación de un sistema de energía eléctrica es el despacho económico (DE). Este problema consiste en repartir la demanda total del sistema entre los generadores disponibles, de forma que el coste total de generación sea el mínimo posible. El coste de generación es variable debido a que las centrales convierten combustible (carbón, fuel oil, gas natural, agua embalsada, uranio) en energía eléctrica con eficiencias que pueden ser muy distintas. Por ejemplo, en un sistema con centrales nucleares, centrales de carbón y turbinas de gas, los costes marginales de generación pueden oscilar entre 0.03 €/kWh y 0.20 €/kWh. Las ventajas económicas de un DE se pueden cuantificar con un ejemplo. Consideremos un sistema de energía eléctrica abasteciendo una demanda de 10 000 MW a un coste medio de 0.05 €/kWh y a un precio fijo para el consumidor de 0.06 €/kWh, cuyos beneficios netos correspondientes son pues de 100 000 €/h. Una mejora en la eficiencia del despacho de las centrales, reduciendo el coste medio en sólo un 1 %, resultaría en un aumento del beneficio de 5 000 €/h o de 43.8 M€ anuales (mejora que también podría utilizarse para reducir la tarifa del consumidor). Existe pues un incentivo económico muy importante para ambos, productores y consumidores, en lo que se refiere a minimizar el coste total de operación de las centrales eléctricas.

Además del DE, donde las cantidades producidas por los generadores son variables continuas, en la operación de un sistema de energía eléctrica hay que considerar también la opción de acoplar o desacoplar los grupos de generación según la variación de la demanda. Dado que los costes fijos (independientes de los MW producidos) de una central pueden ser comparativamente altos, no es económico operar a un nivel de producción bajo, de manera que cuando hay poca demanda es preferible desacoplar ciertas centrales. Este aspecto del problema es matemáticamente complejo ya que hay que utilizar variables binarias. La variable binaria de cada generador vale 1 si el mismo está produciendo energía o está listo para producir, y 0 si está desacoplado. El problema de operar un sistema de energía eléctrica a coste mínimo teniendo en cuenta ambos tipos de variables, enteras y continuas, se denomina programación horaria de grupos térmicos (PHGT), *unit commitment (UC)* en lengua inglesa.

Como veremos, la resolución del DE o la PHGT no es una simple cuestión de inclinarse por las centrales más baratas, ya que en la práctica hay que tener en cuenta un conjunto de condiciones técnicas que restringen el uso de las mismas. En este capítulo estudiaremos varios tipos de generalizaciones del problema básico de despacho económico, es decir, considerando límites de generación, pérdidas de transporte y límites de transporte. Estudiaremos también el reparto óptimo de cargas (que se analiza detalladamente en el Capítulo 7) y la programación horaria de grupos térmicos.

6.2.1. Despacho económico básico

Se supone que para cada generador térmico existe una función que relaciona la producción en MW, P_{Gi} , y el coste que esa producción implica en €/h, $C_i(P_{Gi})$. Esta relación se deriva (i) de la curva de “consumo específico” que expresa la cantidad de combustible consumido por hora y la producción eléctrica en MW, y es una medida de la eficiencia del

generador, y (ii) del precio del combustible [4]. La curva de coste de un generador se puede aproximar mediante una función convexa, que puede ser cuadrática o lineal por tramos. La Figura 6.1 muestra dos ejemplos de curvas de costes de generación: la primera cuadrática y la segunda lineal a tramos. En los generadores hidráulicos existe una relación similar entre el caudal de agua turbinada y la producción de potencia eléctrica.

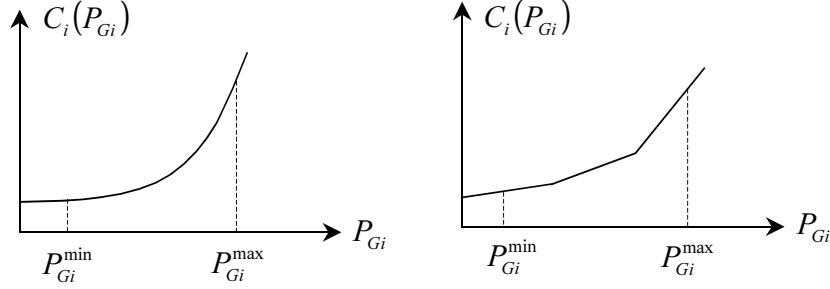


Figura 6.1. Ejemplos de curvas convexas de costes de generación, continua y lineal a tramos.

El coste total de producción de un sistema con n generadores es la suma de los costes individuales, siendo cada uno una función de la producción particular de cada generador.

$$C(P_G) = \sum_{i=1}^n C_i(P_{Gi}) \quad (6.1)$$

Si la demanda total es P_D^{total} y todos los generadores participan en el DE, entonces la suma de los niveles de generación debe igualar la demanda más las pérdidas de transporte, P_{perd} , es decir,

$$\sum_{i=1}^n P_{Gi} = P_D^{\text{total}} + P_{\text{perd}} \quad (6.2)$$

El DE básico consiste pues en minimizar el coste total de producción (6.1) con respecto a las generaciones, sujeto al equilibrio de potencia, (6.2), y a los límites de producción de los generadores

$$P_{Gi}^{\text{min}} \leq P_{Gi} \leq P_{Gi}^{\text{max}} \quad (6.3)$$

6.2.2. Despacho económico sin pérdidas y sin límites de generación

Consideremos primero el caso teórico del DE sin pérdidas y sin límites de generación. La función lagrangiana es

$$\mathcal{L}(P_G, \lambda) = \sum_{i=1}^n C_i(P_{Gi}) - \lambda \left(\sum_{i=1}^n P_{Gi} - P_D^{\text{total}} \right) \quad (6.4)$$

Las condiciones necesarias de primer orden para encontrar la solución óptima son

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{L}(\cdot)}{\partial P_{Gi}} &= C_i'(P_{Gi}) - \lambda = 0; \quad i = 1, \dots, n \\ \frac{\partial \mathcal{L}(\cdot)}{\partial \lambda} &= -\sum_{i=1}^n P_{Gi} + P_D^{\text{total}} = 0 \end{aligned} \quad (6.5)$$

donde la función $CI_i(P_{Gi})$ es el coste incremental de la producción, es decir,

$$CI_i(P_{Gi}) = \frac{dC_i(P_{Gi})}{dP_{Gi}} \quad (6.6)$$

Una característica típica de la solución del DE, sin límites de generación y sin pérdidas, es que los generadores operan bajo la condición de costes incrementales idénticos, tal como indica la primera parte de (6.5). El valor común de los costes incrementales es el multiplicador de Lagrange, λ , cantidad que también representa el marginal del coste total óptimo con respecto a la demanda, es decir,

$$\lambda = \frac{dC(P_G)}{dP_D^{\text{total}}} \quad (6.7)$$

Esta relación es importante, ya que sirve para definir el coste del “último MW” de demanda abastecido, cantidad que generalmente se usa para definir el precio aplicado a intercambios de energía entre compañías independientes. Como veremos más adelante en este capítulo, en un mercado competitivo el coste marginal, λ , representa el precio de mercado pagado por los consumidores y cobrado por los productores. La ecuación (6.7) se deriva de la forma siguiente. Supongamos que existe una solución óptima que satisface las condiciones (6.5). Si la demanda varía la cantidad diferencial dP_D^{total} , los niveles de generación también varían de forma que se satisfaga la condición de equilibrio de potencia, $\sum_{i=1}^n P_{Gi} = P_D^{\text{total}}$.

Asimismo, el coste total cambia según

$$\begin{aligned} dC(P_G) &= \sum_{i=1}^n dC_i(P_{Gi}) \\ &= \sum_{i=1}^n CI_i(P_{Gi}) dP_{Gi} \\ &= \sum_{i=1}^n \lambda dP_{Gi} = \lambda \sum_{i=1}^n dP_{Gi} = \lambda dP_D^{\text{total}} \end{aligned} \quad (6.8)$$

Si las curvas de coste son convexas, la solución de (6.5) es única y fácilmente calculable de forma numérica. El caso en el que las curvas de coste son funciones cuadráticas admite soluciones analíticas. En este caso, que es de claro interés práctico, para cada generador definimos la siguiente función de coste:

$$C_i(P_{Gi}) = C_{0i} + a_i P_{Gi} + \frac{1}{2} b_i P_{Gi}^2 \quad (6.9)$$

donde C_{0i} representa los costes fijos en €/h, es decir, los costes del generador cuando la producción es cero. Los parámetros positivos a_i y b_i permiten caracterizar la dependencia de la curva de coste del generador i con su nivel de generación, P_{Gi} .

Definiendo ahora los vectores

$$\begin{aligned}
 C_0 &= [C_{01}, \dots, C_{0n}]^T \\
 a &= [a_1, \dots, a_n]^T \\
 b &= [b_1, \dots, b_n]^T \\
 e &= [1, \dots, 1]^T \\
 P_G &= [P_{G1}, \dots, P_{Gn}]^T \\
 P_D &= [P_{D1}, \dots, P_{Dn}]^T
 \end{aligned} \tag{6.10}$$

y la matriz diagonal

$$B = \text{diagonal}(b) \tag{6.11}$$

podemos expresar el coste total de la forma siguiente:

$$C(P_G) = e^T C_0 + a^T P_G + \frac{1}{2} P_G^T B P_G \tag{6.12}$$

o sea, una función cuadrática de los niveles de generación. Asimismo, la ecuación de equilibrio de potencia se puede expresar en forma vectorial como $e^T P_G = P_D^{\text{total}}$. Las condiciones necesarias (6.5) en este caso son pues

$$\begin{aligned}
 a + B P_G &= \lambda e \\
 e^T P_G &= P_D^{\text{total}} = e^T P_D
 \end{aligned} \tag{6.13}$$

La solución analítica de (6.13) es

$$P_G = \lambda B^{-1} e - B^{-1} a \tag{6.14}$$

y

$$\lambda = \frac{P_D^{\text{total}} + e^T B^{-1} a}{e^T B^{-1} e} \tag{6.15}$$

Es útil expresar las generaciones óptimas en función de la demanda. Utilizando (6.15) para eliminar λ de (6.14), se obtiene

$$P_G = \alpha P_D^{\text{total}} + \beta \tag{6.16}$$

donde los vectores α y β vienen definidos por

$$\alpha = \frac{B^{-1} e}{e^T B^{-1} e} \tag{6.17}$$

y

$$\beta = \frac{B^{-1} e (e^T B^{-1} a)}{e^T B^{-1} e} - B^{-1} a \tag{6.18}$$

El vector α está constituido por los factores de distribución de la carga, es decir, las fracciones de un incremento de carga que el DE atribuye a cada generador. Esto significa que si la carga varía dP_D^{total} , entonces los generadores varían de acuerdo con

$$dP_G = \alpha dP_D^{\text{total}} \tag{6.19}$$

Obsérvese que los factores de distribución son valores positivos cuya suma es 1, es decir, $e^T \alpha = 1$; condición que debe cumplirse para satisfacer el equilibrio de potencia entre la demanda y la generación.

Ejemplo 6.1:

Despacho económico.

Supongamos que dos generadores suministran una demanda de P_D^{total} en MW. Los parámetros de las curvas de coste son los siguientes:

Generador	C_0 (€/h)	a (€/MWh)	b (€/MW ² h)	P_G^{min} (MW)	P_G^{max} (MW)
1	100	20	0.05	0	400
2	200	25	0.10	0	300

Seguendo el análisis anterior, el DE produce los siguientes resultados:

$$\lambda = \frac{P_D^{\text{total}} + 650}{30} \quad \text{€/MWh} \quad (6.20)$$

$$P_G = \begin{bmatrix} \frac{2}{3}P_D^{\text{total}} + \frac{100}{3} \\ \frac{1}{3}P_D^{\text{total}} - \frac{100}{3} \end{bmatrix} \quad \text{MW} \quad (6.21)$$

A raíz de este resultado se pueden hacer varias observaciones. Según (6.20), el coste incremental de la producción total, λ , aumenta de forma lineal con la demanda. De acuerdo con (6.21), observamos que la demanda se reparte de forma distinta entre los generadores, siendo los factores de distribución $2/3$ para el generador 1, y $1/3$ para el generador 2. Ambos comportamientos son razonables dado que el generador 1 es “más eficiente”, en el sentido de que a medida que su producción sube, su coste no aumenta al mismo ritmo que el del generador 2, lo que es otra forma de decir que $b_1 = 0,05 < b_2 = 0,1$. Es interesante observar que si bien un generador es más eficiente que el otro, la solución óptima no utiliza únicamente este generador, sino que distribuye la carga entre los dos generadores, favoreciendo, no obstante, al más barato.

Reparamos también que, en la solución óptima (6.21), la condición de equilibrio de potencia, como cabe esperar, se cumple. Sin embargo, esta solución tiene la propiedad de que cuando la demanda es baja ($P_D^{\text{total}} < 100$ MW), la generación P_{G2} es negativa, resultado que viola el límite inferior de potencia de este generador que es 0 MW. Por otro lado, si la carga satisface $P_D^{\text{total}} > 550$ MW, la generación P_{G1} , según (6.21), sobrepasa su límite superior de 400 MW. Este ejemplo demuestra que, al no haber tenido en cuenta los límites de generación en este caso particular de DE, existen valores de demanda cuya solución cae fuera de esos límites, y por tanto, la solución puede no ser factible.

6.2.3. Despacho económico sin pérdidas y con límites de generación

En el caso del DE sin pérdidas y con límites de generación, la función lagrangiana es

$$\begin{aligned}\mathcal{L}(P_G, \lambda) &= \sum_{i=1}^n C_i(P_{Gi}) - \lambda \left(\sum_{i=1}^n P_{Gi} - P_D^{\text{total}} \right) \\ &\quad - \sum_{i=1}^n \mu_i^{\text{max}} (P_{Gi} - P_{Gi}^{\text{max}}) \\ &\quad - \sum_{i=1}^n \mu_i^{\text{min}} (P_{Gi} - P_{Gi}^{\text{min}})\end{aligned}\quad (6.22)$$

donde hemos introducido nuevos multiplicadores de Lagrange asociados con las desigualdades de los límites de generación (6.3), o sea, μ_i^{max} para la del límite superior y μ_i^{min} para la del límite inferior.

Las condiciones necesarias de la solución óptima son ahora

$$\begin{aligned}\frac{\partial \mathcal{L}(\cdot)}{\partial P_{Gi}} &= CI_i(P_{Gi}) - \lambda - \mu_i^{\text{max}} - \mu_i^{\text{min}} = 0; \quad i = 1, \dots, n \\ \frac{\partial \mathcal{L}(\cdot)}{\partial \lambda} &= -\sum_{i=1}^n P_{Gi} + P_D^{\text{total}} = 0\end{aligned}\quad (6.23)$$

más las condiciones de holgura complementaria [5],

$$\begin{aligned}\mu_i^{\text{max}} &\leq 0 \quad \text{si } P_{Gi} = P_{Gi}^{\text{max}} \\ \mu_i^{\text{max}} &= 0 \quad \text{si } P_{Gi} < P_{Gi}^{\text{max}} \\ \mu_i^{\text{min}} &\geq 0 \quad \text{si } P_{Gi} = P_{Gi}^{\text{min}} \\ \mu_i^{\text{min}} &= 0 \quad \text{si } P_{Gi} > P_{Gi}^{\text{min}}\end{aligned}\quad (6.24)$$

Con límites de generación, la condición de costes incrementales iguales no es válida y se sustituye por la siguiente relación, derivada de (6.23) y (6.24):

$$\begin{aligned}CI_i(P_{Gi}) &= \lambda + \mu_i^{\text{min}} \geq \lambda \quad \text{si } P_{Gi} = P_{Gi}^{\text{min}} \\ CI_i(P_{Gi}) &= \lambda \quad \text{si } P_{Gi}^{\text{min}} < P_{Gi} < P_{Gi}^{\text{max}} \\ CI_i(P_{Gi}) &= \lambda + \mu_i^{\text{max}} \leq \lambda \quad \text{si } P_{Gi} = P_{Gi}^{\text{max}}\end{aligned}\quad (6.25)$$

El multiplicador de Lagrange asociado con el equilibrio de potencia, λ , continúa teniendo la misma interpretación que en el caso sin límites, es decir, $\lambda = \frac{dC}{dP_D^{\text{total}}}$, o sea, el coste marginal de generación con respecto a la demanda. Esto se puede probar de forma semejante a como se demostró en el caso anterior y la demostración la dejamos al lector como ejercicio.

La interpretación de las condiciones necesarias (6.25) es la siguiente: los generadores que operan entre sus límites tienen costes marginales idénticos y de valor λ . Los generadores operando en su límite inferior tienen un coste marginal igual o mayor que λ , mientras que los que operan a su límite superior tienen un coste marginal igual o menor que λ . En la Figura 6.2 vemos tres variantes de un ejemplo de DE con dos generadores, cuyos límites inferiores de generación son ambos 0 MW, y cuyas curvas de coste son similares a las del Ejemplo 6.1.

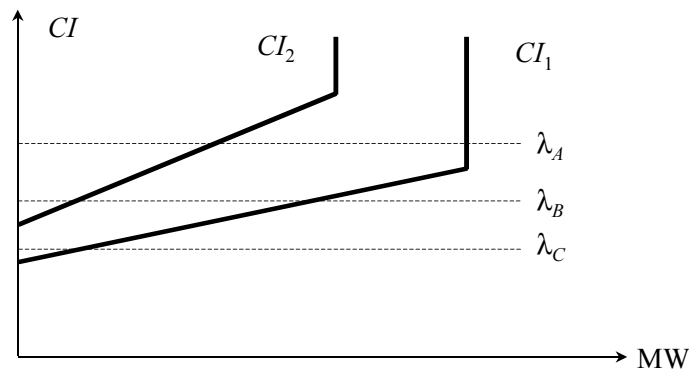


Figura 6.2. Tres ejemplos de despacho económico con límites de generación.

En la variante con $\lambda = \lambda_A$, vemos que el generador 1 opera en su límite máximo y cumple la condición $\lambda > CI_1(P_{G1}^{\max})$, mientras que el generador 2 opera dentro de sus límites y cumple la condición $\lambda = CI_2(P_{G2})$. Cuando $\lambda = \lambda_B$, ambos generadores operan dentro de sus límites y tienen costes incrementales iguales. Finalmente, en la variante con $\lambda = \lambda_C$, el generador 2 opera en su límite mínimo y cumple la condición $\lambda < CI_2(P_{G2}^{\min})$, mientras que el generador 1 opera dentro de sus límites y cumple la condición $\lambda = CI_1(P_{G1})$. El ejemplo que sigue muestra con mayor detalle numérico la solución óptima del DE con límites de generación para cuatro valores distintos de demanda.

Ejemplo 6.2:

Despacho económico con límites de generación.

Usando las curvas de coste del Ejemplo 6.1, obtenemos los resultados de la siguiente tabla:

Caso	P_D^{total} (MW)	P_{G1} (MW)	P_{G2} (MW)	CI_1 (€/MWh)	CI_2 (euro/MWh)	λ (euro/MWh)	C (euro/h)
A2	40	40	0 (mín.)	22	25	22	1 140
B2	250	200	50	30	30	30	6 675
C2	300	233.3	66.7	31.67	31.67	31.67	8 217
D2	600	400 (máx.)	200	40	45	45	19 300

Observamos que en el caso A2, la solución óptima requiere que el generador 2 opere en su límite inferior de 0 MW y que, por tanto, según requiere la condición necesaria, el coste marginal del sistema, $\lambda = 22$ €/MWh, sea menor que el coste marginal del generador 2, $CI_2 = 25$ €/MWh. Un argumento análogo se aplica al caso D2 donde el generador 1 opera en su límite máximo. En los casos B2 y C2, advertimos que ambos generadores operan dentro de sus límites, de forma que $\lambda = CI_1 = CI_2$. Como es de esperar, el coste marginal del sistema aumenta con la demanda de forma lineal por tramos, mientras que el coste total, C , aumenta de forma cuadrática.

Como en el ejemplo anterior, si las curvas de coste son convexas, la solución del DE con límites de generación también es única y fácilmente calculable de forma numérica. En

contraste con el caso sin límites, la solución analítica es más complicada ya que existen múltiples combinaciones posibles de generadores operando en sus límites. Si se conoce esta combinación, los generadores restantes, es decir, los generadores “libres”, satisfacen las mismas condiciones que en el caso sin límites de generación, excepto que el valor de la demanda se reduce en una cantidad igual a la generación total de los generadores al límite. En tal caso, si las curvas de coste son cuadráticas, se puede aplicar una solución analítica del tipo descrito en la sección anterior. No obstante, encontrar la combinación óptima de variables en sus límites es un problema que en general es difícil de resolver.

Aparte de las herramientas generales de programación matemática como CPLEX o MINOS [2], existen procedimientos numéricos específicos para el DE que tienen interés práctico. Nos referimos a los algoritmos de iteración en lambda, indexIteración lambda en los cuales el coste marginal del sistema, λ , se actualiza hasta que se cumple la condición de equilibrio de potencia. Estos algoritmos tienen la forma siguiente:

1. En cada iteración k , λ se aproxima por λ^k .
2. El nivel de producción de cada generador se calcula según las condiciones necesarias (6.26), es decir,

$$\begin{array}{ll} \text{si } CI_i(P_{Gi}^{\min}) \geq \lambda^k & \text{entonces } P_{Gi} = P_{Gi}^{\min} \\ \text{si } CI_i(P_{Gi}^{\max}) \leq \lambda^k & \text{entonces } P_{Gi} = P_{Gi}^{\max} \\ \text{en otro caso } CI_i(P_{Gi}) = \lambda^k & \end{array} \quad (6.26)$$

3. Para actualizar λ , se utiliza una iteración de bisección, $\lambda^{k+1} = \frac{\lambda^k + \lambda^{k-1}}{2}$, donde los dos valores previos de λ corresponden, uno a un exceso de generación total y otro a un déficit con respecto a la demanda.
4. Se repite 1-3 hasta que se cumple la condición de equilibrio de potencia para una tolerancia especificada.

El Apéndice B proporciona un resumen de las técnicas más habituales de programación matemática que son de interés en los sistemas de energía eléctrica.

6.2.4. Despacho económico con pérdidas

Éste es un caso interesante ya que demuestra que el comportamiento del DE puede alterarse de forma significativa debido a las pérdidas en la red eléctrica que interconecta los generadores y los consumidores. Asimismo, de este caso se deduce que, debido a las pérdidas, el coste marginal con respecto a la demanda no es único en toda la red, sino que varía de nudo en nudo, dependiendo de la ubicación de cada nudo con respecto a los generadores.

Los libros de texto clásicos incorporan el efecto de las pérdidas en el DE modificando la ecuación de equilibrio de potencia, de acuerdo con

$$\sum_{i=1}^n P_{Gi} - P_D^{\text{total}} - P_{\text{perd}}(P_G, P_D) = 0 \quad (6.27)$$

Las pérdidas modifican la ecuación de equilibrio de potencia y la solución óptima del DE en dos aspectos. Uno es incrementando la demanda neta, ya que las pérdidas son en la práctica demandas adicionales, aunque generalmente constituyen una fracción pequeña de la demanda. Otro efecto importante ocurre en la relación entre la generación y la demanda, relación que cambia de ser lineal a ser no lineal, debido a la relación compleja y sutil entre las pérdidas, P_{perd} , las generaciones, P_{Gi} , y las demandas, P_{Di} .

Recordemos (Capítulo 3) que en un flujo de cargas con magnitudes de tensión y demandas fijas, es imposible especificar todas las generaciones, P_G . Esta circunstancia se debe a que una red con n nudos y n inyecciones netas de potencia, $P_i = P_{Gi} - P_{Di}$; $i = 1, \dots, n$, tiene únicamente $n - 1$ grados de libertad, es decir, los n ángulos de las tensiones de nudo, menos un ángulo de referencia que es arbitrario y que no afecta los flujos de potencia. Para salvar este obstáculo, normalmente se define un nudo de oscilación (nudo *slack* en lengua inglesa), cuya generación queda libre, lo que permite especificar el resto de generaciones sin restricción alguna.

El empleo de (6.27) como modelo tiene virtudes didácticas; no obstante, este enfoque clásico tiene desventajas debidas a que la ubicación del nudo de oscilación es arbitraria, y el concepto existe únicamente como artificio matemático sin equivalencia física. En este capítulo desarrollaremos el problema del DE con pérdidas de forma clásica, utilizando la relación (6.27), pero igualmente emplearemos un enfoque de análisis más general, basado en el flujo de cargas.

Basándose en el modelo (6.27), la función lagrangiana es

$$\mathcal{L}(P_G, \lambda) = \sum_{i=1}^n C_i(P_{Gi}) - \lambda \left(\sum_{i=1}^n P_{Gi} - P_D^{\text{total}} - P_{\text{perd}}(P_G, P_D) \right) \quad (6.28)$$

Las condiciones necesarias son

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{L}(\cdot)}{\partial P_{Gi}} &= C I_i(P_{Gi}) - \lambda \left(1 - \frac{\partial P_{\text{perd}}}{\partial P_{Gi}} \Big|_s \right) = 0, \quad i = 1, \dots, n \\ \frac{\partial \mathcal{L}(\cdot)}{\partial \lambda} &= - \sum_{i=1}^n P_{Gi} + P_D^{\text{total}} + P_{\text{perd}}(P_G, P_D) = 0 \end{aligned} \quad (6.29)$$

Vemos en (6.29) que los generadores no operan a costes marginales iguales, tal como en el caso sin pérdidas, sino que varían según la sensibilidad de las pérdidas con respecto a la generación. El subíndice s en los coeficientes de sensibilidad indica el índice del nudo de oscilación, nudo que como hemos indicado anteriormente es arbitrario.

La solución de (6.29) se complica debido a la no linealidad de las pérdidas y de los coeficientes de sensibilidad con respecto a las variables P_{Gi} . Consecuentemente, el cálculo de estas magnitudes requiere métodos numéricos. El empleo de fórmulas explícitas aproximando las pérdidas en función de las generaciones [4] no es común hoy en día, habiendo sido reemplazada este enfoque por algoritmos exactos basados en el flujo de cargas.

Para simplificar el resto de esta presentación, suponemos que las magnitudes de tensión en los nudos de la red son constantes. Entonces, las ecuaciones del flujo de cargas toman la forma siguiente:

$$P_G - P_D = P(\delta) \quad (6.30)$$

Los vectores P_G , P_D y $P(\delta)$, esto es, las generaciones, las demandas y las inyecciones a la red respectivamente, son de dimensión n , el número de nudos en la red. El vector de inyecciones es una función no lineal de los ángulos de las tensiones de nudos, δ , siendo éste de dimensión $n - 1$, ya que la tensión del nudo de referencia puede tener un valor arbitrario sin afectar los flujos de potencia.

Ejemplo 6.3:

Ecuaciones del flujo de cargas.

Consideremos una red con tres nudos y tres líneas con las características siguientes:

Del nudo	Al nudo	r(pu)	x(pu)	b(pu)
1	2	0	0.1	0
1	3	0	0.1	0
2	3	0	0.1	0

Suponiendo que cada nudo puede tener un generador y una carga fija, y que el nudo 3 es el de oscilación (referencia), las ecuaciones del flujo de cargas son:

$$\begin{aligned}
 P_{G1} - P_{D1} &= 10 \operatorname{sen}(\delta_1 - \delta_2) + 10 \operatorname{sen}(\delta_1 - 0) \\
 P_{G2} - P_{D2} &= 10 \operatorname{sen}(\delta_2 - \delta_1) + 10 \operatorname{sen}(\delta_2 - 0) \\
 P_{G3} - P_{D3} &= 10 \operatorname{sen}(0 - \delta_1) + 10 \operatorname{sen}(0 - \delta_2)
 \end{aligned} \tag{6.31}$$

Es claro en este ejemplo que tenemos 3 ecuaciones y 2 variables de tipo δ . Sólo podemos pues especificar 2 de las 3 posibles generaciones para hallar las incógnitas δ . La tercera generación no es dato, calculándose su valor mediante (6.31), una vez se conoce δ . Si el ejemplo tuviera pérdidas, las ecuaciones de flujo de cargas serían algo más complejas, pero mantendrían las mismas características, es decir, tres ecuaciones con dos grados de libertad en los ángulos.

En general, para calcular las pérdidas, se resuelve el flujo de cargas de forma numérica y se calcula δ . Esto requiere que eliminemos una de las ecuaciones en (6.30), la correspondiente al nudo de oscilación, s . Las $n - 1$ ecuaciones restantes determinan entonces los ángulos. Las pérdidas se calculan mediante la ecuación

$$P_{\text{perd}} = e^T P(\delta) \tag{6.32}$$

donde e es el vector unitario definido en (6.10).

Para determinar los coeficientes de sensibilidad de las pérdidas, $\frac{\partial P_{\text{perd}}}{\partial P_G}$, calculados sobre un punto de operación, δ_0 , primero se linealizan las ecuaciones del flujo de cargas

$$dP = dP_G - dP_D = \left[\frac{\partial P(\delta_0)}{\partial \delta} \right] d\delta \tag{6.33}$$

asimismo se linealiza la ecuación de las pérdidas (6.32)

$$dP_{\text{perd}} = e^T \left[\frac{\partial P(\delta_0)}{\partial \delta} \right] d\delta \tag{6.34}$$

La matriz $\left[\frac{\partial P(\delta_0)}{\partial \delta}\right]$, de dimensión $n \times (n - 1)$ ya que no se deriva respecto al nudo de referencia, se obtiene diferenciando la función $P(\delta)$ en las ecuaciones del flujo de cargas (6.30).

El siguiente paso consiste en expresar los ángulos, $d\delta$, en función de las inyecciones utilizando (6.30), lo que también requiere suprimir una de las ecuaciones en (6.30), dejando la correspondiente inyección, en el nudo s , $dP_{G_s} - dP_{D_s}$, sin especificar. Definimos ahora el vector de dimensión $n - 1$, $P_G|_s$, obtenido del vector P_G después de haber suprimido el componente no especificado, P_{G_s} . Análogamente, definimos $P_D|_s$, y la matriz $\left[\frac{\partial P(\delta_0)}{\partial \delta}\right]_s$ de dimensión $(n - 1) \times (n - 1)$ que se obtiene de $\left[\frac{\partial P(\delta_0)}{\partial \delta}\right]$ suprimiendo la fila s . Tenemos entonces

$$dP_G|_s - dP_D|_s = \left[\frac{\partial P(\delta_0)}{\partial \delta}\right]_s d\delta \quad (6.35)$$

Combinando (6.34) y (6.35) obtenemos

$$dP_{\text{perd}} = e^T \left[\frac{\partial P(\delta_0)}{\partial \delta}\right] \left[\frac{\partial P(\delta_0)}{\partial \delta}\right]_s^{-1} (dP_G|_s - dP_D|_s) \quad (6.36)$$

o bien

$$dP_{\text{perd}} = e^T \left[\frac{\partial P(\delta_0)}{\partial \delta}\right] \left[\frac{\partial P(\delta_0)}{\partial \delta}\right]_s^{-1} dP|_s \quad (6.37)$$

De la ecuación (6.36) obtenemos directamente los coeficientes de sensibilidad de las pérdidas.

$$\frac{\partial P_{\text{perd}}}{\partial P|_s} = \left(\left[\frac{\partial P(\delta_0)}{\partial \delta}\right]_s^T\right)^{-1} \left[\frac{\partial P(\delta_0)}{\partial \delta}\right]^T e \quad (6.38)$$

Observamos que las sensibilidades obtenidas en (6.38) son con respecto a las inyecciones P , es decir, con respecto a $P_G - P_D$. Este resultado es general en el sentido de que incluye la sensibilidad de las pérdidas con respecto a las generaciones y a las demandas, tal como indica la ecuación (6.36). Es claro que la sensibilidad con respecto a las inyecciones es idéntica a la sensibilidad con respecto a las generaciones cuando las demandas son fijas.

$$\frac{\partial P_{\text{perd}}}{\partial P_{G_i}} \Big|_s = \frac{\partial P_{\text{perd}}}{\partial P_i} \Big|_s \quad (6.39)$$

Para deducir las condiciones necesarias (6.29) se supuso demanda constante, esto es, las variables de optimización son sólo las P_{G_i} . Por tanto, teniendo en cuenta (6.39), la segunda de estas condiciones necesarias es

$$CI_i(P_{G_i}) = \lambda \left(1 - \frac{\partial P_{\text{perd}}}{\partial P_i}\right) \quad (6.40)$$

Subrayamos al mismo tiempo que el coeficiente de sensibilidad con respecto a la generación del nudo s no está definido en (6.38). Esto es lógico ya que la generación P_{G_s} en el nudo de oscilación no es una variable independiente, tal como hemos razonado anteriormente. Algo arbitrariamente, pero consistentemente con las matemáticas, se puede argumentar

que el coeficiente $\left. \frac{\partial P_{\text{perd}}}{\partial P_{G_s}} \right|_s$ es 0, y de esta forma definir un coeficiente de sensibilidad para todos los nudos, incluso el nudo de oscilación. Esta interpretación nos permite escribir el incremento de pérdidas en función de todas las n inyecciones de potencia:

$$dP_{\text{perd}} = \sum_{i=1}^n \left. \frac{\partial P_{\text{perd}}}{\partial P_i} \right|_s dP_i = \sum_{i=1}^n \left. \frac{\partial P_{\text{perd}}}{\partial P_i} \right|_s (dP_{G_i} - dP_{D_i}) \quad (6.41)$$

Basándose en (6.41) y teniendo en cuenta que $\sum_{i=1}^n dP_i = dP_{\text{perd}}$, es útil expresar la ecuación de balance de potencia en forma diferencial de la siguiente manera equivalente:

$$\sum_{i=1}^n \left(1 - \left. \frac{\partial P_{\text{perd}}}{\partial P_i} \right|_s \right) dP_i = 0 \quad (6.42)$$

En la práctica, los coeficientes de sensibilidad de las pérdidas pueden ser positivos o negativos, pero en general tienen valores absolutos pequeños comparados con la unidad. Como veremos en un ejemplo posterior, el efecto de las pérdidas sobre el coste total del DE es pequeño, aunque no insignificante. Las pérdidas también influyen sobre las generaciones individuales, y sobre los costes marginales del sistema en los diversos nudos de la red. Estos últimos se definen como la sensibilidad del coste total de generación con respecto a las demandas individuales de cada nudo, $\lambda_i = \frac{\partial C}{\partial P_{D_i}}$, parámetros importantes que indican el coste de la energía eléctrica en los diversos nudos de la red.

Los costes marginales, λ_i , se derivan de la forma siguiente. Tal como lo hicimos en el caso sin pérdidas, suponemos que el sistema está operando en un estado que satisface las condiciones necesarias (6.29). Si las demandas en todos los nudos varían según el vector infinitesimal, dP_D , las generaciones se alteran correspondientemente según el vector dP_G , de forma tal que se cumplen las condiciones de optimalidad. Igualmente, el coste total cambia, por tanto,

$$\begin{aligned} dC &= \sum_{i=1}^n C I_i dP_{G_i} \\ &= \sum_{i=1}^n \lambda \left(1 - \left. \frac{\partial P_{\text{perd}}}{\partial P_i} \right|_s \right) dP_{G_i} \\ &= \lambda \left(\sum_{i=1}^n dP_{G_i} - \sum_{i=1}^n \left. \frac{\partial P_{\text{perd}}}{\partial P_i} \right|_s dP_{G_i} \right) \end{aligned} \quad (6.43)$$

Teniendo en cuenta el equilibrio de potencia

$$\sum_{i=1}^n (dP_{G_i} - dP_{D_i}) = dP_{\text{perd}} \quad (6.44)$$

y utilizando (6.41), obtenemos

$$\begin{aligned}
 dC &= \lambda \left(\sum_{i=1}^n dP_{Di} + dP_{\text{perd}} \right) - \lambda \left(\sum_{i=1}^n \frac{\partial P_{\text{perd}}}{\partial P_i} \Big|_s dP_{Gi} \right) \\
 &= \lambda \left(\sum_{i=1}^n dP_{Di} + \sum_{i=1}^n \frac{\partial P_{\text{perd}}}{\partial P_i} \Big|_s (dP_{Gi} - dP_{Di}) \right) - \lambda \left(\sum_{i=1}^n \frac{\partial P_{\text{perd}}}{\partial P_i} \Big|_s dP_{Gi} \right) \quad (6.45) \\
 &= \lambda \sum_{i=1}^n \left(1 - \frac{\partial P_{\text{perd}}}{\partial P_i} \Big|_s \right) dP_{Di}
 \end{aligned}$$

O sea, una expresión para los costes marginales

$$\lambda_i = \frac{\partial C}{\partial P_{Di}} = \lambda \left(1 - \frac{\partial P_{\text{perd}}}{\partial P_i} \Big|_s \right) \quad (6.46)$$

Examinamos por último un aspecto teórico con relación al efecto de las pérdidas en el DE. Sabemos que la solución del DE con pérdidas es independiente de la ubicación del nudo de oscilación, que no es más que un artificio matemático. Esto significa pues que debe existir una relación entre los coeficientes de sensibilidad derivados con distintos nudos de oscilación; relación que se deriva de la forma siguiente. Supongamos que escribimos la ecuación de equilibrio de potencia (6.42) de dos formas, una con el nudo de oscilación en el nudo s y la otra con el nudo de oscilación en el nudo r , es decir,

$$\sum_{i=1}^n \left(1 - \frac{\partial P_{\text{perd}}}{\partial P_i} \Big|_s \right) dP_i = 0 \quad (6.47)$$

y

$$\sum_{i=1}^n \left(1 - \frac{\partial P_{\text{perd}}}{\partial P_i} \Big|_r \right) dP_i = 0 \quad (6.48)$$

La forma (6.47) se puede convertir a la (6.48) dividiendo la primera por $1 - \frac{\partial P_{\text{perd}}}{\partial P_r} \Big|_s$, de forma que

$$\frac{1 - \frac{\partial P_{\text{perd}}}{\partial P_i} \Big|_s}{1 - \frac{\partial P_{\text{perd}}}{\partial P_r} \Big|_s} = 1 - \frac{\partial P_{\text{perd}}}{\partial P_i} \Big|_r \quad (6.49)$$

La relación (6.49), el resultado deseado, expresa los coeficientes derivados con el nudo de oscilación s en función de los obtenidos con el nudo de oscilación r . Existe un resultado simétrico que permite convertir los coeficientes derivados con el nudo de oscilación r , a aquellos derivados con el nudo de oscilación s , relación cuya demostración dejamos al lector como ejercicio.

Como indicamos previamente, excepto en casos muy elementales, el DE con pérdidas no se puede resolver más que de forma numérica. Existen procedimientos iterativos basados en las soluciones presentadas anteriormente para casos sin pérdidas, pero la solución más fiable y rápida se basa en métodos de programación no lineal, empleando herramientas de

optimización como MINOS [2] o FMINCON de MATLAB [3]. En el Apéndice B se resumen las técnicas más habituales de la programación matemática.

Ejemplo 6.4:

Despacho económico con pérdidas.

Consideremos una red con tres nudos y tres líneas con las características siguientes:

Del nudo	Al nudo	r(pu)	x(pu)	b(pu)
1	2	0.02	0.1	0
1	3	0.02	0.1	0
2	3	0.02	0.1	0

Los nudos 1 y 2 disponen de generadores cuyas curvas respectivas de coste están caracterizadas en el Ejemplo 6.1. La única demanda, P_{D3} , está en el nudo 3, y su valor varía en cada caso. Se supone que las magnitudes de las tensiones en los tres nudos son constantes e iguales a 1 pu. Utilizamos en este ejemplo unas bases de 100 kV y 200 MVA.

La Figura 6.3 muestra la red considerada.

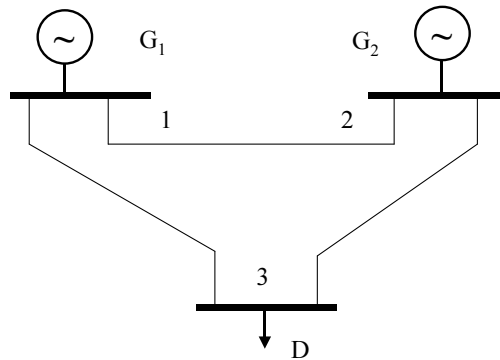


Figura 6.3. Red de tres nudos del Ejemplo 6.4.

En las tablas siguientes comparamos los resultados de dos casos de DE, uno sin y el otro con pérdidas.

Resultados sin pérdidas							
Caso	P_D (MW)	P_{G1} (MW)	P_{G2} (MW)	λ_1 (€/MWh)	λ_2 (€/MWh)	λ_3 (€/MWh)	C (€/h)
B2	250	200.0	50.0	30.00	30.00	30.00	6 675
C2	300	233.3	66.7	31.67	31.67	31.67	8 217

Resultados con pérdidas							
Caso	P_D (MW)	P_{G1} (MW)	P_{G2} (MW)	λ_1 (€/MWh)	λ_2 (€/MWh)	λ_3 (€/MWh)	C (€/h)
B4	250	200.4	53.3	30	30.02	30.98	6 786
C4	300	234.4	70.8	31.72	32.08	32.92	8 383

Podemos hacer las siguientes observaciones:

1. En el caso sin pérdidas los costes marginales son iguales en todos los nudos. Para el caso con pérdidas, éstos varían en cada nudo, siendo esta variación más importante a medida que aumenta la demanda.
 2. Las pérdidas constituyen algo menos del 2 % de la demanda.
 3. El coste total aumenta, como es de esperar, en torno a un 2 % debido a las pérdidas.
 4. Los generadores se reparten las pérdidas de manera desigual. Es interesante, y algo anti-intuitivo, observar que el generador más caro (en el nudo 2) es al que le corresponde la mayor parte de las pérdidas. ¿Por qué? El razonamiento, que dejamos al lector como ejercicio, se basa en la relación entre las pérdidas y los flujos de potencia en las líneas.
-

6.2.5. Despacho económico con límites de red

Las redes eléctricas se planifican y construyen con capacidad de transporte suficiente para satisfacer la demanda, incluso durante periodos en los que uno o varios elementos de la red han sufrido algún daño y están fuera de servicio siendo reparados. A pesar de este criterio, existen casos en los que la capacidad máxima de la red se alcanza en ciertas líneas, que llegan a saturarse. En estos casos, el DE debe tener en cuenta este tipo de restricciones a fin de desviar el flujo a través de rutas alternativas con capacidad suficiente. El efecto del límite de capacidad de transporte de las líneas sobre la operación del sistema puede ser más significativo que el de las pérdidas, ya que puede ser necesario el despacho de generadores muy caros, pero disponibles, dentro de aquellas áreas de demanda cuyo acceso a generación barata está siendo restringido por los límites de transporte.

Presentamos este tipo de DE a través de una variante específica, de mayor valor didáctico que el caso general, presentado más adelante en este capítulo. Consideramos pues un sistema sin pérdidas y sin límites de generación, pero con una única línea cuyo flujo debe mantenerse por debajo de un límite. El límite puede ser térmico, para evitar que el conductor se caliente excesivamente, o puede estar definido por el criterio de seguridad del sistema, para evitar su inestabilidad bajo ciertas contingencias. Suponemos además que el flujo a través de esta línea se puede aproximar mediante una relación lineal de las inyecciones de potencia (véase el Capítulo 3), esto es,

$$P_f = \sum_{i=1}^n \beta_i (P_{Gi} - P_{Di}) = \beta^T (P_G - P_D) \quad (6.50)$$

Por tanto, el problema del DE consiste en minimizar el coste total de generación, ecuación (6.1), sujeto al equilibrio de potencia,

$$\sum_{i=1}^n (P_{Gi} - P_{Di}) = 0 \quad (6.51)$$

y al límite del flujo en la línea con capacidad limitada,

$$-P_f^{\max} \leq \beta^T (P_G - P_D) \leq P_f^{\max} \quad (6.52)$$

Las condiciones necesarias se obtienen siguiendo el mismo proceso que en casos anteriores. Éstas imponen que

$$CI_i(P_{Gi}) = \lambda + \gamma \beta_i, \quad \forall i \quad (6.53)$$

donde la variable γ representa el multiplicador de Lagrange asociado con la restricción de flujo (6.52).

Vemos que cuando la línea está saturada y γ es distinto de cero, la condición (6.53) resulta similar a la relación (6.29), obtenida en el caso con pérdidas; es decir, los generadores operan “fuera de mérito” o a costes marginales distintos. El ejemplo siguiente ilustra el efecto de la saturación de la línea.

Ejemplo 6.5:

Despacho económico con límites de red.

Utilizamos los mismos datos que en el Ejemplo 6.4 pero añadimos un límite al valor absoluto de flujo en la línea 1-3 de 140 MW. Se obtienen los siguientes resultados:

Resultados sin pérdidas y sin límites de transporte							
Caso	P_D (MW)	P_{G1} (MW)	P_{G2} (MW)	λ_1 (€/MWh)	λ_2 (€/MWh)	λ_3 (€/MWh)	C (€/h)
B2	250	200	50	30	30	30	6 675
C2	300	233.3	66.7	31.67	31.67	31.67	8 217

Resultados sin pérdidas y con límites de transporte							
Caso	P_D (MW)	P_{G1} (MW)	P_{G2} (MW)	λ_1 (€/MWh)	λ_2 (€/MWh)	λ_3 (€/MWh)	C (€/h)
B5	250	170.06	79.94	28.50	32.99	37.49	6 742
C5	300	119.94	180.06	26.00	43.01	60.07	9 181

Podemos hacer las siguientes observaciones:

1. Sin saturación en la línea 1-3, los costes marginales son iguales en todos los nudos. Con saturación, éstos varían en cada nudo, siendo esta variación más pronunciada a medida que aumenta la demanda. En el caso C, el coste marginal en el nudo 3 es más del doble que en el nudo 1, indicando que es muy caro abastecer la demanda bajo saturación de la red.
 2. Como es de esperar, el coste total aumenta debido a la saturación, siendo el caso C el que produce el aumento más significativo.
 3. Los generadores se reparten el cambio en producción debido a la saturación a partes iguales, uno aumentando su generación y el otro bajándola en la misma cantidad. En este ejemplo, con dos generadores solamente y sin pérdidas, no puede haber otro reparto posible.
 4. Los cambios en generación son mucho más importantes con saturación de línea que en el caso con pérdidas solamente.
-

6.2.6. Reparto óptimo de cargas

Consideramos ahora el caso general de DE con límites de generación y de transporte, además de pérdidas. Este caso de DE puede considerarse como una variante del reparto óptimo de cargas, una metodología general para la operación óptima de sistemas de energía eléctrica. El reparto óptimo de cargas permite optimizar diversos objetivos aparte del coste de generación, como por ejemplo minimizar las pérdidas globales, o una norma de las desviaciones de los módulos de las tensiones con respecto a valores especificados. Es posible formular el reparto óptimo de cargas incluyendo variables adicionales como la potencia reactiva, los módulos de las tensiones y los parámetros controlables de la red (véase el Capítulo 7).

Por razones didácticas, aquí nos limitamos al problema de DE con las restricciones expuestas anteriormente. El objeto es pues minimizar el coste total (6.54), sujeto a los límites de generación (6.55), a las ecuaciones del flujo de cargas con pérdidas (6.56) y a los límites de flujo en las diversas líneas de la red, es decir,

$$\begin{aligned} &\text{minimizar} \\ &P_G, \delta \\ &\sum_{i=1}^n C_i(P_{Gi}) \end{aligned} \quad (6.54)$$

sujeto a

$$P_G^{\min} \leq P_G \leq P_G^{\max} \quad (6.55)$$

$$P_G - P_D = P(\delta) \quad (6.56)$$

$$|P_f(\delta)| \leq P_f^{\max} \quad (6.57)$$

En la formulación anterior, el superíndice “max” indica valor máximo, mientras que el superíndice “min” indica valor mínimo.

Todos los casos de DE que hemos analizado previamente son variantes particulares de este modelo más completo. ¿Por qué pues no haber empezado con este caso general? Una razón es que la línea adoptada en este capítulo sigue aproximadamente el desarrollo histórico del DE, perspectiva que ofrece al estudiante de cualquier disciplina un conocimiento más amplio de la misma. Aun teniendo buenas herramientas numéricas para resolver el reparto óptimo de cargas, tal como MINOS [2] o FMINCON de MATLAB [3], lo que nos permite investigar múltiples ejemplos numéricamente, el estudio analítico de casos específicos nos permite profundizar nuestra comprensión de manera eficaz.

Un análisis de las condiciones necesarias para la solución del problema (6.54)-(6.57) demuestra que los costes marginales en los diversos nudos están caracterizados por

$$\frac{\partial C}{\partial P_{Di}} = \lambda_i; \quad i = 1, \dots, n \quad (6.58)$$

donde los λ_i son los multiplicadores de Lagrange asociados a las ecuaciones del flujo de cargas (6.56). La demostración de (6.58) la dejamos al lector como ejercicio. En el ejemplo siguiente se analiza un caso de reparto óptimo de cargas.

Ejemplo 6.6:

Reparto óptimo de cargas.

Empleando en este ejemplo los mismos datos que los utilizados en el Ejemplo 6.5, resolvemos el reparto óptimo de cargas utilizando el algoritmo FMINCON de MATLAB [3]. Los resultados obtenidos aparecen, junto con los de los ejemplos previos, en la siguiente tabla.

Resultados con límites de generación pero sin pérdidas y sin límites de transporte							
Caso	P_D (MW)	P_{G1} (MW)	P_{G2} (MW)	λ_1 (€/MWh)	λ_2 (€/MWh)	λ_3 (€/MWh)	C (€/h)
A2	40	40	0 (mín.)	22	22	22	1 140
B2	250	200	50	30	30	30	6 675
C2	300	233.3	66.7	31.67	31.67	31.67	8 217
D2	600	400 (máx.)	200	45	45	45	19 300

Resultados sin pérdidas, con límites de generación y con límites de transporte							
Caso	P_D (MW)	P_{G1} (MW)	P_{G2} (MW)	λ_1 (€/MWh)	λ_2 (€/MWh)	λ_3 (€/MWh)	C (€/h)
B5	250	170.06	79.94	28.50	32.99	37.49	6 742
C5	300	119.94	180.06	26.00	43.01	60.07	9 181

Resultados con límites de generación, pérdidas y límites de transporte							
Caso	P_D (MW)	P_{G1} (MW)	P_{G2} (MW)	λ_1 (€/MWh)	λ_2 (€/MWh)	λ_3 (€/MWh)	C (€/h)
A6	40	40.11	0 (mín.)	22.01	22.07	22.13	1 142
B6	250	166.4	87.0	28.32	33.70	39.78	6 874
C6	300	115.55	189.31	25.78	43.93	64.17	9 469
D6	600	Caso Infactible					

Entre otras, hacemos las siguientes observaciones:

1. En el caso A6, la demanda total de 40 MW es tan baja que la línea 1-3 opera por debajo de su límite de 140 MW. Por tanto, las diferencias en los costes marginales de los nudos son muy pequeñas, causadas únicamente por las pérdidas en la red, que son muy pequeñas en este caso.
2. El caso A6 es análogo al caso A2, salvo el pequeño efecto de las pérdidas.
3. Los casos B6 y C6 en los que hay saturación de la línea 1-3, son similares a los casos respectivos del Ejemplo 6.5, excepto que en este ejemplo, el hecho de tener en cuenta las pérdidas causa pequeñas variaciones adicionales en los costes marginales y en las generaciones con respecto a B5 y C5, respectivamente.
4. El caso D6 es infactible. La carga es demasiado alta para la capacidad de la red con un límite de 140 MW en la línea 1-3. En la práctica, un caso semejante resultaría en un corte de suministro a un cierto número de consumidores. Desde el punto de vista de planificación, casos de infactibilidad frecuentes indican que es necesario construir nuevas líneas y aumentar la capacidad de la red.
5. Ambos efectos, pérdidas y saturaciones de líneas, reducen la generación del generador más barato. ¿Por qué?

6.3. Programación horaria y coordinación hidrotérmica

Hasta ahora hemos considerado que todos los generadores del sistema están permanentemente acoplados a la red y listos para producir energía, independientemente de cuál sea la demanda. Como precisamos al comienzo de este capítulo, existe otro grado de libertad en la operación de cada generador. Es decir, si no existe impedimento técnico, ciertos generadores podrían desacoplarse de la red con el fin de reducir el coste total de generación. Este problema es conocido como programación horaria de grupos térmicos (PHGT). Consideremos un ejemplo para aclarar esta noción.

Ejemplo 6.7:

Programación horaria de grupos térmicos.

Empleamos los datos del Ejemplo 6.3, sin pérdidas y sin límites de transporte, pero con límites de generación. Se permiten aquí diferentes combinaciones de acoplamiento de los dos generadores, es decir, (1,0), (0,1) y (1,1), con lo cual obtenemos los siguientes despachos económicos:

Caso	P_D (MW)	P_{G1} (MW)	P_{G2} (MW)	λ (€/MWh)	C (€/h)
1,0	40	40.00	0.00	22.00	940.0
0,1	40	0.00	40.00	29.00	1 280.0
1,1	40	40.00	0.00	22.00	1 140.0
1,0	250	250.00	0.00	32.50	6 662,5
0,1	250	0.00	250.00	50.00	9 575,0
1,1	250	200.00	50.00	30.00	6 675,0
1,0	300	300.00	0.00	35.00	8 350,0
0,1	300	0.00	300.00	55.00	12 200,0
1,1	300	233.33	66.67	31.67	8 217,0

Entre otras posibles, hacemos las siguientes observaciones:

1. Cuando la demanda es baja, 40 MW, el DE con ambos generadores resulta más caro que con sólo el generador 1 acoplado. Si se acopla el generador 2, este produce 0 MW debido a que el coste marginal de 22 €/MWh está por debajo del coste marginal del generador de 25 €/MWh. La combinación óptima es en este caso la (1,0).
2. Cuando la demanda es 250 MW, la combinación óptima continúa siendo la (1,0) cuyo coste, 6 662,5 €/h, está ligeramente por debajo del coste de la combinación (1,1) de 6 675 €/h.
3. Con la demanda a 300 MW, la combinación óptima es la (1,1).
4. El número de combinaciones posibles es de 2^n por demanda (siendo n el número de generadores), una cifra que crece exponencialmente, y que alcanza valores intratables cuando las dimensiones del problema son las que encontramos en la práctica, por ejemplo, un sistema con 100 generadores y 24 periodos con demandas distintas. El número de combinaciones posibles en este ejemplo es $2^{100 \times 24}$.

Este caso de PHGT, llamado estático porque se estudia una sola hora, se puede formular como una variación del DE, en su forma de reparto óptimo de cargas (6.54)-(6.57). A este

fin, la producción de cada generador i , en MW, P_{Gi} , se multiplica por una variable binaria de acoplamiento, u_i , que toma los valores 0 o 1. La operación de un generador se especifica entonces por el par (P_{Gi}, u_i) . El problema puede formularse pues de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} & \text{minimizar} \\ & u, P_G, \delta \\ & \sum_{i=1}^n C_i(u_i, P_{Gi}) \end{aligned} \quad (6.59)$$

sujeto a

$$u_i P_{Gi}^{\min} \leq P_{Gi} \leq u_i P_{Gi}^{\max}; \quad i = 1, \dots, n \quad (6.60)$$

$$P_G - P_D = P(\delta) \quad (6.61)$$

$$|P_f(\delta)| \leq P_f^{\max} \quad (6.62)$$

El coste del generador se define en este caso como

$$C_i(u_i, P_{Gi}) = u_i C_{0i} + a_i P_{Gi} + \frac{1}{2} b_i P_{Gi}^2 \quad (6.63)$$

Observamos que:

1. La minimización del coste se efectúa ahora con respecto al trío de variables vectoriales (u, P_G, δ) , es decir, un conjunto de variables enteras y continuas. Se trata pues de un problema de programación entera-mixta, cuya solución no se puede determinar en general. Una excepción a esta regla ocurre cuando la función objetivo y las restricciones son lineales. En tal caso existen métodos y herramientas eficaces que utilizaremos más adelante en este capítulo. Evidentemente, puesto que los costes y las restricciones no cumplen esta condición, tendremos que aproximarlos por funciones lineales.
2. Cuando un generador está desacoplado, $u_i = 0$, los límites máximos y mínimos de su producción son iguales a cero, según (6.60). Esto implica que $P_{Gi} = 0$ y que $C_i(u_i, P_{Gi}) = 0$.
3. El coste del generador se puede generalizar de forma que $C_i(u_i, P_{Gi}) = u_i C_{0i} + C_{vi}(P_{Gi})$, donde $C_{vi}(P_{Gi})$ es una función convexa únicamente dependiente de P_{Gi} .
4. Las condiciones de reserva, que garantizan un determinado nivel de seguridad, se pueden añadir como $\sum_{i=1}^n (u_i P_{Gi}^{\max} - P_{Gi}) \geq P_D + P_R$, por ejemplo, donde P_R es la reserva de potencia requerida. Esta restricción de reserva generalmente aumenta el número de generadores acoplados, cuya producción necesariamente disminuye, aumentando de esta forma la reserva, es decir, la cantidad de potencia “rodante” lista para reemplazar generación que pudiera desacoplarse de forma intempestiva.
5. Aunque no es corriente en la práctica, la PHGT puede incluir restricciones de red [restricciones (6.61)-(6.62)] e incluso variables como las potencias reactivas y los módulos de las tensiones.

El problema de la PHGT considera el acoplamiento o desacoplamiento de generadores de gran capacidad, procesos que, sobre todo en el caso de centrales térmicas, no son instantáneos, ya que pueden requerirse horas para llevarlos a cabo. Por ejemplo, las calderas de una central térmica, una vez que se enfrían, necesitan un largo periodo para alcanzar la temperatura y presión necesarias para operar dentro de sus especificaciones técnicas. Por otro lado, toda central generadora tiene un llamado límite de rampa que restringe su capacidad de aumentar o disminuir la producción con el tiempo. Durante periodos de gran variabilidad de la demanda, tal como ocurre durante la mañana de un día laborable, las restricciones individuales de rampa, en MW/h, pueden requerir que un número suplementario de generadores tengan que funcionar. Hay que anticipar pues tales periodos, y resolver la PHGT durante un intervalo de tiempo suficientemente largo. Al mismo tiempo, el acoplamiento de un grupo generalmente implica un gasto extraordinario de arranque en combustible y personal técnico, que es significativo y puede influir en la solución final de la PHGT.

Estos comentarios indican claramente que la PHGT, en la práctica, se debe formular de forma bastante más general que lo hemos hecho en el caso estático. No obstante, siguiendo la misma filosofía, argüimos que el caso estático sigue teniendo un valor didáctico importante.

Una versión razonablemente general del problema de la PHGT se puede formular de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} & \text{maximizar} \\ & P_{Gjt, \forall j, \forall t}; u_{jt, \forall j, \forall t}; y_{jt, \forall j, \forall t}; z_{jt, \forall j, \forall t} \\ & \sum_{t=1}^{24} \sum_{j=1}^n C_{jt}(u_{jt}, P_{Gjt}) + C_{Aj} y_{jt} + C_{Pj} z_{jt} \end{aligned} \quad (6.64)$$

sujeto a

$$\sum_{j=1}^n P_{Gjt} = P_{Dt} \quad \forall t \quad (6.65)$$

$$\sum_{j=1}^n u_{jt} P_{Gj}^{\max} \geq P_{Dt} + P_{Rt} \quad \forall t \quad (6.66)$$

$$u_{jt} P_{Gj}^{\min} \leq P_{Gjt} \leq u_{jt} P_{Gj}^{\max} \quad \forall j, \forall t \quad (6.67)$$

$$P_{Gj, t-1} - P_{Gjt} \leq R_{Gj}^{\text{bajar}} \quad \forall j, t = 2, \dots, 24 \quad (6.68)$$

$$P_{Gjt} - P_{Gj, t-1} \leq R_{Gj}^{\text{subir}} \quad \forall j, t = 2, \dots, 24 \quad (6.69)$$

$$P_{Gj}^0 - P_{Gj1} \leq R_{Gj}^{\text{bajar}} \quad \forall j \quad (6.70)$$

$$P_{Gj1} - P_{Gj}^0 \leq R_{Gj}^{\text{subir}} \quad \forall j \quad (6.71)$$

$$y_{jt} - z_{jt} = u_{jt} - u_{j, t-1} \quad \forall j, t = 2, \dots, 24 \quad (6.72)$$

$$y_{j1} - z_{j1} = u_{j1} - u_j^0 \quad \forall j \quad (6.73)$$

$$u_{it}, y_{it}, z_{it} \in \{0, 1\} \quad \forall j, \forall t \quad (6.74)$$

donde:

$C_{jt}(u_{jt}, P_{Gjt})$ es la función de coste de producción (fijo y variable) del generador j (dato),

C_{Aj} es el coste de arranque del generador j (dato),

C_{Pj} es el coste de parada del generador j (dato),

P_{Gjt} es la potencia producida por el generador j en la hora t (variable),

P_{Gj}^{\min} es la potencia mínima de salida (mínimo técnico) del generador j (dato),

P_{Gj}^{\max} es la potencia máxima de salida del generador j (dato),

P_{Gj}^0 es la potencia inicial de salida del generador j (dato),

P_{Dt} es la demanda total del sistema en la hora t (dato),

P_{Rt} es la reserva total requerida en el sistema en la hora t (dato),

R_{Gj}^{bajar} es la rampa máxima de bajada de carga del generador j (dato),

R_{Gj}^{subir} es la rampa máxima de subida de carga del generador j (dato),

u_{jt} es una variable binaria que toma el valor 1 si el generador j está funcionando en la hora t , y 0 si no lo está (variable),

u_j^0 es el valor inicial de la variable u_{jt} (dato),

y_{jt} es una variable binaria que toma el valor 1 si el generador j arranca al comienzo de la hora t , y 0 si no lo hace (variable),

z_{jt} es una variable binaria que toma el valor 1 si el generador j se desacopla al comienzo de la hora t , y 0 si no lo hace (variable),

n es el número de generadores del sistema.

En la formulación anterior se supone que $R_{Gj}^{\text{subir}} > P_{Gj}^{\min}$ y que $R_{Gj}^{\text{bajar}} > P_{Gj}^{\min}$ para todo generador j .

La función objetivo (6.64) representa los costes totales de operación a lo largo del horizonte de planificación. El primer bloque de restricciones (6.65) hace que se satisfaga la demanda. El segundo bloque (6.66) impone un nivel determinado de reserva. El tercer bloque (6.67) fija los límites de producción de los generadores. Los bloques cuarto, quinto, sexto y séptimo (6.68)-(6.71) establecen restricciones de rampas. Los bloques octavo y noveno (6.72)-(6.73) establecen la lógica del funcionamiento, el arranque y la parada de los generadores. El último bloque (6.74) declara las variables binarias. Nótese que en la formulación anterior no se han considerado restricciones de red.

Por último, cabe mencionar que la coordinación hidrotérmica es un problema análogo a la programación horaria de grupos térmicos. La única diferencia estriba en la presencia de centrales hidroeléctricas agrupadas en una o varias cuencas hidráulicas. Han de tenerse en cuenta pues las restricciones espacio temporales que estas centrales imponen. La Sección 6.6.1 ilustra las restricciones propias de las centrales hidroeléctricas.

6.4. Explotación competitiva

La explotación competitiva se analiza en los apartados siguientes, del 6.4 al 6.8. En estos apartados se estudian las distintas formas de operación del sistema de generación

en un marco competitivo. Este marco competitivo se denomina mercado eléctrico. En un mercado eléctrico existen normalmente dos instrumentos que hacen posible la competencia: (i) la bolsa de la energía (o *pool* en lengua inglesa) y (ii) un marco regulatorio para llevar a cabo contratos bilaterales.

Los productores y los consumidores envían a la bolsa de la energía ofertas de producción y de consumo, respectivamente, consistentes en bloques de energía y precio. El gestor de la bolsa determina, mediante un procedimiento previamente establecido, cuál es el precio de cierre de mercado y qué ofertas de producción y de demanda son aceptadas. Este procedimiento se lleva a cabo, típicamente, una vez al día con un día de antelación, y se denomina mercado diario.

Pueden también llevarse a cabo mercados horarios para realizar ajustes sobre los resultados del mercado diario. Estos mercados son, sin embargo, de menor importancia económica frente al mercado diario, y no se tratan en este capítulo. También se llevan a cabo mercados para la reserva y la regulación. Estos mercados tampoco se tratan en este capítulo.

Como complemento a la bolsa, en un horizonte de medio plazo, se llevan a cabo contratos bilaterales físicos entre productores y consumidores. En estos contratos el productor se compromete a suministrar energía al consumidor a un precio pactado que puede tener una estructura simple o compleja. También pueden suscribirse contratos financieros (opciones y futuros) cuyo objetivo es minimizar el riesgo que supone la posible volatilidad de los precios.

La pregunta básica que ha de hacerse un productor que ha de maximizar los beneficios de sus accionistas es, por tanto, qué cantidad de energía debe comprometer en contratos bilaterales y qué cantidad de energía debe reservar para la bolsa.

A continuación, se estudian las estrategias de un productor frente a la bolsa de la energía con objeto de maximizar su propio beneficio. También se analizan los procedimientos que puede emplear el gestor de la bolsa para cerrar el mercado diario. No se estudian ni los contratos físicos ni los financieros, ya que escapan al alcance de este capítulo por tratarse de decisiones a medio y largo plazo.

A la bolsa de la energía se le denomina mediante el acrónimo inglés PX (*Power eXchange*). A las compañías de generación y consumo mediante los acrónimos GENCO (*GEneration COmpany*) y CONCO (*CONsumption COmpany*), respectivamente. A la empresa comercializadora que compra energía por medio de contratos bilaterales y en la bolsa para venderla a sus clientes se le denomina ESCO (*Energy Service COmpany*). El gestor u operador del mercado diario recibe el nombre de MO (*Market Operator*).

Las transacciones que se acuerdan en la bolsa han de ser técnicamente factibles. El operador del sistema (*Independent System Operator*, ISO) se encarga de asegurar la factibilidad de las transacciones acordadas. Por razones de seguridad, el ISO tiene típicamente capacidad para alterar los acuerdos del mercado. Las alteraciones que puede introducir han de ser, sin embargo, mínimas y justificables.

Las transacciones acordadas han de llevarse a cabo a través de las redes de transporte y distribución. Una compañía de transporte (*TRANSmision COmpany*, TRANSCO) está obligada a ofrecer el uso de sus conductores a cualquier usuario a cambio de un peaje regulado. Una compañía de distribución (*DISTRibution COmpany*, DISTCO) realiza la misma función con su red de distribución. El regulador del mercado eléctrico supervisa el cumplimiento de las normas del mismo. Información adicional sobre la estructura y pro-

blemática de los mercados eléctricos competitivos puede encontrarse en [6], [7], [8], [9], [10] y [11].

Por último, cabe destacar que en algunos países y de forma transitoria, en el mercado eléctrico perviven agentes propios de los entornos centralizados. Esto puede dar lugar a disfunciones importantes en el mercado, que una normativa adecuada debe prever y evitar.

En lo que sigue se analizan, en primer lugar, los distintos procedimientos de cierre de mercado diario. También se menciona cómo deben eliminarse las saturaciones y repartirse las pérdidas de la red de transporte entre productores y consumidores. A continuación, se analiza la respuesta de un productor a ese mercado. Después se describe la respuesta de una compañía comercializadora y de un consumidor con autoproducción.

6.5. Algoritmos de cierre de mercado

Un algoritmo de cierre de mercado es un procedimiento mediante el cual el operador del mercado determina (i) qué ofertas de producción se aceptan, (ii) qué ofertas de demanda se aceptan y (iii) cuál es el precio de cierre de mercado al que se paga a los productores y que han de pagar los consumidores. La mayoría de estos algoritmos son subastas. Se supone que las ofertas de generación son monótonamente crecientes en precio y las de demanda, monótonamente decrecientes.

Se analizan a continuación los tres procedimientos siguientes:

1. Subasta mono-periodo (SM).
2. Subasta multi-periodo (SMP).
3. Subasta walrasiana (SW).

6.5.1. Subasta mono-periodo

En una subasta mono-periodo se consideran las horas una a una, y por tanto no se tienen en cuenta las restricciones inter-temporales que afectan a los generadores. En cada subasta horaria se maximiza el beneficio social neto, que es la suma del excedente de los consumidores y del excedente de los productores [12]. Debe notarse que, si los productores no ofertan a sus costes marginales respectivos, este procedimiento no maximiza estrictamente el beneficio social neto. El no tener en cuenta las restricciones inter-temporales de los productores requiere un proceso heurístico de reparación *a posteriori* para que se cumplan las restricciones de tiempos mínimos de funcionamiento y de parada. Las restricciones de rampas de una hora a la siguiente pueden tenerse en cuenta de forma aproximada modificando las potencias máximas y mínimas de cada generador, al pasar de la subasta de una hora a la de la hora siguiente.

Una subasta mono-periodo puede formularse mediante el siguiente problema de optimización:

$$\begin{array}{c} \text{maximizar} \\ P_{Di,\forall i}; P_{Gj,\forall j}; u_{m,\forall m} \end{array}$$

$$\sum_{i=1}^{N_D} \lambda_{Di} P_{Di} - \sum_{j=1}^{N_G} \lambda_{Gj} P_{Gj} \quad (6.75)$$

sujeto a

$$0 \leq P_{Di} \leq P_{Di}^{\max} \quad \forall i \quad (6.76)$$

$$0 \leq P_{Gj} \leq P_{Gj}^{\max} \quad \forall j \quad (6.77)$$

$$\sum_{i \in n} P_{Di} \in \Delta_{Dn} \quad \forall n \quad (6.78)$$

$$u_m P_{Gm}^{\min} \leq \sum_{j \in m} P_{Gj} \leq u_m P_{Gm}^{\max} \quad \forall m \quad (6.79)$$

$$P_{Gm}^0 - \sum_{j \in m} P_{Gj} \leq R_{Gm}^{\text{bajar}} \quad \forall m \quad (6.80)$$

$$\sum_{j \in m} P_{Gj} - P_{Gm}^0 \leq R_{Gm}^{\text{subir}} \quad \forall m \quad (6.81)$$

$$\sum_{i=1}^{N_D} P_{Di} = \sum_{j=1}^{N_G} P_{Gj} \quad (6.82)$$

donde

P_{Di} es el bloque i de oferta de demanda (variable),

P_{Gj} es el bloque j de oferta de generación (variable),

P_{Di}^{\max} es el valor máximo del bloque i de oferta de demanda (dato),

P_{Gj}^{\max} es el valor máximo del bloque j de oferta de generación (dato),

P_{Gm}^{\min} es la potencia de mínimo técnico del generador m (dato),

P_{Gm}^{\max} es la potencia máxima del generador m (dato),

P_{Gm}^0 es la potencia inicial (en el periodo anterior a la subasta) de salida del generador m (dato),

R_{Gm}^{bajar} es rampa máxima de bajada de carga del generador m (dato),

R_{Gm}^{subir} es rampa máxima de subida de carga del generador m (dato),

u_m es una variable binaria que toma el valor 1 si el generador m está funcionando, y 0 si no lo está (variable),

λ_{Di} es el precio del bloque i de oferta de demanda (dato),

λ_{Gj} es el precio del bloque j de oferta de generación (dato),

Δ_{Gm} es la región factible de operación del generador m (dato),

$i \in n$ indica el conjunto de bloques de oferta que pertenecen a la demanda n (dato),

$j \in m$ indica el conjunto de bloques de oferta que pertenecen al generador m (dato),

N_D es el número de bloques de demanda ofertados (dato),

N_G es el número de bloques de generación ofertados (dato).

La función objetivo [ecuación (6.75)] de este problema es la diferencia entre dos sumandos. El primero es la suma de los bloques de demanda ofertados y aceptados, multiplicados por sus respectivos precios ofertados. El segundo es la suma de los bloques de generación ofertados y aceptados, multiplicados por sus respectivos precios ofertados. La diferencia entre estos dos sumandos es el beneficio social neto.

El primer conjunto de restricciones [restricciones (6.76)] impone el límite superior de cada oferta de demanda y establece que estas ofertas han de ser positivas. El segundo conjunto de restricciones [restricciones (6.77)] establece limitaciones análogas para los bloques de generación ofertados.

El tercer conjunto de restricciones [restricciones (6.78)] impone que cada consumidor ha de ofertar dentro de su región factible de consumo.

Los conjuntos de restricciones cuarto, quinto y sexto [restricciones (6.79)-(6.81)] establecen que cada generador oferta respetando sus restricciones de operación: (i) mínimo técnico y potencia máxima, (ii) rampa máxima de bajada y (iii) rampa máxima de subida. Una expresión más compacta de estas restricciones, que se empleará posteriormente, tiene la forma $\sum_{j \in m} P_{Gj} \in \Delta_{Gm} \quad \forall m$.

La última restricción [restricción (6.82)] asegura que el mercado se equilibra, esto es, que el total de generación es igual al total de demanda.

Debe notarse que las variables de decisión en este problema son el valor de los bloques de demanda ($P_{Di, \forall i}$), el valor de los bloques de generación ($P_{Gj, \forall j}$), y las variables binarias ($u_m, \forall m$) que establecen si los generadores están acoplados. Nótese que el valor de cada bloque no aceptado es 0.

Para cada generador, se supone que la rampa máxima de subida (R_{Gm}^{subir}) y la de bajada (R_{Gm}^{bajar}) son mayores que la potencia mínima (P_{Gm}^{min}).

El precio de cierre de mercado se define como el precio de la oferta de generación más cara que ha sido aceptado. Nótese asimismo que otras definiciones son también posibles.

El problema formulado es un problema de programación lineal entera-mixta de tamaño moderado.

El siguiente ejemplo ilustra el funcionamiento de una subasta mono-periodo con reparación.

Ejemplo 6.8:

Subasta mono-periodo.

Considérense dos generadores y una demanda. Cada generador oferta 3 bloques de energía. Por simplicidad, no se consideran ni rampas de subida ni rampas de bajada. La demanda también oferta 3 bloques de energía.

Las características de operación de cada generador son:

Características	Generador 1	Generador 2
Potencia máxima [MW]	29	20
Potencia mínima [MW]	5	10

Las ofertas de los generadores son:

Ofertas	Generador 1			Generador 2		
Energía [MWh]	5	12	12	10	5	5
Precio [€/MWh]	1	4	5	6	7	8

La oferta de la demanda es:

Ofertas	Demanda		
Energía [MWh]	20	10	5
Precio [€/MWh]	10	8	7

El operador del mercado, para cerrar el mismo, ha de resolver el siguiente problema:

$$\text{maximizar } P_{G11}, P_{G12}, P_{G13}, P_{G21}, P_{G22}, P_{G23}, P_{D1}, P_{D2}, P_{D3} \\ 10P_{D1} + 8P_{D2} + 7P_{D3} - P_{G11} - 4P_{G12} - 5P_{G13} - 6P_{G21} - 7P_{G22} - 8P_{G23}$$

$$\text{sujeto a } 0 \leq P_{G11} \leq 5 \\ 0 \leq P_{G12} \leq 12 \\ 0 \leq P_{G13} \leq 12 \\ 0 \leq P_{G21} \leq 10 \\ 0 \leq P_{G22} \leq 5 \\ 0 \leq P_{G23} \leq 5$$

$$0 \leq P_{D1} \leq 20 \\ 0 \leq P_{D2} \leq 10 \\ 0 \leq P_{D3} \leq 5$$

$$5 u_1 \leq (P_{G11} + P_{G12} + P_{G13}) \leq 29 u_1 \\ 10 u_2 \leq (P_{G21} + P_{G22} + P_{G23}) \leq 20 u_2$$

$$P_{D1} + P_{D2} + P_{D3} = (P_{G11} + P_{G12} + P_{G13}) + (P_{G21} + P_{G22} + P_{G23})$$

$$u_1, u_2 \in \{0, 1\}$$

La variable P_{Gjk} representa el bloque k que oferta el generador j . El valor de la variable u_j es 1 si el generador j está acoplado y 0 si no lo está. Las variables binarias u_1 y u_2 fuerzan que cada generador funcione (si está acoplado) por encima de su mínimo técnico.

La solución de este problema es:

Producción aceptada [MW]				
Bloque	1	2	3	Total
Generador 1	5	12	8	25
Generador 2	10	0	0	10
Total	-	-	-	35

Demanda aceptada [MW]				
Bloque	1	2	3	Total
Demanda	20	10	5	35

Dada la definición de precio de cierre de mercado (precio de la última oferta de generación aceptada), éste es 6 €/MWh, aunque el bloque tercero del primer generador, ofertado a 5 €/MWh, no está completo.

Nótese que en la solución obtenida se ha impuesto que el segundo generador funcione a su potencia mínima. Si se hubiere ignorado la restricción de potencia mínima de ese generador, la solución hubiera sido:

Producción aceptada [MW]				
Bloque	1	2	3	Total
Generador 1	5	12	12	29
Generador 2	6	0	0	6
Total	-	-	-	35

Demanda aceptada [MW]				
Bloque	1	2	3	Total
Demanda	20	10	5	35

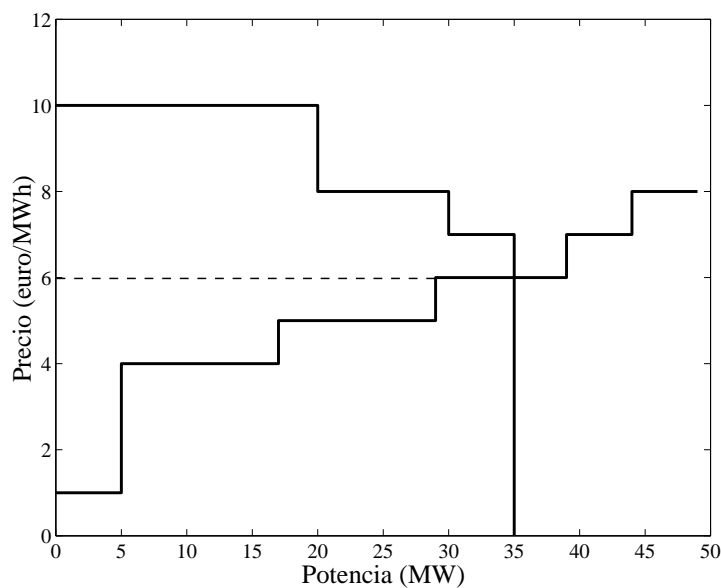


Figura 6.4. Ilustración de la solución no factible del Ejemplo 6.8.

Esta segunda solución es más económica pero no es técnicamente factible. La Figura 6.4 ilustra esta solución. En esta figura, la oferta agregada es la curva creciente y la demanda agregada, la curva decreciente. El precio de cierre del mercado viene dado por la intersección de las dos curvas.

6.5.2. Subasta multi-periodo

En una subasta multi-periodo se consideran las 24 horas del día a la vez, y por tanto se tratan rigurosamente las restricciones inter-periodo. El objetivo de esta subasta es maximizar el beneficio social neto a lo largo de las 24 horas que abarca el mercado diario. Cabe hacer sobre el beneficio social neto la misma consideración hecha al describir la subasta mono-periodo.

La formulación de esta subasta es una extensión de la formulación de la subasta mono-periodo. Esta formulación se describe a continuación.

$$\begin{aligned} & \text{maximizar} \\ & P_{Dit;\forall i,t}; P_{Gjt;\forall j,t} \\ & \sum_{t=1}^{24} \left[\sum_{i=1}^{N_D} \lambda_{Dit} P_{Dit} - \sum_{j=1}^{N_G} \lambda_{Gjt} P_{Gjt} \right] \end{aligned} \quad (6.83)$$

sujeto a

$$0 \leq P_{Dit} \leq P_{Dit}^{\max} \quad \forall i, t \quad (6.84)$$

$$0 \leq P_{Gjt} \leq P_{Gjt}^{\max} \quad \forall j, t \quad (6.85)$$

$$\sum_{i \in n} P_{Dit} \in \Delta_{Dn} \quad \forall n, t \quad (6.86)$$

$$\sum_{j \in m} P_{Gjt} \in \Delta_{Gm} \quad \forall m, t \quad (6.87)$$

$$\sum_{i=1}^{N_D} P_{Dit} = \sum_{j=1}^{N_G} P_{Gjt} \quad \forall t \quad (6.88)$$

Δ_{Dn} es la región de consumo factible de la demanda n (dato); el resto de la notación es similar a la empleada al describir la subasta mono-periodo. La diferencia radica en el subíndice t , que indica la hora t .

En esta formulación multi-periodo, los bloques de restricciones (6.86)-(6.87) permiten imponer el cumplimiento de las restricciones que acoplan un periodo con los anteriores y los siguientes. Estas restricciones, que afectan a los generadores, son las de rampa de subida o bajada de carga, las restricciones de tiempo mínimo de funcionamiento y las de tiempo mínimo de parada.

Las variables de decisión de este problema son las ofertas de generación ($P_{Gjt;\forall j,t}$) y de demanda ($P_{Dit;\forall i,t}$) en cada hora.

Tal como se ha indicado en la subasta mono-periodo, el precio de cierre de mercado en cada hora se define como el precio de la oferta de generación más cara que ha sido aceptada. Nótese que otras definiciones son también posibles, ya que las restricciones inter-periodo pueden dar lugar a que en la solución óptima, y para cada hora, bloques con distintos precios estén incompletos (y por tanto existan varios precios marginales).

Este problema es un problema de programación lineal entera-mixta [las variables binarias están implícitas en las restricciones (6.86)-(6.87)], de gran dimensión si al mercado concurren un número importante de productores y consumidores, y si el horizonte temporal es de 24 horas.

El siguiente ejemplo ilustra una subasta multi-periodo.

Ejemplo 6.9:

Subasta multi-periodo.

Considérense 3 generadores, 1 demanda y 2 horas. Cada generador oferta 3 bloques de energía cada hora, mientras que la demanda oferta 4 bloques.

Las características técnicas de cada generador son:

Características	Generador 1	Generador 2	Generador 3
Potencia máxima [MW]	29	20	20
Potencia mínima [MW]	5	5	10
Rampa de subida [MW/h]	10	5	20
Rampa de bajada [MW/h]	10	5	20
Potencia inicial [MW]	25	10	10

La tabla anterior incluye una fila que proporciona la potencia inicial de los generadores. Estos valores de potencia son necesarios para formular las restricciones de rampa en la primera hora.

Las ofertas de cada generador para cada una de las 2 horas son las mismas y aparecen en la siguiente tabla:

Ofertas	Generador 1			Generador 2			Generador 3		
Energía [MWh]	5	12	12	10	5	5	10	5	5
Precio [€/MWh]	1	4	5	6	6.2	6.3	6.5	6.6	6.8

Las ofertas de la demanda son:

Ofertas	Periodo 1				Periodo 2			
Energía [MWh]	20	10	5	10	40	15	5	10
Precio [€/MWh]	10	8	7	3	10	8	7	3

El problema que ha de resolver el operador del mercado para cerrar el mismo es el siguiente:

maximizar

$$\begin{aligned}
 & 10P_{D11} + 8P_{D12} + 7P_{D13} + 3P_{D14} + \\
 & 10P_{D21} + 8P_{D22} + 7P_{D23} + 3P_{D24} - \\
 & P_{G111} - 4P_{G112} - 5P_{G113} - P_{G121} + 4P_{G122} - 5P_{G123} - \\
 & 6P_{G211} - 6,2P_{G212} - 6,3P_{G213} - 6P_{G221} - 6,2P_{G222} - 6,3P_{G223} - \\
 & 6,5P_{G311} - 6,6P_{G312} - 6,8P_{G313} - 6,5P_{G321} - 6,6P_{G322} - 6,8P_{G323}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{sujeito a } & 0 \leq P_{G111} \leq 5, \quad 0 \leq P_{G112} \leq 12, \quad 0 \leq P_{G113} \leq 12 \\
 & 0 \leq P_{G121} \leq 5, \quad 0 \leq P_{G122} \leq 12, \quad 0 \leq P_{G123} \leq 12 \\
 & 0 \leq P_{G211} \leq 10, \quad 0 \leq P_{G212} \leq 5, \quad 0 \leq P_{G213} \leq 5 \\
 & 0 \leq P_{G221} \leq 10, \quad 0 \leq P_{G222} \leq 5, \quad 0 \leq P_{G223} \leq 5 \\
 & 0 \leq P_{G311} \leq 10, \quad 0 \leq P_{G312} \leq 5, \quad 0 \leq P_{G313} \leq 5 \\
 & 0 \leq P_{G321} \leq 10, \quad 0 \leq P_{G322} \leq 5, \quad 0 \leq P_{G323} \leq 5
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & 0 \leq P_{D11} \leq 20, \quad 0 \leq P_{D12} \leq 10, \quad 0 \leq P_{D13} \leq 5, \quad 0 \leq P_{D14} \leq 10 \\
 & 0 \leq P_{D21} \leq 40, \quad 0 \leq P_{D22} \leq 15, \quad 0 \leq P_{D23} \leq 5, \quad 0 \leq P_{D24} \leq 10
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & 5 u_{11} \leq (P_{G111} + P_{G112} + P_{G113}) \leq 29 u_{11} \\
 & 5 u_{12} \leq (P_{G121} + P_{G122} + P_{G123}) \leq 29 u_{12} \\
 & 5 u_{21} \leq (P_{G211} + P_{G212} + P_{G213}) \leq 20 u_{21} \\
 & 5 u_{22} \leq (P_{G221} + P_{G222} + P_{G223}) \leq 20 u_{22} \\
 & 10 u_{31} \leq (P_{G311} + P_{G312} + P_{G313}) \leq 20 u_{31} \\
 & 10 u_{32} \leq (P_{G321} + P_{G322} + P_{G323}) \leq 20 u_{32}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &P_{D11} + P_{D12} + P_{D13} + P_{D14} \\
 &= (P_{G111} + P_{G112} + P_{G113}) + (P_{G211} + P_{G212} + P_{G213}) + (P_{G311} + P_{G312} + P_{G313}) \\
 &P_{D21} + P_{D22} + P_{D23} + P_{D24} \\
 &= (P_{G121} + P_{G122} + P_{G123}) + (P_{G221} + P_{G222} + P_{G223}) + (P_{G321} + P_{G322} + P_{G323}) \\
 &(P_{G111} + P_{G112} + P_{G113}) - 25 \leq 10 \\
 &(P_{G121} + P_{G122} + P_{G123}) - (P_{G111} + P_{G112} + P_{G113}) \leq 10 \\
 &(P_{G211} + P_{G212} + P_{G213}) - 10 \leq 5 \\
 &(P_{G221} + P_{G222} + P_{G223}) - (P_{G211} + P_{G212} + P_{G213}) \leq 5 \\
 &(P_{G311} + P_{G312} + P_{G313}) - 10 \leq 20 \\
 &(P_{G321} + P_{G322} + P_{G323}) - (P_{G311} + P_{G312} + P_{G313}) \leq 20 \\
 &25 - (P_{G111} + P_{G112} + P_{G113}) \leq 10 \\
 &(P_{G111} + P_{G112} + P_{G113}) - (P_{G121} + P_{G122} + P_{G123}) \leq 10 \\
 &10 - (P_{G211} + P_{G212} + P_{G213}) \leq 5 \\
 &(P_{G211} + P_{G212} + P_{G213}) - (P_{G221} + P_{G222} + P_{G223}) \leq 5 \\
 &10 - (P_{G311} + P_{G312} + P_{G313}) \leq 20 \\
 &(P_{G311} + P_{G312} + P_{G313}) - (P_{G321} + P_{G322} + P_{G323}) \leq 20 \\
 &u_{11}, u_{12}, u_{21}, u_{22}, u_{31}, u_{32}, \in \{0, 1\}
 \end{aligned}$$

La variable P_{Gjtk} representa el bloque de potencia k ofertado en la hora t por el generador j , y la variable binaria u_{jt} toma el valor 1 si el generador j está acoplado en la hora t , y 0 si no lo está. La variable P_{Dtk} indica el bloque de potencia k demandado en la hora t .

El primer bloque de restricciones representa los límites de las ofertas de generación. El segundo, los límites de las ofertas de demanda. El tercer bloque representa las restricciones de potencias mínima y máxima. El cuarto, las restricciones de equilibrio de mercado. Por último, los bloques quinto y sexto son restricciones de rampa. En estas restricciones se expresa entre paréntesis la potencia de cada generador en cada hora. En último lugar aparece la declaración de las variables binarias.

La potencia por bloque aceptada a los generadores en cada hora se muestra en la siguiente tabla:

Producción aceptada [MW]								
Hora	1				2			
Bloque	1	2	3	Total	1	2	3	Total
Generador 1	5	12	12	29	5	12	12	29
Generador 2	6	0	0	6	10	1	0	11
Generador 3	0	0	0	0	10	5	5	20
Total	-	-	-	35	-	-	-	60

La demanda aceptada aparece a continuación:

Demanda aceptada [MW]				
Bloque	1	2	3	Total
Hora 1	20	10	5	35
Hora 2	40	15	5	60

Obsérvese que la rampa de subida limita la producción del generador 2, lo que obliga a producir al generador 3, que es más caro. Los precios de cierre de mercado en las horas 1 y 2 son 6 y 6.8 €/MWh, respectivamente.

La siguiente tabla muestra para cada hora los precios de cierre de mercado, los ingresos de cada generador y el pago de la demanda:

Precios [€/MWh], Ingresos [€] y Pagos [€]			
Hora	1	2	Total
Precio	6.0	6.8	-
Ingresos generador 1	174.0	197.2	371.2
Ingresos generador 2	36.0	74.8	110.8
Ingresos generador 3	0.0	136.0	136.0
Ingresos totales	210.0	408.0	618.0
Pago de la demanda	210.0	408.0	618.0

6.5.3. Subasta walrasiana

Una subasta walrasiana es conceptualmente diferente de las subastas previamente analizadas. En una subasta walrasiana hay varias rondas, no una única ronda, y el operador del mercado altera en cada ronda los precios de cierre del mismo, persiguiendo el equilibrio de la generación y el consumo [13].

Una subasta walrasiana puede formularse mediante el proceso iterativo (multi-ronda) que se describe a continuación.

- Paso 1.** El operador del mercado anuncia precios tentativos de cierre de mercado para cada hora del día.
- Paso 2.** Cada productor establece el plan de producción que maximiza sus beneficios y se lo comunica al operador del mercado. Este plan de producción lo determina cada productor teniendo en cuenta los precios anunciados y sus propias restricciones de operación.
- Paso 3.** Cada consumidor establece su mejor plan de consumo (y de autoproducción si cuenta con recursos de autoproducción) para maximizar su propia utilidad, y se lo comunica al operador del mercado. El plan de consumo se determina teniendo en cuenta los precios anunciados y las limitaciones de consumo del consumidor.
- Paso 4.** Cada comercializador establece su mejor plan de autoproducción y compra en el mercado, con el objetivo de maximizar sus beneficios al vender energía a sus propios clientes. El plan de autoproducción y compra se determina teniendo en cuenta los precios anunciados y las limitaciones de autoproducción del comercializador.
- Paso 5.** El operador del mercado determina en cada hora el déficit o superávit de producción y altera el precio de cada hora (mediante reglas precisas y transparentes) para equilibrar generación y consumo. Típicamente, el precio se modifica de forma proporcional al incumplimiento de la demanda.
- Paso 6.** Si los precios horarios no cambian en dos rondas sucesivas, la subasta se da por concluida, siendo estos precios los de cierre de mercado. Si hay variaciones en los precios, se da comienzo a una nueva ronda (se va al paso 2).

Una subasta walrasiana garantiza que cada agente del mercado maximiza sus propios beneficios, que es una condición básica para el funcionamiento del mercado.

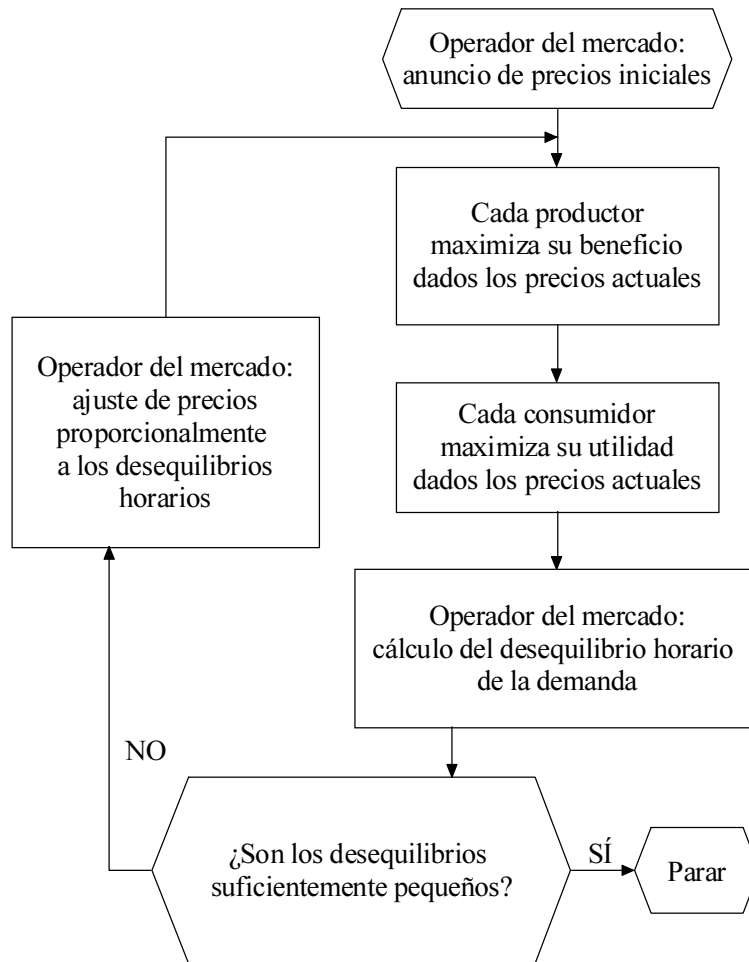


Figura 6.5. Diagrama de flujo de una subasta walrasiana.

En general, una subasta walrasiana converge en un número razonable de rondas. Sin embargo, en determinadas circunstancias, puede producirse una oscilación que, en general, no es significativa en términos del volumen de energía negociado en el mercado, pero que altera los precios. Este fenómeno se analiza en detalle en [14, 15].

Debe notarse que en una subasta walrasiana se puede tener en cuenta la red de transporte, tal como se establece en [15].

La Figura 6.5 muestra el diagrama de flujo de una subasta walrasiana. Por simplicidad, se ha eliminado el bloque correspondiente a los comercializadores.

Ejemplo 6.10:

Subasta walrasiana.

A continuación, se resuelve un ejemplo con los mismos generadores que en el Ejemplo 6.9, mediante una subasta walrasiana. Se supone que las demandas de los periodos 1 y 2 son constantes

y de valor 35 y 60 MW, respectivamente.

Si los precios de cierre de mercado son λ_1 y λ_2 y los generadores ofertan a sus costes marginales, el primer generador ha de resolver el siguiente problema:

$$\begin{aligned}
 &\text{maximizar} \\
 &\lambda_1(P_{G111} + P_{G112} + P_{G113}) + \lambda_2(P_{G121} + P_{G122} + P_{G123}) - \\
 &\quad (P_{G111} + P_{G121}) - 4(P_{G112} + P_{G122}) - 5(P_{G113} + P_{G123}) \\
 \text{sujeto a } &0 \leq P_{G111} \leq 5, \quad 0 \leq P_{G112} \leq 12, \quad 0 \leq P_{G113} \leq 12 \\
 &0 \leq P_{G121} \leq 5, \quad 0 \leq P_{G122} \leq 12, \quad 0 \leq P_{G123} \leq 12 \\
 &5 u_{11} \leq (P_{G111} + P_{G112} + P_{G113}) \leq 29 u_{11} \\
 &5 u_{12} \leq (P_{G121} + P_{G122} + P_{G123}) \leq 29 u_{12} \\
 &(P_{G111} + P_{G112} + P_{G113}) - 25 \leq 10 \\
 &(P_{G121} + P_{G122} + P_{G123}) - (P_{G111} + P_{G112} + P_{G113}) \leq 10 \\
 &25 - (P_{G111} + P_{G112} + P_{G113}) \leq 10 \\
 &(P_{G111} + P_{G112} + P_{G113}) - (P_{G121} + P_{G122} + P_{G123}) \leq 10 \\
 &u_{11}, u_{12} \in \{0, 1\}
 \end{aligned}$$

Los otros 2 generadores resuelven problemas análogos.

El precio se actualiza proporcionalmente al incumplimiento de la demanda, siendo la constante de proporcionalidad decreciente con las iteraciones.

Tras 10 rondas, se alcanzan dos soluciones entre las que oscila la subasta walrasiana. En una de estas soluciones la generación supera a la demanda, mientras que en la otra la generación no alcanza a la demanda. Estas soluciones son:

Primera solución. Producción [MW]								
Hora	1				2			
Precio [€/MWh]	5.156				7.044			
Bloque	1	2	3	Total	1	2	3	Total
Generador 1	5	12	12	29	5	12	12	29
Generador 2	10	0	0	10	10	5	0	15
Generador 3	0	0	0	0	10	5	5	20
Total	-	-	-	39	-	-	-	64

Segunda solución. Producción [MW]								
Hora	1				2			
Precio [€/MWh]	5.155				7.043			
Bloque	1	2	3	Total	1	2	3	Total
Generador 1	5	12	12	29	5	12	12	29
Generador 2	5	0	0	5	10	0	0	10
Generador 3	0	0	0	0	10	5	5	20
Total	-	-	-	34	-	-	-	59

La segunda solución puede hacerse fácilmente factible mediante un incentivo al generador 2 para que produzca un MWh más en la primera hora y también un MWh más en la segunda hora. Por ejemplo, el generador 2 acepta que se le pague el precio que ha ofertado (6.0 €/MWh en la primera hora y 6.2 en la segunda) por los MWh adicionales. De acuerdo con este criterio, la siguiente tabla muestra, para cada hora, los precios de cierre de mercado, los ingresos de cada generador y el pago de la demanda que es igual al ingreso de los generadores.

Precios [€/MWh], Ingresos [€] y Pagos [€]			
Hora	1	2	Total
Precio	5.155	7.043	-
Ingresos generador 1	149.495	204.247	353.742
Ingresos generador 2	31.775 ^a	76.630 ^b	108.405
Ingresos generador 3	0.000	140.860	140.860
Ingresos totales	181.270	421.737	603.007
Pago de la demanda	181.270	421.737	603.007

$$^a 31,775 = 5 \times 5,155 + 1 \times 6,0$$

$$^b 76,630 = 10 \times 7,043 + 1 \times 6,2$$

Nótese que, a igualdad de demanda suministrada, el pago de la demanda con la subasta walrasiana es inferior al pago de la demanda con la subasta multi-periodo. Se invita al lector a reflexionar sobre el porqué de esta diferencia.

6.5.4. Gestión de saturaciones y asignación de pérdidas

En las subastas estudiadas no se tiene en cuenta la red de transporte en sus dos dimensiones: (i) la capacidad limitada de las líneas y (ii) las pérdidas de energía incurridas al transportar la energía mediante esas líneas.

Tras cerrar el mercado es pues necesario ejecutar en cada hora un flujo de cargas para determinar si hay saturaciones en las líneas. Si no hay saturaciones, la solución del mercado se da por válida, pero, si las hay, el operador del sistema (no el del mercado) habrá de eliminarlas alterando lo menos posible el resultado del mercado diario. El cómo hacerlo es un interesante problema que se estudia en el capítulo de operación de la red de transporte.

Una vez que las saturaciones, si las hay, hayan sido eliminadas, es necesario determinar cómo asignar las pérdidas de la red de transporte a productores y consumidores. Obsérvese que ambos son responsables de las mismas. Téngase en cuenta que las pérdidas en cada línea son una función cuadrática del flujo de potencia por esa línea. Si se emplean métodos lineales, es posible repartir la responsabilidad del flujo en cada línea entre los productores y los consumidores. Pero, aun así, las pérdidas no pueden asignarse por ser funciones cuadráticas del flujo. La conclusión es que no hay un método único de asignación, y que ha de emplearse un procedimiento bien fundamentado tanto técnica como económicamente. El cómo establecer este procedimiento es un interesante problema de investigación [16].

6.6. La perspectiva del productor

En el corto plazo, un productor debe determinar la producción horaria que ha de colocar en el mercado y que maximiza sus beneficios. En el medio plazo (1 año) habrá que determinar qué contratos bilaterales le conviene suscribir. Por tanto, un productor ha de determinar cuánta energía ha de vender mediante contratos bilaterales y cuánta energía ha de vender en la bolsa, de tal forma que su beneficio anual sea máximo.

Este capítulo, sin embargo, se circunscribe al problema de la venta en la bolsa, ya que en el mismo sólo se tratan problemas de corto plazo.

Se consideran dos posibles tipos de productores: un productor sin capacidad de alterar el precio de cierre del mercado y un productor con capacidad de alterarlo. Al primero se le denomina precio-aceptante y al segundo productor fijador de precios. Los problemas a los que se enfrentan estos dos productores, en el corto plazo, se analizan a continuación.

6.6.1. Productor precio-aceptante

Un productor que consta de varios generadores, pero que carece de capacidad de alteración de los precios de cierre del mercado, maximiza sus beneficios al maximizar cada uno de sus generadores los suyos. Esto es así porque no hay ninguna ligazón entre los generadores. Cada generador, por tanto, responde óptimamente a los precios de cierre de mercado (que no se alteran) respetando sus propias limitaciones de producción.

En el caso de un productor hidroeléctrico con generadores hidráulicos acoplados espacio-temporalmente, la maximización de los beneficios del productor no equivale a la maximización del beneficio de cada generador.

Estos dos casos se tratan a continuación.

Inicialmente se considera el problema de la maximización del propio beneficio por parte de un generador térmico. Este problema puede formularse como

maximizar
 $P_{Gt, \forall t}$

$$\sum_{t=1}^{24} \lambda_t P_{Gt} - C_t(P_{Gt}) \quad (6.89)$$

sujeto a

$$P_{Gt} \in \Delta_G, \quad \forall t \quad (6.90)$$

donde

P_{Gt} es la potencia producida por el generador en la hora t (variable),

$C_t(P_{Gt})$ es el coste de producción del generador en la hora t (dato),

λ_t es la predicción del precio de cierre de mercado para la hora t (dato),

Δ_G es la región factible de operación del generador (dato).

La función objetivo [ecuación (6.89)] de este problema es la diferencia entre dos términos. El primero representa los ingresos que recibe el generador a lo largo de las 24 horas en las que participa en el mercado. El segundo término representa los costes totales de producción a lo largo de esas 24 horas.

La restricción (6.90) engloba todas las limitaciones que un generador ha de observar al producir energía. Este conjunto de limitaciones se ha descrito ya en el estudio del problema de la programación horaria de grupos térmicos y en [17] puede encontrarse una descripción muy detallada de estas limitaciones.

Debe tenerse en cuenta que el problema anterior depende de forma importante de la predicción disponible de precios. Si ésta es fiable, la solución del problema planteado es fiable; si no, no lo es. Es por tanto necesario emplear herramientas adecuadas de predicción de los precios de cierre del mercado. De hecho, un interesante problema de investigación es la predicción de precios de la energía eléctrica.

La solución del problema de la maximización del beneficio de un generador proporciona la potencia en cada hora que el generador ha de colocar en el mercado diario para maximizar sus propios beneficios. El cómo debe ofertar para lograr que su producción óptima sea aceptada en el mercado es un problema complejo abierto a la investigación que no se trata en este capítulo.

El problema anterior es un problema de programación lineal entera-mixta de tamaño moderado.

El siguiente ejemplo ilustra el comportamiento que típicamente presenta un productor precio-aceptante.

Ejemplo 6.11:

Productor precio-aceptante.

Considérese un generador con un coste de producción lineal de 2 €/MWh, una potencia máxima de 10 MW, una potencia mínima de 2 MW, una rampa de subida de 5 MW/h, una rampa de bajada de 4 MW/h y una potencia inicial de 2 MW.

La predicción de precios del mercado para las cuatro horas consideradas se muestra en la tabla que aparece a continuación:

Hora	1	2	3	4
Precio [€/MWh]	2	4	3	1

Este productor precio-aceptante ha de determinar cuánto ha de producir en cada una de las cuatro horas del horizonte temporal para lograr que sus beneficios sean máximos. El correspondiente problema de programación matemática que este productor ha de resolver se formula y resuelve a continuación:

$$\begin{aligned} & \text{maximizar}_{P_{G1}, P_{G2}, P_{G3}, P_{G4}} \\ & 2P_{G1} + 4P_{G2} + 3P_{G3} + P_{G4} - 2(P_{G1} + P_{G2} + P_{G3} + P_{G4}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{sujeto a } \quad & 2u_1 \leq P_{G1} \leq 10u_1 \\
 & 2u_2 \leq P_{G2} \leq 10u_2 \\
 & 2u_3 \leq P_{G3} \leq 10u_3 \\
 & 2u_4 \leq P_{G4} \leq 10u_4 \\
 & P_{G1} - 2 \leq 5 \\
 & P_{G2} - P_{G1} \leq 5 \\
 & P_{G3} - P_{G2} \leq 5 \\
 & P_{G4} - P_{G3} \leq 5
 \end{aligned} \tag{6.91}$$

$$\begin{aligned}
 & 2 - P_{G1} \leq 4 \\
 & P_{G1} - P_{G2} \leq 4 \\
 & P_{G2} - P_{G3} \leq 4 \\
 & P_{G3} - P_{G4} \leq 4
 \end{aligned}$$

$$u_1, u_2, u_3, u_4 \in \{0, 1\}$$

La variable binaria u_t toma el valor 1 cuanto el generador está acoplado en la hora t y 0 si no lo está.

La solución de este problema es:

Producción óptima y precio				
Hora	1	2	3	4
Precio [€/MWh]	2	4	3	1
Producción [MW]	5	10	6	2

Se puede observar que el generador produce a máxima potencia en la hora de mayor precio. Se observa también que no desacopla en la hora 4, en la que su beneficio es negativo, por la limitación que impone la rampa de bajada. Esta rampa también limita la producción de la hora 3.

Si el productor es hidroeléctrico y, por tanto, la producción de cada generador está ligada a la de los demás generadores, el problema de la maximización de sus beneficios puede formularse de la manera siguiente:

$$\begin{aligned}
 & \text{maximizar} \\
 & P_{Ght, \forall h, t}; V; Q \\
 & \sum_{t=1}^{24} \left(\lambda_t \sum_{h=1}^{N_H} P_{Ght} \right)
 \end{aligned} \tag{6.92}$$

sujeto a

$$P_{Ght} = P_{Ght}(V_{ht}, Q_{ht}) \quad \forall h, t \tag{6.93}$$

$$AV + BQ = b \tag{6.94}$$

donde

P_{Ght} es la potencia producida por el generador h en la hora t que es función de V_{ht} y de Q_{ht} (variable),

V_{ht} es el volumen del embalse al que está asociado el generador h al comienzo de la hora t (V es el vector que comprende todas las variables V_{ht}) (variable),

Q_{ht} es el volumen turbinado por el generador h durante la hora t (Q es el vector que comprende todas las variables Q_{ht}) (variable),

A, B son matrices de incidencia nudo-rama que permiten expresar la dependencia espacio-temporal del agua almacenada en los embalses (dato),

b es el vector de aportaciones de agua a los embalses y de consumos de los mismos (dato),

N_H es el número de generadores del productor hidroeléctrico (dato).

La función objetivo [ecuación (6.92)] del problema anterior es el ingreso total por venta de la energía que proviene de todos los generadores de la cuenca hidroeléctrica. El coste de operación de los generadores hidroeléctricos se supone nulo.

El primer bloque de restricciones [restricciones (6.93)] establece que la potencia producida por un generador hidroeléctrico depende del volumen del embalse al que está asociado y del caudal de agua turbinada.

El bloque de restricciones matriciales [ecuación (6.94)] representa la relación topológica que establece la cuenca hidráulica y la relación entre el agua almacenada en distintas horas. Este bloque de restricciones se aclara en el Ejemplo 6.12.

Obsérvese que en esta formulación no se ha tenido en cuenta el “valor del agua” almacenada en los embalses al final del periodo de estudio. Si se dispone de esta función, se puede sumar a la función objetivo, de forma que se maximice el beneficio presente y futuro. Sin embargo, la obtención de las funciones de valor del agua no es sencilla, y escapa al alcance de este capítulo.

El problema anterior es un problema de programación no lineal. Si la función $P_{Ght}(\cdot)$ se linealiza, el problema resultante es de programación lineal.

Si el productor incluye generadores térmicos y cuencas hidroeléctricas, la maximización de su beneficio total se descompone tanto por generador térmico como por cuenca hidroeléctrica, y los problemas previamente analizados son de aplicación directa.

El ejemplo siguiente ilustra el problema de la maximización de ingresos al que se enfrenta un productor hidroeléctrico.

Ejemplo 6.12:

Productor precio-aceptante hidroeléctrico.

Se estudia a continuación la respuesta óptima de un productor hidroeléctrico. Se considera un horizonte temporal de 3 horas. Los precios estimados de cierre de mercado para estas 3 horas son:

Hora	1	2	3
Precio [€/MWh]	2	4	3

El productor hidroeléctrico cuenta con una cuenca que tiene dos embalses en cascada, y cada embalse tiene asociado un generador hidroeléctrico. Los volúmenes iniciales de los embalses superior

e inferior son respectivamente 2 y 3 Hm³, y los volúmenes máximo y mínimo de los mismos son respectivamente 10 y 2 Hm³. La aportación hidráulica al embalse superior en cada hora es constante y de valor 1 Hm³, y al embalse inferior la aportación es de 2 Hm³. El límite máximo de volumen horario turbinado para ambos generadores es 4 Hm³. Los parámetros de conversión energía producida-volumen turbinado para los generadores son respectivamente 5 y 8 MWh/Hm³.

Para maximizar sus beneficios, este productor hidroeléctrico ha de resolver el siguiente problema:

$$\begin{aligned}
 & \text{maximizar}_{P_{G11}, P_{G21}, P_{G12}, P_{G22}, P_{G13}, P_{G23}} \\
 & \quad 2(P_{G11} + P_{G21}) + 4(P_{G12} + P_{G22}) + 3(P_{G13} + P_{G23}) \\
 \text{sujeto a } & P_{G11} = 5Q_{11}, \quad P_{G12} = 5Q_{12}, \quad P_{G13} = 5Q_{13} \\
 & P_{G21} = 8Q_{21}, \quad P_{G22} = 8Q_{22}, \quad P_{G23} = 8Q_{23} \\
 & V_{12} = 2 - Q_{11} + 1 \\
 & V_{13} = V_{12} - Q_{12} + 1 \\
 & V_{14} = V_{13} - Q_{13} + 1 \\
 & V_{22} = 3 - Q_{21} + 2 + Q_{11} \\
 & V_{23} = V_{22} - Q_{22} + 2 + Q_{12} \\
 & V_{24} = V_{23} - Q_{23} + 2 + Q_{13} \\
 & 2 \leq V_{12} \leq 10, \quad 2 \leq V_{13} \leq 10, \quad 2 \leq V_{14} \leq 10 \\
 & 2 \leq V_{22} \leq 10, \quad 2 \leq V_{23} \leq 10, \quad 2 \leq V_{24} \leq 10 \\
 & 0 \leq Q_{11} \leq 4, \quad 0 \leq Q_{12} \leq 4, \quad 0 \leq Q_{13} \leq 4 \\
 & 0 \leq Q_{21} \leq 4, \quad 0 \leq Q_{22} \leq 4, \quad 0 \leq Q_{23} \leq 4
 \end{aligned} \tag{6.95}$$

La variable P_{Ght} representa la producción del generador hidroeléctrico h en la hora t , la variable V_{ht} es el volumen del embalse h al comienzo de la hora t , y la variable Q_{ht} es el volumen turbinado por el generador h en la hora t .

Téngase en cuenta que en la formulación anterior no se ha considerado el tiempo que necesita el agua turbinada en el embalse superior para alcanzar el embalse inferior. Si es necesario, estos retrasos pueden modelarse fácilmente.

El primer bloque de restricciones relaciona el agua turbinada y la potencia producida para cada central en cada hora. El segundo bloque establece el balance de agua en cada periodo para el embalse superior. El tercer bloque proporciona información análoga para el embalse inferior. El cuarto bloque establece los límites de los embalses. Por último, el quinto bloque impone límites a los volúmenes turbinados.

Las producciones óptimas de los generadores 1 y 2, en las horas 1, 2 y 3, respectivamente, son:

Producción óptima [MW]			
Hora	1	2	3
Generador 1	0	10	5
Generador 2	16	32	32
Total	16	42	37

Se observa que los generadores no funcionan en todos los periodos a máxima potencia (20 y 32 MW respectivamente) debido a las limitaciones espacio-temporales que impone la cuenca hidráulica.

6.6.2. Productor fijador de precios

Si un productor tiene capacidad para alterar el precio horario de cierre de mercado, utilizará esa capacidad para alterar los precios de la forma que más le convenga, con el objetivo de maximizar sus propios beneficios. Debe tenerse en cuenta que todos los generadores del productor habrán de actuar de forma coordinada, para lograr el precio más favorable y por tanto la maximización del beneficio conjunto, que no equivale a la maximización del beneficio de cada generador actuando de forma independiente. Cuando el productor actúa con el objetivo de alterar en su beneficio los precios de cierre de mercado, habrá de hacerlo sin salirse del marco normativo en el que ha de operar.

En lo que sigue, se considera un productor sólo térmico. Si el productor incluye también generadores hidroeléctricos, el análisis puede extenderse de manera análoga a como se ha hecho al estudiar el productor precio-aceptante.

El problema que afronta un productor fijador de precios puede formularse como sigue:

$$\begin{aligned} & \text{maximizar} \\ & P_{Gjt, \forall j, t}; Q_t, \forall t \\ & \sum_{t=1}^{24} \left[\lambda_t(Q_t) Q_t - \sum_{j=1}^{N_G} C_{jt}(P_{Gjt}) \right] \end{aligned} \quad (6.96)$$

sujeto a

$$Q_t = \sum_{j=1}^{N_G} P_{Gjt} \quad \forall t \quad (6.97)$$

$$P_{Gjt} \in \Delta_{Gj} \quad \forall j, t \quad (6.98)$$

donde

P_{Gjt} es la potencia producida por el generador j (que pertenece al productor) en la hora t (variable),

Q_t es la cuota de mercado del productor en la hora t (variable),

$C_{jt}(P_{Gjt})$ es el coste de producción del generador j (que pertenece al productor) en la hora t (dato),

$\lambda_t(Q_t)$ es una función que expresa el precio de cierre de mercado en función de la cuota del productor para la hora t (dato),

Δ_{Gj} es la región factible de operación del generador j (dato),

N_G es el número de generadores que pertenecen al productor (dato),

La función objetivo [restricción (6.96)] de este problema consta de dos términos: ingresos y costes. Los ingresos son los percibidos por el productor a lo largo de las 24 horas del mercado. Nótese que estos ingresos dependen del nivel de producción del productor y también del precio de cierre del mercado que ese nivel de producción fuerza. Los costes

son los incurridos por cada generador del productor a lo largo del horizonte temporal que abarca el mercado.

El primer bloque de restricciones [restricciones (6.97)] establece el valor de la cuota del productor como suma de la producción de cada uno de sus generadores.

El segundo bloque de restricciones [restricciones (6.98)] fuerza a que cada generador (que pertenece al productor) funcione en su región de operación factible.

La solución de este problema proporciona el nivel óptimo de generación horaria de cada generador (P_{Gjt}^*), así como la cuota óptima (Q_t^*) que alcanza el productor en cada hora y por tanto el precio de cierre de mercado en cada hora del horizonte temporal.

El problema planteado es un problema de programación no lineal entera-mixta de tamaño moderado. Puede linealizarse y resolverse empleando una herramienta de solución de programación lineal entera-mixta. Alternativamente, también es posible relajar las restricciones de integralidad y resolver el problema no lineal resultante.

El siguiente ejemplo ilustra la respuesta óptima al mercado de un productor térmico fijador de precios.

Ejemplo 6.13:

Productor fijador de precios.

Considérese un productor con capacidad de alterar los precios de cierre de mercado. Para las tres horas consideradas, los precios [€/MWh] se alteran de acuerdo con las siguientes funciones lineales:

$$\lambda_1 = 3 - \frac{1}{10}Q_1$$

$$\lambda_2 = 5 - \frac{1}{10}Q_2$$

$$\lambda_3 = 4 - \frac{1}{10}Q_3$$

El productor consta de dos generadores térmicos cuyas características aparecen en la siguiente tabla:

Características	Generador 1	Generador 2
Potencia máxima [MW]	10	8
Potencia mínima [MW]	0	0
Coste [€/MWh]	2	2.5

Nótese que por simplicidad no se consideran restricciones de rampas en ninguno de los dos generadores con los que cuenta el productor.

Teniendo en cuenta que este productor tiene capacidad de alterar los precios de cierre de mercado, el problema que ha de resolver para maximizar sus beneficios es el que se formula y resuelve a continuación:

$$\text{maximizar}_{Q_1, Q_2, Q_3, P_{G11}, P_{G12}, P_{G13}, P_{G21}, P_{G22}, P_{G23}}$$

$$\begin{aligned} & (3 - \frac{1}{10}Q_1)Q_1 + (5 - \frac{1}{10}Q_2)Q_2 + (4 - \frac{1}{10}Q_3)Q_3 \\ & - 2(P_{G11} + P_{G12} + P_{G13}) - 2,5(P_{G21} + P_{G22} + P_{G23}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{sujeto a } Q_1 &= P_{G11} + P_{G21} \\ Q_2 &= P_{G12} + P_{G22} \\ Q_3 &= P_{G13} + P_{G23} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 0 \leq P_{G11} \leq 10, \quad 0 \leq P_{G12} \leq 10, \quad 0 \leq P_{G13} \leq 10 \\ 0 \leq P_{G21} \leq 8, \quad 0 \leq P_{G22} \leq 8, \quad 0 \leq P_{G23} \leq 8. \end{aligned}$$

El primer bloque de restricciones establece la cuota del productor en cada hora. El segundo bloque impone los límites de producción máximo y mínimo de cada generador.

La solución de este problema de programación no lineal es:

Producción óptima [MW]			
Hora	1	2	3
Generador 1	5	10	10
Generador 2	0	2.5	0
Cuota	5	12.5	10

Los precios de cierre de mercado son:

Precios óptimos [€/MWh]			
Hora	1	2	3
Precio	2.50	3.75	3.00

Obsérvese que el productor produce menos del máximo posible, para así mantener los precios suficientemente altos, lo que redundará en un incremento de su propio beneficio.

6.7. La perspectiva del comercializador

Se considera a continuación una empresa comercializadora con capacidad de autoproducción. El objetivo de esta empresa comercializadora es suministrar la energía que tiene comprometida con sus clientes, bien autoproduciendo o bien comprándola en la bolsa. También puede obtener energía de contratos bilaterales. Sin embargo, puesto que los contratos bilaterales se deciden en el largo plazo (1 año), su efecto en el corto plazo es un flujo conocido de energía que puede restarse de la demanda de los clientes. Por tanto, y en aras de la claridad, en lo que sigue no se considera el efecto de los contratos bilaterales.

El problema al que se enfrenta y ha de resolver un comercializador puede expresarse de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} &\text{maximizar} \\ &P_{Gt,\forall t}; P_{Bt,\forall t} \\ &\sum_{t=1}^{24} [\lambda_{Ct} P_{Ct} - C_t(P_{Gt}) - \lambda_t P_{Bt}] \end{aligned} \tag{6.99}$$

$$\begin{aligned} &\text{sujeto a} \\ &P_{Gt} + P_{Bt} = P_{Ct} \quad \forall t \end{aligned} \tag{6.100}$$

$$P_{Gt} \in \Delta_G \quad \forall t \quad (6.101)$$

donde

P_{Gt} es la potencia autoproducida en la hora t (variable),

P_{Bt} es la potencia comprada en la bolsa en la hora t (variable),

λ_{Ct} es el precio de venta a clientes en la hora t (dato),

P_{Ct} es la predicción de la demanda de los clientes en la hora t (dato),

$C_t(P_{Gt})$ es la función de coste de autoproducción durante la hora t (dato),

λ_t es la predicción del precio de cierre de mercado en la hora t (dato),

Δ_G es la región factible de operación del generador de autoproducción (dato).

La función objetivo [ecuación (6.99)] de este problema consta de 3 términos. El primero es el ingreso por venta de energía a los clientes del comercializador durante el periodo de análisis. No depende de las variables de decisión y, por tanto, para llevar a cabo la maximización puede eliminarse de la función objetivo. El segundo término es el coste total de autoproducir y el tercero, el coste total por compra de energía en la bolsa.

El primer bloque de restricciones [ecuaciones (6.100)] establece que el comercializador ha de suministrar cada hora la energía demandada por sus clientes.

El segundo bloque de restricciones [ecuaciones (6.101)] establece que todos los generadores de autoproducción han de trabajar dentro de sus respectivas regiones de operación factibles.

La solución de este problema proporciona para cada hora los niveles óptimos de autoproducción (P_{Gt}^*) y de compra (P_{Bt}^*) en la bolsa.

El problema planteado es un problema de programación lineal entera-mixta de tamaño moderado.

El ejemplo siguiente ilustra el problema que debe resolver un comercializador para maximizar sus beneficios.

Ejemplo 6.14:

Comercializador.

Un comercializador dispone de un generador para autoproducción cuyas potencias máxima y mínima son respectivamente 30 y 10 MW, y su coste de producción es 2 €/MWh. El precio de venta a sus clientes es constante y de valor 4 €/MWh.

La predicción de precios de cierre de mercado, así como las demandas horarias de los clientes, para las cuatro horas consideradas aparecen en la siguiente tabla:

Hora	1	2	3	4
Precio [€/MWh]	2	4	3	1
Demanda [MW]	20	30	40	20

El problema que ha de resolver este comercializador tiene la forma:

maximizar $P_{G1}, P_{G2}, P_{G3}, P_{G4}, P_{B1}, P_{B2}, P_{B3}, P_{B4}$

$$80 + 120 + 160 + 80 - 2(P_{G1} + P_{G2} + P_{G3} + P_{G4}) - 2P_{B1} - 4P_{B2} - 3P_{B3} - P_{B4}$$

$$\begin{aligned}
\text{sujeto a } & P_{B1} + P_{G1} = 20 \\
& P_{B2} + P_{G2} = 30 \\
& P_{B3} + P_{G3} = 40 \\
& P_{B4} + P_{G4} = 20 \\
& P_{B1} \geq 0, P_{B2} \geq 0, P_{B3} \geq 0, P_{B4} \geq 0 \\
& 10u_1 \leq P_{G1} \leq 30u_1, \quad 10u_2 \leq P_{G2} \leq 30u_2 \\
& 10u_3 \leq P_{G3} \leq 30u_3, \quad 10u_4 \leq P_{G4} \leq 30u_4 \\
& u_1, u_2, u_3, u_4 \in \{0, 1\}
\end{aligned}$$

La variable binaria u_t vale 1 si el generador de autoproducción está acoplado en la hora t . La interpretación de los bloques de restricciones es inmediata.

La solución es:

Producciones y compras óptimas [MW]				
Hora	1	2	3	4
Precio [€/MWh]	2	4	3	1
Producción	0	30	30	0
Compra	20	0	10	20

Obsérvese que el comercializador no compra en la bolsa en la hora de mayor precio.

6.8. La perspectiva del consumidor

Un consumidor que es agente del mercado y que por tanto puede participar en la bolsa, puede asimismo tener capacidad de autoproducción. El objetivo de este consumidor es maximizar sus propios beneficios. Éstos se expresan como el valor total que obtiene del uso de la energía (utilidad) menos los costes de autoproducción y de compra en el mercado.

Este problema se puede expresar de la siguiente manera:

$$\begin{aligned}
& \text{maximizar} \\
& P_{Gt, \forall t}; P_{Bt, \forall t}
\end{aligned}$$

$$\sum_{t=1}^{24} [U_t(P_{Dt}) - C_t(P_{Gt}) - \lambda_t P_{Bt}] \tag{6.102}$$

sujeto a

$$P_{Gt} + P_{Bt} = P_{Dt} \quad \forall t \tag{6.103}$$

$$P_{Gt} \in \Delta_G \quad \forall t \tag{6.104}$$

donde

$U_t(P_{Dt})$ es la utilidad que el consumidor obtiene de su consumo de potencia P_{Dt} en la hora t (dato).

El resto de la notación es análogo a aquella empleada al estudiar los comercializadores.

La solución de este problema proporciona las potencias óptimas que el consumidor ha de autoproducir y comprar en la bolsa para maximizar su beneficio.

Obsérvese que este problema es muy similar estructuralmente al problema que afronta un comercializador. A menudo, en la literatura técnica, no se distingue entre ellos.

Este problema es un problema de programación lineal entera-mixta que puede resolverse fácilmente.

Ejemplo 6.15:

Consumidor.

Si en el ejemplo de la respuesta óptima del comercializador se considera que la demanda de los clientes (del comercializador) es la demanda del consumidor y que los pagos de los clientes (del comercializador) son la utilidad del consumidor, el ejemplo resuelto para el comercializador es igualmente válido para el consumidor.

6.9. Resumen y conclusiones

En este capítulo se estudia la operación en el corto plazo del sistema de generación en dos entornos diferentes: (i) un entorno centralizado en el que se busca minimizar costes totales y (ii) un entorno competitivo en el que cada participante busca maximizar sus propios beneficios. En muchos países la industria eléctrica está evolucionando de un entorno centralizado a otro competitivo. Esta es la razón por la que se estudian ambas perspectivas.

En el contexto centralizado se analizan el despacho económico y la programación horaria, y se hace una breve introducción a la coordinación hidrotérmica. En el contexto competitivo se estudian algoritmos de cierre de mercado, así como algunos de los problemas que han de resolver los productores, los consumidores y los comercializadores. Múltiples ejemplos ilustran los modelos y algoritmos que se presentan a lo largo del capítulo.

Bibliografía

- [1] A. Brooke, D. Kendrick, A. Meeraus y R. Raman, *GAMS. A User's Guide*, GAMS Development Corporation, Washington, 1998 (<http://www.gams.com/>).
- [2] GAMS Development Corporation, *GAMS - The Solver Manuals*, GAMS Development Corporation, Washington, 2000.
- [3] The MathWorks, Inc., *MATLAB 6.1*, The MathWorks, Inc., Natick, Massachusetts, 2000 (<http://www.mathworks.com/>).
- [4] L. K. Kirchmayer, *Economic Operation of Power Systems*, John Wiley & Sons, Inc., New York, 1958.
- [5] M. S. Bazaraa, H. D. Sherali y C. M. Shetty, *Nonlinear Programming. Theory and Algorithms*, Second Edition, John Wiley & Sons, Inc., New York, 1993.

- [6] M. D. Ilić, F. D. Galiana y L. H. Fink, *Power System Restructuring: Engineering and Economics*, Kluwer Academic Publishers, Norwell, 1998.
- [7] H. Chao y H. G. Huntington, *Designing Competitive Electricity Markets*, Fred Hillier's International Series in Operations Research & Management Science, Kluwer Academic Publishers, 1998.
- [8] P. Meier y B. F. Hobbs, *Energy Decisions and the Environment - A Guide to the Use of Multicriteria Methods*, Fred Hillier's International Series in Operations Research & Management Science, Kluwer Academic Publishers, 1998.
- [9] G. B. Sheblé, *Computational Auction Mechanisms for Restructured Power Industry Operation*, Kluwer Academic Publishers, Boston, 1999.
- [10] M. Shahidepour y M. Marwali, *Maintenance Scheduling in Restructured Power Systems*, Kluwer Academic Publishers, Norwell, Massachusetts, 2000.
- [11] B. F. Hobbs y cols., editores. *The Next Generation of Unit Commitment Models*, Fred Hillier's International Series in Operations Research & Management Science, Kluwer Academic Publishers, 2001.
- [12] A. Mas-Colell, M. D. Whinston y J. R. Green, *Microeconomic Theory*, Oxford University Press, 1995.
- [13] L. M. Walras, "*Éléments d'Économie Politique Pure; ou la Théorie de la Richesse Sociale*". First Edition, 1874. English translation: *Elements of Pure Economics or The Theory of Social Wealth*, Homewood, Illinois. Published for the American Economic Association and the Royal Economic Society, by R. D. Irwin, 1954.
- [14] S. Dekrajangpetch, G. B. Sheblé y A. J. Conejo, "Auction Implementation Problems Using Lagrangian Relaxation". *IEEE Transactions on Power Systems*, vol. 14, n.º 1, febrero 1999, pp. 82-88.
- [15] F. D. Galiana, A. L. Motto, A. J. Conejo y M. Huneault, "Decentralized Nodal-Price Self-Dispatch and Unit Commitment". Capítulo del libro *The Next Generation of Unit Commitment Models*, B. F. Hobbs et al., editors. Fred Hillier's International Series in Operations Research & Management Science, Kluwer Academic Publishers, 2001.
- [16] A. J. Conejo, F. D. Galiana e I. Kockar, "Z-bus Loss Allocation", *IEEE Transactions on Power Systems*, vol. 16, n.º 1, febrero 2001, pp. 105-110.
- [17] J. M. Arroyo y A. J. Conejo, "Optimal Response of a Thermal Unit to an Electricity Spot Market", *IEEE Transactions on Power Systems*, vol. 15, n.º 3, agosto 2000, pp. 1098-1104.

Capítulo 7

Operación del sistema de transporte

JOSÉ LUIS MARTÍNEZ RAMOS Y VÍCTOR H. QUINTANA

7.1. Introducción

En los comienzos de la ingeniería eléctrica, los sistemas eléctricos de potencia estaban constituidos por generadores aislados que suministraban energía a cierto número de cargas locales. Dicha configuración, relativamente fácil de controlar y supervisar, ha evolucionado hacia los sistemas eléctricos actuales, compuestos por múltiples generadores y centros de consumo interconectados entre sí a través de una red de transporte de alta tensión, compleja tanto por su topología como por la diversidad de los equipos que la componen.

La creciente complejidad de los sistemas eléctricos, con una clara tendencia hacia una mayor interconexión con sistemas adyacentes en busca de disminuir los costes de la electricidad y mejorar la fiabilidad del suministro, así como la progresiva liberalización de las condiciones para establecer tránsitos entre los distintos agentes con el fin de facilitar la competencia en el mercado al por mayor de energía eléctrica, hace indispensable la existencia tanto de centros de explotación de la red, en los que se recopila la información disponible y se realizan las necesarias tareas de supervisión y control, como de personal cualificado capaz de asegurar el suministro eléctrico actual (*Explotación*) y futuro (*Planificación*).

En este capítulo se verán los conceptos, actividades y herramientas propios de la explotación del sistema eléctrico en el contexto de los modernos sistemas de gestión de energía, con especial énfasis en las herramientas encaminadas a corregir posibles problemas en la red de transporte y a optimizar el estado de dicha red.

En primer lugar, y debido a su importancia a la hora de identificar las distintas actividades involucradas en la explotación del sistema eléctrico, se presentará la clasificación de los estados que puede presentar un sistema eléctrico en función de su seguridad, pasando a continuación a presentar las distintas técnicas de *análisis de contingencias*, técnicas cuyo objetivo es determinar el grado de seguridad del sistema eléctrico y que, por tanto, constituyen la base de cualquier análisis de la red tanto en tiempo real como en planificación.

A continuación, antes de entrar en detalle a estudiar las distintas herramientas utilizadas en las actividades de explotación de la red de transporte, y como herramienta fundamental que aparecerá repetidas veces a lo largo del capítulo, se realizará una breve introducción a los *flujos de cargas óptimos*, más conocidos por sus siglas en lengua inglesa: *OPF* (*Optimal Power Flows*).

Por último, y como extensión natural de las herramientas utilizadas en la explotación del sistema eléctrico, se estudiarán las técnicas usadas en los análisis de fiabilidad, de crucial importancia en la planificación de la generación y de la red de transporte.

7.2. Estados del sistema eléctrico

Centrándonos en la explotación del sistema eléctrico, el objetivo de la supervisión y control en tiempo real consiste básicamente en mantener las magnitudes eléctricas, principalmente los flujos de potencia por las líneas y las tensiones de los embarrados, dentro de unos límites predeterminados, corrigiendo los efectos de la evolución en el tiempo de la demanda y las consecuencias de posibles eventos sujetos al arbitrio de la naturaleza e imposibles de prever. En consecuencia, para un operador responsable de la explotación de un sistema eléctrico, la “seguridad” del sistema puede ser cuantificada en términos de la capacidad del mismo para permanecer en un estado admisible, sin violaciones de los límites impuestos a las variables, ante cambios previsibles (evolución de la demanda y de la generación) y ante una serie de sucesos imprevisibles denominados *contingencias*.

La correcta comprensión del papel que juegan las distintas actividades involucradas en la explotación de un sistema eléctrico de potencia implica realizar una clasificación de los posibles estados del sistema en función de la seguridad, clasificación que se basa en la establecida por DyLiacco en [1]. Tomando como punto de partida dicha clasificación, definiremos los estados del sistema que se presentan en la Figura 7.1.

El sistema se encuentra en *estado normal* cuando la demanda es satisfecha y se cumplen las restricciones en las variables, es decir, cuando tanto los generadores como el resto de equipos presentes en la red trabajan dentro de sus límites de operación. Que el sistema se

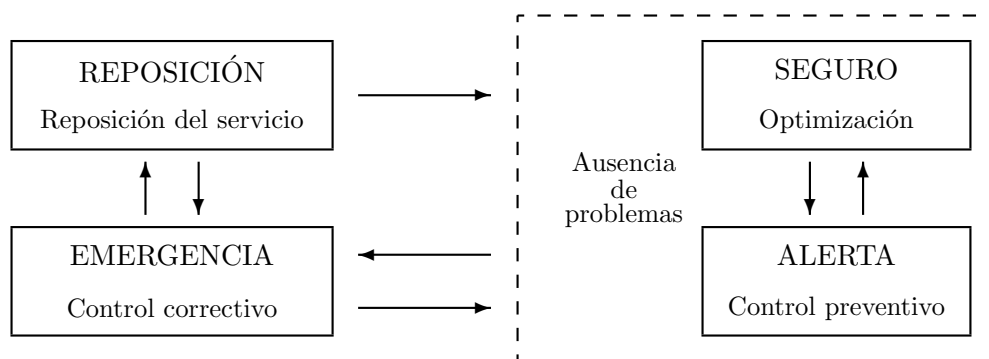


Figura 7.1. Estados operativos de un sistema eléctrico.

encuentre en *estado normal* no garantiza la seguridad del mismo debido a la posibilidad, por otra parte inevitable, de que ocurra un evento que cause violaciones de los límites de las variables, típicamente sobrecargas en líneas de transporte y tensiones fuera de los límites de explotación. Así, se entiende como *estado seguro* aquel en el que se cumplen tanto las restricciones sobre las variables del sistema como determinados criterios de seguridad, criterios que se concretan en la certeza de que ninguna contingencia podrá causar violaciones de límites de variables, al menos de entre una serie de posibles contingencias definidas previamente conforme a las características del sistema concreto. Si no existen violaciones de límites pero no se cumplen los criterios de seguridad impuestos, la red se encontrará en *estado de alerta*.

Si el sistema evoluciona hacia el *estado de emergencia*, entendiendo como tal estado aquel que presenta variables fuera de los límites de explotación, bien por la propia evolución de la demanda o bien por que haya ocurrido una contingencia, será necesario implementar *acciones correctivas* para eliminar las violaciones de límites de explotación y devolver el sistema al estado normal (*control correctivo*). En determinadas circunstancias se podrá producir la interrupción del servicio a usuarios, por actuación de las protecciones o tras la intervención del operador para evitar males mayores (*deslastre de cargas*). En este nuevo estado, el control irá encaminado a la *reposición del servicio* interrumpido, denominándose, por tanto, *estado de reposición*.

Dependiendo del estado del sistema, el objetivo que dirige las actuaciones del operador cambia. Por ejemplo, cuando la integridad del sistema se ha perdido, las actuaciones estarán encaminadas a lograr la reposición del servicio interrumpido en el menor tiempo posible. Dicho objetivo afecta tanto a los controles a utilizar como al diseño mismo de los subsistemas de generación, transporte y distribución para posibilitar la rápida recuperación de sus condiciones operativas.

El objetivo del control correctivo consiste en la devolución del sistema al estado normal, seguro o inseguro, con prioridad absoluta ya que en estado de emergencia las consideraciones económicas son secundarias. Cuando las variables del sistema se encuentran dentro de límites, el objetivo es básicamente económico: minimizar los costes de explotación del sistema, distribuyendo la generación entre las unidades más económicas y minimizando las pérdidas que se producen en el transporte (*optimización*). Si la seguridad del sistema está en entredicho, entra en escena el *control preventivo*. La decisión de llevar a cabo un adecuado control preventivo está siempre ligada al establecimiento de una solución de compromiso entre economía y seguridad, objetivos no siempre concordantes.

Es de destacar, por tanto, la existencia de prioridades que determinan el objetivo que gobierna las actuaciones sobre el sistema, prioridades impuestas principalmente por el estado del sistema y que pueden llegar a ser contradictorias, como es el caso del control preventivo para asegurar la seguridad del sistema frente al mantenimiento del mismo en condiciones óptimas de explotación desde el punto de vista económico.

Por último, cabe resaltar asimismo la importancia fundamental de los sistemas de supervisión y control —denominados genéricamente sistemas SCADA—, junto a herramientas como el *estimador de estado* (Capítulo 4) al permitir el seguimiento de las distintas magnitudes eléctricas en todo momento.

Ejemplo 7.1:**Estados del sistema eléctrico.**

Los dos generadores de la figura suministran una demanda de 200 MW, encontrándose el sistema en la situación mostrada en la Figura 7.2.a, con ambos generadores en *despacho económico* y un coste total de generación de 2800 €/h.

Generador (Nudo)	Coste	P_{\max}	P_{\min}	V_{consigna}	Q_{\max}	Q_{\min}
	€/h	MW	MW	p.u.	Mvar	Mvar
1	$100 + 20 \cdot P$	200	50	1.0	150	-150
3	$200 + 10 \cdot P$	200	50	1.0	150	-150

Línea	Reactancia	P_{\max}
	p.u. ($P_{\text{Base}} = 100 \text{ MVA}$)	MW
1-2	0.1	200
2-3	0.1	200
1-3	0.1	100
Tensiones	$0,95 \leq V \leq 1,05$	

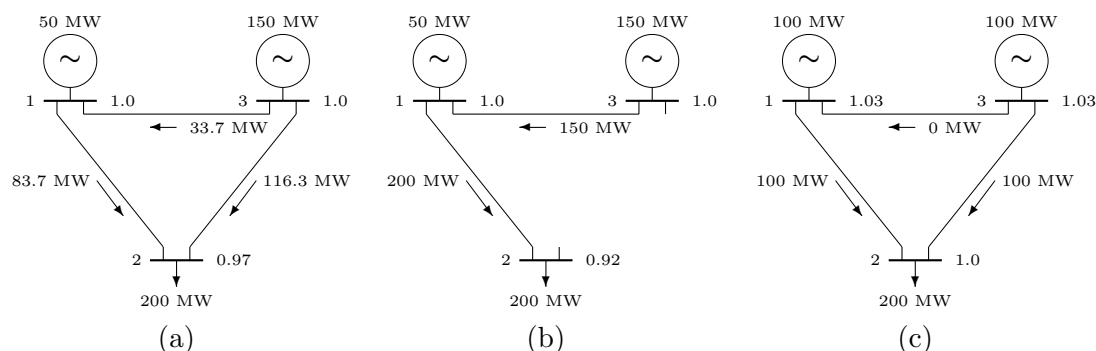


Figura 7.2. Red de tres nudos y dos generadores.

El sistema se encuentra en *estado inseguro*, pues, si se pierde la línea 2-3, el sistema entraría en *estado de emergencia*, con sobrecarga en la línea 1-3 y una tensión excesivamente baja en el nudo de consumo, como se muestra en la Figura 7.2.b. De alcanzarse dicha situación, habría que tomar urgentemente *medidas correctivas*, consistentes en aumentar la potencia del generador del nudo 1 en 50 MW, disminuyendo consiguientemente la potencia del generador del nudo 3 en la misma cuantía, así como aumentar las tensiones de consigna de ambos generadores.

En caso de que no fuera posible implementar dichas medidas correctivas *a posteriori* con la suficiente rapidez, sería necesario adoptar *medidas preventivas* sobre el *caso base* (Figura 7.2.a), pasando a explotar el sistema en el estado representado en la Figura 7.2.c, en *estado seguro* frente a la pérdida de la línea 2-3. Obviamente, la adopción de medidas preventivas (incrementar la potencia del generador 1 en 50 MW y disminuir la del generador 3 en la misma cuantía; aumentar las consignas de tensión de ambos generadores a 1.03 p.u.) implica un mayor coste de explotación (3300 €/h) al ser necesario romper el equilibrio impuesto por el *despacho económico*.

7.3. Evaluación de la seguridad: análisis de contingencias

Conocer el grado de *seguridad* de un sistema eléctrico es un problema de crucial importancia tanto en tareas de planificación como en su explotación diaria. Dejando a un lado los problemas de naturaleza dinámica, tratados en el Capítulo 10, la seguridad del sistema siempre debe ser entendida como seguridad frente a una serie de contingencias determinadas *a priori*, y que, por tanto, condicionan el propio concepto de seguridad y su cuantificación. En este sentido, las contingencias que se consideran normalmente son las siguientes:

- El fallo simple de cualquier elemento del sistema (generador, línea, transformador o reactancia), criterio que se conoce como *N-1*.
- El fallo simultáneo de líneas en doble circuito que comparten apoyos en un tramo considerable de su trazado.
- En situaciones especiales, el fallo del mayor generador de una zona y de una de sus líneas de interconexión con el resto del sistema.

En estudios de planificación del sistema de transporte, más exigentes en cuanto a seguridad que la propia explotación, es habitual considerar el fallo simultáneo de dos elementos cualesquiera del sistema eléctrico, criterio conocido como *N-2*. Asimismo, los análisis de *fiabilidad* o *adecuación* del sistema eléctrico (Sección 7.7), de gran utilidad en las actividades de planificación, están basados en el estudio detallado del sistema ante el fallo de uno o varios elementos, haciendo uso de las probabilidades asociadas.

En consecuencia, un *análisis de seguridad*, más conocido como *análisis de contingencias*, consiste básicamente en realizar múltiples estudios en los cuales se determina el estado de la red tras la pérdida de uno o varios elementos del sistema eléctrico. El análisis de contingencias implica, en principio, realizar un *flujo de cargas* completo para cada una de las contingencias seleccionadas. El problema reside en cómo seleccionar las contingencias a analizar con detalle, a fin de reducir los tiempos de ejecución, para que ninguna contingencia problemática quede fuera de dicho análisis en detalle, y siempre dentro de las limitaciones impuestas al tiempo de ejecución, limitado por los condicionantes propios de la explotación en tiempo real.

Por otra parte, es un hecho generalmente aceptado que, incluso con el algoritmo de flujo de cargas que proporciona mayor rapidez y con los mejores ordenadores, el tiempo necesario para llevar a cabo un análisis de contingencias completo se hace prohibitivo para su utilización en tiempo real y, en muchos casos, colma la paciencia de los ingenieros de planificación. Aunque con el continuo desarrollo de ordenadores cada vez más rápidos dicho convencimiento comienza a dejar de tener justificación, se siguen utilizando diversas técnicas que permiten realizar una selección previa de las contingencias a analizar [2].

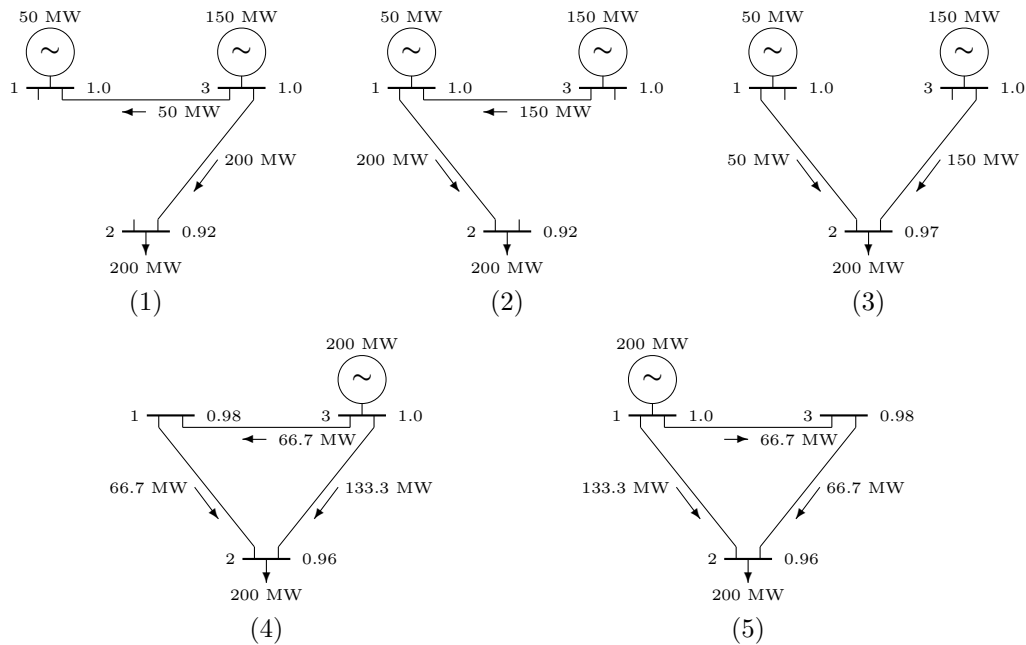
El enfoque actual de los programas de análisis de contingencias consiste, por tanto, en realizar una *preselección* de contingencias en base a un criterio aproximado, analizando posteriormente en detalle las contingencias etiquetadas como problemáticas mediante un flujo de cargas, normalmente un algoritmo *desacoplado rápido* debido a su mayor velocidad frente a otros algoritmos.

Ejemplo 7.2:

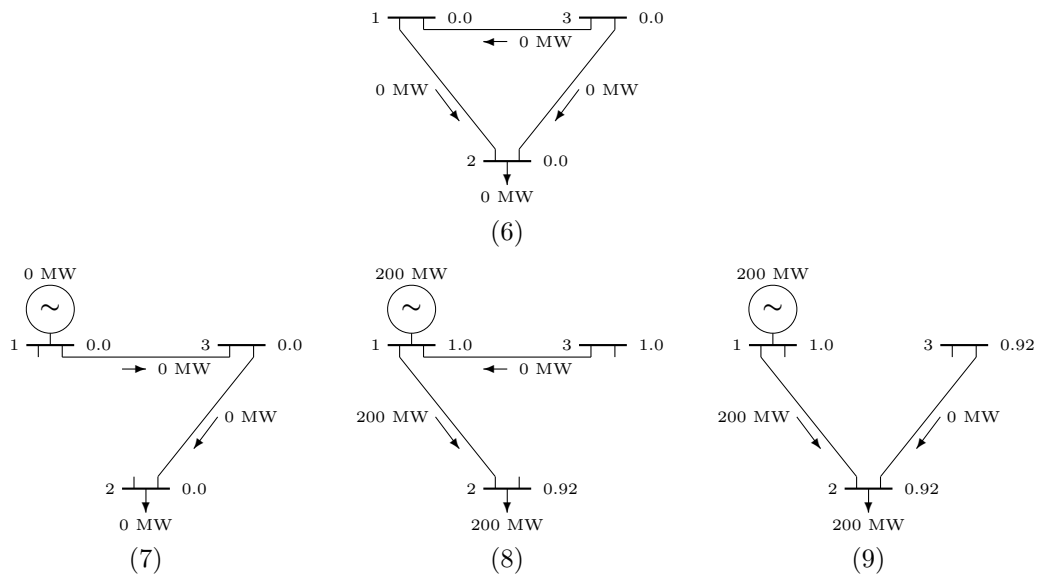
Análisis de contingencias N-1 y N-2.

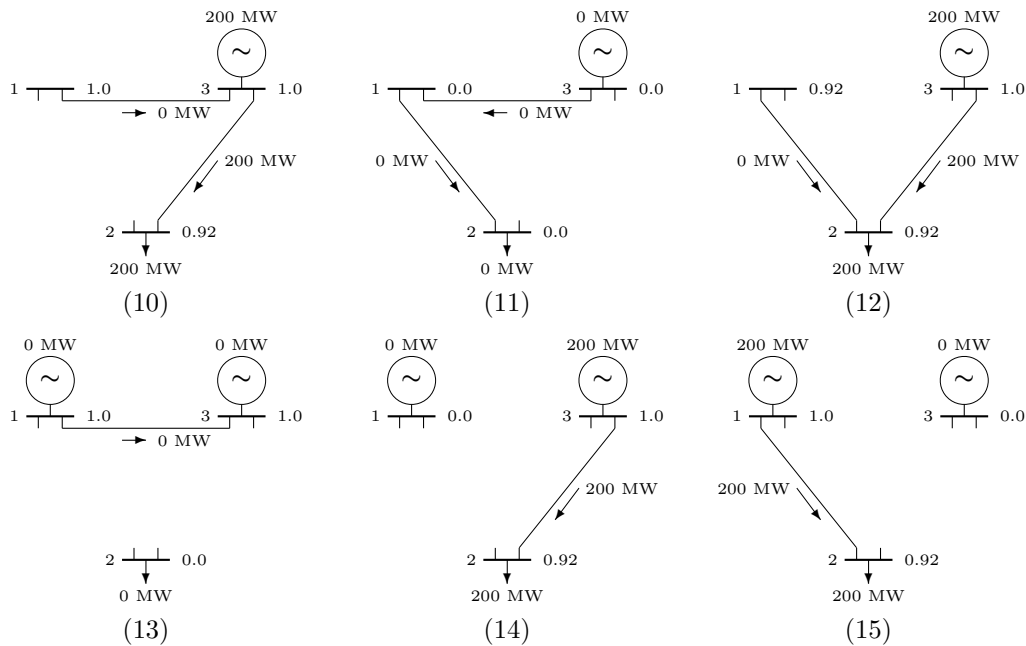
El análisis de contingencias del sistema del Ejemplo 7.1 implica el estudio en detalle de los estados que se muestran a continuación.

Análisis N-1: Para analizar la pérdida de n elementos individualmente, 5 en este ejemplo (2 generadores y 3 líneas), será necesario analizar los 5 casos que se presentan a continuación:



Análisis N-2: Para añadir a los anteriores el análisis de la pérdida de dos elementos cualesquiera de los n elementos del sistema, será necesario estudiar $n \cdot (n - 1) / 2$ nuevos casos (combinaciones de n elementos de orden 2), lo que hace un total de 10 en este ejemplo:





Puede observarse la existencia de diversos estados críticos:

- Los estados 6, 7, 11 y 13 implican un *apagón generalizado* o *blackout*, en los casos 6 y 13 debido a insuficientes recursos de generación y red respectivamente, y en los casos 7 y 11 debido a la falta de recursos de potencia reactiva.
- Los casos 1, 2, 8, 9, 10, 12, 14 y 15 presentan tensiones excesivamente bajas, problema que en el caso 2 se añade a la sobrecarga de la línea 1-3.

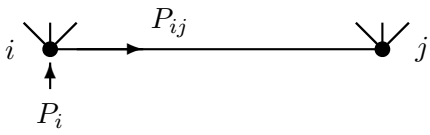
Los primeros algoritmos de preselección de contingencias, aún muy utilizados, se basaban en establecer una clasificación de las contingencias en orden descendente de severidad, clasificación realizada en base a un *índice de severidad* que refleja el nivel de carga de líneas y transformadores tras un determinado evento [4]. La base de estas técnicas es el cálculo de unos *factores de distribución* en base a la linealización del subproblema correspondiente a los flujos de potencia activa, los cuales proporcionan, para cada contingencia, el incremento unitario de potencia en cada línea o transformador. Para calcular, siempre de forma aproximada, el estado de carga de cada elemento tras un determinado evento, basta con multiplicar el factor de distribución correspondiente por la potencia que transportaba la línea o transformador antes del fallo. De igual forma se definen los factores de distribución para fallos de generadores y grandes consumidores.

En la línea de los métodos basados en aproximaciones lineales, algunos autores han propuesto la utilización de factores de distribución para detectar problemas de tensiones anormales. No obstante, el fuerte carácter no lineal del subproblema que relaciona las potencias reactivas con las tensiones permite, al menos, cuestionar las predicciones realizadas. Este hecho, junto con los problemas de enmascaramiento inherentes al uso de índices de severidad, justifican la aparición del segundo grupo de técnicas de preselección de contin-

gencias —conocidas en lengua inglesa como *Contingency Screening*—, técnicas basadas en la obtención aproximada del estado del sistema utilizando un algoritmo iterativo, seguida de la comprobación de sobrecargas y límites de tensión, y de una segunda determinación más exacta del estado resultante en el caso de detectarse sobrecargas o problemas de tensión. La versión más extendida de dichas técnicas consiste en la obtención del estado aproximado en que quedaría la red mediante la realización de una única iteración de un flujo de cargas desacoplado rápido, comprobando la bondad de dicho estado en cuanto a la existencia de límites violados. En la referencia [5] se presenta una comparación de las técnicas más utilizadas.

7.3.1. Análisis de contingencias basado en factores de distribución

Como se puso de manifiesto en el Capítulo 3, apartado 3.6, en redes de transporte es posible utilizar un modelo aproximado para los cálculos que involucran únicamente los flujos de potencia activa: el *flujo de cargas en continua*, cuya principal característica es la linealidad de las ecuaciones que relacionan las potencias activas inyectadas en los nudos con las fases de las tensiones nodales:



$$P_i = \sum_j P_{ij} = \sum_j \frac{V_i \cdot V_j}{x_{ij}} \cdot \text{sen } \theta_{ij} \simeq \sum_j \frac{\theta_i - \theta_j}{x_{ij}} \quad (7.1)$$

donde x_{ij} es la reactancia del elemento que une los nudos i y j .

La relación anterior puede expresarse en forma matricial como $P = B \cdot \theta$, y, en consecuencia, se obtiene una relación lineal entre los flujos de potencia en líneas y transformadores, P_f , y las potencias inyectadas en los nudos:

$$\left. \begin{aligned} A^T \cdot \theta &= X \cdot P_f \\ P_f &= [X^{-1} \cdot A^T] \cdot \theta \\ P &= A \cdot P_f \end{aligned} \right\} \Rightarrow P_f = [X^{-1} \cdot A^T \cdot B^{-1}] \cdot P = S \cdot P \quad (7.2)$$

donde A es la matriz de incidencias nudos-ramas reducida en la fila del nudo de referencia, X es una matriz diagonal de reactancias de líneas y transformadores, y S es la matriz de *sensibilidades* entre los flujos de potencia y las potencias inyectadas en los nudos.

Aplicando el “principio de superposición” de sistemas lineales, los nuevos flujos de potencia tras un cambio en las potencias inyectadas en los nudos se obtienen como:

$$P_f = S \cdot [P + \Delta P] = P_f^0 + S \cdot \Delta P \quad (7.3)$$

Los factores de distribución de la potencia activa inyectada en los nudos se definen como el incremento de potencia en un elemento concreto (línea o transformador) que une los nudos m y n ante un incremento unitario en la potencia inyectada en el nudo i :

$$\rho_{mn}^i = \frac{\Delta P_{mn}^i}{\Delta P_i} = \frac{\Delta \theta_m - \Delta \theta_n}{x_{mn}} = S_{mn,i} \quad (7.4)$$

Los factores de distribución dependen únicamente de la topología de la red, por lo que pueden ser calculados previamente a su utilización mediante técnicas eficientes de matrices dispersas (ver el Apéndice A).

El cambio de potencia en el elemento mn ante un fallo en un generador localizado en el nudo i se obtendrá como sigue:

- Si toda la generación perdida es asumida por el generador de referencia:

$$\Delta P_{mn} = \rho_{mn}^i \cdot \Delta P_i$$

- Si la generación perdida es asumida por el resto de generadores según unos coeficientes de reparto concretos γ_{ji} tal que $\sum_{j \neq i} \gamma_{ji} = 1$:

$$\Delta P_{mn} = \rho_{mn}^i \cdot \Delta P_i - \sum_{j \neq i} \rho_{mn}^j \cdot \gamma_{ji} \cdot \Delta P_i = \Delta P_i \cdot \left(\rho_{mn}^i - \sum_{j \neq i} \rho_{mn}^j \cdot \gamma_{ji} \right)$$

Ejemplo 7.3:

Aplicación de factores de distribución a la pérdida de un generador.

Supóngase que el sistema de la Figura 7.3 sufre el fallo repentino del generador del nudo 3.

Nudo	P_D	Q_D	P_G	P_{max}	P_{min}	$V_{consigna}$	Q_{max}	Q_{min}
	MW	Mvar	MW	MW	MW	p.u.	Mvar	Mvar
1	1 500	750	-	-	-	-	-	-
2	500	250	-	-	-	-	-	-
3	0	0	1 000	1 500	250	1.05	750	-750
4	0	0	750	1 500	250	1.05	750	-750
5	0	0	309	1 000	250	1.05	500	-500
Tensiones	0,95 ≤ V ≤ 1,05							

Línea	Resistencia	Reactancia	Susceptancia	P_{max}	P_f	
	p.u. ($P_{base} = 100$ MVA)			MW	Origen	Extremo
L1 1-2	0.002	0.01	0.002	1 000	96	-96
L2 1-3	0.004	0.02	0.004	1 000	-699	721
L3 1-4	0.002	0.01	0.002	1 000	-897	920
L4 2-5	0.004	0.02	0.004	1 000	-404	414
L5 3-4	0.004	0.02	0.004	1 000	279	-276
L6 4-5	0.004	0.02	0.004	1 000	106	-105

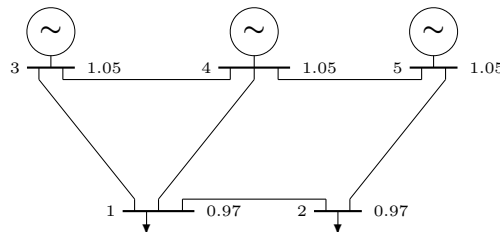


Figura 7.3. Red de 5 nudos y 3 generadores.

Las matrices A , X y B permiten obtener la matriz de sensibilidades, S , según la ecuación 7.2:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \quad X = \begin{bmatrix} 0,01 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0,02 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0,01 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0,02 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0,02 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0,02 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 250 & -100 & -50 & -100 \\ -100 & 150 & 0 & 0 \\ -50 & 0 & 100 & -50 \\ -100 & 0 & -50 & 200 \end{bmatrix}$$

Obteniéndose

$$S = X^{-1} \cdot A^T \cdot B^{-1} = \begin{bmatrix} 0,4828 & -0,3448 & 0,4138 & 0,3448 \\ 0,1034 & 0,0689 & -0,4828 & -0,0689 \\ 0,4138 & 0,2759 & 0,0689 & -0,2759 \\ 0,4828 & 0,6552 & 0,4138 & 0,3448 \\ 0,1034 & 0,0689 & 0,5172 & -0,0689 \\ 0,5172 & 0,3448 & 0,5862 & 0,6552 \end{bmatrix}$$

Si toda la potencia que suministraba el generador 3 la asume el generador de referencia o *slack*, nudo 5, el vector de cambios en las potencias inyectadas en los nudos y los correspondientes incrementos de los flujos de potencia resultan:

$$\Delta P_i^T = [0 \quad 0 \quad -1000 \quad 0] \quad \Delta P_f^T = [-414 \quad 483 \quad -69 \quad -414 \quad -517 \quad -586]$$

Los incrementos que sufren los flujos de potencia tras la pérdida del generador se muestran en la Tabla 7.1 junto a los valores reales obtenidos con un flujo de cargas. Como puede observarse, los errores cometidos son aceptables de cara a detectar la existencia de problemas en el caso analizado.

En la práctica, ante el fallo de un generador son varios los generadores que asumen el déficit de potencia debido a la actuación de la regulación de frecuencia de forma automática en primera instancia. En concreto, en este ejemplo el generador de referencia no tiene capacidad para suministrar 1 250 MW más las pérdidas que se le asignan tras el fallo del generador del nudo 3. Supongamos, por tanto, que el déficit de potencia es asumido por los generadores restantes en función de su capacidad de generación, criterio bastante habitual en la práctica. En este caso, corresponderían 600 MW al generador 4 (potencia máxima de 1 500 MW) y 400 MW al generador 5 (potencia máxima de 1 000 MW). El vector de cambios en las potencias netas en los nudos y los incrementos de los flujos de potencia correspondientes resultan ahora:

$$\Delta P_i^T = [0 \quad 0 \quad -1000 \quad 600] \quad \Delta P_f^T = [-207 \quad 441 \quad -234 \quad -207 \quad -559 \quad -193]$$

Los incrementos que sufren los flujos de potencia en este caso se muestran en la Tabla 7.1. Nótese que aparece una sobrecarga en la línea 1-4, sobrecarga que se detecta si no se modela la intervención de la regulación de frecuencia en el reparto del déficit de potencia.

Cuadro 7.1. Flujos de potencia en el Ejemplo 7.3.

Línea	Caso base		Pérdida asumida por el generador 5					Pérdida asumida por los generadores 4 y 5				
	P_{ij}	P_{ji}	Flujo de cargas				FD	Flujo de cargas				FD
			P_{ij}	P_{ji}	ΔP_{ij}	ΔP_{ji}	ΔP_{ij}	P_{ij}	P_{ji}	ΔP_{ij}	ΔP_{ji}	
1-2	96	-96	-294	296	-390	392	-414	-104	104	-200	201	207
1-3	-699	721	-241	245	458	-476	483	-279	284	420	-438	441
1-4	-897	920	-965	994	-68	74	-69	-1 117	1 152	-219	231	-234
2-5	-404	414	-796	830	-392	416	-414	-604	626	-201	212	-207
3-4	279	-276	-245	248	-524	524	-517	-284	288	-562	564	-559
4-5	106	-106	-492	502	-598	608	-586	-89	90	-195	196	-193

En el caso de contingencias debidas a la pérdida de una línea o transformador, los incrementos de potencia en el resto de elementos se pueden obtener mediante la aplicación del “teorema de compensación” para sistemas lineales, como se muestra en la Figura 7.4. Así, los cambios en los flujos debidos a la pérdida del elemento que une los nudos i y j , por el que circulaba una potencia P_{ij}^0 previamente al fallo, se obtendrán de:

$$P_f = P_f^0 + S' \cdot \Delta P_i \tag{7.5}$$

Obsérvese que la matriz S' se obtiene modificando el sistema original, matrices A y X , para eliminar el elemento ij , y que el vector de incrementos ΔP_i contiene únicamente la potencia P_{ij}^0 en los nudos i y j :

$$\Delta P_f = S' \cdot \Delta P_i \quad \text{con} \quad \Delta P_i^T = [0 \quad \dots \quad \overbrace{P_{ij}^0}^i \quad \dots \quad \overbrace{-P_{ij}^0}^j \quad \dots \quad 0]$$

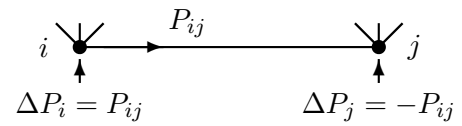
El factor de distribución del elemento que une los nudos m y n ante la pérdida del elemento que une los nudos i y j , y que transportaba una potencia P_{ij}^0 , se obtiene, por tanto, como:

$$\rho_{mn}^{ij} = \frac{\Delta P_{mn}^{ij}}{P_{ij}^0} = S'_{mn,i} - S'_{mn,j} \tag{7.6}$$

El método anterior presenta el inconveniente de tener que refactorizar el sistema de ecuaciones para obtener los factores de distribución modificados:

$$S' = (X')^{-1} \cdot (A')^T \cdot (B')^{-1}$$

En consecuencia, resulta más práctico obtener los factores de distribución en base a los términos de la matriz original S , modelando la pérdida de la línea o transformador mediante dos inyecciones de potencia ficticias en los nudos extremos iguales al flujo de potencia por la línea tras la contingencia:



$$P_{ij} = P_{ij}^0 + S_{ij,i} \cdot \Delta P_i + S_{ij,j} \cdot \Delta P_j = P_{ij}^0 + (S_{ij,i} - S_{ij,j}) \cdot P_{ij} \tag{7.7}$$

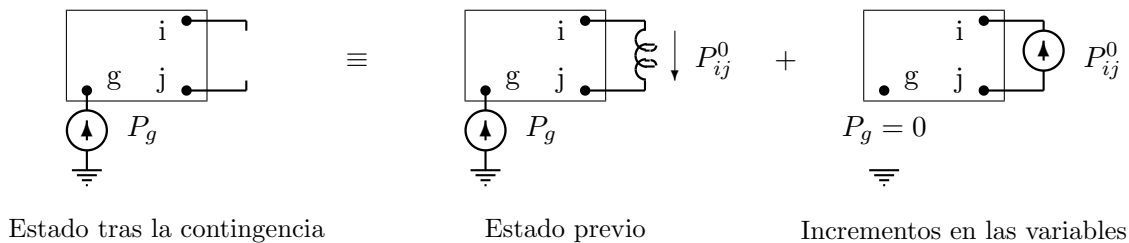


Figura 7.4. Aplicación de compensación a la pérdida de una línea o transformador.

De donde se deduce el valor que han de tener las inyecciones ficticias en los extremos del elemento que pasa a estar indisponible:

$$\Delta P_i = -\Delta P_j = \frac{P_{ij}^0}{1 - S_{ij,i} + S_{ij,j}} \quad (7.8)$$

En base a dichas inyecciones, el flujo de potencia en la línea que une los nudos m y n tras la pérdida de la línea ij se obtendrá como

$$P_{mn} = P_{mn}^0 + S_{mn,i} \cdot \Delta P_i + S_{mn,j} \cdot \Delta P_j = P_{mn}^0 + (S_{mn,i} - S_{mn,j}) \cdot \Delta P_i \quad (7.9)$$

y el factor de distribución correspondiente, ρ_{mn}^{ij} ,

$$\rho_{mn}^{ij} = \frac{\Delta P_{mn}^{ij}}{P_{ij}^0} = \frac{S_{mn,i} - S_{mn,j}}{1 - S_{ij,i} + S_{ij,j}} \quad (7.10)$$

Evidentemente, ambos métodos son equivalentes y proporcionan idénticos factores de distribución.

Ejemplo 7.4:

Aplicación de factores de distribución a la pérdida de una línea.

Supóngase que el sistema del Ejemplo 7.3 sufre la pérdida repentina de la línea 1-3. Modificando adecuadamente las matrices A , X y B para reflejar la pérdida de la línea, se obtiene la nueva matriz de sensibilidades a las potencias inyectadas en los nudos:

$$S' = (X')^{-1} \cdot (A')^T \cdot (B')^{-1} = \begin{bmatrix} 0,5 & -0,3333 & 0,3333 & 0,3333 \\ 0,5 & 0,3333 & -0,3333 & -0,3333 \\ 0,5 & 0,6667 & 0,3333 & 0,3333 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0,5 & 0,3333 & 0,6667 & 0,6667 \end{bmatrix}$$

con lo que los factores de distribución resultan:

$$\rho^{1-3} = S' \cdot [1 \ 0 \ -1 \ 0]^T = [0,1667 \ 0,8333 \ 0,1667 \ -1 \ -0,1667]^T$$

Multiplicando los factores de distribución por el flujo de potencia que circulaba por la línea fallada (se ha tomado la potencia real en el origen de la línea, $P_{L2} = -699$), se obtienen los incrementos en los flujos de potencia por el resto de líneas como consecuencia de dicho fallo (Tabla 7.2).

Como se ha visto anteriormente, una alternativa a modificar las matrices para reflejar la pérdida de una línea consiste en sustituir dicha modificación por dos inyecciones ficticias en los extremos de la línea fallada, de valor:

$$\Delta P_1 = -\Delta P_3 = \frac{1}{1 - S_{L2,1} + S_{L2,3}} = 2,417$$

donde se ha utilizado $P_{L2}^0 = 1$.

Los factores de distribución se obtienen a partir de la matriz de sensibilidades original, S , como:

$$\rho^{L2} = S \cdot [2,417 \ 0 \ -2,417 \ 0]^T = [0,1667 \ 1,417 \ 0,8333 \ 0,1667 \ -1 \ -0,1667]^T$$

Cuadro 7.2. Flujos de potencia en el Ejemplo 7.4.

Línea	Caso base		Pérdida de la línea L2 (1-3)				
	P_{ij}	P_{ji}	Flujo de Cargas				FD
			P_{ij}	P_{ji}	ΔP_{ij}	ΔP_{ji}	
1-2	963	-96	-53	53	-149	149	-109
1-3	-699	721	0	0	699	-721	
1-4	-897	920	-1 447	1 506	-550	586	-545
2-5	-404	414	-553	576	-149	162	-109
3-4	279	-276	1 000	-964	721	-688	655
4-5	106	-106	207	-204	102	-98	109

Obsérvese cómo a todos los efectos la línea fallada sigue existiendo en el modelo, con el correspondiente factor de distribución $\rho_{L2}^{L2} = 1,417$. Obviamente, el resto de factores de distribución toman los mismos valores que en el caso anterior.

Un método muy utilizado para seleccionar las contingencias a analizar en detalle con un flujo de cargas consiste en establecer una clasificación de las contingencias en orden descendente de severidad, clasificación realizada en base a un *índice de severidad* que refleja el nivel de carga de líneas y transformadores tras un determinado evento, por ejemplo:

$$IS = \frac{1}{b} \sum_{k=1}^b \left(\frac{|P_f|}{P_f^{\max}} \right) \quad (7.11)$$

donde P_f es la potencia en el elemento, de un total de b líneas y transformadores, potencia obtenida de forma aproximada mediante los factores de distribución calculados previamente. En este caso, el índice de severidad definido no es sino la carga media de los elementos del sistema.

En la práctica, se han propuesto múltiples variantes de índices de severidad, incluyendo factores de ponderación para dar más importancia a unos elementos frente a otros.

Una vez obtenidos los índices de severidad para cada contingencia, éstas pueden ser clasificadas en orden descendente de gravedad. De esta forma, se comienza a analizar en detalle la contingencia etiquetada como más severa, bajando en la lista hasta que no se encuentren problemas en la última contingencia analizada (Figura 7.5).

El principal inconveniente de los métodos basados en índices de severidad, junto a los errores introducidos por los factores de distribución, recae en la posibilidad de “enmascarar” una determinada contingencia problemática debido a condensar en un solo valor la suma ponderada del estado de carga de todas las líneas de la red, enmascaramiento que se concretaría en dar prioridad a una contingencia que, pese a provocar sobrecargas “leves” en múltiples elementos, da lugar a un índice de severidad mayor que una contingencia crítica en cuando a la magnitud de las sobrecargas que provoca.

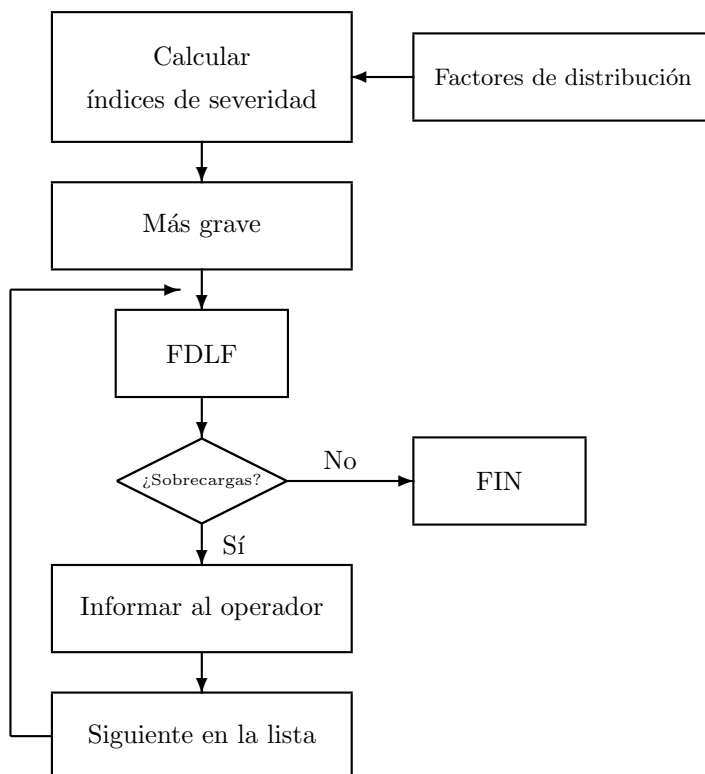


Figura 7.5. Análisis de contingencias basado en índices de severidad.

Ejemplo 7.5:

Análisis de contingencias mediante índices de severidad.

Supóngase que se elige como índice de severidad para reflejar el estado tras la pérdida de un elemento en la red del Ejemplo 7.3 el nivel medio de carga de los elementos, definido por la ecuación (7.11), que en el caso base es de 0.413.

Calculando los incrementos en los flujos de potencia mediante los correspondientes factores de distribución para cada una de las 8 contingencias de nivel N-1 (se supondrá que el generador de referencia no puede fallar), asumiendo que el generador de referencia es el encargado de suplir cualquier posible falta de generación, y teniendo en cuenta el estado de partida (se ha tomado como carga de cada línea la potencia en el origen de la línea), se obtienen los siguientes índices de severidad:

Contingencia	G3	G4	L1	L2	L3	L4	L5	L6
IS	0.506	0.480	0.417	0.537	0.504	0.499	0.367	0.410

Dichos índices permiten clasificar los estados en orden descendente de severidad: L2, G3, L3, L4, G4, L1, L6 y L5.

El análisis en detalle de los estados “problemáticos” mediante un flujo de cargas, de mayor a menor severidad, proporciona los siguientes valores de potencia en cada línea (origen y extremo):

Caso	L1		L2		L3		L4		L5		L6		Sobrecargas
	1	2	1	3	1	4	2	5	3	4	4	5	
L2	-53	53	0	0	-1 447	1 506	-553	576	1 000	-963	207	204	L3 y (L5)
G3	-294	296	-241	245	-965	994	-796	830	-245	248	-492	502	-
L3	-352	359	-1 148	1 240	0	0	-859	918	-240	243	507	-497	L2
L4	508	-500	-782	818	-1 226	1 271	0	0	182	-180	-341	345	L3
G4	-153	153	-655	681	-692	705	-653	677	319	-314	-392	399	-
L1	0	0	-680	701	-820	841	-500	513	299	-296	205	-203	-
L6	198	-197	-720	743	-979	1 004	-302	310	257	-254	0	0	(L3)
L5	138	-137	-960	1 000	-677	695	-362	372	0	0	55	-55	-

Generalmente, el análisis se hubiera detenido tras detectar un caso sin sobrecargas (G3), dejando sin analizar contingencias muy graves como la pérdida de las líneas L3 y L4. Este problema, conocido como *enmascaramiento*, es inherente al uso de índices de severidad por la propia naturaleza de dichos índices.

7.3.2. Análisis de contingencias basado en flujos de cargas

Como ha quedado de manifiesto en el apartado anterior, la utilización de factores de distribución proporciona buenos resultados en el análisis de sobrecargas debidas a cambios en las inyecciones nodales —cambios que pueden corresponder indistintamente a la pérdida de un generador, una carga o al incremento súbito de la demanda en un nudo— siendo extensible al análisis de la pérdida de una línea o transformador mediante la aplicación de compensación al sistema lineal que modela la red eléctrica. Sin embargo, dichas técnicas no son adecuadas para analizar las tensiones anormales que pueden aparecer tras una contingencia, debido tanto al fuerte carácter no lineal del problema que relaciona las inyecciones de potencia reactiva con las tensiones como a la magnitud de los cambios que genera una contingencia.

Una alternativa cada vez más utilizada consiste en aprovechar un flujo de cargas normalmente un algoritmo desacoplado rápido por su mayor velocidad de ejecución, para realizar un estudio aproximado del estado poscontingencia, tomando como valores de partida para las tensiones nodales (módulo y fase) los valores previos a la pérdida del elemento [5]. Normalmente, basta una iteración completa del algoritmo, a lo sumo dos en contingencias muy problemáticas, para obtener una buena aproximación del estado en que queda la red.

El método se basa en comprobar los límites de las variables sobre el estado aproximado obtenido tras realizar una única iteración del flujo de cargas, y, si se detectan posibles problemas, continuar el algoritmo iterativo hasta su convergencia final, comprobando entonces con exactitud la presencia de sobrecargas y/o tensiones fuera de límites.

La estructura de este grupo de algoritmos, normalmente denominados *1P-1Q* por realizar una iteración completa de un algoritmo desacoplado rápido —algoritmo que comprende una iteración sobre las fases y una sobre las tensiones de los nudos— se presenta en la Figura 7.6.

Obviamente, la principal ventaja de las técnicas basadas en flujos de cargas frente al análisis basado en índices de severidad consiste en que se analizan todas las contingencias, sin realizar una preselección previa basada en una ordenación según la gravedad de los

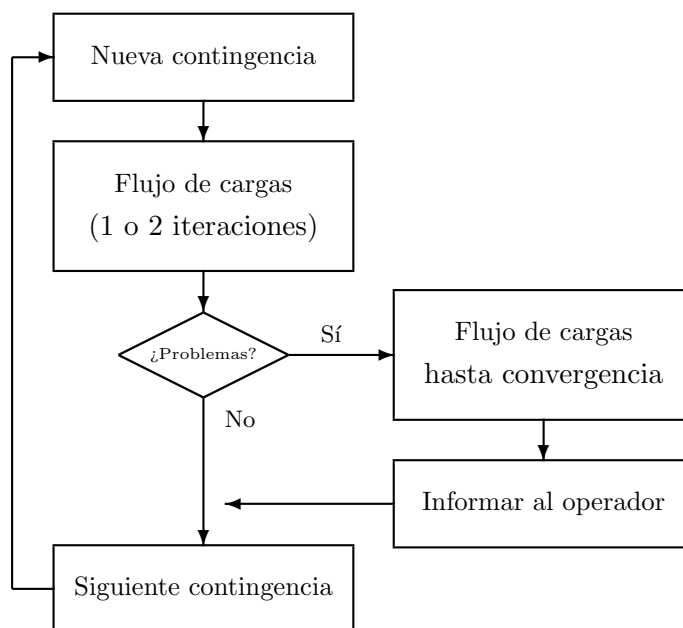


Figura 7.6. Análisis de contingencias basado en un flujo de cargas.

problemas tras la contingencia (obtenidos en forma aproximada), aunque sigue existiendo la posibilidad de errores de identificación debido a que los flujos y las tensiones corresponden a valores aproximados, obtenidos tras una única iteración de un flujo de cargas.

Ejemplo 7.6:

Análisis de contingencias basado en flujos de cargas.

En este ejemplo se analizarán mediante un flujo de cargas desacoplado rápido las contingencias de nivel N-1 (excepto el fallo del generador de referencia) del sistema definido en el Ejemplo 7.3. Tras la primera iteración completa del algoritmo, siempre partiendo del estado previo al fallo, se realiza una primera comprobación de problemas con los valores aproximados obtenidos en base a las tensiones nodales, continuando con el proceso iterativo en caso de problemas, tal y como se representa en la Figura 7.6.

A efectos de evaluar la exactitud de los resultados obtenidos tras una única iteración del flujo de cargas, se muestran en la Tabla 7.3 los valores de los flujos de potencia y de las tensiones tras la primera iteración y tras la convergencia, para las contingencias consistentes en el fallo de la línea L2 y del generador G3. La convergencia para un error en los residuos de potencia inferior a 0.1 MVA se produce en 3 iteraciones en los dos casos.

Como puede observarse, los valores tras la primera iteración proporcionan una estimación bastante aproximada de los valores finales, permitiendo detectar la sobrecarga de las líneas L3 y L5 cuando se pierde la línea L2, y posibles problemas en la línea L3 tras el fallo del generador G3, problemas que no se presentan finalmente con los valores exactos. En lo que respecta a las tensiones, es de destacar cómo una única iteración en el caso del fallo del generador G3 no es capaz de detectar problemas con las tensiones de los nudos 1 y 2. Este hecho hace pensar en la conveniencia de

Cuadro 7.3. Flujos de potencia y tensiones tras una iteración y tras alcanzar la convergencia.

Potencias	Pérdida de L2				Pérdida de G3			
	1 iteración		Convergado		1 iteración		Convergado	
	Origen	Extremo	Origen	Extremo	Origen	Extremo	Origen	Extremo
L1	-52	53	-52	53	-257	258	-293	295
L2	0	0	0	0	-214	217	-239	243
L3	-1 376	1 428	-1 447	1 506	-971	1 000	-962	991
L4	-543	564	-553	576	-782	811	-797	831
L5	1 020	-982	1 000	-963	-278	282	-245	249
L6	171	-169	207	-203	-481	490	-495	505
Tensiones								
1		0.9165		0.9095		0.9609		0.9201
2		0.9354		0.9297		0.9622		0.9342
3		1.0500		1.0500		1.0034		0.9612
4		1.0164		1.0144		1.0500		1.0044
5		1.0500		1.0500		1.0500		1.0500

Cuadro 7.4. Información proporcionada por el análisis de contingencias.

Elemento fallado	1 iteración	Tras convergencia	Iteraciones
G3	Sobrecarga de L3	Tensiones bajas en N1 y N2	3
G4	Tensión baja en N1	Tensión baja en N1	2
L1	Sin problemas	Sin problemas	1
L2	Sobrecarga de L3 y L5 Tensiones bajas en N1 y N2 G4 en límite de reactiva	Sobrecarga de L3 y (L5) Tensiones bajas en N1 y N2 G4 en límite de reactiva	3
L3	Sobrecarga de L2 Tensiones críticas en N1 y N2	Sobrecarga de L2 Tensiones críticas en N1 y N2 G3 en límite de reactiva	5
L4	Sobrecarga de L3 Tensiones bajas en N1 y N2	Sobrecarga de L3 Tensión muy baja en N1 y N2 G4 en límite de reactiva	4
L5	Sin problemas	L2 próxima al límite	2
L6	L3 en límite	L3 en límite	1

realizar dos iteraciones para comprobar posibles problemas con las tensiones, especialmente cuando se producen sobrecargas de generadores, como es el caso tras la pérdida de la línea L2.

El análisis de contingencias completo proporcionaría la información mostrada en la Tabla 7.4. Se puede observar cómo, en general, la comprobación de límites tras la primera iteración permite detectar problemas en la mayoría de las contingencias, excepto algunos problemas de tensiones (G3) y generadores en límite de reactiva (L3, L4).

Por otra parte, diversas técnicas han sido propuestas sobre la base de calcular únicamente las variables realmente afectadas por cada contingencia [6], determinando la zona afectada y resolviendo iterativamente las ecuaciones de dicha zona. Dichas técnicas pueden ser incorporadas no sólo en la preselección de las contingencias sino en el propio algoritmo de flujo de cargas para analizar las contingencias críticas [7]. En cualquier caso, y al igual que ocurre actualmente con las técnicas de preselección de contingencias, el continuo avance en la potencia de cálculo de los ordenadores, junto a la propia complejidad de los algoritmos involucrados, permite cuestionar la necesidad de incorporar dichas técnicas.

7.4. Flujos de cargas óptimos

El problema de la optimización en sistemas eléctricos de potencia surge a partir del momento en que dos o más unidades de generación deben alimentar varias cargas, obligando al operador a decidir cómo se reparte la carga de forma óptima entre las distintas unidades.

Históricamente, los primeros esfuerzos de optimización se hicieron respecto al control de la generación, lo que se conoce hoy día con el nombre de *despacho económico clásico*, problema en el que se determinan las potencias de las distintas unidades en aras a minimizar los costes de generación, manteniendo los flujos de potencia en las líneas dentro de límites (Capítulo 6). Pronto se comprendió que la optimización de potencia activa no era suficiente. De hecho, una mala gestión de la potencia reactiva puede hacer impracticables los flujos óptimos de potencia activa determinados, aumentando los costes. Asimismo, un adecuado control de la potencia reactiva disminuye las pérdidas para una generación de potencia activa prefijada, lo cual reduce aún más los costes. Posteriormente, la inclusión de criterios de seguridad dentro de los objetivos de explotación complicó en gran medida el problema de la optimización, obligando al desarrollo de técnicas adecuadas a la complejidad del problema.

El perfeccionamiento de las técnicas computacionales, fundamentalmente la introducción de técnicas para el tratamiento eficiente de matrices dispersas —presentadas en el Apéndice A— y nuevos algoritmos matemáticos de optimización, junto a la mayor potencia de los ordenadores, ha permitido la resolución de problemas cada vez más complejos. Esta evolución ha conducido a lo que hoy se conoce con el nombre de *flujo de cargas óptimo* —conocido como *OPF (Optimal Power Flow)* en lengua inglesa—, el cual permite optimizar distintas funciones escalares sujetas a las ecuaciones de la red eléctrica y a restricciones en las variables. En el contexto de la programación de la generación también es conocido como *reparto óptimo de cargas*, adoptando el sentido de un “reparto” o asignación óptima del consumo entre los distintos generadores.

El OPF se ha convertido en una herramienta imprescindible en la explotación y planificación de los sistemas eléctricos de potencia. En explotación, un OPF permite determinar valores óptimos de las variables eléctricas, considerando todas las restricciones y límites. Basándose en estos valores óptimos, los operadores realizan las maniobras necesarias para conseguir la explotación óptima del sistema siguiendo las variaciones de la demanda. En planificación, el OPF se emplea para estudiar los efectos que los cambios en la red producen sobre el estado óptimo del sistema.

Las primeras versiones de OPF datan de los comienzos de los años sesenta del pasado siglo como consecuencia del desarrollo experimentado por las técnicas de optimización de problemas no lineales [8, 9]. A partir de entonces, la aparición de nuevas versiones del OPF ha seguido paralela al desarrollo de nuevas técnicas numéricas de optimización, dando lugar a múltiples variantes debidas a la idiosincrasia propia del problema. La variedad de técnicas aplicadas —la referencia [10] constituye una aceptable recopilación bibliográfica de dichas técnicas— evoluciona desde los métodos basados en el *gradiente reducido generalizado* [8], al *método de Newton* [11], la *programación cuadrática secuencial* [12], la *programación lineal secuencial* [13], y, más recientemente, las técnicas de *punto interior* [14], con múltiples variantes propuestas de cada método. La mayoría de los OPF comercializados actualmente se basan en las cuatro últimas técnicas.

A continuación, se realizará una breve presentación de la problemática asociada al OPF, remitiendo al lector interesado a las referencias específicas sobre la materia [15, 16].

Formulación del problema

El planteamiento matemático más general de un problema de optimización en el contexto de un sistema de energía eléctrica conduce a la siguiente formulación:

$$\begin{array}{ll} \text{Minimizar} & f(x, u) \\ \text{sujeto a} & h(x, u) = 0 \\ & g(x, u) \geq 0 \end{array}$$

donde u es el conjunto de variables de control, x las variables dependientes, f la función objetivo a minimizar y h y g representan respectivamente el conjunto de restricciones de igualdad (ecuaciones de la red) y de desigualdad (límites en las variables).

Concretar cualquier problema de optimización de los que aparecen diariamente en la explotación de un sistema eléctrico bajo la forma de ecuaciones matemáticas no es una tarea fácil, implicando en principio:

1. Obtener un modelo matemático adecuado del sistema eléctrico a optimizar, así como de los equipos que constituyen las variables de control del problema, problemas tratados en los Capítulos 2 y 3.
2. Modelar los límites y restricciones del problema en forma matemática, incluyendo consideraciones de carácter heurístico impuestas por las preferencias y criterios de operación.
3. Expresar una o varias ideas que conforman lo que se considera “explotación óptima del sistema” en la forma de una función escalar de las variables del problema, función que será el objetivo a minimizar o maximizar en el problema de optimización.

Función objetivo

No es una cuestión fácil describir el estado óptimo de un sistema eléctrico mediante una función escalar, debido principalmente a los múltiples factores que pueden ser considerados atributos deseables de la solución. Obviamente, el primer objetivo de la explotación consiste en eliminar las posibles violaciones de límites que existan en la red. Asimismo, sería deseable que el sistema permaneciera en *estado normal* ante determinadas contingencias, lo que siempre tendrá asociado un coste económico. Así, mientras algunos sistemas eléctricos se explotan en la forma más económica posible, imponiendo restricciones únicamente sobre el estado real de la red, que denominaremos *caso base*, otros son explotados en modo *preventivo*, de forma que las magnitudes eléctricas permanezcan dentro de límites incluso tras determinadas contingencias. En modo preventivo, el OPF deberá incluir, por tanto, restricciones impuestas sobre el caso base y sobre los escenarios creados por las distintas contingencias críticas, dando lugar a los “flujos de cargas óptimos con restricciones de seguridad” —*Security Constrained Optimal Power Flows (SCOPF)* en lengua inglesa— [14].

La solución generalmente adoptada consiste en hacer depender el objetivo de la optimización del estado de la red (apartado 7.2), dando lugar a los siguientes objetivos:

- Sistema en estado normal:
 - En estado inseguro o de *alerta*, y siempre que la seguridad se considere prioritaria frente a criterios económicos, el objetivo será llevar el sistema a estado seguro incurriendo en el mínimo sobrecoste posible.
 - En estado seguro:
 - Minimizar los costes de explotación, incluyendo las pérdidas en el transporte, asignando de forma óptima la generación a las distintas centrales, problema que se encuadra en la operación del sistema de generación (Capítulo 6).
 - Si la programación de la generación se ha realizado previamente y de forma externa a la explotación de la red de transporte, será necesario determinar el perfil óptimo de tensiones a mantener en los nudos de la red a fin de minimizar pérdidas, problema que enlaza con el *control secundario de tensiones* (Capítulo 5).
 - Durante la explotación, y ya en tiempo real, puede ser conveniente actuar sobre los elementos de control de tensiones disponibles en el sistema a fin de minimizar aún más las pérdidas de potencia activa en la red de transporte.
- Sistema en estado de emergencia:
 - En general, determinar el mínimo número de actuaciones que conducen el sistema a estado normal en el menor tiempo posible, introduciendo criterios de eficacia y, secundariamente, de eficiencia económica, en lo posible.
 - Cuando no es posible llevar al sistema nuevamente a estado normal, minimizar la magnitud de las violaciones de los límites de explotación.

La combinación de varios objetivos en una única función no es una estrategia adecuada debido a que los objetivos pueden ser incompatibles y a la necesidad de determinar factores que representen el “peso” de cada objetivo particular, factores de difícil cuantificación.

Modelo del sistema eléctrico

Como se puso de manifiesto en el Capítulo 3, el estado de un sistema eléctrico de n nudos queda determinado por las $2n$ ecuaciones nodales:

$$P_i = V_i \sum_{j=1}^n V_j (G_{ij} \cos \theta_{ij} + B_{ij} \sin \theta_{ij}) \quad i = 1, \dots, n \quad (7.12)$$

$$Q_i = V_i \sum_{j=1}^n V_j (G_{ij} \sin \theta_{ij} - B_{ij} \cos \theta_{ij}) \quad i = 1, \dots, n \quad (7.13)$$

donde:

- V_i, θ_i son respectivamente módulo y fase de la tensión en el nudo i .
- P_i, Q_i son respectivamente potencia activa y reactiva netas inyectadas en el nudo i .
- $G_{ij} + jB_{ij}$ es el elemento complejo Y_{ij} de la matriz de admitancias de nudos.

Cada nudo se caracteriza por cuatro variables: P_i , Q_i , V_i y θ_i . Conocidas dos de las cuatro variables en cada nudo, las ecuaciones (7.12) y (7.13) permiten obtener las otras dos, teniendo en cuenta que es necesario fijar una referencia de fases ($\theta_r = 0$ para el nudo de referencia) y que no es posible especificar *a priori* todas las potencias inyectadas en los nudos al no conocer las pérdidas. De este modo, las ecuaciones nodales permiten determinar el estado de la red para unos valores dados de las variables de control.

Cabe destacar asimismo la posibilidad de realizar estudios concernientes únicamente a los flujos de potencia activa mediante la utilización del flujo de cargas en continua, modelo aproximado pero cuya linealidad simplifica en gran medida el problema de optimización siempre que se pueda obviar todo lo referente a la potencia reactiva y las tensiones. El modelo lineal proporcionado por el flujo de cargas en continua conduce a las siguientes n ecuaciones nodales:

$$P_i = \sum_{j=1}^n \frac{\theta_{ij}}{x_{ij}} \quad i = 1, \dots, n \quad (7.14)$$

donde x_{ij} es la reactancia del elemento, línea o transformador, que une los nudos i y j .

En lo concerniente a la red objeto de estudio, ésta se compone normalmente de una zona de interés, modelada en detalle, una zona “frontera” con otros sistemas eléctricos, modelada asimismo en detalle, y una zona externa que debe reflejar la reacción del resto del sistema ante cambios en la zona interna. Dicha zona exterior se suele modelar mediante *equivalentes externos* a fin de reducir la dimensión del problema. En el Apéndice A se realiza una breve introducción a las técnicas de cálculo de equivalentes externos.

Restricciones impuestas al problema de optimización

Las restricciones que deben ser impuestas en primer lugar son las que afectan directamente a las variables del problema de optimización, es decir:

- Límites sobre las variables de control, principalmente las potencias activa y reactiva proporcionadas por los generadores, número de tomas de los transformadores y su carácter discreto, número de escalones de las baterías de condensadores y/o reactancias y la magnitud de cada escalón (en la mayoría de los casos variables todo/nada), límites sobre otros elementos de control como *FACTS*, etc.
- Límites de explotación, principalmente sobre las tensiones de los embarrados y los flujos de potencia por líneas y transformadores (MVA, MW, Mvar, A).

Existe una diferencia fundamental entre ambos tipos de límites: mientras que los límites sobre las variables de control deben ser considerados “rígidos” en el sentido de que no pueden ser sobrepasados físicamente, los límites de explotación se consideran dotados de una cierta “flexibilidad” al poder ser sobrepasados en mayor o menor medida, siempre durante un tiempo razonable y en circunstancias excepcionales.

Junto a los anteriores límites, existen otras restricciones que deben ser modeladas adecuadamente:

- Controles automáticos. Es necesario modelar la respuesta de las variables que actúan bajo control automático y que no forman parte del conjunto de variables de control a optimizar, pero que responden de forma automática a cambios en el sistema.

Éstas son, principalmente, los transformadores que se encuentran controlando una tensión o un flujo de potencia reactiva, las baterías de condensadores y reactancias que controlan tensiones, y los intercambios de potencia entre áreas.

- Equipos que trabajan de forma coordinada, principalmente transformadores en paralelo cuyas tomas no se deben mover de forma independiente.
- Otras consideraciones definibles como “preferencias de operación”, con una fuerte componente heurística:
 - Prioridades entre los controles: establecimiento de ciertas preferencias a la hora de utilizar unos controles frente a otros cuando es posible elegir.
 - Efectividad de las actuaciones: mover únicamente aquellos controles que tengan un efecto significativo sobre la función objetivo.
 - Prioridades entre los límites: establecer ciertas preferencias a la hora de corregir determinados límites sobrepasados frente a otros, cuando es imposible corregirlos todos.
 - Limitar el número de actuaciones sobre determinados controles discretos en un cierto periodo de tiempo, como es el caso de transformadores con tomas, baterías de condensadores, reactancias, etc.

Las anteriores restricciones deben ser tratadas de alguna forma si se quiere que la solución que proporciona el OPF sea de utilidad a los operadores. Como es obvio, el tratamiento de dichas restricciones no es tarea fácil, dejando el OPF de ser un problema netamente matemático para convertirse en un complejo algoritmo que requiere la incorporación de reglas heurísticas para alcanzar una solución satisfactoria [16].

Ejemplo 7.7:

Ejemplo de OPF para minimizar costes de explotación.

Se desea obtener el estado óptimo en cuanto a costes de generación del sistema de la Figura 7.7, cuyos datos se indican en la misma.

Los costes de generación de los dos generadores son los siguientes:

$$G4: 100 + 10,5 \cdot P \quad \text{€/MWh} \qquad G5: 100 + 10,0 \cdot P \quad \text{€/MWh}$$

Asimismo, el sistema cuenta como elementos de control de tensiones, además de los reguladores de los propios generadores, con una batería de condensadores de 200 Mvar nominales, en 20 escalones de 10 Mvar, y con tomas de regulación en el transformador situado entre los nudos 1 y 3, situadas en el extremo correspondiente al nudo 1, y con un total de 21 tomas que permiten cambiar la relación de transformación en $\pm 10\%$ en incrementos de un 1%. La batería de condensadores se encuentra desconectada inicialmente y el transformador se encuentra en la toma intermedia.

Nudo	P_D	Q_D	P_G	P_{\max}	P_{\min}	V_{consigna}	Q_G	Q_{\max}	Q_{\min}
	MW	Mvar	MW	MW	MW	p.u.	Mvar	Mvar	Mvar
1	1 000	250	-	-	-	-	-	-	-
2	1 000	250	-	-	-	-	0	200	0
3	0	0	-	-	-	-	-	-	-
4	0	0	1 000	1 500	500	1.00	833	1 000	-1 000
5	0	0	1 069	1 500	500	1.00	54	1 000	-1 000
Tensiones	$0,95 \leq V \leq 1,05$								

Línea	Resistencia	Reactancia	Susceptancia	S_{\max}	S_{ij}
	p.u. ($S_{\text{base}} = 100$ MVA)			MVA	MVA en origen
L1 1-2	0.010	0.010	0.020	500	230.7
L2 1-3	0.001	0.015	0.000	2 000	804.0
L3 2-4	0.001	0.010	0.000	2 000	1 266.4
L4 3-4	0.005	0.020	0.020	1 500	221.3
L5 3-5	0.005	0.010	0.020	1 500	724.1
L6 4-5	0.005	0.020	0.020	1 500	326.3

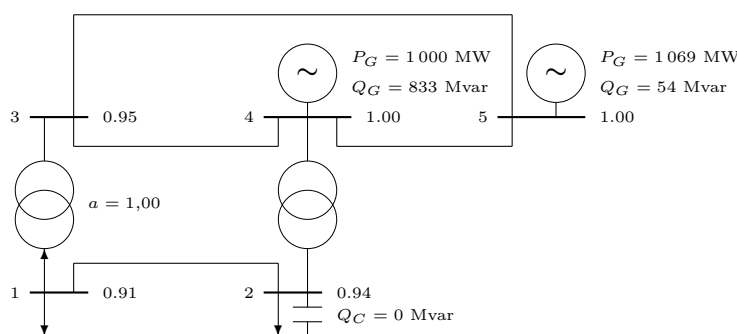


Figura 7.7. Red de 5 nudos y 2 generadores.

Las matrices G y B , parte real e imaginaria de la matriz de admitancias nodales, dependen del valor de la relación de transformación del transformador con tomas, a :

$$G = \begin{bmatrix} 50 + 4,4248/a^2 & -50,0 & -4,4248/a & 0,0 & 0,0 \\ -50,0 & 59,9010 & 0,0 & -9,9010 & 0,0 \\ -4,4248/a & 0,0 & 56,1895 & -11,7647 & -40,0 \\ 0,0 & -9,9010 & -11,7647 & 33,4304 & -11,7647 \\ 0,0 & 0,0 & -40,0 & -11,7647 & 51,7647 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} -49,99 - 66,3717/a^2 & 50,0 & 66,3717/a & 0,0 & 0,0 \\ 50,0 & -148,9999 & 0,0 & 99,0099 & 0,0 \\ 66,3717/a & 0,0 & -193,4105 & 47,0588 & 80,0 \\ 0,0 & 99,0099 & 47,0588 & -193,1076 & 47,0588 \\ 0,0 & 0,0 & 80,0 & 47,0588 & -127,0388 \end{bmatrix}$$

La matriz B debería depender asimismo de la susceptancia de la batería de condensadores del nudo 2. No obstante, en este ejemplo se modelará la batería de condensadores como una inyección de potencia reactiva en el nudo 2.

El objetivo del problema de optimización consiste en obtener el estado del sistema que minimiza los costes de explotación, manteniendo todas las variables dentro de límites:

- Función a minimizar: $C = C_1 + C_2 = 200 + 10,5 \cdot P_4 + 10,0 \cdot P_5$
- Restricciones:
 - Ecuaciones de la red:

$$P_i = P_{G_i} - P_{D_i} = \sum_{j=1}^5 V_i \cdot V_j \{G_{ij} \cos(\theta_i - \theta_j) + B_{ij} \sin(\theta_i - \theta_j)\}$$

$$Q_i = Q_{G_i} - Q_{D_i} = \sum_{j=1}^5 V_i \cdot V_j \{G_{ij} \sin(\theta_i - \theta_j) - B_{ij} \cos(\theta_i - \theta_j)\}$$

En las ecuaciones anteriores, las potencias generadas corresponden a los nudos 4 y 5, tanto en activa (P_{G_4} y P_{G_5}) como en reactiva (Q_{G_4} y Q_{G_5}), así como a la potencia reactiva inyectada por la batería de condensadores del nudo 2 (Q_{G_2}). Por otra parte, es necesario recordar que la fase de uno de los nudos debe tomarse como referencia. Se ha tomado $\theta_5 = 0$, por ser el generador del nudo 5 el generador que asume las pérdidas en un flujo de cargas convencional, aunque es irrelevante elegir uno u otro nudo al desaparecer el concepto de nudo balance en el problema de optimización completo. Nótese que las ecuaciones se han planteado para todos los nudos de la red.

Por otra parte, conviene recordar que los términos de las matrices G y B contienen la variable correspondiente a la relación de transformación del transformador 1-3.

- Límites de las variables de control:
 - Potencias de los generadores, tanto activa como reactiva:

$$500 \leq P_{G_4} \leq 1500 \quad -1000 \leq Q_{G_4} \leq 1000$$

$$500 \leq P_{G_5} \leq 1500 \quad -1000 \leq Q_{G_5} \leq 1000$$

- Potencia reactiva de la batería de condensadores: $0 \leq Q_{G_2} \leq 200$, en escalones discretos de 10 Mvar.
- Tomas del transformador 1-3: $0,9 \leq a \leq 1,1$, en incrementos de 0.01 p.u.

El carácter discreto de las variables, teniendo en cuenta la pequeña magnitud de los escalones en ambos casos, se impondrá *a posteriori* mediante redondeo de la solución continua al valor discreto más próximo.

- Límites de las variables dependientes:
 - Tensiones en los nudos: $0,95 \leq V_i \leq 1,05 \quad i = 1, \dots, 5$
 - Potencias en las líneas y transformadores, expresada en este caso como límite de potencia aparente:

$$S_{ij} = \sqrt{P_{ij}^2 + Q_{ij}^2} \leq S_{ij}^{\max}$$

con

$$P_{ij} = V_i \cdot V_j \{G_{ij} \cos(\theta_i - \theta_j) + B_{ij} \sin(\theta_i - \theta_j)\} - G_{ij} \cdot V_i^2$$

$$Q_{ij} = V_i \cdot V_j \{G_{ij} \sin(\theta_i - \theta_j) - B_{ij} \cos(\theta_i - \theta_j)\} + \{B_{ij} - b_{ij}^p\} \cdot V_i^2$$

La solución del problema de optimización de costes conduce al estado mostrado en la Figura 7.8. Cabe destacar los siguientes hechos en el óptimo de explotación:

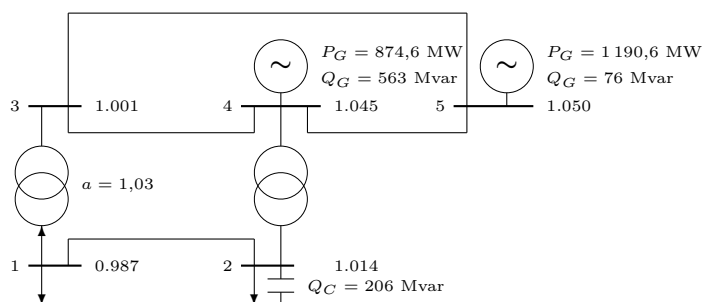


Figura 7.8. Red de 5 nudos y 2 generadores. Estado óptimo en términos de costes de generación.

- El coste óptimo de explotación se reduce a 21 289 €/h, representando un ahorro de 101 €/h frente al coste sin optimizar.
- Las pérdidas se ven asimismo disminuidas (65.2 MW frente a los 69.2 MW del estado de partida), observándose cómo el generador del nudo 4 se ve favorecido en su generación por su mejor localización respecto al consumo. En concreto, un reparto de la generación basado exclusivamente en costes llevaría a dicho generador a su mínimo técnico.
- Todas las variables de control del problema son optimizadas de cara a minimizar costes, respetando siempre los límites impuestos a las variables y, en consecuencia, eliminando los problemas de tensión presentes en los nudos de consumo en el estado de partida. Así, el transformador debe cambiarse a una relación de transformación de 1.03 en p.u., y los condensadores pasan a estar todos conectados (200 Mvar nominales, que, a una tensión de 1.014 proporcionan 206 Mvar). Ambas variables, de carácter discreto, han sido redondeadas *a posteriori* al valor discreto más próximo al óptimo continuo.
- Los valores que toman los multiplicadores de Lagrange en el óptimo, y más concretamente los multiplicadores asociados a las ecuaciones de balance de potencia activa en cada nudo, proporcionan una información fundamental de cara a discriminar el coste de consumo en cuanto a su localización geográfica, siendo conocidos como los *precios nodales de la energía*. En este ejemplo, dichos precios nodales son los siguientes:

$$\lambda^T = [11,08 \quad 10,70 \quad 10,76 \quad 10,50 \quad 10,00] \quad \text{€/MWh}$$

proporcionando el coste de suministrar un MWh adicional en cada nudo respectivamente. Puede observarse que, en los nudos de generación, los precios nodales coinciden con el coste incremental de cada generador.

Estructura de los algoritmos

Como se ha visto en el apartado anterior, la aplicación de un algoritmo de optimización a la explotación de un sistema eléctrico no es tarea fácil de llevar a la práctica debido tanto a la dificultad de modelar restricciones y objetivos del problema como al tamaño del mismo en términos de variables y ecuaciones involucradas. En consecuencia, su utilización en tiempo real y la importancia de asegurar tanto la calidad como la continuidad del suministro eléctrico conduce a requerir de un OPF las siguientes características: i) fiabilidad

en términos de capacidad para proporcionar una solución aceptable en una gran mayoría de los casos, ii) velocidad de ejecución, y iii) flexibilidad para ser adaptado a nuevos esquemas y planteamientos. Por otra parte, la necesidad de tratar restricciones complejas y requerimientos de operación más o menos heurísticos obliga a utilizar un OPF siempre en forma iterativa, evaluando la adecuación de la solución obtenida por el OPF y modificando el planteamiento del problema si fuera necesario.

Centrándonos en los algoritmos de optimización que han sido aplicados con éxito en el contexto de los sistemas eléctricos, éstos pueden ser clasificados en dos grandes grupos [15]:

1. Algoritmos que incorporan un flujo de cargas claramente diferenciado del módulo de optimización y cuya misión es actualizar en cada iteración las variables del problema obteniendo un nuevo estado, totalmente válido, de la red. El módulo de flujo de cargas recibe el estado actual de los controles y de los parámetros de la red, proporcionando el estado actual de la misma e información adicional de utilidad al módulo de optimización, como puede ser el *jacobiano* de las ecuaciones de la red. El módulo de optimización se basa normalmente en una aproximación lineal [13] o cuadrática [12] de la función objetivo, así como en la linealización de las restricciones, para plantear los subproblemas de optimización.
2. Algoritmos en los cuales las ecuaciones de la red son resueltas durante el proceso de optimización, cumpliéndose dichas ecuaciones únicamente cuando la solución óptima ha sido alcanzada. Este tipo de algoritmos se basa en las condiciones de optimalidad para el óptimo de una función bajo restricciones, ecuaciones que se resuelven iterativamente mediante el *método de Newton* [11].

La principal diferencia entre ambos tipos de algoritmos consiste en la posibilidad de parar el proceso en cualquier iteración y obtener un estado válido en el que se cumplen las ecuaciones de la red. Esta posibilidad no existe en la segunda categoría de algoritmos, en los cuales los estados intermedios obtenidos durante el proceso iterativo no cumplen las ecuaciones de la red, no constituyendo, por tanto, estados reales del sistema eléctrico.

Por último, cabe indicar que el aspecto más conflictivo de cualquier OPF consiste en el tratamiento de los límites impuestos al problema, el cual condiciona en gran medida la bondad de la herramienta desarrollada. Se remite al lector interesado al Apéndice B para una breve introducción a las técnicas de optimización no lineal y a la problemática asociada.

7.5. Operación del sistema de transporte

Como se puso de manifiesto en la introducción del capítulo, la operación de un sistema de transporte de energía eléctrica está condicionada en cuanto a sus objetivos y posibles actuaciones al estado en que se encuentre la red, siendo fundamental, por tanto, disponer de herramientas adecuadas tanto para la supervisión (SCADA, estimador de estado y las herramientas asociadas que se describen en el Capítulo 4) como para la determinación del grado de seguridad del sistema (análisis de contingencias).

A lo largo de esta sección se irán presentando los objetivos y las posibles actuaciones que condicionan la toma de decisiones de los operadores del sistema de transporte en función

del estado en que se encuentre el mismo, apareciendo como herramienta fundamental en la toma de decisiones el OPF en sus múltiples variantes.

7.5.1. Operación en estado de emergencia

Durante la operación, el sistema podrá entrar en estado de emergencia debido a la propia evolución de la demanda o tras la ocurrencia de una determinada contingencia. En este caso, los operadores deberán devolver el sistema de la forma más rápida posible a estado normal, quedando las consideraciones económicas en un segundo plano.

La urgencia de las actuaciones se traduce en reducir el número de actuaciones al mínimo exclusivamente necesario para corregir los problemas, de forma que la puesta en práctica de dichas actuaciones lleve el menor tiempo posible. Matemáticamente, el problema puede formularse como un OPF con el objetivo de minimizar las actuaciones de control para llevar todas las variables a límites, objetivo que se materializa normalmente en una penalización cuadrática o lineal de las actuaciones sobre las variables de control.

Aprovechando el habitual desacoplamiento entre los problemas de potencias activa y reactiva, se estudiarán a continuación por separado la corrección de sobrecargas y de tensiones fuera de límites, lo cual no excluye que en determinados casos extremos haya que recurrir al problema completo para, por ejemplo, elevar una tensión excesivamente baja mediante la redistribución de la generación.

Corrección de sobrecargas

La eliminación de una sobrecarga en una línea o transformador implica la redistribución de la potencia activa de los generadores y de las potencias intercambiadas con otros sistemas, así como la actuación sobre elementos de control de los flujos de potencia activa como transformadores desfasadores y FACTS, en caso de existir. Si no es posible eliminar la sobrecarga con los elementos disponibles, bien por no ser suficientes, bien por que el tiempo necesario para llevar a la práctica la necesaria actuación se considere excesivo, requiriendo, por ejemplo, el arranque de una central térmica, será necesario recurrir al *deslastre de cargas*.

Como se ha puesto de manifiesto en repetidas ocasiones a lo largo del capítulo, las ecuaciones que relacionan las inyecciones de potencia activa en la red con los flujos de potencia por la misma admite un modelo lineal con muy buena aproximación. En consonancia con el modelo de la red, la función a minimizar consiste en una penalización lineal sobre las actuaciones de control, dando lugar al siguiente problema expresado en forma matricial:

$$\begin{aligned}
 \text{Minimizar} \quad & c_s^T \cdot \Delta P^+ + c_b^T \cdot \Delta P^- & (7.15) \\
 \text{sujeto a:} \quad & P + \Delta P^+ - \Delta P^- = B \cdot \theta \\
 & P^{\min} \leq P + \Delta P^+ - \Delta P^- \leq P^{\max} \\
 & -P_f^{\max} \leq P_f = X^{-1} \cdot A^T \cdot \theta \leq P_f^{\max} \\
 & \Delta P^+ \geq 0 \quad \Delta P^- \geq 0
 \end{aligned}$$

donde se han incluido vectores de costes distintos para aumentar y disminuir la generación en las centrales respecto al programa inicial, c_s y c_b .

Alternativamente, y como se puso de manifiesto en el apartado correspondiente al análisis de contingencias, es posible relacionar directamente las inyecciones de potencia en los nudos y los flujos de potencia a través de una matriz de factores de distribución, S , obteniendo un modelo puramente incremental, más compacto que el anterior:

$$\begin{aligned} \text{Minimizar} \quad & c_s^T \cdot \Delta P^+ + c_b^T \cdot \Delta P^- & (7.16) \\ \text{sujeto a:} \quad & -P_f^{\max} \leq P_f = P_f^0 + S \cdot (\Delta P^+ - \Delta P^-) \leq P_f^{\max} \\ & \Delta P^+ \leq P^{\max} - P \\ & \Delta P^- \leq P - P^{\min} \\ & \Delta P^+ \geq 0 \quad \Delta P^- \geq 0 \end{aligned}$$

En la operación diaria de un sistema eléctrico, lo normal es que el operador se enfrente con el problema de eliminar únicamente una o dos sobrecargas de manera simultánea. Para ello, es posible aplicar un método heurístico, bastante eficiente, para determinar las actuaciones correctoras en el menor tiempo posible:

1. Para cada línea sobrecargada mn y cada generador g , determinar el incremento necesario para eliminar la sobrecarga:

$$\Delta P_{mn} = \rho_{mn}^g \cdot \Delta P_g$$

Desechar generadores en los que sea necesario subir y bajar la generación, lo que implica que el generador, para corregir una sobrecarga, empeoraría el estado de otra.

2. Para cada generador no desechado, determinar el coste en que se incurriría al corregir la línea más sobrecargada, eligiendo el de menor coste.
3. Llevar la actuación a la práctica y continuar con la siguiente sobrecarga, si no ha sido también eliminada.

Obviamente, siempre es posible incluir otros factores de mérito en el proceso heurístico, como la reserva de generación de cada grupo, como ejemplo más relevante.

Ejemplo 7.8:

Cálculo de actuaciones correctoras para eliminar sobrecargas.

El sistema de la Figura 7.9, cuyos parámetros se recogen en la Figura 7.3, se encuentra en estado de emergencia debido a la sobrecarga de la línea L3 que une los nudos 1 y 4.

Las matrices A , X y B del sistema original son las presentadas en el Ejemplo 7.3, obteniéndose los flujos de potencia utilizando el modelo en continua como $P_f = S \cdot P$, siendo $S = X^{-1} \cdot A^T \cdot B^{-1}$:

$$P_f = \begin{bmatrix} 0,4828 & -0,3448 & 0,4138 & 0,3448 \\ 0,1034 & 0,0689 & -0,4828 & -0,0689 \\ 0,4138 & 0,2759 & 0,0689 & -0,2759 \\ 0,4828 & 0,6552 & 0,4138 & 0,3448 \\ 0,1034 & 0,0689 & 0,5172 & -0,0689 \\ 0,5172 & 0,3448 & 0,5862 & 0,6552 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -12,5 \\ -12,5 \\ 11,5 \\ 11,0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6,82 \\ -8,47 \\ -10,86 \\ -5,67 \\ 3,03 \\ 3,17 \end{bmatrix}$$

Nudo	P_D	Q_D	P_G	Q_G	V
	MW	Mvar	MW	Mvar	p.u.
1	1 250	500	-	-	0.96
2	1 250	500	-	-	0.93
3	0	0	1 150	366	1.05
4	0	0	1 100	682	1.04
5	0	0	351	456	1.03

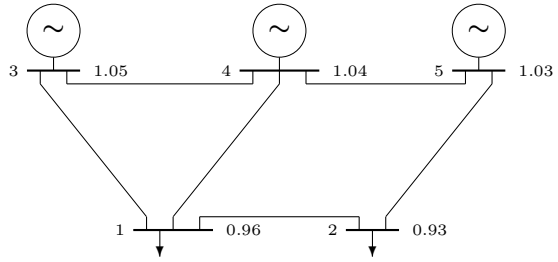


Figura 7.9. Red de 5 nudos y 3 generadores en estado de emergencia.

Puede observarse la existencia de una sobrecarga de 86 MW en la línea L3 ($P_f^{\max} = 1\,000$ MW), teniendo en cuenta que tanto las potencias inyectadas en los nudos como las que circulan por las líneas están expresadas en por unidad respecto a la base de 100 MVA.

Adoptando el modelo lineal para las ecuaciones de la red, los reajustes de la generación necesarios para eliminar la sobrecarga se obtienen resolviendo el siguiente problema de optimización:

- Función a minimizar: penalización lineal de los cambios en la generación, tanto a subir como a bajar, con unos costes de 10 €/MW para los generadores 3 y 4, y de 20 €/MW para el generador 5, iguales al coste incremental de los generadores en despacho económico (el generador de mayor coste incremental, en este caso el generador de referencia, se encuentra suministrando el mínimo técnico).

$$c_s^T \cdot \Delta P^+ + c_b^T \cdot \Delta P^- = [10 \quad 10 \quad 20] \begin{bmatrix} \Delta P_3^+ \\ \Delta P_4^+ \\ \Delta P_5^+ \end{bmatrix} + [10 \quad 10 \quad 20] \begin{bmatrix} \Delta P_3^- \\ \Delta P_4^- \\ \Delta P_5^- \end{bmatrix}$$

con $\Delta P^+ \geq 0$ y $\Delta P^- \geq 0$ en todos los casos.

- Restricciones:

- Ecuaciones de la red: $P + \Delta P^+ - \Delta P^- = B \cdot \theta$

$$\begin{bmatrix} -12,5 & & & \\ -12,5 & & & \\ 11,5 + \Delta P_3^+ - \Delta P_3^- & & & \\ 11,0 + \Delta P_4^+ - \Delta P_4^- & & & \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 250 & -100 & -50 & -100 \\ -100 & 150 & 0 & 0 \\ -50 & 0 & 100 & -50 \\ -100 & 0 & -50 & 200 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \\ \theta_3 \\ \theta_4 \end{bmatrix}$$

A fin de incluir la potencia del generador de referencia en el proceso de optimización, es necesario considerar una ecuación adicional, por ejemplo, el balance de potencias conjunto en la red sin pérdidas:

$$(11,5 + \Delta P_3^+ - \Delta P_3^-) + (11,0 + \Delta P_4^+ - \Delta P_4^-) + (2,5 + \Delta P_5^+ - \Delta P_5^-) = 25,0$$

donde 250 MW es la potencia inicial del generador 5, sin tener en cuenta las pérdidas.

- Límites de generación: $P^{\min} \leq P + \Delta P^+ - \Delta P^- \leq P^{\max}$

$$\begin{bmatrix} 15,0 \\ 15,0 \\ 10,0 \end{bmatrix} \geq \begin{bmatrix} 11,5 + \Delta P_3^+ - \Delta P_3^- \\ 11,5 + \Delta P_4^+ - \Delta P_4^- \\ 2,0 + \Delta P_5^+ - \Delta P_5^- \end{bmatrix} \geq \begin{bmatrix} 2,5 \\ 2,5 \\ 2,5 \end{bmatrix}$$

- Límites en las potencias por las líneas: $-P_f^{\max} \leq P_f = X^{-1} \cdot A^T \cdot \theta \leq P_f^{\max}$

$$\begin{bmatrix} -10,0 \\ -10,0 \\ -10,0 \\ -10,0 \\ -10,0 \\ -10,0 \end{bmatrix} \leq \begin{bmatrix} 100 & -100 & 0 & 0 \\ 50 & 0 & -50 & 0 \\ 100 & 0 & 0 & -100 \\ 0 & 50 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 50 & -50 \\ 0 & 0 & 0 & 50 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \\ \theta_3 \\ \theta_4 \end{bmatrix} \leq \begin{bmatrix} 10,0 \\ 10,0 \\ 10,0 \\ 10,0 \\ 10,0 \\ 10,0 \end{bmatrix}$$

La solución del problema de programación lineal anterior proporciona la siguiente reasignación de la generación:

$$\Delta P^+ = [2,5 \quad 0 \quad 0]^T \quad \Delta P^- = [0 \quad 2,5 \quad 0]^T$$

dando lugar a los siguientes flujos de potencia

$$P_f = [7,0 \quad -9,5 \quad -10,0 \quad -5,5 \quad 4,5 \quad 3,0]^T$$

con un coste total de 50 €.

Hubiera sido posible plantear un problema más compacto utilizando los flujos de potencia como variables del problema, eliminando las fases de las tensiones nodales:

$$\begin{aligned} P_f &= S \cdot (P + \Delta P^+ - \Delta P^-) = P_f^0 + S \cdot (\Delta P^+ - \Delta P^-) \\ &= \begin{bmatrix} 6,82 \\ -8,47 \\ -10,86 \\ -5,67 \\ 3,03 \\ 3,17 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0,4828 & -0,3448 & 0,4138 & 0,3448 \\ 0,1034 & 0,0689 & -0,4828 & -0,0689 \\ 0,4138 & 0,2759 & 0,0689 & -0,2759 \\ 0,4828 & 0,6552 & 0,4138 & 0,3448 \\ 0,1034 & 0,0689 & 0,5172 & -0,0689 \\ 0,5172 & 0,3448 & 0,5862 & 0,6552 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \Delta P_3^+ - \Delta P_3^- \\ \Delta P_4^+ - \Delta P_4^- \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Como puede observarse, vuelve a ser necesario incluir una ecuación adicional, como el balance de potencias del sistema despreciando las pérdidas, para que los cambios en la potencia generada por el generador 5 aparezcan como variable del problema, con un coste asociado.

Por otra parte, y como es obvio, ambos problemas proporcionan idéntica solución.

Un método alternativo a la resolución de un OPF consiste en utilizar los factores de distribución de la potencia de la línea sobrecargada para determinar actuaciones correctoras. Así, para eliminar la sobrecarga de la línea L3: $\Delta P_{L3}^i = P_{L3} - P_{L3}^0 = -10,0 - (-10,86) = 0,86 = \rho_{L3}^i \cdot \Delta P_i$

$$\rho_{L3}^{G3} = 0,0689 \Rightarrow \Delta P_3 = 12,48 \quad \rho_{L3}^{G4} = -0,2759 \Rightarrow \Delta P_4 = -3,12$$

Lo cual implica aumentar la potencia del generador 3 en 1248 MW o disminuir la potencia del generador 4 en 312 MW. Obviamente, es preferible utilizar el generador 4, con un mayor efecto sobre la potencia que fluye por la línea sobrecargada ($|\rho_{L3}^{G4}| \geq |\rho_{L3}^{G3}|$). Evidentemente, en ambos casos el cambio sería asumido por el generador de referencia con un incremento igual y de signo contrario.

Es posible incluir consideraciones de tipo económico en el razonamiento anterior. Así, si se quiere evitar que el generador de referencia aumente su generación al tener un coste mayor, la potencia que deja de dar el generador 4 debe ser asumida por el generador 3: $\Delta P_{L3}^i = 0,86 = \rho_{L3}^{G3} \cdot \Delta P_3 + \rho_{L3}^{G4} \cdot \Delta P_4$, con $\Delta P_3 = -\Delta P_4$, lo que conduce a $\Delta P_3 = -\Delta P_4 = 2,49$, actuación que coincide, salvo errores de redondeo, con las que proporcionan los problemas de optimización formulados anteriormente.

En el ejemplo anterior, se ha puesto de manifiesto la necesidad de utilizar un OPF basado en *programación lineal* para determinar actuaciones correctoras, o, alternativamente,

utilizar *reglas de operación* en combinación con factores de distribución, estrategia esta última que resulta de especial utilidad de cara a determinar de forma rápida y eficiente actuaciones correctoras en tiempo real.

Por otra parte, cabe indicar la posibilidad de que no se pueda corregir una sobrecarga con los elementos de control disponibles en un determinado momento. Ante esta situación, y como es obvio, los operadores siempre tenderán a implementar las actuaciones necesarias para mitigar en lo posible la sobrecarga, pudiéndose utilizar como herramienta un problema de optimización del tipo de los presentados anteriormente, con el objetivo de minimizar la magnitud de la sobrecarga. Si no es posible reducir la magnitud de la sobrecarga a un nivel aceptable transitoriamente, será necesario recurrir al deslastre de cargas.

Ejemplo 7.9:

Cálculo de actuaciones correctoras para eliminar sobrecargas, incluyendo entre las medidas el deslastre de cargas.

Supóngase que el sistema de 5 nudos y 3 generadores del ejemplo anterior se encuentra en el estado que presenta la Figura 7.10, con una fuerte sobrecarga en la línea L3 y estando la línea L2 al límite de su capacidad.

Nudo	P_D	Q_D	P_G	Q_G	V p.u.
	MW	Mvar	MW	Mvar	
1	2 500	750	-	-	0.95
2	300	100	-	-	0.96
3	0	0	1 300	479	1.05
4	0	0	1 250	597	1.03
5	0	0	356	299	1.03

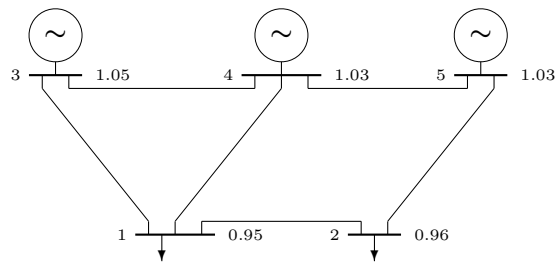


Figura 7.10. Red de 5 nudos y 3 generadores en estado de emergencia imposible de resolver sin deslastre de cargas.

Los flujos de potencia en el estado de partida, utilizando el modelo en continua, son los siguientes:

$$P_f = \begin{bmatrix} 0,4828 & -0,3448 & 0,4138 & 0,3448 \\ 0,1034 & 0,0689 & -0,4828 & -0,0689 \\ 0,4138 & 0,2759 & 0,0689 & -0,2759 \\ 0,4828 & 0,6552 & 0,4138 & 0,3448 \\ 0,1034 & 0,0689 & 0,5172 & -0,0689 \\ 0,5172 & 0,3448 & 0,5862 & 0,6552 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -25,0 \\ -3,0 \\ 13,0 \\ 12,5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1,35 \\ -9,93 \\ -13,72 \\ -4,35 \\ 3,07 \\ 1,85 \end{bmatrix}$$

Se observa cómo la línea L2 se encuentra prácticamente al límite (1 000 MW) y la línea L3 supera ampliamente dicho límite.

En este caso, no existe un redespacho de la generación que permite eliminar la sobrecarga de la línea L3 sin crear nuevos problemas. Por ello, es necesario recurrir al deslastre de cargas, interrumpiendo el suministro a determinados clientes. Obviamente, el deslastre debe ser el mínimo necesario para eliminar la sobrecarga, para lo cual se le debe asignar un “coste” muy superior al de los posibles redespachos de los grupos de generación.

Introduciendo, en consecuencia, la posibilidad de deslastrar carga en los nudos de consumo (variables ΔP_i^d) a un coste de 100 €/MW (componentes de c_d), el problema de optimización queda en la siguiente forma:

$$\begin{aligned} \bullet \text{ Función a minimizar: } & c_s^T \cdot \Delta P^+ + c_b^T \cdot \Delta P^- + c_d^T \cdot \Delta P^d = \\ & = [10 \quad 10 \quad 20] \begin{bmatrix} \Delta P_3^+ \\ \Delta P_4^+ \\ \Delta P_5^+ \end{bmatrix} + [10 \quad 10 \quad 20] \begin{bmatrix} \Delta P_3^- \\ \Delta P_4^- \\ \Delta P_5^- \end{bmatrix} + [100 \quad 100] \begin{bmatrix} \Delta P_1^d \\ \Delta P_2^d \end{bmatrix} \end{aligned}$$

con $\Delta P^+ \geq 0$, $\Delta P^- \geq 0$ y $\Delta P^d \geq 0$ en todos los casos.

• Restricciones:

- Ecuaciones de la red: $P + \Delta P^+ - \Delta P^- + \Delta P^d = B \cdot \theta$

$$\begin{bmatrix} -25,0 + \Delta P_1^d \\ -3,0 + \Delta P_2^d \\ 13,0 + \Delta P_3^+ - \Delta P_3^- \\ 12,5 + \Delta P_4^+ - \Delta P_4^- \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 250 & -100 & -50 & -100 \\ -100 & 150 & 0 & 0 \\ -50 & 0 & 100 & -50 \\ -100 & 0 & -50 & 200 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \\ \theta_3 \\ \theta_4 \end{bmatrix}$$

Con la ecuación de balance que introduce la potencia del generador de referencia:

$$(13 + \Delta P_3^+ - \Delta P_3^-) + (12,5 + \Delta P_4^+ - \Delta P_4^-) + (2,5 + \Delta P_5^+ - \Delta P_5^-) = 28 - \Delta P_1^d - \Delta P_2^d$$

- Límites de generación: $P^{\min} \leq P + \Delta P^+ - \Delta P^- \leq P^{\max}$

$$\begin{bmatrix} 15,0 \\ 15,0 \\ 10,0 \end{bmatrix} \geq \begin{bmatrix} 13,0 + \Delta P_3^+ - \Delta P_3^- \\ 12,5 + \Delta P_4^+ - \Delta P_4^- \\ 2,5 + \Delta P_5^+ - \Delta P_5^- \end{bmatrix} \geq \begin{bmatrix} 2,5 \\ 2,5 \\ 2,5 \end{bmatrix}$$

- Límites en las potencias por las líneas: $-P_f^{\max} \leq P_f = X^{-1} \cdot A^T \cdot \theta \leq P_f^{\max}$

$$\begin{bmatrix} -10,0 \\ -10,0 \\ -10,0 \\ -10,0 \\ -10,0 \\ -10,0 \end{bmatrix} \leq \begin{bmatrix} 100 & -100 & 0 & 0 \\ 50 & 0 & -50 & 0 \\ 100 & 0 & 0 & -100 \\ 0 & 50 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 50 & -50 \\ 0 & 0 & 0 & 50 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \\ \theta_3 \\ \theta_4 \end{bmatrix} \leq \begin{bmatrix} 10,0 \\ 10,0 \\ 10,0 \\ 10,0 \\ 10,0 \\ 10,0 \end{bmatrix}$$

La solución del problema de programación lineal anterior proporciona las siguientes actuaciones correctoras:

$$\Delta P^+ = [2,00 \quad 0 \quad 6,00]^T \quad \Delta P^- = [0 \quad 10,00 \quad 0]^T \quad \Delta P^d = [2,0 \quad 0]^T$$

En resumen, los generadores G3 y G5 aumentan su potencia mientras que G4 la disminuye, siendo necesario asimismo un deslastre de 200 MW en el nudo 1.

Por otra parte, los flujos de potencia pasan a valer:

$$P_f = [-3,0 \quad -10,0 \quad -10,0 \quad -6,0 \quad 5,0 \quad -2,5]^T$$

Como se ha podido observar, es posible asignar costes diferentes a las potencias interrumpidas en los distintos nudos, discriminando con ello unos clientes frente a otros.

Corrección de tensiones

Ante la presencia de tensiones que han sobrepasado los límites normales de explotación, un operador puede hacer buen uso de sus conocimientos y experiencia para elegir las actuaciones adecuadas, utilizando reglas heurísticas del tipo “una tensión excesivamente baja es corregida con mayor efectividad aumentando la inyección de reactiva en dicho nudo o modificando las tomas de un transformador local”. Cuando el problema no es demasiado complejo, la utilización de reglas básicas como la expuesta permite obtener una solución simple y rápida. No obstante, la complejidad del problema de la potencia reactiva y de las tensiones, así como el fuerte carácter no lineal del mismo, obliga a los operadores a utilizar herramientas adecuadas para hacer frente a problemas severos, siendo inútil el uso de reglas básicas que resultan eficaces en problemas leves [17].

Cuando un operador detecta la presencia de violaciones de los límites establecidos, el objetivo prioritario es siempre su eliminación en la forma más rápida y eficiente posible de cara a asegurar la continuidad del suministro de energía eléctrica, objetivo que puede ser abordado mediante programas de optimización. No obstante, diversos problemas inherentes a los optimizadores actuales, especialmente la tendencia a utilizar un número tal de controles que imposibilita su implementación en la práctica, limitan realmente su utilización en los centros de control [16]. Por otra parte, y al contrario de lo que ocurre en el problema del control de los flujos de potencia activa, donde la diversidad de controles utilizables está muy limitada (potencias generadas, transformadores desfasadores y FACTS, exclusivamente), los sistemas de potencia actuales están equipados con una amplia variedad de equipos cuya actuación afecta principalmente a las tensiones. Tanto la elección del tipo de control a utilizar como las decisiones referentes a su actuación, automática o con intervención humana, están en general condicionadas por el nivel de tensiones del subsistema a controlar. Así, mientras que la actuación de los controles de tensión/reactiva tienden a estar totalmente automatizados en los subsistemas de distribución, debido principalmente a la necesidad de mantener un perfil de tensiones muy rígido de cara al consumidor, son pocas las compañías eléctricas que han implantado un control automático de tensiones en sus redes de transporte (ver el Capítulo 5). Es en el subsistema de transporte donde el control de las tensiones y de los flujos de potencia reactiva adquiere, por tanto, mayor relevancia y complejidad.

Ejemplo 7.10:

Ejemplo de OPF aplicado al control correctivo de tensiones.

El sistema del Ejemplo 7.7, representado en la Figura 7.7, presenta tensiones excesivamente bajas en los nudos 1 y 2 (0.91 y 0.94 en p.u., respectivamente), tensiones que es necesario corregir.

Para evitar grandes cambios respecto al estado de partida, lo que puede conducir a actuaciones difíciles de implementar en la práctica, la función objetivo a minimizar consiste en la suma de los cambios en las variables de control penalizados en forma cuadrática, siendo éstas las consignas de los dos generadores, las tomas del transformador entre los nudos 1 y 3, y la potencia reactiva inyectada por la batería de condensadores del nudo 2: $\mathcal{F} = (\Delta V_4)^2 + (\Delta V_5)^2 + (\Delta a)^2 + (\Delta Q_C)^2$, con $V_4 = 1,0 + \Delta V_4$, $V_5 = 1,0 + \Delta V_5$, $a = 1,0 + \Delta a$ y $Q_C = 0,0 + \Delta Q_C$.

El conjunto de restricciones del problema de optimización es el mismo que en el Ejemplo 7.7, con la salvedad de fijar la potencia del generador 4 a 1 000 MW, y liberar la potencia del generador 5,

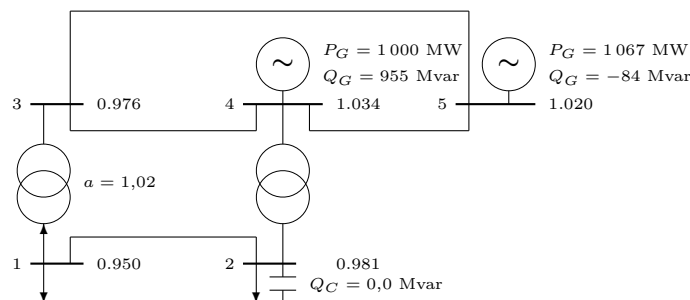


Figura 7.11. Red de 5 nudos y 2 generadores. Estado tras corregir las tensiones fuera de límites.

nudo slack, para que asuma los cambios en las pérdidas.

La solución del problema de optimización, redondeando *a posteriori* las variables discretas al valor más próximo, conduce al estado mostrado en la Figura 7.11.

Cabe destacar los siguientes aspectos en la solución del problema de optimización:

- La función objetivo es una combinación de actuaciones de muy diversa índole (tensiones de consigna de generadores, relación de transformación de un transformador con tomas, potencia reactiva de una batería de condensadores) y con distintos márgenes de actuación. Aunque es posible utilizar factores de ponderación para favorecer la utilización de unas variables frente a otras, su determinación no es fácil teniendo en cuenta además la necesidad de escalar las variables. En este sentido, la no utilización de los condensadores del nudo 2, variable local y con gran impacto sobre la tensión de su propio nudo, se debe en gran medida al escalado incorrecto de la potencia reactiva frente a las tensiones y la relación de transformación. Téngase en cuenta además que se podría haber utilizado otras variables de control alternativas, como es el caso de la potencia reactiva generada en lugar de las tensiones de consigna de los generadores.
- La utilización de una penalización cuadrática en la función objetivo no impide que el número de variables de control a modificar resulte demasiado elevado —realmente se utilizan todas las variables excepto la batería de condensadores— como para una actuación de emergencia. La utilización de penalizaciones lineales de las variables de control puede ser de ayuda en este caso.
- La adopción de medidas correctoras implica una reducción del coste de explotación debido a la reducción de pérdidas como consecuencia de aumentar las tensiones excesivamente bajas. El coste óptimo de explotación se reduce a 21 370 €/h, representando un ahorro de 20 €/h frente al coste de partida.

Una alternativa al OPF como herramienta de ayuda a la operación cuando existen tensiones fuera de límites consiste en la utilización de sistemas expertos “híbridos”, basados en reglas heurísticas obtenidas de las particularidades del sistema eléctrico y de los propios operadores, y en algoritmos numéricos de cálculo de las “sensibilidades” de las tensiones respecto a las variables de control [18], entendiendo como tales las relaciones lineales que ligan ambos tipos de variables.

En base a las sensibilidades entre tensiones y variables de control, es fácil implementar un algoritmo basado en reglas para la ayuda a la operación cuando existen problemas con las

tensiones. No obstante, se plantean diversas cuestiones prácticas cuya resolución depende en gran medida de la filosofía particular de cada centro de control, como pueden ser [17, 18]:

- Cómo elegir entre los diversos controles disponibles, teniendo en cuenta, además de las características propias de cada variable de control, factores como la mayor o menor sensibilidad de la tensión a corregir respecto al control, el margen de reserva de actuación, y la posibilidad de utilizar uno o varios controles para corregir un único problema, evitando agotar prematuramente determinadas variables de control.
- Cómo integrar en el control correctivo actuaciones drásticas utilizables en situaciones extremas, principalmente:
 - Apertura de líneas que transportan poca potencia.
 - Conexión de grandes reactancias, para las que, debido a la magnitud de la actuación, la aproximación lineal de las ecuaciones deja de ser válida.
 - Conexión de determinadas centrales de arranque rápido para mantener la tensión en áreas críticas.

Ejemplo 7.11:

Corrección de tensiones en situación de emergencia utilizando sensibilidades.

En este ejemplo se corregirán mediante sensibilidades los problemas de tensión existentes en el sistema del Ejemplo 7.7, representado en la Figura 7.7, problemas que han sido resueltos mediante la aplicación de un OPF en el Ejemplo 7.10. Para ello, se obtendrá en primer lugar la dependencia de las tensiones críticas respecto a las actuaciones de control, utilizando una aproximación lineal del problema que relaciona las intensidades reactivas inyectadas en los nudos con las tensiones:

$$I_{r_i} = \frac{Q_i}{V_i} = \sum_j V_j \{G_{ij} \sin \theta_{ij} - B_{ij} \cos \theta_{ij}\} \simeq \sum_j -B_{ij} \cdot V_j$$

La expresión anterior, en forma incremental y distinguiendo entre nudos de consumo y de generación, queda en la forma siguiente:

$$\begin{bmatrix} \Delta I_{r_C} \\ \Delta I_{r_G} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} B_{C,C} & B_{C,G} \\ B_{C,G}^T & B_{G,G} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \Delta V_C \\ \Delta V_G \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \Delta I_{r_1} \\ \Delta I_{r_2} \\ \Delta I_{r_3} \\ \Delta I_{r_4} \\ \Delta I_{r_5} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 116,3616 & -50,0 & -66,3716 & 0 & 0 \\ -50,0 & 148,9999 & 0 & -99,0099 & 0 \\ -66,3717 & 0 & 193,4105 & -47,0588 & -80,0 \\ 0 & -99,0099 & -47,0588 & 193,1075 & -47,0588 \\ 0 & 0 & -80,0 & -47,0588 & 127,0388 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \Delta V_1 \\ \Delta V_2 \\ \Delta V_3 \\ \Delta V_4 \\ \Delta V_5 \end{bmatrix}$$

Se analizará a continuación el efecto de cada variable de control sobre las tensiones a corregir en el estado de partida:

Batería de condensadores del nudo 2: La conexión de una batería de condensadores supone la inyección de una intensidad reactiva en un nudo de consumo, mientras que las tensiones de los generadores permanecen constantes mediante la adecuada inyección de reactiva ($\Delta V_4 = \Delta V_5 = 0$). En consecuencia, $\Delta V_C = B_{C,C}^{-1} \cdot \Delta I_{r_C}$ y $\Delta I_{r_G} = B_{C,G}^T \cdot B_{C,C}^{-1} \cdot \Delta I_{r_C}$. En este caso se dispone de una

batería de condensadores de 200 Mvar nominales (potencia reactiva a tensión nominal) en el nudo 2, con lo que los términos de interés son:

$$\begin{bmatrix} \Delta V_1 \\ \Delta V_2 \\ \Delta V_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,00437 \\ 0,00818 \\ 0,00150 \end{bmatrix} \cdot I_{r_2} \quad \text{y} \quad \begin{bmatrix} \Delta I_{r_4} \\ \Delta I_{r_5} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0,88021 \\ -0,11994 \end{bmatrix} \cdot I_{r_2}$$

La intensidad reactiva proporcionada por la batería de condensadores depende de la propia tensión del nudo: $I_{r_2} = Q_2/V_2 = 2,0 \cdot V_2^2/V_2 = 2,0 \cdot V_2$. Considerando que V_2 antes de conectar la batería de condensadores es igual a 0,942 p.u., se deduce que $\Delta V_2 = 0,00818 \cdot 2,0 \cdot (0,942 + \Delta V_2)$, de donde $\Delta V_2 = 0,0157$ y $I_{r_2} = 1,9154$. Los incrementos en las tensiones y en la intensidad reactiva proporcionada por los generadores son, por tanto,

$$[\Delta V_1 \quad \Delta V_2 \quad \Delta V_3] = [0,0084 \quad 0,0157 \quad 0,0029] \quad \text{y} \quad [\Delta I_{r_4} \quad \Delta I_{r_5}] = [-1,686 \quad -0,23]$$

Se puede observar cómo la conexión de la batería de condensadores al completo permitiría corregir la tensión del nudo 2 ($V_2 = 0,958$) pero no la del nudo 1, aunque la mejora ($V_1 = 0,917$). Los generadores se ven asimismo aliviados en cuanto a generación de reactiva (reducciones de 168 y 23 Mvar respectivamente, suponiendo tensión nominal), siempre teniendo en cuenta los errores asociados a la aproximación lineal realizada.

Generadores en los nudos 4 y 5: La actuación sobre las tensiones de consigna de los generadores repercute tanto en las tensiones de los nudos de consumo como en la reactiva de los propios generadores. Así, teniendo en cuenta que $\Delta I_{r_G} = 0$:

$$\Delta V_C = -B_{C,C}^{-1} \cdot B_{C,G} \cdot \Delta V_G \quad \text{y} \quad \Delta I_{r_G} = -B_{C,G}^T \cdot B_{C,C}^{-1} \cdot B_{C,G} \cdot \Delta V_G$$

Las ecuaciones anteriores, para la red objeto de estudio, resultan:

$$\begin{bmatrix} \Delta V_1 \\ \Delta V_2 \\ \Delta V_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,64283 & 0,35743 \\ 0,88021 & 0,11994 \\ 0,46391 & 0,53629 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \Delta V_4 \\ \Delta V_5 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad \begin{bmatrix} \Delta I_{r_4} \\ \Delta I_{r_5} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 84,12692 & -84,17143 \\ -84,17143 & 84,13593 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \Delta V_4 \\ \Delta V_5 \end{bmatrix}$$

Como puede deducirse fácilmente, para llevar la tensión del nudo 1 entre límites ($\Delta V_1 = 0,041$), sería necesario incrementar la tensión de consigna del generador del nudo 4 en $\Delta V_4 = 0,064$, lo que provocaría la sobrecarga de dicho generador ($\Delta I_{r_4} = 5,366$, equivalente a 536 Mvar con tensión nominal). En lo que respecta al generador 5, sería necesario un incremento de $\Delta V_5 = 0,115$, lo que llevaría a dicho generador a sobrepasar la tensión límite superior. No obstante, siempre es posible adoptar actuaciones conjuntas sobre ambos generadores siguiendo un determinado criterio de actuación como puede ser el favorecer el uso del generador con mayor reserva.

Transformador entre los nudos 1 y 3: La actuación sobre las tomas del transformador se puede modelar, en una primera aproximación, a través de su efecto sobre el flujo de potencia reactiva en ambos extremos del transformador:

$$\frac{\partial Q_{ij}}{\partial a} = -\frac{V_i V_j}{a} (G_{ij} \sin \theta_{ij} - B_{ij} \cos \theta_{ij}) - \frac{2B_{ij} V_i^2}{a}, \quad \frac{\partial Q_{ji}}{\partial a} = -\frac{V_j V_i}{a} (G_{ji} \sin \theta_{ji} - B_{ji} \cos \theta_{ji})$$

Realizando las aproximaciones habituales, los cambios en el flujo de potencia reactiva se pueden modelar como inyecciones en los nudos extremos,

$$\Delta I_{r_i} = -\left\{ \frac{B_{ij} V_j}{a} - \frac{2V_i B_{ij}}{a} \right\} \cdot \Delta a \quad \text{y} \quad \Delta I_{r_j} = -\frac{B_{ji} V_i}{a} \cdot \Delta a$$

con lo que se obtiene:

$$\begin{bmatrix} \Delta V_1 \\ \Delta V_2 \\ \Delta V_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,01302 & 0,00437 & 0,00447 \\ 0,00437 & 0,00818 & 0,00150 \\ 0,00447 & 0,00150 & 0,00670 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 57,4115 \\ 0 \\ -60,3319 \end{bmatrix} \cdot \Delta a = \begin{bmatrix} 0,4779 \\ 0,1604 \\ -0,1479 \end{bmatrix} \cdot \Delta a$$

En consecuencia, sería necesario un incremento de $\Delta a = 0,086 \simeq 0,09$ en la relación de transformación para llevar la tensión del nudo 1 dentro de límites. No obstante, dicha actuación conllevaría que la tensión del nudo 3, el extremo opuesto del transformador, se reduce como indica $\Delta V_3 = -0,013$, creando un nuevo problema en dicho nudo.

Combinación de actuaciones: Como se ha puesto de manifiesto, ninguna de las posibles actuaciones correctoras es capaz de llevar la tensión del nudo 1 dentro de límites sin sobrepasar algún otro límite de explotación. Por ello, es necesario combinar varias actuaciones, eligiendo de entre todas las posibles según unos criterios de operación concretos en la forma de reglas heurísticas. En este ejemplo, parece lógico conectar en primer lugar la batería de condensadores al completo pues el nudo 2 ya tiene de por sí la tensión baja. Con ello, las tensiones pasan a ser las siguientes:

$$\begin{bmatrix} V_1 & V_2 & V_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,917 & 0,958 & 0,956 \end{bmatrix}$$

A continuación, será necesario actuar sobre los generadores o sobre el transformador. Teniendo en cuenta los problemas inherentes a cada actuación, parece lógico utilizar el generador con mayor margen de reserva de potencia reactiva, generador del nudo 5, siendo necesario un incremento en la tensión de consigna de $\Delta V_5 = (0,95 - 0,917)/0,35743 \simeq 0,093$. Tras esta nueva actuación, las tensiones finales en los nudos de consumo resultan, siempre teniendo en cuenta las simplificaciones realizadas:

$$\begin{bmatrix} V_1 & V_2 & V_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,950 & 0,969 & 1,001 \end{bmatrix}$$

La Figura 7.12 presenta el estado final del sistema tras ambas actuaciones, obtenido con un flujo de cargas. Puede observarse cómo el error cometido en las tensiones es aceptable, proporcionando asimismo los condensadores más reactiva de la prevista al aumentar la tensión del nudo en el que se localizan tras la actuación sobre el generador 5.

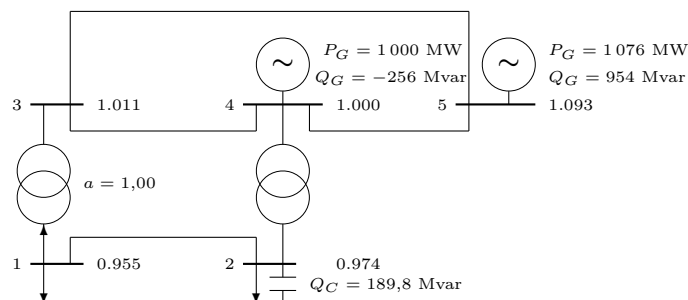


Figura 7.12. Red de 5 nudos y 2 generadores. Estado tras corregir las tensiones fuera de límites mediante sensibilidades.

7.5.2. Operación en estado de alerta

Cuando el sistema se encuentra en estado de alerta, es decir, cuando, aun con todas las variables dentro de los márgenes de funcionamiento normal establecidos, existe el riesgo de que una determinada contingencia, de producirse, lleve el sistema a un estado inaceptable, entra en juego el control preventivo. Asimismo, y como se ha puesto de manifiesto, la explotación del sistema eléctrico en estado seguro conlleva un cierto coste respecto a la

explotación en estado de alerta debido a las medidas preventivas que es necesario poner en práctica, medidas que alejan el sistema del óptimo de explotación en términos de mínimo coste de generación.

Una vez identificadas las contingencias críticas mediante el consiguiente análisis de contingencias (apartado 7.3), y evaluados los riesgos potenciales que se derivarían si se produjesen dichas contingencias, con especial consideración en caso de que se pueda producir un incidente generalizado o si concurren circunstancias que puedan incrementar la probabilidad de ocurrencia de una contingencia (condiciones climatológicas adversas, riesgo de incendios, alertas frente a sabotajes, problemas identificados en las instalaciones, etc.), será necesario adoptar las actuaciones preventivas necesarias (“planes de salvaguarda”), o, alternatively, determinar las actuaciones a llevar a la práctica en caso de que realmente ocurra una determinada contingencia (conjunto de medidas correctoras poscontingencia, también denominados “planes de emergencia”).

Matemáticamente, el problema de determinar las actuaciones correctoras para una contingencia en concreto se puede plantear como un OPF con restricciones de seguridad [15, 14]:

$$\begin{array}{ll}
 \text{Minimizar} & f(u_0, u_p, u_c) \\
 \text{sujeto a} & h(x_p, u_p) = 0 \\
 & h_c(x_c, u_c) = 0 \\
 & g(x_p, u_p) \geq 0 \\
 & g_c(x_c, u_c) \geq 0
 \end{array}$$

donde:

- u es el conjunto de variables de control, correspondiendo u_0 al estado inicial, u_p al estado tras las actuaciones preventivas previas a la contingencia, y u_c al estado tras la adopción de actuaciones correctoras posteriores a la contingencia.
- x es el conjunto de variables dependientes, con estados correspondientes a las actuaciones preventivas, x_p , y poscontingencia, x_c .
- $f(u)$ es la función a minimizar, normalmente los costes asociados a las distintas centrales y al resto de variables de control o, si el programa de las centrales está fijado previamente, una penalización cuadrática o lineal de los cambios en las variables de control, convenientemente ponderadas mediante coeficientes de costes.
- $h(x, u)$ son las ecuaciones de la red, distinguiéndose entre las ecuaciones correspondientes al estado previo a la contingencia, incluyendo posibles actuaciones preventivas, $h(x_p, u_p) = 0$, y el estado poscontingencia, incluyendo actuaciones correctoras a posteriori, $h_c(x_c, u_c) = 0$.
- $g(x, u)$ son los límites de explotación, distinguiéndose entre límites en la explotación normal ($g(x_p, u_p) \geq 0$) y límites de emergencia ($g_c(x_c, u_c) \geq 0$) aplicables tras la ocurrencia de una contingencia y, por tanto, menos estrictos que los de explotación.

Obviamente, si la seguridad del sistema frente a contingencias puede ser controlada de forma lo suficientemente rápida mediante la aplicación de medidas correctoras poscontingencia, no será preciso adoptar medidas preventivas ($u_p = u_0$), evitando aumentar el coste

de explotación; en este caso, el problema de optimización se reduce a un OPF sobre el estado poscontingencia. Cuando las posibles acciones correctoras poscontingencia no puedan ser llevadas a la práctica con la necesaria rapidez, se deberán adoptar las medidas preventivas pertinentes en el menor tiempo posible, siempre eligiendo, de entre las medidas posibles, las que conduzcan a un menor aumento del coste de explotación.

Tradicionalmente, los problemas de tensión han sido obviados en los estudios de contingencias debido tanto a la complejidad de las ecuaciones del modelo completo como a la extendida creencia de que siempre será posible implementar actuaciones poscontingencia con la necesaria rapidez ante un problema de tensiones. Consecuentemente, y en la línea del ejemplo anterior, los algoritmos de OPF con restricciones de seguridad se basan normalmente en modelos lineales de la red de transporte. Ello no impide que, en situaciones muy concretas como puede ser la falta de aporte local de reactiva en grandes centros de consumo, sea necesario adoptar medidas preventivas para evitar situaciones catastróficas como un posible *colapso de tensiones*, problema tratado en el Capítulo 10.

Ejemplo 7.12:

Problema de optimización con restricciones de seguridad.

Como se puso de manifiesto en los Ejemplos 7.5 y 7.6, el sistema cuyo estado se recoge en la Figura 7.3 es vulnerable a la contingencia consistente en la pérdida de la línea L2 que une los nudos 1 y 3. El objetivo del presente ejemplo consiste en obtener las actuaciones, ya sean preventivas o *a posteriori*, que permitan garantizar la supervivencia del sistema tras dicha contingencia.

Las actuaciones contempladas consisten en el redespacho de la generación, distinguiendo entre actuaciones sobre el estado normal de explotación (incrementos positivos, $\Delta P_{p_i}^+$, y negativos, $\Delta P_{p_i}^-$, en los nudos 3, 4 y 5) y actuaciones de emergencia una vez ocurrida la contingencia, tanto en forma de reajuste de la generación ($\Delta P_{c_i}^+$ y $\Delta P_{c_i}^-$ en los nudos 3, 4 y 5) como deslastre de carga en los nudos de consumo (ΔP_{d_i} en los nudos 1 y 2). En este caso concreto, el deslastre es necesario pues no existe un redespacho de la generación que permita evitar sobrecargas tras la contingencia.

Adoptando el modelo lineal para las ecuaciones de la red, el problema de optimización queda definido por las siguientes ecuaciones:

- Función a minimizar, consistente en una penalización lineal de los cambios necesarios en la generación, con unos costes iguales al coste incremental de los generadores: 10 €/MW para los generadores 3 y 4, y de 20 €/MW para el generador 5. No se incluyen penalizaciones sobre los cambios en la generación tras la contingencia, pero sí sobre la potencia deslastrada (1000 €/MW).

$$\mathcal{F} = [10 \quad 10 \quad 20] \begin{bmatrix} \Delta P_{p_3}^+ \\ \Delta P_{p_4}^+ \\ \Delta P_{p_5}^+ \end{bmatrix} + [10 \quad 10 \quad 20] \begin{bmatrix} \Delta P_{p_3}^- \\ \Delta P_{p_4}^- \\ \Delta P_{p_5}^- \end{bmatrix} + [1000 \quad 1000] \begin{bmatrix} \Delta P_{d_1} \\ \Delta P_{d_2} \end{bmatrix}$$

con $\Delta P_p^+ \geq 0$, $\Delta P_p^- \geq 0$ y $\Delta P_d \geq 0$ en todos los casos.

- Restricciones:

- Ecuaciones de la red antes de la contingencia: $P + \Delta P_p^+ - \Delta P_p^- = B \cdot \theta_p$

$$\begin{bmatrix} -15,0 \\ -5,0 \\ 10,0 + \Delta P_{p_3}^+ - \Delta P_{p_3}^- \\ 7,5 + \Delta P_{p_4}^+ - \Delta P_{p_4}^- \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 250 & -100 & -50 & -100 \\ -100 & 150 & 0 & 0 \\ -50 & 0 & 100 & -50 \\ -100 & 0 & -50 & 200 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta_{p_1} \\ \theta_{p_2} \\ \theta_{p_3} \\ \theta_{p_4} \end{bmatrix}$$

junto con el balance de potencias conjunto en la red sin pérdidas:

$$(10,0 + \Delta P_{p_3}^+ - \Delta P_{p_3}^-) + (7,5 + \Delta P_{p_4}^+ - \Delta P_{p_4}^-) + (2,5 + \Delta P_{p_5}^+ - \Delta P_{p_5}^-) = 20,0$$

- Ecuaciones de la red tras la contingencia: $P + \Delta P_p^+ - \Delta P_p^- + \Delta P_c^+ - \Delta P_c^- + \Delta P_d = B_c \cdot \theta_c$

$$\begin{bmatrix} -15,0 + \Delta P_{d_1} \\ -5,0 + \Delta P_{d_2} \\ 10,0 + \Delta P_{p_3}^+ - \Delta P_{p_3}^- + \Delta P_{c_3}^+ - \Delta P_{c_3}^- \\ 7,5 + \Delta P_{p_4}^+ - \Delta P_{p_4}^- + \Delta P_{c_4}^+ - \Delta P_{c_4}^- \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 200 & -100 & 0 & -100 \\ -100 & 150 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 50 & -50 \\ -100 & 0 & -50 & 200 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta_{c_1} \\ \theta_{c_2} \\ \theta_{c_3} \\ \theta_{c_4} \end{bmatrix}$$

junto con:

$$\begin{aligned} & (10 + \Delta P_{p_3}^+ - \Delta P_{p_3}^- + \Delta P_{c_3}^+ - \Delta P_{c_3}^-) + (7,5 + \Delta P_{p_4}^+ - \Delta P_{p_4}^- + \Delta P_{c_4}^+ - \Delta P_{c_4}^-) \\ & + (2,5 + \Delta P_{p_5}^+ - \Delta P_{p_5}^- + \Delta P_{c_5}^+ - \Delta P_{c_5}^-) = 20 - \Delta P_{d_1} - \Delta P_{d_2} \end{aligned}$$

- Límites de generación:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} 15,0 \\ 15,0 \\ 10,0 \end{bmatrix} & \geq \begin{bmatrix} 10,0 + \Delta P_{p_3}^+ - \Delta P_{p_3}^- \\ 7,5 + \Delta P_{p_4}^+ - \Delta P_{p_4}^- \\ 2,5 + \Delta P_{p_5}^+ - \Delta P_{p_5}^- \end{bmatrix} \geq \begin{bmatrix} 2,5 \\ 2,5 \\ 2,5 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} 15,0 \\ 15,0 \\ 10,0 \end{bmatrix} & \geq \begin{bmatrix} 10,0 + \Delta P_{p_3}^+ - \Delta P_{p_3}^- + \Delta P_{c_3}^+ - \Delta P_{c_3}^- \\ 7,5 + \Delta P_{p_4}^+ - \Delta P_{p_4}^- + \Delta P_{c_4}^+ - \Delta P_{c_4}^- \\ 2,5 + \Delta P_{p_5}^+ - \Delta P_{p_5}^- + \Delta P_{c_5}^+ - \Delta P_{c_5}^- \end{bmatrix} \geq \begin{bmatrix} 2,5 \\ 2,5 \\ 2,5 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

- Límites en las potencias por las líneas, $-P_f^{\max} \leq P_f = X^{-1} \cdot A^T \cdot \theta \leq P_f^{\max}$:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} -10,0 \\ -10,0 \\ -10,0 \\ -10,0 \\ -10,0 \\ -10,0 \end{bmatrix} & \leq \begin{bmatrix} 100 & -100 & 0 & 0 \\ 50 & 0 & -50 & 0 \\ 100 & 0 & 0 & -100 \\ 0 & 50 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 50 & -50 \\ 0 & 0 & 0 & 50 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta_{p_1} \\ \theta_{p_2} \\ \theta_{p_3} \\ \theta_{p_4} \end{bmatrix} \leq \begin{bmatrix} 10,0 \\ 10,0 \\ 10,0 \\ 10,0 \\ 10,0 \\ 10,0 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} -10,0 \\ -10,0 \\ -10,0 \\ -10,0 \\ -10,0 \end{bmatrix} & \leq \begin{bmatrix} 100 & -100 & 0 & 0 \\ 50 & 0 & -50 & 0 \\ 0 & 50 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 50 & -50 \\ 0 & 0 & 0 & 50 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta_{c_1} \\ \theta_{c_2} \\ \theta_{c_3} \\ \theta_{c_4} \end{bmatrix} \leq \begin{bmatrix} 10,0 \\ 10,0 \\ 10,0 \\ 10,0 \\ 10,0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

La solución del problema anterior conduce al siguiente “plan de emergencia”:

$$\Delta P_{c_3}^- = 550 \text{ MW} \quad \Delta P_{c_4}^- = 500 \text{ MW} \quad \Delta P_{c_5}^+ = 750 \text{ MW} \quad \Delta P_{d_1} = 300 \text{ MW}$$

El estado de los flujos de potencia activa (MW) en la red tras las actuaciones de emergencia se muestra en la siguiente tabla:

Línea	Aproximación lineal	Potencias reales	
	P_f	P_{ij}	P_{ji}
L1 1-2	-200	-202.1	203.0
L2 1-3	-	-	-
L3 1-4	-1 000	-997.9	1 027.6
L4 2-5	-700	-703.0	728.0
L5 3-4	450	450.0	-442.7
L6 4-5	-300	-334.9	339.1

Las actuaciones de emergencia obtenidas podrían ser consideradas inviables al implicar grandes cambios en la generación, difíciles si no imposibles de llevar a la práctica en un tiempo razonablemente corto. En consecuencia, habría que reconsiderar el problema imponiendo nuevas restricciones sobre las actuaciones *a posteriori*. Así, supóngase que es imposible realizar cambios en la generación superiores a 200 MW en un tiempo aceptable. La solución del problema de optimización, con estos nuevos condicionantes ($\Delta P_{c_i} \leq 2,0$ en p.u.), conduce al siguiente “plan de salvaguarda”:

- Actuaciones preventivas: $\Delta P_{p_5}^+ = 650$ MW, $\Delta P_{p_4}^- = 350$ MW y $\Delta P_{p_3}^- = 300$ MW
- Actuaciones poscontingencia: $\Delta P_{c_5}^+ = 100$ MW, $\Delta P_{c_4}^- = 200$ MW, $\Delta P_{c_3}^- = 200$ MW y $\Delta P_{d_1} = 300$ MW

Se observa cómo es necesario adoptar actuaciones preventivas sobre el estado normal, con el consiguiente incremento del coste de explotación.

Existe la posibilidad, muy útil cuando se trata de determinar actuaciones preventivas sobre el estado de la red previo a la contingencia, de utilizar factores de distribución “compensados” para tener en cuenta una determinada contingencia. Así, el incremento del flujo de potencia por el elemento, línea o transformador, entre los nudos m y n debido a un incremento de generación en el nudo g , y con el elemento ij fuera de servicio, se puede obtener como:

$$\Delta P_{mn}^i \Big|_{ij = \text{fallada}} = \rho_{mn}^g \cdot \Delta P_g + \rho_{mn}^{ij} \cdot \rho_{ij}^g \cdot \Delta P_g \quad (7.17)$$

$$\rho_{mn}^g \Big|_{ij = \text{fallada}} = \frac{\Delta P_{mn}}{\Delta P_g} \Big|_{ij = \text{fallada}} = \rho_{mn}^g + \rho_{mn}^{ij} \cdot \rho_{ij}^g \quad (7.18)$$

Dichos factores de distribución permiten plantear un problema de optimización sobre el estado previo a la contingencia, con actuaciones preventivas, imponiendo restricciones sobre los flujos de potencia en el estado poscontingencia.

Ejemplo 7.13:

Cálculo de actuaciones preventivas utilizando factores de distribución.

Como se puso de manifiesto en los Ejemplos 7.5 y 7.6, el sistema de 5 nudos y 3 generadores de la Figura 7.3 es vulnerable a la contingencia consistente en la pérdida de la línea L3 que une los nudos 1 y 4. El objetivo del presente ejemplo consiste en obtener las actuaciones preventivas que permitan llevar el sistema a estado seguro frente a dicha contingencia.

Las actuaciones contempladas en este caso consisten en el redespacho de la generación (incrementos positivos, ΔP_p^+ , y negativos, ΔP_p^- , en los nudos 3, 4 y 5). Asimismo, se utilizarán factores de distribución para imponer las restricciones sobre el problema de optimización:

- Sobre el caso base: $\Delta P_f = S \cdot \Delta P_g$

$$\begin{bmatrix} \Delta P_{1,2} \\ \Delta P_{1,3} \\ \Delta P_{1,4} \\ \Delta P_{2,5} \\ \Delta P_{3,4} \\ \Delta P_{4,5} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,4138 & 0,3448 \\ -0,4828 & -0,0690 \\ 0,0690 & -0,2759 \\ 0,4138 & 0,3448 \\ 0,5172 & -0,0690 \\ 0,5862 & 0,6552 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \Delta P_3^+ - \Delta P_3^- \\ \Delta P_4^+ - \Delta P_4^- \end{bmatrix}$$

- Sobre el estado poscontingencia: $\Delta P'_f = S' \cdot \Delta P_g$

$$\begin{bmatrix} \Delta P'_{1,2} \\ \Delta P'_{1,3} \\ \Delta P'_{1,4} \\ \Delta P'_{2,5} \\ \Delta P'_{3,4} \\ \Delta P'_{4,5} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,4444 & 0,2222 \\ -0,4444 & -0,2222 \\ 0,0 & 0,0 \\ 0,4444 & 0,2222 \\ 0,5556 & -0,2222 \\ 0,5556 & 0,7778 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \Delta P_3^+ - \Delta P_3^- \\ \Delta P_4^+ - \Delta P_4^- \end{bmatrix}$$

Así, el problema de optimización queda en la forma siguiente:

- Función a minimizar: penalización lineal de los cambios en la generación, con costes de 10 €/MW para los generadores 3 y 4, y de 20 €/MW para el generador 5.
- Restricciones:
 - Sobre los flujos de potencia en el caso base: $-P_f^{\max} \leq P_f \leq P_f^{\max}$, calculándose los flujos de potencia como $P_f = P_{f_0} + \Delta P_f = P_{f_0} + S \cdot \Delta P_g$. Los flujos de potencia iniciales se han calculado con un flujo de cargas en continua:

$$P_{f_0} = [120,7 \quad -724,1 \quad -896,6 \quad -379,3 \quad 275,9 \quad 129,3]^T \quad \text{en MW}$$

- Sobre los flujos de potencia tras la contingencia: $-P_f^{\max} \leq P'_f \leq P_f^{\max}$, calculándose los flujos de potencia ahora como $P'_f = P'_{f_0} + \Delta P'_f = P'_{f_0} + \rho^{L3} \cdot P_{f_0}^{L2} + S' \cdot \Delta P_g$. P'_{f_0} son los flujos de potencia tras la contingencia sin cambios en la generación, y ρ^{L2} son los factores de distribución para la pérdida de la línea L3:

$$\rho^{L2} = [0,444 \quad 0,556 \quad - \quad 0,444 \quad 0,556 \quad -0,444]^T$$

- Balance de potencias conjunto en la red sin pérdidas, necesaria para incluir la potencia del generador de referencia:

$$(10 + \Delta P_{p3}^+ - \Delta P_{p3}^-) + (7,5 + \Delta P_{p4}^+ - \Delta P_{p4}^-) + (2,5 + \Delta P_{p5}^+ - \Delta P_{p5}^-) = 20$$

- Límites de generación:

$$\begin{bmatrix} 15,0 \\ 15,0 \\ 10,0 \end{bmatrix} \geq \begin{bmatrix} 10,0 + \Delta P_3^+ - \Delta P_3^- \\ 7,5 + \Delta P_4^+ - \Delta P_4^- \\ 2,5 + \Delta P_5^+ - \Delta P_5^- \end{bmatrix} \geq \begin{bmatrix} 2,5 \\ 2,5 \\ 2,5 \end{bmatrix}$$

La solución del problema anterior proporciona las siguientes actuaciones preventivas sobre la generación: $\Delta P_3^- = 500$ MW y $\Delta P_4^+ = 500$ MW, con un sobrecoste total de explotación de 15 000 €.

Los flujos de potencia activa (en MW) en la red tras las actuaciones preventivas y tras la contingencia, tanto los valores calculados con la aproximación lineal como los reales, se muestran en la Figura 7.13, junto al estado de las tensiones tras la contingencia. Cabe indicar los siguientes aspectos en la solución obtenida:

- Aunque la solución obtenida mediante la aproximación lineal puede considerarse suficientemente exacta a efectos prácticos, es necesario tener en cuenta el efecto de las aproximaciones introducidas. Así, por ejemplo, el estado poscontingencia presenta sobrecargas en las líneas L2 y L4 debido a que el corredor constituido por dichas líneas, con una capacidad total de 2 000 MW, debe transportar 2 000 MW más las pérdidas en ambas líneas y en L1.

Línea	Caso base			Actuaciones			Poscontingencia		
	P_f	P_{ij}	P_{ji}	P_f	P_{ij}	P_{ji}	P_f	P_{ij}	P_{ji}
L1 1-2	120	96	-96	-86	-92	92	-500	-530	541
L2 1-3	-724	-699	721	-482	-476	488	-1 000	-969	1 043
L3 1-4	-896	-897	920	-931	-931	955	0	0	0
L4 2-5	-379	-403	414	-586	-592	609	-1 000	-1 041	1 118
L5 3-4	275	278	-275	17	11	-11	-501	-543	556
L6 4-5	129	105	-105	-164	-193	195	249	194	-192

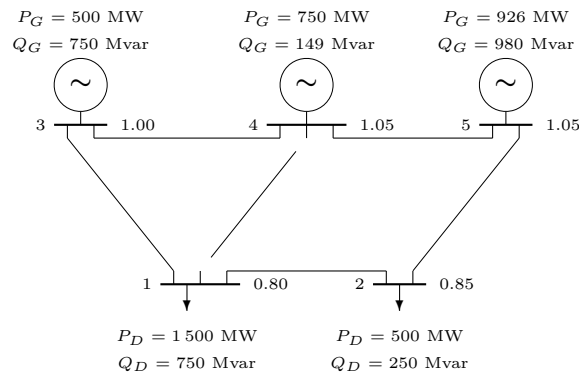


Figura 7.13. Red de 5 nodos y 3 generadores tras la pérdida de la línea L3.

- En el modelo lineal únicamente se tienen en cuenta las potencias activas. Conviene, por tanto, comprobar la viabilidad de los distintos estados en términos de potencias reactivas y tensiones, estableciendo los planes de emergencia pertinentes. La Figura 7.13 presenta el estado en que quedaría el sistema tras la pérdida de la línea L3, incluyendo las medidas preventivas obtenidas. Puede observarse cómo las tensiones en los nodos de consumo son excesivamente bajas, permitiendo cuestionar la viabilidad de dicho estado.

7.5.3. Operación en estado seguro

Cuando el sistema se encuentra en estado normal, con ausencia de violaciones de los límites de operación y cumpliendo las restricciones de seguridad impuestas, el objetivo de la explotación puede ir encaminado a “optimizar” los costes de explotación, intentando reducirlos en lo posible.

El problema de determinar los valores óptimos de las variables de control, incluyendo la generación, se encuadra dentro del despacho económico con un modelo detallado de la red de transporte (Capítulo 6), una aplicación concreta de los algoritmos de reparto óptimo de cargas. En este tipo de problemas (ver el Ejemplo 7.7), además de asignar la generación y las propias pérdidas en la red de forma óptima en función de los costes de cada generador, el problema de optimización proporciona el estado óptimo de las variables de control de tensiones que minimiza aún más el coste de las pérdidas al reducir las en lo posible.

En cualquier caso, la optimización completa del sistema generación-transporte, incluyendo los costes de generación, se ha utilizado poco en la práctica debido a la gran complejidad

del problema y a la necesidad de disponer de información en tiempo real tanto de los costes de las centrales como del estado del sistema de transporte al completo. En este sentido, es más habitual la realización secuencial en el tiempo, de la programación de la generación en primer lugar, considerando las pérdidas mediante modelos simplificados de la red (Capítulo 6), y, posteriormente, la corrección de los programas de generación para evitar posibles sobrecargas y problemas con las tensiones (apartado 7.5.1), o bien para cumplir las restricciones de seguridad impuestas a la explotación del sistema (apartado 7.5.2). Finalmente, una vez establecido el programa de generación definitivo, es necesario determinar el perfil óptimo de tensiones a mantener en la red en aras a minimizar las pérdidas de transporte, lo que equivale a establecer las consignas de los elementos de control de tensiones a lo largo del horizonte de programación, actividad que se encuadra dentro del control de tensiones del sistema eléctrico (Capítulo 5).

Perfil óptimo de tensiones

La determinación de las consignas de tensión a mantener en la red es un problema que se integra en el control terciario de tensiones, problema tratado en el Capítulo 5. El problema consiste en determinar los valores óptimos de las tensiones de los nudos y de las consignas de los elementos de control a fin de optimizar las pérdidas de energía en la red de transporte y asegurar una adecuada reserva de generación de reactiva para hacer frente a posibles problemas dinámicos. En este sentido, y como se puso de manifiesto en el apartado anterior, los programas de generación han sido determinados previamente en base a criterios económicos y de seguridad frente a sobrecargas, dejando de lado los posibles problemas de tensión.

Ejemplo 7.14:

Ejemplo de OPF para establecer el perfil óptimo de tensiones.

Se desea obtener el perfil óptimo de tensiones que permita minimizar las pérdidas en el transporte del sistema de la Figura 7.7. Se supone que el programa de generación ha sido fijado previamente en $P_{G_4} = P_{G_5} = 1000$ MW, siendo el generador 5 el que asume las pérdidas. El estado de partida se muestra en la figura indicada, con un coste de explotación de 21 390 €/h.

El objetivo es minimizar las pérdidas actuando sobre los elementos de control de tensiones: los reguladores de tensión de los generadores, la batería de condensadores de 200 Mvar (en 20 escalones de 10 Mvar) del nudo 2, y las tomas del transformador situado entre los nudos 1 y 3 (en 21 tomas con incrementos de 0.01 en p.u.), manteniendo en todo caso las variables dentro de los límites de explotación.

La función a minimizar es, por tanto, la suma de las pérdidas individuales en las líneas y transformadores:

$$P_{\text{perd.}} = \sum_{i,j} -G_{ij} (V_i^2 + V_j^2 - 2V_i V_j \cos \theta_{ij})$$

lo cual equivale en este caso a minimizar la potencia generada por el generador de referencia, teniendo en cuenta que $P_{G_5} = 1000 + P_{\text{perd.}}$.

La solución del problema de optimización de pérdidas, sujeto a las mismas restricciones que en el Ejemplo 7.7 y tras redondear *a posteriori* las variables discretas al valor más próximo, conduce al estado mostrado en la Figura 7.14. Cabe destacar los siguientes hechos en el óptimo de explotación:

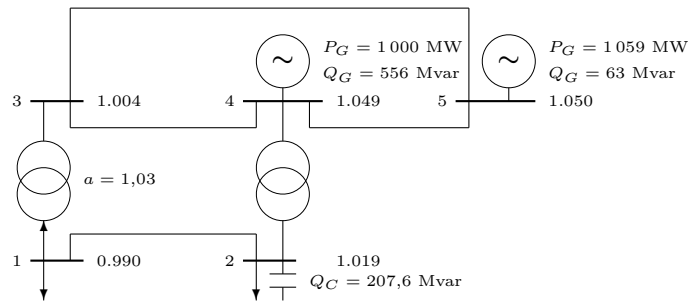


Figura 7.14. Red de 5 nudos y 2 generadores. Perfil óptimo de tensiones.

- Las pérdidas disminuyen en 9.3 MW, pasando de 69.2 a 59.5 MW, representando un ahorro de 95 €/h frente a caso de partida. Debe notarse que el óptimo de explotación en término de costes (Ejemplo 7.7) implicaba una reducción de costes de 101 €/h, próxima al valor obtenido actuando únicamente sobre los elementos de control de tensiones.
- Los valores que toman los multiplicadores de Lagrange en el óptimo, y más concretamente los multiplicadores asociados a las ecuaciones de balance de potencia activa en cada nudo, proporcionan una información fundamental de cara a discriminar los nudos en cuanto a su repercusión sobre las pérdidas, siendo conocidos en este caso como los coeficientes de *pérdidas incrementales de transporte*. En este ejemplo, dichos coeficientes nodales son los siguientes:

$$\lambda^T = [1,103 \quad 1,062 \quad 1,071 \quad 1,041 \quad 1,000] \quad \text{€/MWh}$$

proporcionando el incremento de pérdidas al suministrar un MWh adicional en cada nudo respectivamente. Puede observarse que el coeficiente correspondiente al generador de referencia, generador encargado de asumir las pérdidas, es igual a la unidad.

En el ejemplo anterior se ha puesto de manifiesto la equivalencia de minimizar las pérdidas de potencia activa en la red y minimizar la potencia del generador de referencia, al ser éste el encargado de asumir cualquier desajuste entre generación y consumo, incluyendo las pérdidas. No obstante, modelar las pérdidas como suma de las pérdidas individuales en cada línea o transformador tiene utilidad en situaciones prácticas cuando, por ejemplo, la zona a optimizar no coincide con el conjunto de la red al completo.

Paralelamente al problema de calcular el valor óptimo de todas las variables de control de tensiones presentes en el sistema, en la operación rutinaria del sistema eléctrico aparecen situaciones en las que interesa determinar una o varias actuaciones (el límite estará impuesto por la propia filosofía de operación) que permitan disminuir las pérdidas en tiempo real, en la línea de los algoritmos que determinan de forma rápida actuaciones correctoras ante la presencia de violaciones de límites (apartado 7.5.1). Una posible solución a dicho problema consiste en obtener el gradiente de las pérdidas respecto a las variables de control en el punto de operación, decidiendo en base a los términos del gradiente, y posiblemente teniendo en cuenta otros criterios como el margen o reserva de actuación de cada control, sobre qué variable o variables actuar para reducir pérdidas. Se remite al lector interesado a la referencia [17].

7.5.4. Operación en estado de reposición

El problema de la reposición de servicio es tan antiguo como la existencia misma del suministro eléctrico, anterior incluso a los centros de control basados en computadores digitales tal como se conocen hoy en día. No obstante, no es hasta la década de 1970-1980 cuando el problema adquiere un interés creciente debido tanto al mayor número de incidentes o “apagones” como a la mayor repercusión social de éstos. En este sentido, y debido a la complejidad del problema y al carácter en buena medida heurístico del proceso de reposición, destaca el desarrollo de sistemas basados en reglas para la ayuda a los operadores en los procesos de reposición [19].

A continuación, se discuten brevemente los aspectos técnicos más importantes de la metodología habitualmente adoptada en la reposición de redes de transporte:

- **Tratamiento de alarmas.** Ante un incidente más o menos generalizado en la red de transporte con pérdida de suministro, siempre se producirá una “avalancha” de alarmas en el centro de control, siendo primordial identificar aquéllas que son relevantes para la reposición (actuación de protecciones, elementos de corte, sobrecargas, etcétera). El objetivo del tratamiento de alarmas no es tanto encontrar el origen de la perturbación, imposible muchas veces, como determinar qué parte de la red es irrecuperable en el momento presente, lo que requerirá muchas veces realizar reenganches de prueba como complemento al tratamiento de alarmas.
- **Puesta en servicio de grandes centrales.** El objetivo prioritario de la reposición, en sus primeros momentos, consiste en suministrar tensión a los grandes grupos térmicos partiendo de otras fuentes como grupos de bombeo, centrales hidráulicas, interconexiones con otros sistemas, etc. Los tiempos de actuación son críticos para evitar arranques en frío de las centrales que implicarían una excesiva demora. Para ello deben establecerse en primer lugar caminos expeditos, evitando ramificaciones laterales, que conecten estos grupos al punto desde donde se suministra tensión. Asimismo, debe recuperarse la carga mínima necesaria para mantener los grupos dentro de unos límites aceptables para las protecciones y los sistemas de regulación.

Este aspecto enlaza con la posibilidad de realizar una *reposición en paralelo*, con la división del sistema en islas alimentadas por una o varias centrales que, una vez restablecidas individualmente, se interconectan entre sí, frente a la *reposición secuencial*, en la que el sistema se recupera a partir de una única isla, a la que se van incorporando sucesivamente zonas de consumo y centrales de generación.

- **Mantenimiento en todo momento de un adecuado equilibrio entre generación y consumo.** El consumo debe recuperarse en pequeños escalones con el fin de evitar inestabilidades transitorias y sobrecargas de nuevos elementos, así como no sobrepasar la velocidad de respuesta de los grupos.

La estabilidad es un aspecto crítico durante el proceso de reposición, por lo que sería deseable, aunque no es habitual, la utilización de herramientas de análisis de la estabilidad transitoria como las presentadas en el Capítulo 10.

- **Mantenimiento en todo momento de un adecuado nivel de tensiones.** En ausencia de carga, las tensiones pueden elevarse peligrosamente si se recupera una

fracción importante de la red de transporte, pudiendo dar lugar a graves problemas en alternadores y transformadores. En consecuencia, la primera medida a tomar consiste en la desconexión de las baterías de condensadores existentes, pudiendo ser necesario actuar sobre las tomas de transformadores y conectar reactancias durante el proceso de reposición para mantener las tensiones en límites aceptables.

Al igual que ocurre con la estabilidad, el estudio de los posibles fenómenos de sobretensiones transitorias sería deseable a fin de evitar problemas mayores, aunque no es habitual debido a la propia complejidad de las herramientas necesarias (Capítulo 8).

- **Actividades previas a la reposición (pre-reposición).** Una vez identificada una zona que ha quedado sin suministro, es habitual proceder, previamente a la reposición en sí, a la apertura de todos los elementos de corte de la zona en cuestión, a fin de conocer con certeza el estado de partida para la reposición. Esta forma de proceder tiene el inconveniente de que se malgasta una energía al actuar sobre los elementos de corte que puede ser crítica en maniobras posteriores, pudiendo llegar a dejar inhabilitados determinados elementos de corte.
- **Predicción de la demanda en el momento de reposición.** La determinación del consumo tras el apagón y de cómo éste se ve afectado por la duración del proceso de reposición es un aspecto crucial a fin de realizar las simulaciones pertinentes previas a la reposición. Ante la falta de información, es frecuente asumir que el consumo no ha cambiado si la reposición se realiza con la suficiente rapidez.
- **Reducción de desfases en bornas de interruptores a cerrar.** Durante la reposición, al interconectar zonas en tensión a través del cierre de interruptores, se pueden presentar desfases inadmisibles en los extremos de los interruptores e incluso frecuencias diferentes en el caso de islas, por lo que será necesario “sincronizar” los generadores involucrados o reforzar la red de transporte antes de la interconexión.

7.6. Operación del transporte en sistemas abiertos a la competencia

En los mercados de energía eléctrica abiertos a la competencia, los servicios de transporte y generación tienden a gestionarse de forma independiente, bajo la esperanza de alcanzar un nivel adecuado de competencia en la generación cuando existan muchos participantes activos en el mercado (productores y consumidores). Sin embargo, se reconoce la conveniencia de mantener la operación del sistema de transporte como un monopolio regulado.

La energía eléctrica tiene algunas características peculiares que no permiten considerarla como una mercancía cualquiera. Estas características incluyen la imposibilidad de almacenar energía eléctrica en cantidades apreciables, las grandes variaciones diarias y estacionales de la demanda, los requisitos operacionales para el control y la seguridad del sistema, y las propias limitaciones de la red de transporte que conduce la energía eléctrica desde los generadores que la producen hasta las cargas que la consumen.

Los mercados eléctricos abiertos a la libre competencia requieren que el acceso al transporte, tanto por parte de los generadores como de los consumidores, sea manejado en una

forma abierta y equitativa; este concepto se conoce como el *libre acceso de terceros a las redes*. En la práctica, para asegurar el libre acceso a la red de transporte, se ha introducido la figura del *operador del sistema (OS)*. Aunque las responsabilidades y alcances de las actividades propias de un OS varían de un sistema a otro, el OS será responsable, entre otras cosas, de la seguridad y la operación eficiente del sistema de transporte, velando por que se cumplan las condiciones para el libre acceso de los distintos agentes a la red de transporte.

Cuando productores y consumidores desean producir y consumir energía eléctrica en cantidades que podrían llevar al sistema de transporte a operar en sus límites (o más allá de ellos), se dice que la red de transporte está *saturada*, es decir, se encuentra sujeta a *restricciones técnicas de operación*. Controlar el sistema de transporte de modo que sus límites sean respetados es quizás el problema fundamental en la operación del transporte.

En una implementación eficiente del libre acceso de terceros hay tres aspectos fundamentales que deben ser resueltos adecuadamente por el OS: i) la saturación de la red de transporte, ii) las pérdidas de potencia activa en el transporte y iii) los servicios complementarios. Como se ha dicho, la saturación de una red de transporte puede ocurrir debido a violaciones de los límites de operación en uno o más de los flujos de potencia de las líneas.

Aparte de la saturación, la gestión del transporte involucra también las *tarifas de conexión* que tanto los generadores como los consumidores deben pagar a la red a que están conectados. Por otra parte, los servicios complementarios son fundamentales para la operación segura y fiable del sistema eléctrico.

Puesto que tanto los problemas de saturación como las pérdidas del transporte y los servicios complementarios deben ser pagados por los participantes del mercado, existe un incremento obvio en el coste de la energía eléctrica consumida. En esta sección, presentaremos los métodos básicos para calcular algunos de estos costes.

7.6.1. Resolución de restricciones técnicas

La física de los sistemas de potencia, gobernados por las leyes de Kirchhoff, dictamina la forma en que la energía eléctrica fluye de un nudo a otro, en cada rama de una red eléctrica.

Varios factores pueden imponer límites al transporte de potencia entre dos nudos de la red. Estos factores incluyen, entre otros: i) límites térmicos, ii) límites de tensiones y iii) límites de estabilidad. Por supuesto, se aplica la restricción más severa en todo momento y los límites deben contemplar tanto la operación normal como las posibles contingencias.

Idealmente, un buen control del flujo de potencia sería muy útil para mantener dentro de sus límites la potencia a transmitir entre dos nudos. Desgraciadamente, la capacidad para controlar el flujo de potencia en una rama de la red es limitada y difícil de ejercer cuando el control se aplica directamente a los generadores. Equipos de control de potencia, tales como “transformadores desfasadores” y FACTS, ofrecen un control moderado y bastante caro en la actualidad, por lo que su uso no está muy extendido. Algo similar ocurre con el control de flujos de potencia mediante la conexión/desconexión de elementos de la red, actuaciones que comprometen la seguridad del sistema.

La *resolución de restricciones técnicas* es el proceso que asegura la realización de todas las transacciones de potencia (entre vendedores y compradores) sin que exista violación de los límites de operación de la red de transporte en ningún momento. Si se alcanza la

saturación, el transporte de energía pasa a ser un recurso limitado y, como tal, conlleva un sobrecoste. Si no se establecieran peajes por el uso del transporte, las transacciones de energía eléctrica podría exceder la capacidad de algunas líneas. El método que se usa para evaluar la saturación depende de las características del mercado de energía eléctrica; aún más, la propia resolución de restricciones técnicas no se puede separar de las consideraciones del mercado. Uno de los aspectos fundamentales de la resolución de restricciones técnicas es la asignación de los costes y obligaciones de pago a los participantes del mercado.

En general, los mercados de energía eléctrica involucran, por lo menos, los siguientes tres tipos de transacciones:

1. *Transacciones resultantes de los mercados energéticos.* Una transacción de mercado es una oferta, tanto en precio como en cantidad, para vender (por parte de los generadores) a una “bolsa de la energía eléctrica” (representada por el OS o, en determinadas implementaciones, un *operador del mercado u OM* independiente), o para comprar (por parte de los consumidores o distribuidores) de la bolsa.
2. *Transacciones bilaterales.* Estas transacciones se realizan entre un generador y un comprador, sin intervención de un tercer agente; este concepto puede extenderse a *transacciones multilaterales* en las cuales un tercer agente (corredor o agente de contratos a futuros) está también involucrado. En estas transacciones, las cantidades negociadas y los precios pactados son decididos de forma independiente por los participantes sin intervención del OS; el OS sólo provee las facilidades para el transporte de la energía.
3. *Servicios complementarios.* Como se ha dicho, estos servicios se necesitan para la operación segura y fiable del sistema de transporte. El OS contrata estos servicios de los agentes generadores, y distribuye equitativamente los costes asociados entre los compradores.

La eficiencia de un mercado de energía eléctrica se mide por el *bienestar social* que conlleva, el cual se define como una combinación del coste de la energía y el beneficio que la energía brinda a la sociedad (medido por el grado de aceptación de la sociedad en cuanto a pagar por dicha energía). Si la demanda de energía es *inelástica* —independiente del precio de la energía— entonces el bienestar social es simplemente el simétrico de la cantidad de dinero pagado por la energía. Cuando la demanda de energía es *elástica al precio*, el bienestar social es una función de la carga que un consumidor desea comprar. La maximización del bienestar social es un problema de OPF que contiene límites sobre los flujos de potencia, y proporciona las potencias óptimas tanto generadas como consumidas.

Maximizar las ganancias de un generador requiere que éste oferte sus *costes incrementales*. Un generador hace una oferta estratégica cuando trata de aumentar su ganancia mediante una oferta que no es la de coste incremental, aprovechando imperfecciones del mercado. Se dice que un generador tiene *poder de mercado* cuando dicho generador puede aumentar sus ganancias por medio de ofertas estratégicas. El poder de mercado conduce a ineficiencias de mercado. Una de las posibles causas de la existencia de poder de mercado es la saturación del sistema de transporte, como se ve en el siguiente ejemplo.

Ejemplo 7.15:**Ejemplo de saturación del transporte.**

Consideremos un sistema de potencia simple con dos nudos. Cada nudo tiene conectados un generador y una carga constante (es decir, no elástica); esta configuración podría representar un sistema de potencia con dos áreas. Los nudos están conectados entre sí por una línea con impedancia nula. El generador 1 tiene una capacidad de 120 MW y un coste incremental de 15 €/MWh, el generador 2 tiene una capacidad de 200 MW y un coste incremental de 25 €/MWh, y las dos cargas son de 60 MW.

Suponiendo que ambos generadores ofertan sus costes incrementales, se desea calcular el coste total de suministro para cada uno de los siguientes casos: a) sin límite sobre el flujo de potencia, y b) con un límite de 40 MW.

- a) **Sin límite sobre el flujo de potencia.** En este caso, el consumo (120 MW en total) es suministrado por el generador 1 al ser éste el más barato; el coste total es $C_a = 120 \cdot 15 = 1\,800$ €/h. El flujo de potencia en la línea es $P_{1,2} = 60$ MW, como se muestra en la Figura 7.15.a.
- b) **Con límite de 40 MW en la potencia transportada.** El generador 1 suministra ahora los 60 MW de la carga 1 y, debido al límite de flujo de la línea, sólo puede suministrar 40 MW a la carga 2; el generador 2 suministra por tanto 20 MW. Así, el coste total de suministro es $C_b = 100 \cdot 15 + 20 \cdot 25 = 2\,000$ €/h, como se muestra en la Figura 7.15.b.

Se puede observar que:

- El *coste de la saturación o restricción técnica* (es decir, el “coste para evitar la saturación”) es $C_c = C_b - C_a = 200$ €/h; esto es, la saturación ha creado una ineficiencia en el mercado de $100 \cdot C_c / C_a = 11,11\%$ con respecto al caso sin límite de flujo.
- El generador 2 tiene un poder de mercado ilimitado puesto que puede aumentar su oferta tanto como quiera, ya que la carga inelástica del nudo 2 necesitará siempre comprar 20 MW de él.
- Si la carga 2 fuera elástica en precio (sensible al precio de la energía), su consumo se reduciría a 40 MW.

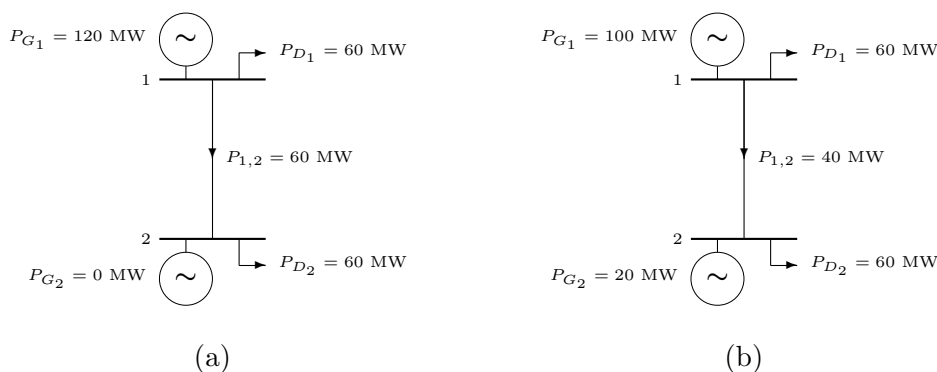


Figura 7.15. Sistema de potencia de dos nudos: a) sin límite sobre el flujo de potencia; b) con un límite de 40 MW.

Métodos de resolución de las restricciones técnicas

Diversos esquemas de resolución de las restricciones técnicas han sido propuestos en los diferentes mercados de electricidad en operación en el mundo, destacando los siguientes:

1. *Método del precio nodal* [20, 21]. El objetivo de este método es ajustar los precios de la energía con el propósito de reflejar en el coste del consumo en cada nudo su localización en la red, teniendo en cuenta la saturación (si la hay) y las pérdidas.
2. *Método para transacciones bilaterales* [20, 21]. Este método para evaluar el coste de las restricciones técnicas está basado en la competencia en un mercado libre, buscando alcanzar una plena competencia en el mercado eléctrico. Además, este método es el que mejor logra el objetivo de facilitar a los compradores un libre acceso a los suministradores de su elección. Los suministradores de energía eléctrica y los compradores acuerdan, independientemente entre ellos, transacciones de potencia bajo sus propios términos financieros. La eficiencia económica se promueve cuando los compradores eligen a los generadores menos caros.

Una vez que el OS recibe todas las transacciones bilaterales, la aplicación con éxito de este método requiere sin embargo la resolución satisfactoria de tres problemas adicionales: i) la saturación del transporte (el coste asociado y su reparto como un coste adicional al de transporte), ii) las pérdidas de transporte (su cuantificación y su asignación a los participantes) y iii) los servicios complementarios.

3. *Método del precio de área* [20]. Este método para evitar la saturación del sistema, usado principalmente en el “Nord Pool” (Noruega, Suecia y Dinamarca), se basa en tres mecanismos diferentes: i) precios a tarifa, ii) precios de áreas y iii) compra de regreso o “buy-back” de la energía (la cual controla, en tiempo real, las posibles saturaciones durante la operación del sistema).

En las referencias [22] y [23] pueden encontrarse otros métodos para la resolución de restricciones técnicas. Sin embargo, ninguno de los métodos propuestos en la literatura parece preponderar en la práctica, teniendo cada uno sus propias ventajas e inconvenientes. A continuación se presentarán el método del *precio nodal* y el de las *transacciones bilaterales*.

Resolución de restricciones técnicas por el método del precio nodal

Este método está basado en los precios nodales de una bolsa de energía eléctrica. El método requiere la acción del OS y, en su caso, del OM, en tres aspectos: i) recibir las ofertas de precio y cantidad de los generadores, ii) seleccionar las fuentes más eficientes para eliminar las posibles restricciones, y iii) realizar las transacciones financieras que contemplen los pagos de los compradores y las compensaciones a los proveedores de energía. Los precios que gobiernan estos pagos están basados en las ofertas de los generadores bajo despacho y en un ajuste hecho por el OS para reflejar el “precio nodal” (localización) de los suministradores, contemplando su contribución a los costes de las pérdidas y las posibles restricciones de transporte. En general, estos precios ajustados —llamados *precios nodales locales*— son más altos en los nudos de consumo que en los de generación. La diferencia entre los precios locales en el nudo de envío y en el nudo de recepción supone un exceso de pago al OS.

La base del método de los precios nodales fue presentada por Schweppe *et al.* [24], siendo posteriormente desarrollada por otros autores, principalmente Hogan [25].

Los precios nodales son evaluados como las *variables duales* (o multiplicadores de Lagrange) en un problema de optimización de tipo OPF (ver el Ejemplo 7.7). Para plantear un OPF en este contexto, sería necesario disponer de las curvas de costes de los generadores y las funciones de beneficio de los consumidores; estos datos, en un entorno competitivo, constituyen una información confidencial y difícil de obtener. En su lugar, el OM dispone de las curvas de ofertas de los generadores y de los consumidores. En un entorno suficientemente competitivo, los participantes del mercado se ven incentivados a revelar su información confidencial en la forma de curvas de ofertas. Si la red de transporte no presenta restricciones, cada participante tiene muchos competidores y presenta una buena disposición para revelar su información confidencial. Sin embargo, si un participante en el mercado se enfrenta a sólo unos pocos competidores, o no exactamente competidores, las curvas de ofertas pueden ser manipuladas con el objeto de tener mayores ganancias a costa de la sociedad. Como se ve en el ejemplo anterior, tal situación no competitiva es probable que ocurra en una área donde se presentan restricciones sobre los flujos de potencia en el transporte; los generadores de dicha área están esencialmente aislados de competencia con otras áreas.

A efectos de simplificar los cálculos de los costes asociados a la resolución de restricciones técnicas, conviene utilizar una representación simple del sistema de potencia en la formulación del OPF. En esta sección se adopta el modelo del *flujo de cargas en continua* (ver apartados 3.6 y 7.4); este modelo ignora las pérdidas de potencia activa, lo que supone que las diferencias de fase angular entre los nudos de cualquier rama son pequeñas, y considera que las magnitudes de las tensiones de nudo son aproximadamente 1 p.u.

Supongamos una red de potencia con n nudos y m ramas, y que el nudo de referencia es el 1, es decir, $\theta_1 = 0$. Las cargas tienen componentes tanto elásticas como inelásticas en precio. El OPF que es necesario resolver para calcular los costes asociados a la resolución de restricciones técnicas puede formularse como

$$\min_{P_G, P_E} f(P_G, P_E) \quad (7.19)$$

sujeto a las ecuaciones del flujo de cargas en continua:

$$\hat{B} \cdot \hat{\theta} - P = 0 \quad (7.20)$$

y a las restricciones sobre los flujos de potencia activa:

$$P_f - P_f^{\max} \leq 0 \quad (7.21)$$

donde

- $P = P_G - P_D$ es un vector ($n \times 1$) de inyecciones nodales de potencia activa.
- P_G es un vector ($n \times 1$) de potencias generadas.
- $P_D = P_E + P_C$ es un vector ($n \times 1$) de potencias consumidas por cargas elásticas e inelásticas en precio.
- P_C es un vector ($n \times 1$) de cargas contantes (inelásticas en precio).

- P_E es un vector $(n \times 1)$ de potencias activas de las cargas elásticas en precio.
- $\hat{\theta} = [\theta_2, \theta_3, \dots, \theta_n]^T$ es un vector de ángulos de fase de los nudos 2 al n .
- $f(P)$ es una función escalar que cuantifica el “bienestar social”:

- Si la carga es constante:

$$f = \sum_{i=1}^n C_i(P_{G_i})$$

suma de los costes de generación, donde $C_i(P_{G_i})$ es la oferta del generador i que se presenta al OS (€ por P_{G_i} MW).

- Si la carga es elástica en precio:

$$f = \sum_{i=1}^n C_i(P_{G_i}) - \sum_{i=1}^n W_i(P_{E_i})$$

costes de generación menos el valor del consumo. $W_i(P_{E_i})$ es el precio en € que el consumidor i está dispuesto a pagar al OS por la compra de P_{E_i} MW.

- P_f es un vector $(m \times 1)$ de flujos de potencia activa.
- P_f^{\max} es un vector $(m \times 1)$ de límites de flujos de potencia activa.
- \hat{B} es una matriz $(n \times [n - 1])$ de susceptancias nodales, obtenida eliminando la columna correspondiente al nudo de referencia de la matriz de susceptancias nodales.

El flujo de potencia en la rama que conecta los nudos i y j es sólo una componente del vector P_f , y está dado por:

$$P_{ij} = \frac{\theta_i - \theta_j}{x_{ij}} \quad (7.22)$$

donde x_{ij} es la reactancia inductiva (en p.u.) de la línea que une los nudos i y j .

Usando la ecuación (7.22), el vector de los flujos de potencia puede escribirse en términos de los ángulos de fase de los nudos (ver apartado 7.3.1):

$$P_f = X^{-1} \hat{A}^T \hat{\theta} \quad (7.23)$$

donde $X^{-1} = \text{diag} [-1/x_{ij}]$ es una matriz diagonal $(m \times m)$ de susceptancias, y \hat{A} es la matriz de incidencias nudos-ramas $([n - 1] \times m)$ reducida en la fila del nudo de referencia.

Definamos un vector auxiliar y que contiene todas las incógnitas: $y = \text{col} [P, \hat{\theta}, \lambda, \mu]$, donde $\text{col}[\cdot]$ es el operador columna. La función lagrangiana del problema (7.19)-(7.21) puede escribirse como

$$\mathcal{L}(y) = f(P) + \lambda^T (\hat{B} \hat{\theta} - P) + \mu^T (X^{-1} \hat{A}^T \hat{\theta} - P_f^{\max}) \quad (7.24)$$

donde

λ es un vector de *multiplicadores de Lagrange* $(n \times 1)$ para las restricciones de igualdad, también llamado *vector dual*; sus componentes no tienen restricción de signo, pudiendo ser positivas, nulas o negativas.

μ es un vector de *multiplicadores de Lagrange* ($n \times 1$) para las restricciones de desigualdad, también llamados *precios de sombra*; sus componentes sí tienen restricción de signo, debiendo ser positivas o nulas, es decir, $\mu_k \geq 0$.

La solución óptima del problema (7.19)-(7.21) se obtiene en un punto estacionario del lagrangiano, el cual está definido por las llamadas condiciones de optimalidad de Karush-Kuhn-Tucker (KKT) como sigue:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial P} = \frac{\partial f(P)}{\partial P} - \lambda = 0 \quad (7.25)$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \hat{\theta}} = \hat{B}^T \lambda + \hat{A} X^{-1} \mu = 0 \quad (7.26)$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda} = \hat{B} \hat{\theta} - P = 0 \quad (7.27)$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \mu} = X^{-1} \hat{A}^T \hat{\theta} - P_f^{\max} \leq 0, \quad y \quad \mu^T [X^{-1} \hat{A}^T \hat{\theta} - P_f^{\max}] = 0, \quad \mu \geq 0 \quad (7.28)$$

Los multiplicadores de Lagrange λ_i se pueden interpretar como *precios nodales óptimos*, puesto que, si los precios de la energía en los nudos se igualaran a ellos, el comportamiento de productores y consumidores conduciría a un despacho de la generación coincidente con el óptimo. Asimismo, de la ecuación (7.25) se deduce que los λ_i son las componentes del gradiente del coste total con respecto a la potencia inyectada en cada nudo, proporcionando el aumento del coste total debido a un MW adicional de generación. Cuando no hay problemas de saturación en la red de transporte, todos los λ_i tienen el mismo valor.

En un sistema con restricciones técnicas, los λ_i son, en general, diferentes unos de otros. En este caso, la diferencia entre los λ_i de los nudos extremos de una rama proporciona el *coste de la restricción técnica* concreta:

$$t_{ij} = \lambda_j - \lambda_i \quad (7.29)$$

Si algunas líneas se han saturado, la solución del OPF formulado satisface

$$\sum_{i=1}^n \lambda_i \cdot P_{G_i} + \sum_{k=1}^m \mu_k \cdot P_{f_k} = \sum_{i=1}^n \lambda_i \cdot P_{D_i} \quad (7.30)$$

donde P_{D_i} es la carga total en el nudo i .

Puesto que los multiplicadores μ_k son positivos o nulos, se deduce que $\mu_k \cdot P_{f_k} > 0$. Por tanto, de la ecuación (7.30) se desprende que, en un sistema saturado, “el coste total de la generación es menor que el coste total del consumo”:

$$\sum_{i=1}^n \lambda_i \cdot P_{G_i} < \sum_{i=1}^n \lambda_i \cdot P_{D_i} \quad (7.31)$$

Como consecuencia, el dinero obtenido por el OS de los consumidores es mayor que el dinero que éste paga a los generadores. Este exceso de dinero, frecuentemente llamado *exceso asociado a la saturación del transporte* o *renta de la saturación*, está dado por:

$$s = \sum_{i=1}^n \lambda_i \cdot P_{D_i} - \sum_{i=1}^n \lambda_i \cdot P_{G_i} = \sum_{k=1}^m \mu_k \cdot P_{f_k} \quad (7.32)$$

También se puede dar una interpretación a los multiplicadores de Lagrange μ_k : representan la *disminución del coste* que resultaría de aumentar la capacidad de la línea k en 1 p.u.; es decir, μ_k es el simétrico de la componente del gradiente del coste total del sistema con respecto del límite del flujo de potencia $P_{f_k}^{\max}$:

$$\mu_k = -\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial P_{f_k}^{\max}} \tag{7.33}$$

Nótese que, en el óptimo, $\mathcal{L}(y^*) = f(p^*)$.

Una vez conocido el vector μ , el exceso de dinero a consecuencia de la saturación puede calcularse por medio de (7.32). A continuación, el OS deberá distribuir, de forma equitativa, este “excedente” entre todos los participantes del mercado. La parte difícil del reparto es cómo realizarlo respetando el principio de “equitatividad”. Varios métodos han sido propuestos en la literatura técnica [21, 26], consistiendo el más básico en distribuir el excedente en proporción al grado de participación que tienen los distintos agentes en la saturación.

Ejemplo 7.16:

Ejemplo de sistema con restricciones técnicas.

Consideremos el sistema de 3 nudos que se muestra en la Figura 7.16. Los nudos 1 y 2 son nudos de generación, y el nudo 3 tiene conectadas una carga inelástica respecto al precio y una carga dependiente del precio: $P_{D_3} = P_{C_3} - P_{E_3}$. Las reactancias de las líneas son $x_{12} = 0,3$, $x_{23} = 0,2$ y $x_{13} = 0,2$, respectivamente, y las resistencias de línea son despreciables.

Los “costes de producción” y el “beneficio del consumidor” en el nudo 3 están dados por:

$$C_1 = \alpha_1 \cdot P_1 + \beta_1 \cdot P_1^2, \quad C_2 = \alpha_2 \cdot P_2 + \beta_2 \cdot P_2^2, \quad W_3 = \alpha_3 \cdot P_{E_3}$$

Así, la función de bienestar social a ser minimizada es:

$$f = (C_1 + C_2) - W_3 = \alpha_1 \cdot P_1 + \beta_1 \cdot P_1^2 + \alpha_2 \cdot P_2 + \beta_2 \cdot P_2^2 - \alpha_3 \cdot P_{E_3}$$

Supongamos los siguientes datos: $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$, $\beta_1 = 1$, $\beta_2 = 1,675$, $P_{C_3} = 5$ y $\alpha_3 = 30$.

Primer caso: sin restricciones sobre los flujos de potencia. Definiendo las susceptancias de las líneas y transformadores como $b_{ij} = -1/x_{ij}$, la matriz de susceptancias nodales es:

$$B = \begin{bmatrix} -b_{12} - b_{13} & b_{12} & b_{13} \\ b_{12} & -b_{12} - b_{23} & b_{23} \\ b_{13} & b_{23} & -b_{23} - b_{13} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6,2222 & -4,0 & -2,2222 \\ -4,0 & 9,0 & -5,0 \\ -2,2222 & -5,0 & 7,2222 \end{bmatrix}$$

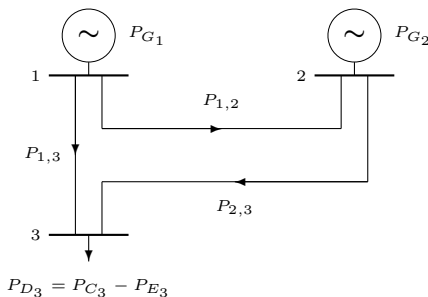


Figura 7.16. Sistema de potencia de tres nudos.

Las ecuaciones del flujo de cargas en continua ($P = \hat{B} \cdot \hat{\theta}$) están dadas por:

$$\begin{bmatrix} P_1 \\ P_2 \\ P_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_{12} & b_{13} \\ -b_{12} - b_{23} & b_{23} \\ b_{23} & -b_{23} - b_{13} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta_2 \\ \theta_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_{12} \theta_2 + b_{13} \theta_3 \\ -(b_{12} + b_{23}) \theta_2 + b_{23} \theta_3 \\ b_{23} \theta_2 - (b_{23} + b_{13}) \theta_3 \end{bmatrix}$$

La función lagrangiana resulta:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_1 &= \alpha_1 P_1 + \beta_1 P_1^2 + \alpha_2 P_2 + \beta_2 P_2^2 - \alpha_3 P_{E_3} + \lambda_1 [b_{12} \theta_2 + b_{13} \theta_3 - P_1] \\ &+ \lambda_2 [-(b_{12} + b_{23}) \theta_2 + b_{23} \theta_3 - P_2] + \lambda_3 [b_{23} \theta_2 - (b_{13} + b_{23}) \theta_3 + P_{E_3}] \end{aligned}$$

Nótese que, al no imponer límites sobre los flujos de potencia, los multiplicadores μ_k son nulos. Las condiciones de optimalidad dan lugar a un sistema lineal de ecuaciones, $H_1 y_1 = q_1$, donde:

$$H_1 = \begin{bmatrix} 2\beta_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2\beta_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & b_{12} & -b_{12} - b_{23} & b_{23} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & b_{13} & b_{23} & -b_{13} - b_{23} & 0 \\ -1 & 0 & 0 & b_{12} & b_{13} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -b_{12} - b_{23} & b_{23} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & b_{23} & -b_{13} - b_{23} & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$y_1 = [P_1 \ P_2 \ P_{E_3} \ \theta_2 \ \theta_3 \ \lambda_1 \ \lambda_2 \ \lambda_3]^T \quad q_1 = [-\alpha_1 \ -\alpha_2 \ \alpha_3 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ -P_{C_3}]^T$$

Después de sustituir valores, la solución de la ecuación $H_1 \cdot y_1 = q_1$ proporciona: $P_1 = 15,0$, $P_2 = 8,9552$, $P_{E_3} = 18,9552$, $\theta_2 = -1,3775$, $\theta_3 = -4,2705$, $\lambda_1 = 30$, $\lambda_2 = 30$ y $\lambda_3 = 30$.

El consumo en el nudo 3 es $P_{D_3} = P_{C_3} + P_{E_3} = 23,9552$ y los flujos de potencia activa son $P_{12} = 5,51$, $P_{23} = 14,4652$ y $P_{13} = 9,4900$.

Todas las variables duales λ_i tienen el mismo valor, $\lambda_i = 30$. Aún más, los costes de la saturación (puesto que no la hay) son nulos, $t_{12} = t_{23} = t_{13} = 0$. Nótese que el flujo en la línea que une los nudos 2 y 3 es $P_{23} = 14,4652$.

Segundo caso: límite de flujo en la línea que une los nudos 2 y 3, $p_{23}^{\max} = 10$. La función lagrangiana resulta ahora:

$$\mathcal{L}_2 = \mathcal{L}_1 + \mu_{23} (-b_{23} \theta_2 + b_{23} \theta_3 - P_{23}^{\max})$$

Las condiciones de optimalidad están definidas por $H_2 y_2 = q_2$, donde:

$$\begin{aligned} H_2 &= \begin{bmatrix} H_1 & h_2 \\ h_2^T & 0 \end{bmatrix} \\ h_2 &= [0 \ 0 \ 0 \ -b_{23} \ b_{23} \ 0 \ 0 \ 0]^T \\ y_2 &= [p_1 \ p_2 \ p_{3e} \ \theta_2 \ \theta_3 \ \lambda_1 \ \lambda_2 \ \lambda_3 \ \mu_{23}]^T \\ q_2 &= [-\alpha_1 \ -\alpha_1 \ \alpha_3 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ -p_{3c} \ P_{23}^{\max}]^T \end{aligned}$$

Para los datos especificados, la solución de $H_2 y_2 = q_2$ proporciona: $P_1 = 11,3470$, $P_2 = 5,5627$, $P_{E_3} = 11,9096$, $\theta_2 = -1,1093$, $\theta_3 = -3,1096$, $\lambda_1 = 22,6939$, $\lambda_2 = 18,6350$, $\lambda_3 = 30,00$ y $\mu_{23} = 14,6122$. El consumo en el nudo 3 es $P_{D_3} = P_{C_3} + P_{E_3} = 16,9096$ y los flujos de potencia activa son: $P_{12} = 4,4373$, $P_{23} = 10,00$ y $P_{13} = 6,9096$. Los costes de saturación son: $t_{21} = 4,0589$, $t_{23} = 11,3650$ y $t_{13} = 7,3061$. Los pagos totales a los generadores y consumidores son, respectivamente: $T_G = \lambda_1 P_1 + \lambda_2 P_2 = 361,1668$ y $T_D = \lambda_3 P_{D_3} = 507,2888$. La renta de la saturación es $s = T_D - T_G = 146,1220$.

Utilizando (7.33), para una variación en P_{23}^{\max} de 0.05, el valor aproximado de μ_{23} es

$$\tilde{\mu}_{23} = -\frac{\Delta \mathcal{L}_2}{\Delta P_{23}^{\max}} = -\frac{-177,4319 + 176,7054}{0,05} = 14,5300$$

el cual es suficientemente próximo a $\mu_{23} = 14,6122$, valor obtenido en el proceso de optimización.

Es interesante observar las variaciones de la solución cuando el coeficiente α_3 del *beneficio del consumidor* es disminuido; para $\alpha_3 = 10$, la nueva solución es la siguiente:

$$\begin{aligned} y &= [9,2365 \ 6,9194 \ 11,1559 \ -0,7701 \ -2,7701 \ 18,4729 \ 23,1800 \ 10,00 \ -16,9458] \\ P_{D_3} &= 16,1559, \quad P_{12} = 3,0806, \quad P_{23} = 10,0000, \quad P_{13} = 6,1559 \\ t_{12} &= 4,7072, \quad t_{23} = -13,1801, \quad t_{13} = -8,4729 \\ T_G &= 331,0168, \quad T_D = 161,5588, \quad s = -169,4581 \end{aligned}$$

Gestión de restricciones técnicas para transacciones bilaterales

En mercados bilaterales, vendedores y compradores acuerdan transacciones de energía en las que las cantidades y sus precios quedan a la discreción de los participantes, sin la intervención del OS. Estas transacciones son presentadas al OS por adelantado (una hora o día antes), solicitándole a éste que proporcione el visto bueno para las transacciones. Si un análisis de la red indica que no producen restricciones técnicas, el OS simplemente permite dichas transacciones, imponiendo un coste apropiado por el servicio. Si se produce saturación, el OS solicita a los participantes ofertas para un redespacho que pueda aliviar la saturación. Basándose en estas ofertas, el OS determina el *redespacho más económico* (o el que conlleva *menos desviaciones*) usando, por ejemplo, un OPF o un despacho económico con restricciones de red. Cuando se encuentra un redespacho factible, el OS recupera los sobrecostes asociados mediante cargos de alivio de la saturación, los cuales deben ser pagados por los participantes en las transacciones, en una forma equitativa.

Un alivio óptimo de la saturación, de tipo económico, puede formularse como sigue [21]:

$$\begin{aligned} \min_{\Delta P^+, \Delta P^-} \quad & \{f = c^+ \Delta P^+ - c^- \Delta P^-\} & (7.34) \\ \text{sujeto a} \end{aligned}$$

$$S \Delta P \leq P_f^{\max} - P_f \quad (7.35)$$

$$\Delta P = \Delta P^+ - \Delta P^- \quad (7.36)$$

$$\Delta P^+ \geq 0, \quad \Delta P^- \geq 0 \quad (7.37)$$

donde

- ΔP^+ y ΔP^- son vectores $(n \times 1)$ de incrementos y decrementos en generación.
- c^+ y c^- son vectores $(1 \times n)$ de ofertas (para los incrementos y decrementos) que presentan los generadores, correspondiendo c_i^+ al precio al cual el generador i quiere vender para aumentar su producción, y c_j^- al precio al cual el generador j quiere comprar para disminuir su producción.

- S es una matriz ($m \times n$) de sensibilidad de los flujos de potencia con respecto a las inyecciones netas de potencia (apartado 7.3.1).
- P_f es un vector ($m \times 1$) de flujos de potencia que corresponden al conjunto de transacciones bilaterales programadas.
- P_f^{\max} es un vector ($m \times 1$) de límites de flujos de potencia.
- $P_f^{\max} - P_f$ es un vector de los decrementos necesarios en los flujos programados.

La función de Lagrange para el problema (7.34)-(7.37) puede escribirse como

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(y) = & c^+ \Delta P^+ - c^- \Delta P^- + \lambda^T (\Delta P - \Delta P^+ + \Delta P^-) \\ & + \mu^T (S \Delta P + P_f - P_f^{\max}) + \alpha^T \Delta P^+ + \beta^T \Delta P^- \end{aligned} \quad (7.38)$$

donde

λ es un vector ($n \times 1$) de *multiplicadores de Lagrange* asociados a las restricciones de igualdad; sus componentes no tienen restricción de signo.

μ es un vector ($m \times 1$) de *multiplicadores de Lagrange* asociados a las restricciones de desigualdad; sus componentes tienen restricción de signo: $\mu_k \geq 0$.

α y β son vectores ($n \times 1$) de *multiplicadores de Lagrange* asociados al carácter positivo o nulo de ΔP^+ y ΔP^- , respectivamente; deben ser negativos o nulos.

7.6.2. Tarifas de transporte

El tópico de las tarifas de transporte se refiere a quién paga, y cuánto, por el uso de la red de transporte. Hay tres aspectos básicos relacionados con las tarifas de transporte [20]:

1. *Suficiencia de ingresos*. Debe desarrollarse un procedimiento para asegurar que hay suficientes ingresos para cubrir los costes del sistema de transporte. Los ingresos deben ser tales que ayuden a motivar la construcción de nuevas líneas de transporte.
2. *Uso de las tarifas*. Las tarifas de transporte pueden ser usadas de varias formas en la resolución de restricciones técnicas. Pueden enviar señales de precio en tiempo real a los usuarios del sistema de transporte para controlar dichas restricciones; también pueden enviar señales de largo plazo para motivar la instalación de nuevos generadores o la redistribución geográfica del consumo.
3. *Pérdidas en la red de transporte*. Las tarifas de transporte también pueden ser usadas para influir en el proceso de “optimización descentralizada y sin restricciones” de un mercado de energía eléctrica, con el objeto de que se tengan en cuenta las pérdidas.

7.6.3. Derechos de transporte

El exceso de ingresos como consecuencia de la saturación del transporte, s , puede ser la base de un sistema de *derechos para el uso de la red mediante contratos* [25]. La idea subyacente es proveer un mecanismo para controlar los riesgos financieros de las variaciones de precios que ocasionan las saturaciones.

Los derechos de transporte son principalmente usados para facilitar las transacciones que han tenido lugar mucho antes del despacho físico, el cual es generalmente hecho por el OS con un solo día de anticipación. Existen dos tipos de derechos de transporte: el financiero y el físico. El *derecho de transporte financiero* no confiere el derecho de transmitir potencia sino el derecho de recibir compensaciones económicas; el derecho de transporte financiero clásico es un *contrato de saturación del transporte* que obliga a pagar el precio diferencial entre dos nudos por una cantidad fija de potencia transmitida [25]. Un *derecho de transporte físico*, sin embargo, confiere un cierto derecho o prioridad para la realización de una transacción.

7.6.4. Pérdidas en el transporte

En la explotación tradicional de los sistemas eléctricos, las pérdidas se utilizan para penalizar a los generadores con criterios de optimalidad, repercutiendo el sobrecoste directamente sobre los consumidores. En mercados eléctricos competitivos, las pérdidas son asignadas a los distintos agentes, generadores y consumidores del mercado. En este apartado, se revisan algunos métodos para calcular las pérdidas y se analizan varias opciones para asignarlas en los sistemas eléctricos competitivos [27].

Evaluación de las pérdidas

Las pérdidas en cada línea de la red son una función cuadrática del flujo de potencia por esa línea. Dependiendo del subsistema concreto (transporte o distribución) y de la topología del mismo, las pérdidas de potencia activa en las líneas varían entre un 3% y un 10% de la carga total.

El método más simple para calcular las pérdidas de potencia activa totales de un sistema eléctrico consiste en sumar las potencias netas inyectadas en los nudos, es decir,

$$P_L = \sum_{i=1}^n P_i = e^T P \quad (7.39)$$

donde P es el vector ($n \times 1$) de inyecciones nodales, y e es un vector ($n \times 1$) de unos. El inconveniente de esta sencilla expresión es que no proporciona información sobre la contribución de cada rama en el total de las pérdidas.

Alternativamente, las pérdidas también pueden ser calculadas a partir de la intensidad y resistencia de cada elemento:

$$P_L = \sum_{k=1}^m R_k \cdot I_k^2 = \mathcal{I}_f^T \cdot R_f \cdot \mathcal{I}_f^* \quad (7.40)$$

donde \mathcal{I}_f es un vector ($m \times 1$) de intensidades complejas, R_f es una matriz diagonal ($m \times m$) de resistencias, y el superíndice $*$ denota la operación de conjugación compleja.

A los valores que se obtienen con las expresiones (7.39) y (7.40) habría que sumar las pérdidas debidas al efecto corona y las que tienen lugar en el núcleo de los transformadores.

Para facilitar la imputación de las pérdidas a las transacciones, generaciones o consumos individuales que las han originado, es más conveniente expresar las pérdidas en función de

las tensiones complejas de cada nudo o, alternativamente, de las intensidades complejas inyectadas en cada nudo:

$$P_L = \mathcal{V}^T \cdot G \cdot \mathcal{V}^* \quad (7.41)$$

$$P_L = \mathcal{I}^T \cdot R \cdot \mathcal{I}^* \quad (7.42)$$

donde \mathcal{V} e \mathcal{I} son vectores ($n \times 1$) de las tensiones e intensidades nodales, respectivamente; G y R son matrices ($n \times n$) que corresponden a la parte real de las matrices de admitancias e impedancias de nudos, \mathcal{Y} y \mathcal{Z} respectivamente.

Las expresiones anteriores para calcular las pérdidas no incluyen ningún tipo de aproximación. Para aliviar el esfuerzo de cálculo, se puede recurrir a expresiones aproximadas utilizando, por ejemplo, el flujo de cargas en continua, en el cual se ignoran tanto las pérdidas de potencia activa como los flujos de potencia reactiva. Por el hecho de despreciar las resistencias serie en este modelo, las pérdidas de potencia activa son (aparentemente) nulas; es decir, las potencias activas inyectadas en todos los nudos suman cero, lo cual significa que una inyección de potencia (por ejemplo, la del nudo de referencia) es una combinación lineal de las demás: $P_1 = -\sum_{i=2}^n P_i = -\hat{e}^T \hat{P}$, donde se ha supuesto que el nudo de referencia es el 1, y se ha definido \hat{P} como el vector $\hat{P} = [p_2 \ p_3 \ \dots \ p_n]^T$.

Las pérdidas de potencia activa de la red real (considerando ahora que las resistencias serie no son nulas) pueden calcularse (aproximadamente) mediante la siguiente expresión derivada a partir de (7.40):

$$P_L \simeq P_f^T R_f P_f^* = \hat{P}^T \left[\hat{S}^T R_f \hat{S} \right] \hat{P} = \hat{P}^T \hat{M} \hat{P} \quad (7.43)$$

donde $P_f = \left[X^{-1} \hat{A}^T \hat{B}^{-1} \right] \hat{P} = \hat{S} \hat{P}$, y $\hat{M} = \hat{S}^T R_f \hat{S}$ es una matriz simétrica. El símbolo $\hat{}$ significa que la correspondiente matriz o vector se ha reducido apropiadamente eliminando el nudo de referencia.

Ejemplo 7.17:

Cálculo aproximado de las pérdidas en el transporte.

Considérese la red de 3 nudos y 3 ramas mostrada en la Figura 7.16. Los datos relevantes son: $Z_{12} = 0,03 + j0,3$, $Z_{23} = 0,06 + j0,2$, $Z_{13} = 0,06 + j0,2$, $P_2 = 0,4$, $P_3 = -0,4$ y $\theta_1 = 0$. El objetivo es calcular las pérdidas de potencia activa mediante un flujo de cargas en continua.

La matriz de incidencias nudos-ramas y su forma reducida resultan:

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad \hat{A} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

La matriz \hat{S} está dada por $\hat{S} = X^{-1} \hat{A}^T \hat{B}^{-1}$, con lo que resulta:

$$\hat{S} = \begin{bmatrix} -3,3333 & 0 & 0 \\ 0 & -5,0 & 0 \\ 0 & 0 & -5,0 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -0,5 & 0,2 \\ 0,2 & -,4 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 0,7500 & 0,3750 \\ -0,2500 & 0,3750 \\ 0,2500 & 0,6250 \end{bmatrix}$$

La matriz \hat{M} es:

$$\hat{M} = \hat{S}^T R_f \hat{S} = \begin{bmatrix} 0,0244 & 0,0122 \\ 0,0122 & 0,0361 \end{bmatrix}$$

Las pérdidas de potencia activa son, por tanto:

$$P_L \simeq \hat{P}^T \hat{M} \hat{P} = \begin{bmatrix} 0,4 & -0,4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0,0244 & 0,0122 \\ 0,0122 & 0,0361 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0,4 \\ -0,4 \end{bmatrix} = 0,0058$$

Cuando hay transacciones bilaterales (o multilaterales) entre participantes, es mejor escribir la expresión de las pérdidas en términos de tales transacciones. Una transacción T_i viene especificada mediante un vector de inyecciones nodales cuyos términos no nulos corresponden a los nudos de generación y consumo involucrados en la transacción. En el modelo clásico, las pérdidas provocadas por dicha transacción son asumidas por el nudo de referencia, pero también es posible distribuirlas entre todos los generadores. En cualquier caso, el vector de inyecciones totales debe coincidir con la suma de las transacciones:

$$P = \sum_{i=1}^{\tau} T_i = T \cdot e \quad (7.44)$$

donde $T = [T_1 \dots T_\tau]$ es una matriz ($n \times \tau$) de transacciones, y e es un vector de n unos.

Sustituyendo (7.44) en las ecuaciones (7.39) y (7.43) de los modelos de alterna y continua, respectivamente, las pérdidas se expresan en función de las transacciones como:

$$P_L = e^T T e \quad (7.45)$$

$$P_L \simeq e^T T^T M T e \quad (7.46)$$

Asignación de pérdidas

Una vez que las pérdidas se han calculado, hay que resolver quién las paga. En otras palabras, hay que decidir en qué medida son los consumos, generaciones o transacciones responsables de dichas pérdidas. Para que una metodología de asignación de pérdidas sea considerada razonable, ésta debe cumplir algunas propiedades tales como [28]: i) reflejar la posición relativa de cada nudo en la red, ii) tener en cuenta la magnitud de la inyección en cada nudo, iii) ser consistente con la topología y el estado de la red, y iv) ser simple de implementar y entender. La primera propiedad es fundamental para enviar señales económicas adecuadas a generadores y consumidores respecto a su ubicación geográfica [27]. En este sentido, caben tres propuestas:

1. Atribuir las pérdidas sólo a los generadores, quienes las internalizan en sus ofertas. Esto sería lógico en un mercado en el que las tarifas de distribución no discriminan geográficamente (lo cual equivale a un prorrateo entre consumidores).
2. Atribuir las pérdidas sólo a los consumidores, con el inconveniente de no incentivar a los nuevos generadores a elegir el lugar más adecuado para su ubicación.

3. Atribuir las pérdidas a ambos, bien en una proporción fijada de antemano, o, preferiblemente, calculada por el propio procedimiento de reparto.

El esquema más simple de asignación de pérdidas es, sin duda, el prorrateo, aunque éste es uno de los métodos más discutibles. El método más popular consiste en la aplicación de los denominados *coeficientes de pérdidas incrementales* (véase el Ejemplo 7.14), los cuales son utilizados en el despacho económico clásico para penalizar los costes incrementales de los generadores (Apartado 6.2.4). Dichos coeficientes se definen como “la derivada de las pérdidas totales respecto a la potencia activa inyectada en cada nudo”. La aplicación de esta definición al modelo de flujo de cargas en continua, ecuación (7.43), proporciona el siguiente vector de coeficientes de pérdidas incrementales:

$$\hat{\beta} = \frac{\partial P_L}{\partial \hat{P}} \simeq 2 \hat{M} \hat{P} \quad (7.47)$$

Obviamente, un valor más exacto del vector β puede obtenerse mediante un flujo de cargas en alterna. La limitación principal del cálculo analítico de β , tanto en continua como en alterna, proviene de que no se asignan pérdidas al nudo de referencia (de hecho, este nudo no aparece en el vector $\hat{\beta}$). Si esto no resultara aceptable, es posible recurrir a una metodología con “nudo balance” distribuido. El cálculo de las pérdidas incrementales por este procedimiento sería, sucintamente, como sigue [27].

- Para un nudo de consumo i , se introduce un pequeño incremento ΔP_i en la potencia consumida y se ajustan las potencias de los nudos que asumen el balance en la proporción que previamente se haya decidido (por ejemplo, en proporción a su potencia base o a su contribución al servicio complementario de regulación). Se resuelve el flujo de cargas y se calculan los incrementos de pérdidas respecto al caso base:

$$\beta_i = \frac{\Delta P_L}{\Delta P_i} \quad (7.48)$$

- Para un nudo de generación k se procede análogamente, con ajustes negativos en las potencias de los nudos que asumen el papel del nudo balance para compensar el exceso de potencia generada.

Estos cálculos pueden realizarse tanto en alterna como en continua. El inconveniente que podría tener el método en continua es su relativa inexactitud al predecir los flujos de líneas, especialmente las más cargadas. A cambio, el uso del modelo en continua ofrece algunas ventajas, tales como: i) se cumple el principio de superposición, con lo que es posible calcular exactamente el flujo de una línea como suma de las contribuciones de cada nudo o transacción; ii) al no haber pérdidas, los flujos por cada línea no dependen del nudo balance elegido, y iii) pueden hacerse desarrollos analíticos que disminuyen el esfuerzo de cálculo.

En mercados basados en transacciones bilaterales, la asignación de las pérdidas, en términos de las transacciones, se puede realizar mediante varios métodos [23, 28, 29, 30, 31]. Por ejemplo, en la referencia [23] se propone asignar a la transacción i -ésima el término respectivo de la ecuación (7.46):

$$P_{L(\text{trans. } i)} = \left(\sum_{k=1}^{\tau} T_k \right)^T M T_i \quad (7.49)$$

El problema de los términos mutuos

Por simplicidad, consideremos en este apartado las pérdidas de una sola línea (digamos que une los nudos i y j), analizada a través del modelo en continua. Supongamos también que sólo dos transacciones utilizan dicha línea (en general, este análisis se haría para cada pareja posible de contribuciones individuales). Las pérdidas totales quedan dadas por:

$$P_{L_{ij}} = R(P_i \pm P_j)^2 = R(P_i^2 + P_j^2 \pm 2P_iP_j) \quad (7.50)$$

Parece lógico que los términos $R P_i^2$ y $R P_j^2$ se asignen a las transacciones respectivas. No queda tan claro, sin embargo, qué hacer con el término $\pm 2 R P_i P_j$. Utilizando los coeficientes de pérdidas incrementales β , las pérdidas totales se separan en:

$$P_{L_i} = 0,5 \beta_i P_i = R(P_i^2 \pm P_iP_j) \quad P_{L_j} = 0,5 \beta_j P_j = R(P_j^2 \pm P_iP_j)$$

Es decir, el término mutuo se descompone por igual, con independencia del tamaño relativo de cada transacción, lo que puede no resultar aceptable si las transacciones son muy dispares. Se han propuesto otras formas de repartir el término mutuo que tienen en cuenta, de alguna manera, el tamaño de cada transacción. Por ejemplo, en la referencia [32], el término mutuo se reparte en proporción a la potencia de cada uno de los flujos que la crean:

$$P_{L_i} = R(P_i^2 \pm \gamma_i P_i P_j) \quad P_{L_j} = R(P_j^2 \pm \gamma_j P_i P_j)$$

donde $\gamma_i = 2P_i/(P_i + P_j)$ y $\gamma_j = 2P_j/(P_i + P_j)$.

7.6.5. Servicios complementarios

Los servicios complementarios se definen como todas aquellas actividades que son necesarias para apoyar el sistema de transporte de modo que la operación de éste sea segura y fiable. Así, los servicios complementarios podrían incluir, entre otros:

- Control de frecuencia y de los flujos de potencia entre áreas.
- Mantenimiento de una adecuada reserva de generación.
- Control de tensión y potencia reactiva.
- Asegurar la estabilidad del sistema.

En empresas eléctricas estructuradas verticalmente, los servicios complementarios son una parte integral del suministro de energía eléctrica y, por tanto, no están separados de otras actividades. Sin embargo, en sistemas eléctricos competitivos, el operador no tiene control directo sobre las plantas de generación y tiene que comprar los servicios complementarios de proveedores de tales servicios. En un entorno como éste, los mecanismos de fijación de precios de dichos servicios juegan un papel importante en la gestión de la operación del sistema. Los mercados que proveen los servicios complementarios difieren mucho entre sí, dependiendo de la definición (o funciones) del OS y del diseño del mercado mismo. No obstante, una característica es común para todos ellos: cada uno trata de proveer un servicio vital para la operación segura y fiable del sistema. En este apartado se expondrán

las características generales de los mercados de servicios complementarios. Asumimos que los participantes del mercado presentan ofertas de servicios complementarios al OS, en una forma similar a las ofertas de energía eléctrica, y que el OS gestiona dichas ofertas de acuerdo a las reglas establecidas para el mercado.

Servicios de regulación

Regulación es el ajuste de la generación en todo momento para asegurar el equilibrio entre generación y consumo de modo que la frecuencia se mantenga al nivel pre-establecido (frecuencia nominal). Esta respuesta rápida de una planta generadora es generalmente lograda a través del uso de señales de control automático que corresponden al ACE (“Area Control Error” en el *control de frecuencia primario*) o al AGC (“Automatic Generation Control” en el *control de frecuencia secundario*). La capacidad de regulación de un generador debe ser *rodante* y sincronizada con la red del OS, lista para ser usada en cualquier instante.

Servicios de reservas

Las reservas de operación pueden ser definidas como la capacidad disponible de los generadores para responder a desequilibrios bruscos en el sistema, como por ejemplo el aumento súbito de la carga, la pérdida de un generador o de una línea de transporte. Para cada hora del día siguiente, los participantes del mercado ofrecen al OS suministrar energía (o disminuir la demanda) para cubrir parte o toda la reserva requerida por un precio de oferta (€/MW). Los tipos de reservas y sus definiciones dependen del sistema. Por ejemplo, pueden estar sincronizadas con el sistema —llamadas *reservas rodantes*—, o no sincronizadas —conocidas como *reservas no rodantes*—. Aún más, las reservas pueden ser clasificadas de acuerdo al tiempo que requieren para estar disponibles. Por ejemplo, se conocen: i) la *reserva rodante de diez minutos*, la cual puede inmediatamente comenzar a entregar energía, estar totalmente disponible en diez minutos y mantener su nivel durante, al menos, treinta minutos; ii) la *reserva no rodante de diez minutos*, la cual puede entregar energía y estar totalmente disponible en diez minutos, manteniendo su nivel por un periodo superior a treinta minutos; iii) la *reserva de operación de treinta minutos*, la cual puede entregar energía y estar totalmente disponible en treinta minutos, manteniendo su nivel durante más de una hora, etc. Las reservas ii) y iii) son suplementarias y pueden ser servidas por generadores de arranque rápido, tales como generadores movidos por “turbinas de gas” o “turbinas de fuel-oil”, y plantas hidráulicas. Los consumidores también pueden participar en el suministro de reserva suplementaria por medio de contratos de cargas interrumpibles.

En la literatura técnica han aparecido varios métodos para la asignación de servicios complementarios. Una característica del suministro de estos servicios es la naturaleza secuencial de los servicios de regulación, reserva rodante, y reserva suplementaria [33].

Servicios de potencia reactiva

El OS puede solicitar a los generadores producir o absorber potencia reactiva con el objeto de mantener las tensiones de los nudos del sistema dentro de ciertos límites en

todo momento. Es importante que el OS identifique sus necesidades de potencia reactiva y desarrolle criterios apropiados para seleccionar los proveedores de potencia reactiva. Así, por ejemplo, si el suministro de potencia reactiva implica indemnización por parte del OS, éste podría buscar los proveedores que minimizan el sobre coste total. Aunque éste parece un objetivo aceptable, podría resultar en un aumento de los flujos de potencia reactiva, incrementando las pérdidas e imponiendo recortes a los contratos de venta de energía. Por otro lado, si el OS requiere que un generador independiente aumente su potencia reactiva, dependiendo de su punto de operación, éste podría tener que reducir su generación de potencia activa con el objeto de satisfacer los límites de la corriente de campo en el rotor.

El precio a pagar por los servicios de potencia reactiva depende de la estructura establecida para el mercado eléctrico. En algunos mercados, si un generador debe reducir su potencia activa para permitir que la unidad genere o consuma más reactiva, éste recibiría una compensación económica por la pérdida que dicha reducción le ocasiona [34].

El control de tensión puede ser primario o secundario. El *control primario* se necesita para compensar fluctuaciones rápidas que ocurren en una escala del tiempo de hasta unos pocos minutos; este servicio es automático y lo pueden prestar generadores síncronos, condensadores síncronos, equipos SVC o cambiadores de tomas de transformadores. El *control secundario*, en cambio, compensa las variaciones lentas de la tensión en una escala de tiempo de varias horas; el servicio para este control puede ser suministrado por generadores síncronos, condensadores síncronos, reactancias y condensadores *shunt*, condensadores en serie, o cambiadores de tomas de transformadores.

Los mercados de servicios complementarios de potencia reactiva tienen algunas características propias. Entre éstas podemos citar [34]:

- Los servicios complementarios de potencia reactiva necesitan ser suministrados localmente debido a los problemas asociados con el transporte de reactiva en la red.
- El valor de los servicios complementarios de potencia reactiva depende de la localización, esto es, el precio de 1 Mvar puede ser diferente en cada nudo del sistema.
- Por tanto, la posición estratégica de un proveedor de estos servicios puede conducir a excesivas ventajas para algunos participantes.
- Debido al número limitado de participantes en el mercado de potencia reactiva, existe la posibilidad de que se establezcan mecanismos de poder de mercado.
- En este mercado podría suceder que el servicio de potencia reactiva sea ofrecido por varios participantes pero necesitado por un único comprador.

7.7. Fiabilidad en sistemas de energía eléctrica

La planificación de la generación y el transporte de energía eléctrica se ha realizado tradicionalmente en el marco de las empresas eléctricas de corte monopolista: cada empresa tiene la responsabilidad de la generación, transporte y distribución de la electricidad en una región geográfica definida, teniendo asegurada la recuperación de todos los costes a través de la tarifa y estando obligada a mantener unos niveles aceptables de calidad del suministro a sus clientes. Esta estructura implica, por tanto, la participación del Estado

como ente regulador encargado tanto de evitar excesos en las tarifas finales como de velar por el cumplimiento de los requisitos impuestos a la calidad del servicio.

De entre los múltiples aspectos que definen la calidad del suministro de energía eléctrica, destaca por su importancia en la planificación la “fiabilidad” del suministro, medida en términos de continuidad y cuantificada a través de la frecuencia y duración de las interrupciones. En este sentido, la compañía eléctrica deberá ser responsable de planificar las instalaciones de generación, transporte y distribución necesarias para mantener unos adecuados niveles de fiabilidad, niveles normalmente impuestos de forma exógena y de difícil justificación económica. La exigencia de fiabilidad ha sido impuesta en muchas ocasiones a través de reglas o normas de planificación claramente deterministas, del tipo:

- Mantenimiento de una adecuada reserva de generación sobre la punta de demanda anual en el horizonte de planificación y con el crecimiento de demanda previsto.
- Refuerzo de la red de transporte para asegurar el cumplimiento del criterio de seguridad N-1 o N-2 ante contingencias.
- Criterios específicos que afectan a diversas facetas de la planificación, como evitar programar el mantenimiento de dos unidades relevantes simultáneamente, o la obligación de alimentar las subestaciones importantes mediante dos o más líneas independientes.

En este sentido, se asume que el cumplimiento de las “reglas” de planificación asegura unos niveles adecuados de fiabilidad del sistema eléctrico.

Frente a reglas deterministas como las anteriores, existe la posibilidad de utilizar índices de carácter probabilístico para cuantificar la fiabilidad del sistema eléctrico. Un ejemplo de regla basada en un índice de fiabilidad, la “probabilidad de interrupción del suministro”, muy utilizado en la planificación de los recursos de generación, es la siguiente [3]:

“Los recursos de generación se planificarán de forma que, teniendo en cuenta las indisponibilidades de las centrales tanto por mantenimiento como por fallos imprevistos, la posibilidad de suministros de emergencia desde otros sistemas, y las medidas correctivas y de emergencia propias de la operación, la probabilidad de interrumpir el suministro a clientes debido a la falta de recursos de generación no será superior a una en diez años.”

Criterio que se traduce, en términos prácticos, en que la probabilidad anual de incidentes que supongan interrupción del suministro no debe superar el 10 %.

La utilización de índices de carácter probabilístico para cuantificar la fiabilidad del sistema permite, junto a la imposición de criterios de planificación basados en los mismos —criterios por otra parte siempre cuestionables desde el punto de vista económico—, la comparación de distintas alternativas de expansión del sistema eléctrico a través de su repercusión en la fiabilidad del sistema. La utilización de uno u otro índice de fiabilidad, entre los muchos que se pueden definir, depende en gran medida de las particularidades de cada sistema eléctrico, así como de la cualidad concreta que se quiera cuantificar.

Por último, y antes de entrar en detalle en la presentación de los índices de fiabilidad y de los métodos de cálculo más habituales, cabe recordar cómo, tradicionalmente y en el marco de las empresas eléctricas de corte clásico, la planificación de las redes de transporte ha ido siempre a remolque de la planificación de la generación. Así, una vez detectada la necesidad

de nuevos recursos de generación e identificadas las distintas alternativas, la ampliación de la red de transporte, en caso de ser necesaria, se supedita a cada alternativa concreta, incrementando los costes en la cantidad correspondiente a las nuevas inversiones en red. En un entorno competitivo, por el contrario, las empresas de generación compiten entre sí y el transporte pasa a ser un servicio regulado y retribuido que debe asegurar la libre competencia en generación y la libre elección de suministrador por parte de los consumidores [39]. En este contexto, la planificación del transporte alcanza un alto grado de complejidad debido al nivel de incertidumbre y a las múltiples opciones que se presentan como consecuencia de la descentralización de la toma de decisiones referentes a la planificación de los recursos de generación. Se remite al lector interesado al Capítulo 1 donde se realiza una presentación de la planificación del transporte en sistemas abiertos a la competencia.

7.7.1. Modelos de los elementos en los análisis de fiabilidad

Un elemento del sistema eléctrico se puede caracterizar, desde el punto de vista de su fiabilidad, por dos estados complementarios: disponible o indisponible. El elemento pasará a estado indisponible tras sufrir un fallo, volviendo a estar disponible tras la reparación. La transición entre estados se representa mediante un modelo de Markov (Figura 7.17), siendo:

λ *Tasa de fallo*, obtenida como el cociente entre el número de fallos y el tiempo total en estado disponible. Inversa, por tanto, del *tiempo medio entre fallos*.

μ *Tasa de reparación*, cociente entre el número de fallos y el tiempo total como indisponible. Es la inversa del *tiempo medio en estado indisponible*.

Conocidas las tasas de fallo y reparación del elemento, la probabilidad de que éste se encuentre en cualquiera de los dos estados posibles se obtendrá como:

$$p_d = \frac{\mu}{\lambda + \mu} \quad p_i = \frac{\lambda}{\lambda + \mu} \quad p_d + p_i = 1$$

Un sistema eléctrico está constituido por múltiples elementos: generadores, líneas y transformadores, principalmente. En consecuencia, el estado del sistema eléctrico estará definido por el estado de cada elemento, y la probabilidad de que el sistema eléctrico se encuentre en dicho estado se obtiene como el producto de las probabilidades individuales, siempre bajo la suposición de que los fallos son estadísticamente independientes.

Aunque sólo se tendrán en cuenta modelos de dos estados para un determinado elemento, cabe indicar que existe la posibilidad de utilizar modelos más complejos, con múltiples estados que reflejen de forma más exacta la realidad. A modo de ejemplo, un generador puede

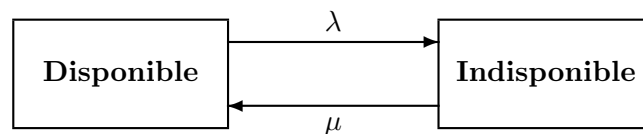


Figura 7.17. Modelo de Markov para un elemento con dos estados posibles.

sufrir fallos que limiten su capacidad de generación pero que no implican su indisponibilidad total [35]. Esta posibilidad es especialmente útil de cara a modelar la demanda del sistema eléctrico como un elemento que puede estar en un número determinado de estados (niveles de demanda), con tasas de transición entre los distintos niveles obtenidas de los registros históricos de evolución horaria de la demanda [3, 35]. Obviamente, modelar adecuadamente los distintos niveles de demanda, así como su evolución en el tiempo, es crucial en los estudios de fiabilidad por su importancia en la determinación de la frecuencia y duración de las distintas interrupciones de suministro a lo largo del horizonte de estudio.

No obstante, es una práctica habitual realizar los análisis de fiabilidad para un único nivel de demanda, normalmente la punta anual, o, a lo sumo, considerar la información proporcionada por la *curva monótona de consumo*, muy utilizada en los estudios de planificación de los recursos de generación (ver el Ejemplo 7.19).

Ejemplo 7.18:

Ejemplo de análisis teniendo en cuenta la probabilidad de fallo.

Los dos generadores del Ejemplo 7.1, cuyos datos se resumen en la Tabla 7.5 junto con el índice de disponibilidad D , suministran una demanda de 200 MW. Ambos generadores se encuentran en servicio, repartiéndose la generación según *despacho económico* ($P_{G_1} = 50$ MW y $P_{G_3} = 150$ MW), con un coste total de generación de 2 800 €/h. El objetivo es obtener la probabilidad de pérdida de carga y la repercusión sobre el coste de explotación de la indisponibilidad de los generadores. La disponibilidad de cada generador proporciona la probabilidad de que el generador se encuentre en servicio (0.95 y 0.9, respectivamente) o indisponible (0.05 y 0.1).

La Tabla 7.5 recoge asimismo los posibles estados en que se pueden encontrar ambos generadores (0: indisponible; 1: en servicio), así como la probabilidad de cada estado $p(x)$, el coste $C(x)$, la reserva disponible $R(x)$ y la potencia no suministrada (PNS).

Obsérvese cómo la probabilidad de que se presenten estados con pérdida de carga es de 0.005. Asimismo, existen estados que, aunque no implican pérdida de carga, sí pueden considerarse críticos en cuanto a que la reserva disponible es nula, con una probabilidad de 0.14.

Cuadro 7.5. Datos de disponibilidad y posibles estados de los generadores del Ejemplo 7.1.

Datos de los generadores				
G	Coste	P_{\max}	P_{\min}	D
	€/h	MW	MW	%
1	$100 + 20 \cdot P$	200	50	95
3	$200 + 10 \cdot P$	200	50	90

Estados posibles para una demanda de 200 MW							
x		$p(x)$	P_{G_1}	P_{G_3}	$C(x)$	$R(x)$	PNS
G1	G3		MW	MW	€/h	MW	MW
1	1	0.855	50	150	2 800	200	0
1	0	0.095	200	0	4 100	0	0
0	1	0.045	0	200	2 200	0	0
0	0	0.005	0	0	0	0	200

La esperanza del coste de explotación puede obtenerse como la suma del coste de cada estado multiplicado por la probabilidad de dicho estado:

$$C = \sum_x C(x) \cdot p(x) = 2882,5 \text{ €/h}$$

Nótese que el coste de explotación aumenta en un 2.95% al considerar los posibles estados de indisponibilidad de los generadores, y ello sin tener en cuenta el coste de la potencia no suministrada.

7.7.2. Estructura jerárquica en los estudios de fiabilidad

Un sistema eléctrico puede ser dividido funcionalmente en tres actividades principales: generación, transporte y distribución. Dicha clasificación permite agrupar los estudios de fiabilidad del sistema eléctrico en tres niveles jerárquicos, como se muestra en la Figura 7.18.

En el nivel 1, los estudios de fiabilidad se limitan a cuantificar la capacidad del parque generador para satisfacer la demanda, teniendo en cuenta las probabilidades de fallo de los generadores. La demanda es representada por un estado concreto (punta de consumo anual) o mediante su distribución estadística (curva monótona de demanda).

En el nivel 2, el análisis considera tanto los recursos de generación como la propia red de transporte, dando lugar a un problema mucho más complejo [35, 36]. En este caso, la evaluación de cada escenario implica la desagregación de la demanda en los distintos nudos de la red de transporte y la utilización de un programa de flujo de cargas para determinar el estado de la red, haciendo uso asimismo de las técnicas de corrección de sobrecargas y tensiones presentadas en el apartado 7.5.1 tal y como se realizaría en la propia operación ante tales problemas, adoptando incluso la decisión de deslastrar carga en caso de necesidad.

Finalmente, el nivel 3 comprende el análisis de los tres subsistemas conjuntamente, incluyendo en lo posible el modelo en detalle de las subestaciones. No obstante, debido a la complejidad del problema y al elevado número de elementos involucrados, el análisis de las redes de distribución en cuanto a su repercusión en la fiabilidad del suministro a los consumidores individuales se ha realizado tradicionalmente de forma separada del subsistema generación-transporte [37].

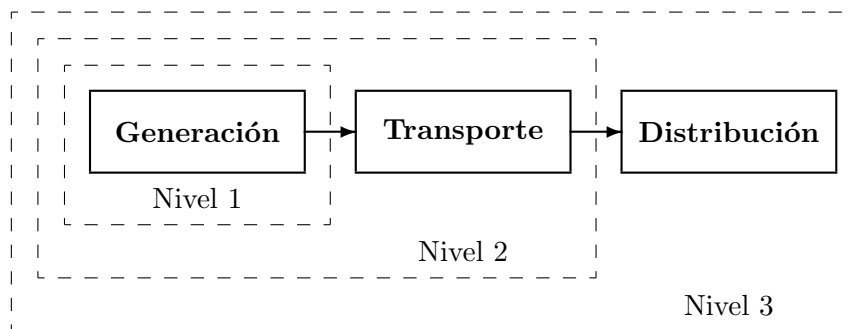


Figura 7.18. Estructura jerárquica en los estudios de fiabilidad.

7.7.3. Índices de fiabilidad

Denominando x a un estado concreto del sistema eléctrico, con probabilidad $p(x)$, los diferentes índices de fiabilidad son los valores esperados, $E(f)$, de distintas funciones de test, $f(x)$, que cuantifican la capacidad del sistema eléctrico para suministrar la demanda en su conjunto (índices globales), o distintos consumos concretos (índices de nudo):

$$E(f) = \sum_{\forall x} f(x) \cdot p(x) \quad (7.51)$$

Así, por ejemplo, la *probabilidad de pérdida de carga (PPC)* a la que ya se ha hecho referencia, más conocida por sus siglas en inglés *LOLP (Loss of Load Probability)*, se obtiene asignando a cada estado un valor $f(x) = 1$ si dicho estado implica interrupción de suministro, independientemente del número de clientes afectados, y $f(x) = 0$ en caso contrario.

Junto a PPC, otro índice utilizado en los estudios de fiabilidad es la *potencia no suministrada (PNS)* que indica, en cada estado, la cantidad de potencia en MW que es necesario deslastrar para evitar problemas.

Tanto PPC como PNS son índices basados en el análisis de estados concretos, por lo que no proporcionan información sobre el número y la duración de los posibles problemas de suministro. Si se dispone de información sobre la duración de los estados de fallo de los elementos, bien a través de sus tasas de reparación o del tiempo medio en fallo, y de los distintos niveles de demanda, es posible obtener otros índices adicionales, de cálculo siempre más laborioso que los anteriores [35], destacando los siguientes:

- *Tiempo total de interrupción (TI)*: duración total de los periodos en los que existe interrupción de suministro. Este índice tiene su equivalente anglosajón en *Loss of Load Expectation (LOLE)*, quizás el más usado a nivel internacional y consistente en el número medio de horas en las que la demanda se espera que supere a la capacidad de generación. Al igual que PPC, tiene el inconveniente de no suministrar ninguna información sobre la gravedad de las posibles interrupciones de suministro.
- *Energía No Suministrada (ENS)*: cuantifica la energía que no podrá ser suministrada en las ocasiones en las que la demanda supere a la capacidad de generación. En este sentido, tiene la ventaja de reflejar la gravedad de los posibles problemas de suministro. Conocido asimismo como *Loss of Energy Expectation (LOEE)*.

Dichos índices pueden ser globales, a nivel del sistema en conjunto, o estar referidos a la calidad de suministro a nivel de nudo eléctrico o zona geográfica. En este sentido, a nivel de distribución se utilizan índices de frecuencia y duración para medir la calidad del suministro a los abonados, usándose en el caso de España:

- *Tiempo de interrupción equivalente de la potencia instalada (TIEPI)*:

$$\text{TIEPI} = \frac{\sum_{\forall \text{fallo } i} \text{PI}_i \cdot t_i}{\sum_{\forall k} \text{PI}_k} \quad (7.52)$$

siendo PI_k la potencia instalada en los transformadores reparto-distribución del nudo o zona objeto de cálculo, y PI_i y t_i la potencia instalada interrumpida en cada incidente y la duración de dicho incidente, respectivamente.

- Número de interrupciones equivalente de la potencia instalada (NIEPI):

$$\text{NIEPI} = \frac{\sum_{\forall \text{ fallo } i} \text{PI}_i}{\sum_{\forall k} \text{PI}_k} \quad (7.53)$$

siendo PI_k nuevamente la potencia instalada en los transformadores reparto-distribución y PI_i la potencia instalada interrumpida en cada incidente.

Otros índices usados internacionalmente y que cuantifican la frecuencia y duración de las interrupciones son *Loss of Load Frequency (LOLF)*, que proporciona la frecuencia, en incidentes al año, con la que se espera que se produzcan en términos estadísticos los incidentes de déficit de generación, y *Loss of Load Duration (LOLD)*, cociente entre LOLP y LOLF.

7.7.4. Cálculo de índices de fiabilidad

Las técnicas utilizadas para el cálculo de índices de fiabilidad se pueden clasificar en dos grandes grupos: los métodos de enumeración y las técnicas de simulación, diferenciándose principalmente en la forma en que se seleccionan los estados del sistema eléctrico a analizar y en la forma en que se calculan los distintos índices. No obstante, independientemente del método utilizado para seleccionar los estados a analizar, todos los algoritmos de evaluación de la fiabilidad del sistema eléctrico constan de los siguientes pasos:

1. Seleccionar un estado x del sistema eléctrico, definido por la disponibilidad de cada elemento individual, el nivel de demanda y otras condiciones concretas de operación.
2. Evaluar $f(x)$ para el escenario seleccionado, lo cual implica siempre determinar la *adecuación* del sistema en términos de su capacidad para suministrar los consumos respetando los límites de explotación de los distintos elementos. En este sentido, será necesario adoptar, previamente a la evaluación, las medidas correctoras necesarias para eliminar las posibles sobrecargas o problemas de tensión, determinando el deslastre de cargas estrictamente necesario en caso extremo.
3. Actualizar la estimación de $E(f)$ en función del resultado obtenido.
4. Continuar con el siguiente estado a analizar hasta agotar los estados posibles o hasta que el error en la estimación del índice de fiabilidad sea aceptable.

Métodos basados en la enumeración de estados

Los *métodos de enumeración* se basan bien en el estudio de todos los estados que puede presentar el sistema, con las simplificaciones inherentes al nivel de complejidad del estudio de que se trate, o bien, si el sistema es lo suficientemente complejo como para que sea imposible abordar el análisis de todos los estados que puede presentar (Niveles 2 y 3), analizar los estados en orden creciente de contingencias (caso base, N-1, N-2, etc.) hasta que la probabilidad asociada a los restantes estados sea suficientemente pequeña como para ser ignorados. Obviamente, cada estado del sistema, x , llevará asociada una probabilidad determinada por los estados de los distintos elementos que lo componen, x_i , y las probabilidades asociadas:

$$p(x) = \prod_{\forall i} p(x_i) \quad (7.54)$$

Ejemplo 7.19:

Cálculo de índices de fiabilidad en Nivel 1 usando la curva monótona de consumo.

Los dos generadores del Ejemplo 7.18 deben satisfacer una demanda anual cuyos datos se muestran en la Figura 7.19 en forma de *curva monótona de consumo*, representando cada nivel de consumo frente al número de horas en que se alcanza dicho consumo. Puede observarse cómo la *curva monótona de consumo* proporciona una función de distribución de la probabilidad de que la demanda supere un valor concreto, $p(P_D \geq P)$.

El objetivo en este análisis consiste en obtener la energía no suministrada (ENS) y el coste de explotación anual teniendo en cuenta los posibles estados de fallo.

La siguiente tabla resume el análisis exhaustivo de los posibles estados en que se pueden encontrar ambos generadores, la probabilidad de cada estado $p(x)$, el número de horas en cada estado $t(x)$, el coste total $C(x)$ y la energía no suministrada (ENS).

Nótese cómo el coste de explotación aumenta respecto al análisis sin considerar los estados de fallo (20 453 125 frente a 20 125 000 €, un 1.63 % superior). Asimismo, la energía no suministrada asciende a 6 562.5 MWh como consecuencia de incidentes con pérdida de 100 MW durante 10.95 horas, 150 MW durante 21.85 horas y 200 MW durante 10.95 horas.

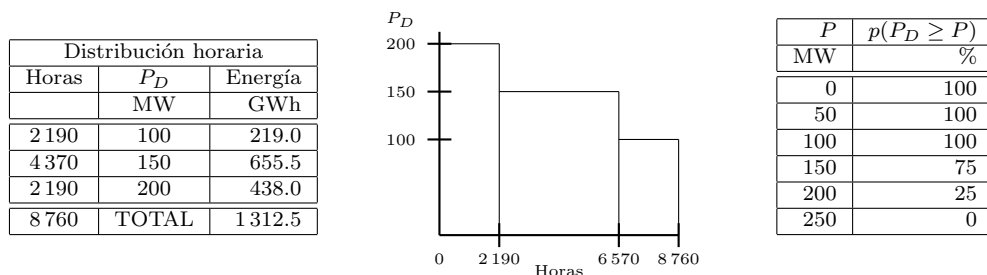


Figura 7.19. Curva monótona de demanda y distribución de probabilidades.

Cuadro 7.6. Posibles estados de los generadores del Ejemplo 7.1 considerando la monótona de consumo.

	Estado (x)		$p(x)$	$t(x)$ h	P_{G_1} MW	P_{G_3} MW	$C_T(x)$ €	ENS MWh
	G1	G3						
Demanda de 200 MW durante 2 190 horas	1	1	0.855	1 872.45	50	150	5 242 860	0
	1	0	0.095	208.05	200	0	853 005	0
	0	1	0.045	98.55	0	200	216 810	0
	0	0	0.005	10.95	0	0	0	2 190.0
	Total							6 312 675
Demanda de 150 MW durante 4 370 horas	1	1	0.855	3 736.35	50	100	8 593 605	0
	1	0	0.095	415.15	150	0	1 286 965	0
	0	1	0.045	196.65	0	150	334 305	0
	0	0	0.005	21.85	0	0	0	3 277.5
	Total							10 214 875
Demanda de 100 MW durante 2 190 horas	1	1	0.855	1 872.45	50	50	3 370 410	0
	1	0	0.095	208.05	100	0	436 905	0
	0	1	0.045	98.55	0	100	118 260	0
	0	0	0.005	10.95	0	0	0	1 095.0
	Total							3 925 575
Total anual							20 453 125	6 562.5

Ejemplo 7.20:

Cálculo de índices de fiabilidad en Nivel 2 mediante enumeración de estados.

Los dos generadores del Ejemplo 7.18 deben suministrar una demanda de 200 MW a través de la red de transporte cuyos datos se indican en el Ejemplo 7.1. El objetivo es calcular la probabilidad de pérdida de carga y la repercusión sobre el coste de explotación de los estados de indisponibilidad de los generadores y de las propias líneas. Los índices de disponibilidad de los generadores son de 0.95 y 0.9, respectivamente, y se considerará una tasa de disponibilidad de 99% para las líneas.

La Tabla 7.7 resume los posibles estados en que se puede encontrar el sistema según el estado de los generadores y líneas (0: elemento indisponible; 1: elemento en servicio), para contingencias de nivel N-1 y N-2 (ver el Ejemplo 7.2), así como la probabilidad de cada estado $p(x)$, el coste $C(x)$, la reserva disponible $R(x)$ y la potencia no suministrada (PNS) en cada estado.

El análisis de cada estado implica realizar un flujo de cargas para determinar los flujos de potencia y, en caso de sobrecargas, la utilización de un OPF para determinar las actuaciones necesarias para eliminarlas. En este ejemplo no se tendrán en cuenta los posibles problemas de tensiones.

Evidentemente, la probabilidad de que se produzca el fallo de un generador es superior al de una línea, lo que se refleja en las probabilidades de cada estado. Asimismo, la probabilidad de que se presente un estado con nivel N-3 o superior es únicamente de 0.000216, lo cual permite limitar la extensión del estudio y acotar los errores introducidos. Así, la probabilidad de pérdida de carga está comprendida entre 0.0063 y 0.006516, frente a 0.005 si sólo se consideran los fallos de los generadores. La esperanza del coste de explotación resulta de 2 884 €/h, frente a los 2 882.5 €/h del Ejemplo 7.18.

Por último, cabe indicar la posibilidad de agrupar distintos estados que dan lugar a un mismo resultado. Así, la pérdida de los dos generadores implica una PNS = 200 MW independientemente del estado de las líneas, con una probabilidad conjunta de 0.0005. Algo similar ocurre con los casos que implican la pérdida simultánea de las líneas L12 y L23.

Cuadro 7.7. Posibles estados de las líneas y generadores del Ejemplo 7.1 para una demanda de 200 MW.

Estado (x)						$p(x)$	P_{G_1} MW	P_{G_3} MW	$C(x)$ €/h	$R(x)$ MW	PNS MW
x	G1	G3	L12	L23	L13						
Estado sin fallos											
0	1	1	1	1	1	0.829605	50	150	2800	200	0
Contingencias de nivel N-1											
1	1	1	0	1	1	0.008380	50	150	2800	200	0
2	1	1	1	0	1	0.008380	100	100	3300	100	0
3	1	1	1	1	0	0.008380	50	150	2800	200	0
4	0	1	1	1	1	0.043663	0	200	2200	0	0
5	1	0	1	1	1	0.092178	200	0	4100	0	0
Contingencias de nivel N-2											
6	0	0	1	1	1	0.004851	0	0	0	0	200
7	1	0	0	1	1	0.000931	100	0	2100	0	100
8	1	0	1	0	1	0.000931	200	0	4100	0	0
9	1	0	1	1	0	0.000931	200	0	4100	0	0
10	0	1	0	1	1	0.000441	0	200	2200	0	0
11	0	1	1	0	1	0.000441	0	100	1200	0	100
12	0	1	1	1	0	0.000441	0	200	2200	0	0
13	1	1	0	0	1	0.000077	0	0	0	0	200
14	1	1	0	1	0	0.000077	0	200	2200	0	0
15	1	1	1	0	0	0.000077	200	0	4100	0	0
$\sum_x p(x) =$						0.999784	$\sum_x p(x) \cdot C(x) =$		2884		

Métodos basados en técnicas de simulación

Las *técnicas de simulación*, basadas en el método de Monte Carlo, seleccionan los estados del sistema a través de un sorteo aleatorio que determina el estado de cada componente en función de su probabilidad de fallo. De esta forma, los estados con mayor probabilidad de ocurrencia aparecerán un mayor número de veces durante la simulación, reflejando el proceso real. Los distintos índices de fiabilidad se obtienen como la media aritmética de sus valores en los distintos estados simulados, pudiendo obtenerse asimismo otros indicadores estadísticos como la varianza. El proceso termina tras un número determinado de simulaciones o cuando la incertidumbre en la estimación se considere aceptable [38].

Por otra parte, las técnicas de simulación se pueden clasificar en dos tipos dependiendo de cómo se modela la demanda en los estudios:

- Simulación no secuencial, en la cual el nivel de demanda de cada estado concreto se selecciona aleatoriamente mediante un sorteo aleatorio basado en las probabilidades asociadas a cada nivel de demanda (curva monótona de demanda), demanda global que es desagregada en los distintos nudos de consumo según unos coeficientes de reparto en los estudios de Nivel 2 y 3.
- Simulación secuencial, en la cual la demanda se modela mediante su evolución horaria y son los distintos elementos del sistema (generadores, líneas y transformadores, principalmente), los que cambian su estado disponible-indisponible mediante sorteos aleatorios en cada hora (un elemento pasa a estar indisponible mediante sorteo respecto a su probabilidad de fallo y, si estaba indisponible, pasa a estar disponible mediante sorteo respecto a su probabilidad de reparación). En consecuencia, cada simulación corresponde a un año completo, permitiendo la consideración de aspectos cronológicos como los planes de mantenimiento o restricciones energéticas.

Ejemplo 7.21:

Cálculo de índices de fiabilidad en el Nivel 2 mediante simulación por Monte Carlo.

Los dos generadores del Ejemplo 7.20 deben suministrar la demanda anual del Ejemplo 7.19, teniendo en cuenta los posibles estados de indisponibilidad de generadores y líneas.

El objetivo es obtener la probabilidad de pérdida de carga y la potencia no suministrada incluyendo los posibles niveles de demanda.

En el Ejemplo 7.20 se analizaron los posibles estados del sistema, $2^5 = 32$ en total; teniendo en cuenta que la demanda puede tomar 3 valores, se deberían analizar ahora $3 \cdot 2^5 = 96$ estados. Para evitar un análisis exhaustivo de todos los estados, se utilizará el método de simulación mediante sorteo aleatorio de estados. Obsérvese cómo cada estado del sistema está definido por el estado disponible/indisponible de cada elemento y por el nivel de demanda.

Para determinar cada estado a analizar en detalle, se generarán 6 números aleatorios, $0 \leq \zeta_i \leq 1$, que determinarán el estado de cada elemento y el nivel de demanda por comparación con las distintas probabilidades. A modo de ejemplo, la Figura 7.20 presenta el estado del sistema correspondiente

a un sorteo concreto, analizado mediante un flujo de cargas en continua y adoptando las medidas correctoras necesarias. Obsérvese cómo la probabilidad de pérdida de carga para dicho estado es de 1.0, y la potencia no suministrada asciende a 50 MW debido al límite de potencia de la línea que une los nudos 1 y 3 (100 MW).

G1:	$\zeta_1 \leq 0,95$	G1 en servicio
	$\zeta_1 > 0,95$	G1 indisponible
G3:	$\zeta_2 \leq 0,90$	G2 en servicio
	$\zeta_2 > 0,90$	G2 indisponible
L1:	$\zeta_3 \leq 0,99$	L1 en servicio
	$\zeta_3 > 0,99$	L1 indisponible
L2:	$\zeta_4 \leq 0,99$	L2 en servicio
	$\zeta_4 > 0,99$	L2 indisponible
L3:	$\zeta_5 \leq 0,99$	L3 en servicio
	$\zeta_5 > 0,99$	L3 indisponible
P_D :	$\zeta_6 \leq 0,25$	$P_D = 100$ MW
	$\zeta_6 \geq 0,75$	$P_D = 200$ MW
	$0,25 < \zeta_6 < 0,75$	$P_D = 150$ MW

Elemento	ζ_i	Estado
G1	0.037	1
G3	0.923	0
L1	0.998	0
L2	0.437	1
L3	0.289	1
P_D	0.459	150 MW

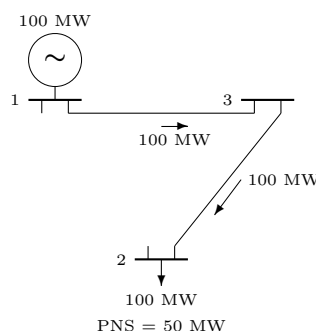


Figura 7.20. Estado tras un sorteo aleatorio de disponibilidades en la red de 3 nudos y dos generadores.

La Figura 7.21 muestra la evolución de las medias muestrales correspondientes a la probabilidad de pérdida de carga (PPC) y a la potencia no suministrada (PNS) a lo largo del análisis de los distintos estados aleatorios, así como el intervalo de confianza del 99%. Puede observarse cómo el principal inconveniente de los métodos basados en simulación consiste en el elevado número de estados que es necesario analizar para obtener valores con un grado de certidumbre adecuado. Así, la media muestral de la probabilidad de pérdida de carga tras analizar un millón de estados es de 0.00633, con un intervalo de confianza del 99% de $\pm 0,0002$; en el caso de la potencia no suministrada, la media muestral es de 0.862, con una incertidumbre aún de $\pm 0,0294$.

Casos	PPC	PNS (MW)
1000	0.00900 ± 0.00770	1.050 ± 0.9343
10000	0.00690 ± 0.00213	0.950 ± 0.3082
100000	0.00633 ± 0.00065	0.858 ± 0.0924
1000000	0.00633 ± 0.00020	0.862 ± 0.0294
10000000	0.00634 ± 0.00006	0.864 ± 0.0093

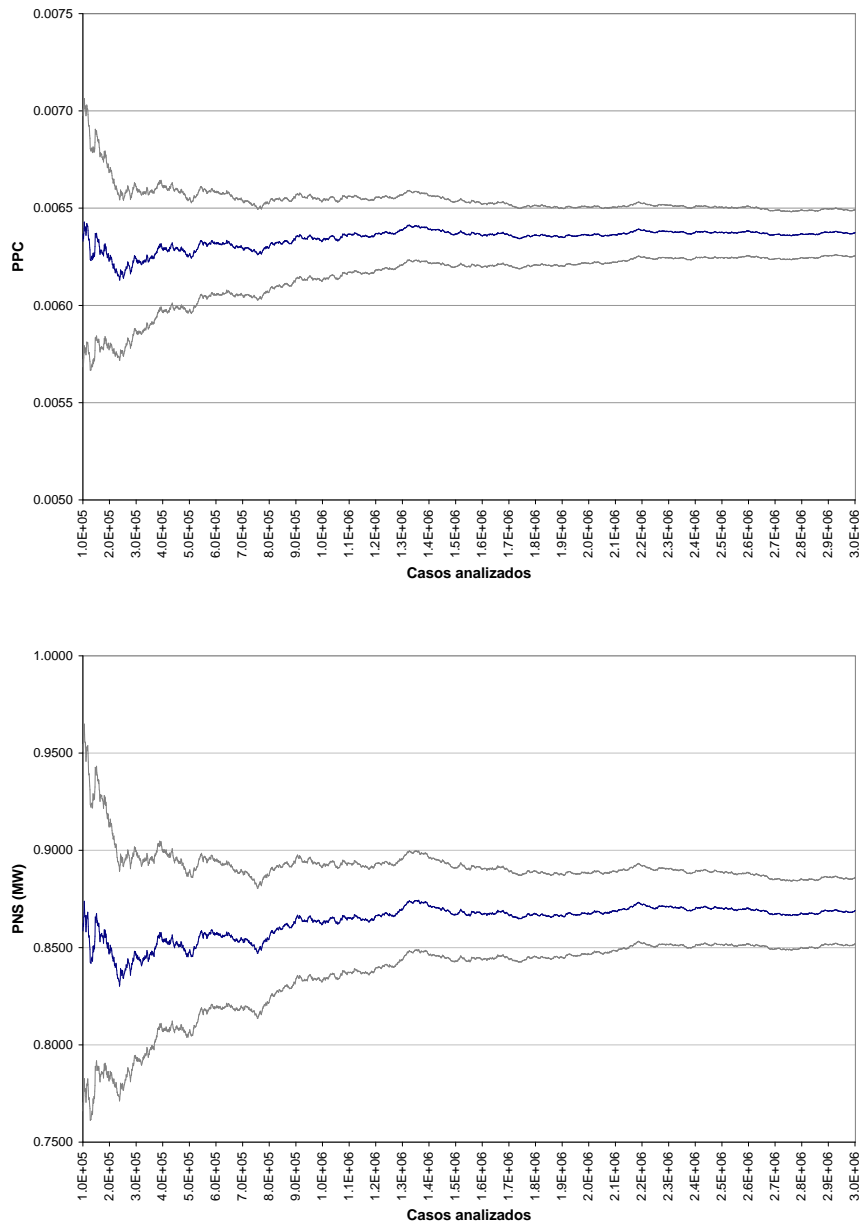


Figura 7.21. Evolución de las medias muestrales y de los intervalos de confianza del 99% de la probabilidad de pérdida de carga (PPC) y de la potencia no suministrada (PNS).

Bibliografía

- [1] T. E. DyLiacco, "Real-time Computer Control of Power Systems", *Proceedings of the IEEE*, vol. 62, pp. 884-891, julio 1974.
- [2] N. Balu et al., "On-Line Power System Security Analysis", *Proceedings of the IEEE*, vol. 80(2), pp. 262-280, febrero 1992.
- [3] A. J. Wood y B. F. Wollenberg, "Power Generation, Operation and Control", John Wiley & Sons, Inc., EEUU, 1996.
- [4] G. C. Ejebe y B. F. Wollemborg, "Automatic Contingency Selection", *IEEE Trans. on Power Apparatus & Systems*, vol. 98, pp. 92-104, enero/febrero 1979.
- [5] A. P. Sakis Meliopoulos, C. S. Cheng y F. Xia, "Performance Evaluation of Static Security Analysis Methods", *IEEE Trans. on Power Systems*, vol. 9, pp. 1441-1449, agosto 1994.
- [6] V. Brandwajn y M. G. Lauby, "Complete Bounding for AC Contingency Analysis", *IEEE Trans. on Power Systems*, vol. 4, pp. 724-729, mayo 1990.
- [7] R. Bacher y W. F. Tinney, "Faster Local Power Flow Solutions: The Zero Mismatch Approach", *IEEE Trans. on Power Systems*, vol. 4, pp. 1345-1354, noviembre 1989.
- [8] H. W. Dommel y W. F. Tinney, "Optimal Power Flow Solutions", *IEEE Trans. on Power Apparatus & Systems*, vol. PAS-87(10), pp. 1866-1876, octubre 1968.
- [9] J. Peschon, D. S. Piercy, W. F. Tinney, O. J. Tveit y M. Cuénod, "Optimum Control of Reactive Power Flow", *IEEE Trans. on Power Apparatus & Systems*, vol. PAS-87(1), pp. 40-48, enero 1968.
- [10] M. Huneault y F. D. Galiana, "A Survey of the Optimal Power Flow Literature", *IEEE Trans. on Power Systems*, vol. PWRs-6(2), pp. 762-770, mayo 1991.
- [11] D. I. Sun, B. Ashley, B. Brewer, A. Hughes y W. F. Tinney, "Optimal Power Flow by Newton Approach", *IEEE Trans. on Power Apparatus & Systems*, vol. PAS-103(10), pp. 2864-2880, 1984.
- [12] V. H. Quintana y M. Santos-Nieto, "Reactive-Power Dispatch by Successive Quadratic Programming", *IEEE Trans. on Power Systems*, vol. PWRs-4(3), pp. 425-435, septiembre 1989.
- [13] O. Alsac, J. Bright, M. Prais y B. Stott, "Further Developments in LP-Based Optimal Power Flow", *IEEE Trans. on Power Systems*, vol. PWRs-5(3), pp. 697-711, agosto 1990.
- [14] L. S. Vargas, V. H. Quintana y A. Vanelli, "A Tutorial Description of an Interior Point Method and its Application to Security-Constrained Economic Dispatch", *IEEE Trans. on Power Systems*, vol. 8(3), pp. 1315-1323, agosto 1993.
- [15] K. Fraundorfer, H. Glavitsch y R. Bacher, "Optimization in Planning and Operation of Electric Power Systems", Physica-Verlag, Alemania, 1993.
- [16] W. F. Tinney, J. M. Bright, K. D. Demaree y B. A. Hughes, "Some Deficiencies in Optimal Power Flow", *IEEE Trans. on Power Systems*, vol. 3(2), pp. 676-683, mayo 1988.
- [17] J. L. Martínez, A. Gómez et al., "A Hybrid Tool to Assist the Operator in Reactive Power/Voltage Control and Optimization", *IEEE Trans. on Power Systems*, vol. 10, pp. 760-768, mayo 1995.
- [18] A. Gómez, J. L. Martínez et al., "Sensitivity-Based Reactive Power Control for Voltage Profile Improvement", *IEEE Trans. on Power Systems*, vol. 8, pp. 937-945, agosto 1993.
- [19] M. M. Adibi (editor), "Power System Restoration: Methodologies & Implementation Strategies", IEEE Press Series in Power Engineering. IEEE, EEUU, 2000.
- [20] R. D. Christie, B. F. Wollenberg e I. Wangensteen, "Transmission Management in the Deregulated Environment", *Proceedings of the IEEE*, vol. 88(2), pp. 170-195, febrero 2000.

- [21] H. Singh, S. Hao y A. Papalexopoulos, "Transmission Congestion Management in Competitive Electricity Markets", *IEEE Transactions on Power Systems*, vol. 13(2), pp. 672-680, mayo 1998.
- [22] H. P. Chao y S. Peck, "Market Mechanisms for Electric Power Transmission", *Journal of Regulatory Economics*, vol. 10, pp. 25-60, julio 1996.
- [23] F. F. Wu y P. Varaiya, "Coordinated Multilateral Trades for Electric Power Networks: Theory and Implementation", Power Report PWP-031, University of California Energy Institute, junio 1995.
- [24] F. C. Schweppe, M. Caramanis, R. Tabors y R. Bohn, "Spot Pricing of Electricity", Kluwer Academic Publishers, Boston, 1988.
- [25] W. W. Hogan, "Contract Networks for Electric Power Transmission", *Journal of Regulatory Economics*, vol. 4, pp. 211-242, 1992.
- [26] M. E. Baran, V. Banunarayanan y K. E. Garren, "Equitable Allocation of Congestion Relief Cost to Transactions", *IEEE Trans. on Power Systems*, vol. 15(2), pp. 579-585, mayo 2000.
- [27] A. Gómez, J. Riquelme y J. L. Martínez, "Asignación de Pérdidas en Mercados Eléctricos Competitivos", *Energía*, vol. 15, pp. 147-151, mayo-junio 2001.
- [28] A. J. Conejo, F. D. Galiana y I. Kockar, "Z-bus Loss Allocation", *IEEE Trans. on Power Systems*, vol. 16(1), pp. 105-110, febrero 2001.
- [29] F. D. Galiana y M. Phelan, "Allocation of Transmission Losses to Bilateral Contracts in a Competitive Environment", *IEEE Trans. on Power Systems*, vol. 15(1), pp. 143-150, febrero 2000.
- [30] M. E. Baran, V. Banunarayanan y K. E. Garren, "A Transaction Assessment Method for Allocation of Transmission Services", *IEEE Trans. on Power Systems*, vol. 14(3), pp. 920-929, agosto 1999.
- [31] J. Bialek, S. Ziemianek y N. Abi-Samra, "Tracking-Based Loss Allocation and Economic Dispatch", *Proc. of the 13th PSCC*, Trondheim, Norway, pp. 375-381, julio 1999.
- [32] A. Gómez, J. M. Riquelme et al., "Fair Allocation Transaction Power Losses", *IEEE Trans. on Power Systems*, vol. 15(1), pp. 184-188, febrero 2000.
- [33] K. W. Cheung, P. Shamsollahi, D. Sun, J. Milligan y M. Potishnak, "Energy and Ancillary Service Dispatch for the Interim ISO New England Electricity Market", *IEEE Trans. on Power Systems*, vol. 15(3), pp. 968-974, agosto 2000.
- [34] K. Bhattacharya, M. H. J. Bollen y J. E. Daalder, "Operation of Restructured Power Systems", Kluwer's Power Electronics and Power Systems Series, 2001.
- [35] M. V. F. Pereira y N. J. Balu, "Composite Generation/Transmission Reliability Evaluation", *Proceedings of the IEEE*, vol. 80(4), pp. 470-491, abril 1992.
- [36] R. Allan y R. Billinton, "Probabilistic Assessment of Power Systems", *Proceedings of the IEEE*, vol. 88(2), pp. 140-162, febrero 2000.
- [37] R. Billinton y R. Allan, "Reliability Evaluation of Power Systems", 2.^a edición, New York, Plenum, 1996.
- [38] R. Billinton y W. Li, "Reliability Assessment of Electric Power Systems Using Monte Carlo Methods", New York, Plenum, 1994.
- [39] Cigré Task Force 38.05.05, "Techniques for Power System Planning Under Uncertainties", Cigré, abril 2000.

Capítulo 8

Análisis de transitorios electromagnéticos

JUAN ANTONIO MARTÍNEZ VELASCO

8.1. Procesos transitorios en sistemas eléctricos de energía

Un proceso transitorio en un sistema de cualquier tipo se origina como consecuencia de un cambio en las condiciones de operación o en la configuración del sistema. Los procesos transitorios en sistemas eléctricos de energía son originados por maniobras, faltas, descargas atmosféricas o variaciones en la demanda de energía. La importancia que tiene su estudio es debido fundamentalmente al efecto que pueden tener en el funcionamiento de un sistema o sobre los equipos que forman parte de ese sistema.

Las solicitaciones que pueden dañar los equipos eléctricos son de dos tipos: sobrecorrientes y sobretensiones. Una sobrecorriente puede dañar un equipo eléctrico por una disipación excesiva de calor. En general, la protección frente a sobrecorrientes se realiza mediante dispositivos o equipos de protección especializados. Una sobretensión puede provocar una ruptura dieléctrica, si la parte dañada es un material aislante interno, sólido o líquido, o un contorneo, si se origina una descarga en un aislamiento externo, es decir, a través del aire. La protección de los equipos eléctricos frente a sobretensiones se realiza escogiendo de forma adecuada su nivel de aislamiento o mediante dispositivos protectores especializados. Para conseguir una protección adecuada en ambos tipos de solicitaciones es necesario conocer las condiciones más adversas que se pueden presentar, y los procesos transitorios con los que se originan.

Los procesos transitorios en sistemas eléctricos de energía se pueden clasificar atendiendo a diversos criterios:

1. Según su origen, un proceso transitorio puede ser externo, originado por una descarga atmosférica, o interno, provocado por una maniobra, una falta o una variación en la demanda.
2. Según los equipos involucrados, un proceso transitorio puede ser electromagnético, cuando es necesario analizar la interacción entre elementos de almacenamiento de

energía electromagnética, es decir, inductancias y capacidades, o electromecánico, cuando es necesario analizar la interacción entre la energía almacenada en los sistemas mecánicos de las máquinas rotativas y la energía almacenada en elementos puramente eléctricos.

El cálculo riguroso de procesos transitorios en sistemas eléctricos de energía puede ser una tarea difícil debido a la complejidad de los equipos involucrados y a la interacción entre ellos. La solución de un proceso transitorio es prácticamente imposible de obtener mediante cálculo manual, incluso en redes o sistemas muy simples. En algunos casos es posible reducir drásticamente el tamaño del circuito equivalente y aproximar la solución mediante una fórmula cerrada cuya solución se puede encontrar en varios manuales. Sin embargo, en la mayoría de casos sólo es posible obtener una solución precisa o aproximada del proceso transitorio en estudio con la ayuda de un ordenador.

Inicialmente el cálculo de procesos transitorios en sistemas eléctricos de energía se realizó mediante analizadores de redes. Desde la aparición del ordenador digital, se ha realizado un enorme esfuerzo para obtener la solución de procesos transitorios mediante cálculo numérico. Durante muchos años, la principal ventaja del analizador de red frente a los ordenadores digitales fue la velocidad de simulación. Los avances que han tenido lugar durante la última década, tanto en equipos de cálculo como en programación de ordenadores, han permitido reducir drásticamente el tiempo de cálculo y el coste de las simulaciones, de forma que en la actualidad es aconsejable el uso del ordenador digital en la mayoría de aplicaciones. El objetivo de este capítulo es presentar una introducción a las técnicas de análisis de procesos transitorios de naturaleza electromagnética en sistemas eléctricos de energía, con énfasis en el cálculo numérico mediante ordenador digital.

Varias técnicas han sido desarrolladas para calcular procesos transitorios mediante ordenador digital. Básicamente se pueden dividir en dos categorías: técnicas en el dominio de la frecuencia y técnicas en el dominio del tiempo. De los varios métodos propuestos en el dominio del tiempo, el más popular se basa en el algoritmo desarrollado por H. W. Dommel, que combina la regla trapezoidal y el método de Bergeron. Este algoritmo fue el origen del EMTP (*ElectroMagnetic Transients Program*), que es la herramienta más empleada en el cálculo de procesos transitorios en sistemas eléctricos de energía.

La siguiente sección del capítulo presenta una breve introducción a los modelos de los componentes básicos de un sistema eléctrico, tal como serán representados en este texto. Posteriormente, la Sección 3 presenta una introducción a las técnicas más empleadas en el análisis de procesos transitorios. La selección del modelo más adecuado para representar un determinado componente no es una tarea siempre fácil debido al comportamiento que tienen los componentes de un sistema eléctrico de energía en función de la frecuencia de las oscilaciones que se originan en un proceso transitorio. La sección dedicada a este tema incluye algunos ejemplos que mostrarán la importancia de este aspecto, un resumen de los modelos desarrollados para representar los componentes más importantes, y las directrices propuestas para seleccionar el modelo más adecuado en cada caso.

El campo de aplicación más importante del cálculo digital de transitorios electromagnéticos en sistemas eléctricos de energía ha sido el análisis de sobretensiones. La Sección 5 presenta una introducción al origen y los efectos de las sobretensiones, así como a los medios

para proteger los distintos equipos eléctricos. La sección incluye la aplicación del cálculo digital en algunos ejemplos muy simples de distintos tipos de sobretensiones.

8.2. Componentes de un sistema eléctrico de energía

8.2.1. Introducción

El objetivo de un sistema eléctrico de energía es satisfacer una demanda de energía transportando la energía requerida desde los centros de generación a los puntos de consumo. Las funciones básicas —generación, transporte y distribución— son realizadas por componentes con funcionamiento y diseño muy complejos. El estudio de la mayoría de procesos transitorios que se originan en un sistema eléctrico de energía puede ser una tarea difícil si se desea realizar con rigor, debido a la complejidad de los componentes del sistema y al tipo de interacciones que pueden tener lugar entre algunos de estos componentes. Una introducción al tema como la que se pretende presentar en este capítulo sólo se puede abordar mediante una serie de simplificaciones que reduzcan sensiblemente la complejidad de los modelos matemáticos y faciliten la comprensión de los procesos transitorios que se pueden originar. En la sección anterior se ha mencionado que sólo se estudiarán transitorios de naturaleza electromagnética, es decir, aquellos en los que no es necesario incluir el comportamiento de ningún sistema mecánico. Por lo que respecta a la representación de componentes, ésta se realizará introduciendo dos simplificaciones básicas: sólo se considerarán modelos monofásicos, y en una mayoría de casos se supondrá un comportamiento ideal.

8.2.2. Componentes básicos

Los componentes de un sistema eléctrico de energía que es necesario considerar en el estudio de transitorios electromagnéticos se clasificarán en tres categorías: fuentes, componentes pasivos, y componentes de maniobra.

1. *Fuentes*: Servirán para representar los elementos de generación que alimentan un sistema y las perturbaciones exteriores (descargas atmosféricas o rayos), que originarán determinados procesos transitorios, y cuyo efecto es necesario estudiar. Las fuentes se pueden clasificar en dos tipos, de tensión o de corriente. El esquema equivalente de una fuente de tensión incluye una impedancia interna en serie, mientras que la fuente de corriente la tiene en paralelo. Se puede considerar un comportamiento ideal para ambos tipos de fuentes suponiendo nula la impedancia interna de la fuente de tensión, o infinita la impedancia paralelo en la fuente de corriente.
2. *Componentes pasivos*: Su misión es transportar y distribuir la energía eléctrica (líneas y cables), adaptar los niveles de tensión de dos o más redes (transformadores), o compensar la potencia reactiva (reactores, condensadores). A esta lista se debe añadir cualquier consumo de energía que sea necesario incluir en el estudio de un proceso transitorio.

Dependiendo del proceso transitorio a estudiar, el comportamiento de algún componente puede ser lineal o no lineal. Un ejemplo es el transformador para el que se

empleará un modelo que puede ser tanto lineal como saturable, dependiendo del estudio o de la frecuencia de las oscilaciones que se originen en el proceso transitorio. La representación de cualquier componente con un comportamiento lineal se basará en cuatro elementos básicos: resistencia, inductancia, capacidad, línea ideal. Esta lista se podría ampliar añadiendo otros elementos como el acoplamiento magnético o el transformador ideal. Si el comportamiento es no lineal, puede ser necesario incluir en la representación de algunos componentes ya sea inductancias saturables o resistencias no lineales. Un caso particular en el que la representación incluirá una resistencia no lineal es el pararrayos de óxidos metálicos, que tiene como misión proteger los equipos frente a sobretensiones.

3. *Componentes de maniobra*: Su misión es la de modificar la estructura de un sistema mediante conexión o desconexión de uno o varios de sus componentes, o bien representar la aparición de una falta o avería. El componente que será empleado para cumplir cualquiera de estas misiones es el interruptor ideal, cuyas características y comportamiento se pueden resumir de la siguiente forma: su impedancia es infinita cuando está abierto, y nula cuando está cerrado; la maniobra de cierre o conexión se realiza instantáneamente, y puede producirse en cualquier punto de la onda de tensión que exista en el lado de la fuente. En general se considera que la apertura de un interruptor tiene lugar cuando la corriente se anula; sin embargo, el usuario puede considerar la posibilidad de abrir un interruptor con un valor de corriente no nula para analizar algunos procesos transitorios, como el que se conoce como *current chopping*.

La lista de componentes de un sistema real es mucho más amplia, ya que se podrían añadir los componentes que forman los sistemas de protección frente a sobrecorrientes, o los convertidores estáticos controlables, en los que se deberían incluir sus estrategias de control.

8.3. Análisis de transitorios electromagnéticos

8.3.1. Introducción

El análisis de transitorios electromagnéticos se puede realizar empleando varios tipos de técnicas. Aunque en la actualidad este análisis se realiza casi exclusivamente mediante ordenador, otros métodos desarrollados cuando no existían ordenadores digitales pueden ser todavía de utilidad ya que permiten analizar casos muy simples de forma muy didáctica.

Los métodos de análisis de transitorios electromagnéticos se pueden clasificar en tres categorías: técnicas analíticas, técnicas gráficas y técnicas numéricas.

Cada categoría presenta sus propias ventajas y limitaciones. Tal como se verá en ésta y en las siguientes secciones muchos casos pueden ser analizados mediante métodos híbridos que aprovechan las ventajas de cada categoría. Las siguientes secciones presentan una introducción a los principios fundamentales de cada técnica, incluyendo ejemplos ilustrativos.

8.3.2. Técnicas analíticas

8.3.2.1 La transformada de Laplace

El comportamiento de un sistema durante un proceso transitorio se ha de analizar a partir de las ecuaciones diferenciales que rigen el comportamiento de cada uno de los elementos básicos que forman el circuito equivalente del sistema. Esta tarea puede ser muy difícil si el sistema, y por tanto su circuito equivalente, es grande y complejo. Para facilitar el estudio de cualquier tipo de sistema en régimen transitorio se han desarrollado varios métodos basados en la transformación de variables, siendo la más empleada la transformada de Laplace.

La transformada de Laplace, $F(s)$, de una función temporal, $f(t)$, se obtiene mediante la siguiente expresión:

$$F(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} f(t) dt \quad (8.1)$$

Esta expresión transforma la función del tiempo $f(t)$ en otra función cuya variable independiente es s . La ventaja de esta transformada está en que permite convertir las ecuaciones diferenciales que rigen el comportamiento de los elementos de un circuito en ecuaciones algebraicas, más fáciles de manejar.

Se supone que el lector está familiarizado con esta técnica, por lo que se procederá directamente a su aplicación.

8.3.2.2 Circuitos transformados de los elementos básicos

La aplicación de la transformada de Laplace en la obtención de los circuitos equivalentes de los elementos básicos se detalla a continuación. Para cada componente es posible deducir dos tipos de circuitos transformados: Thevenin y Norton. Dado que el método empleado en el análisis de transitorios se basa en el método de los nudos, sólo será deducido el equivalente Norton.

1. *Resistencia:* El comportamiento de una resistencia, conectada entre los nudos k y m , en régimen transitorio no incluye ninguna ecuación diferencial:

$$v_k(t) - v_m(t) = Ri_{km}(t) \quad (8.2)$$

La aplicación de la transformada de Laplace es inmediata:

$$V_k(s) - V_m(s) = RI_{km}(s) \quad (8.3)$$

2. *Inductancia:* La ecuación diferencial que rige el comportamiento de una inductancia es la siguiente:

$$v_k(t) - v_m(t) = L \frac{di_{km}(t)}{dt} \quad (8.4)$$

De la aplicación de la transformada de Laplace a esta ecuación se obtiene la siguiente relación:

$$V_k(s) - V_m(s) = sLI_{km}(s) - Li_{km}(0) \quad (8.5)$$

siendo $i_{km}(0)$ la intensidad de corriente que circula por la inductancia en el instante $t = 0$. De esta ecuación se puede deducir la expresión de la transformada de la intensidad, quedando de la siguiente forma:

$$I_{km}(s) = \frac{V_{km}(s)}{sL} + \frac{i_{km}(0)}{s} \tag{8.6}$$

que corresponde al circuito equivalente de la Figura 8.1.

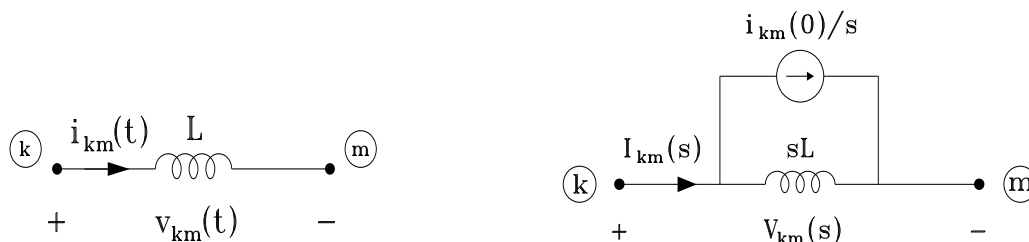


Figura 8.1. Circuito equivalente transformado de una inductancia.

3. *Capacidad:* La ecuación diferencial que rige el comportamiento de un condensador es la siguiente:

$$i_{km}(t) = C \frac{d}{dt} [v_k(t) - v_m(t)] \tag{8.7}$$

De la aplicación de la transformada de Laplace a esta ecuación se obtiene la siguiente relación:

$$I_{km}(s) = sC[V_k(s) - V_m(s)] - C[v_k(0) - v_m(0)] \tag{8.8}$$

siendo $[v_k(0) - v_m(0)]$ la tensión entre terminales de la capacidad en el instante $t = 0$. Esta ecuación se puede reescribir de la siguiente forma:

$$I_{km}(s) = sCV_{km}(s) - Cv_{km}(0) \tag{8.9}$$

y corresponde al circuito equivalente de la Figura 8.2.

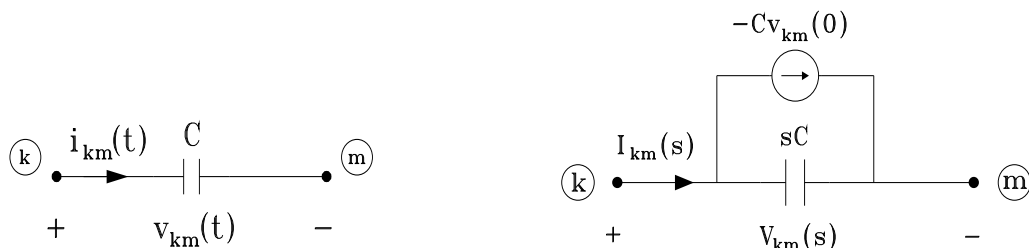


Figura 8.2. Circuito equivalente transformado de una capacidad.

4. *Línea ideal*: La Figura 8.3 muestra el esquema de una línea sin pérdidas y el circuito equivalente de un diferencial de longitud. Del circuito de la figura se obtienen las ecuaciones de una línea ideal monofásica que se pueden expresar de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} \frac{\partial v(x,t)}{\partial x} &= -L \frac{\partial i(x,t)}{\partial t} \\ \frac{\partial i(x,t)}{\partial x} &= -C \frac{\partial v(x,t)}{\partial t} \end{aligned} \quad (8.10)$$

siendo L y C la inductancia y la capacidad de la línea por unidad de longitud, y x la distancia respecto a uno de sus terminales (ver Figura 8.3).

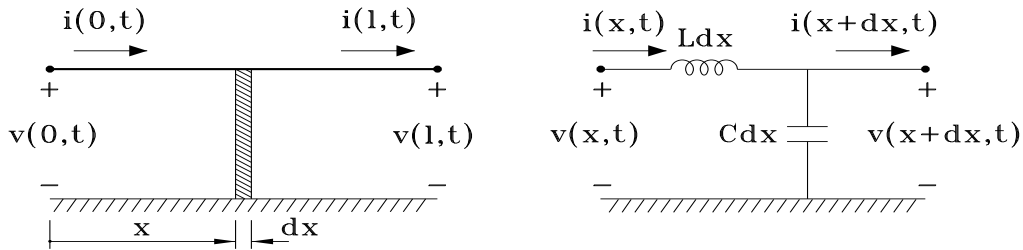


Figura 8.3. Esquema de una línea ideal.

De la aplicación de la transformada de Laplace se obtienen las siguientes ecuaciones:

$$\begin{aligned} \frac{\partial V(x,s)}{\partial x} &= -sLI(x,s) \\ \frac{\partial I(x,s)}{\partial x} &= -sCV(x,s) \end{aligned} \quad (8.11)$$

Al derivar de nuevo estas ecuaciones con respecto a la variable x se obtiene:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 V(x,s)}{\partial x^2} &= \beta^2(s)V(x,s) \\ \frac{\partial^2 I(x,s)}{\partial x^2} &= \beta^2(s)I(x,s) \end{aligned} \quad (8.12)$$

siendo

$$\beta(s) = s\sqrt{LC} \quad (8.13)$$

La solución de la primera de estas ecuaciones tiene la siguiente forma general:

$$V(x,s) = A_1(s)e^{-\beta(s)x} + A_2(s)e^{+\beta(s)x} \quad (8.14)$$

Para comprobar este resultado, bastará con sustituir la expresión en la primera ecuación de (8.12) y verificar que se cumple la igualdad.

Al derivar la expresión de la tensión queda

$$\frac{\partial V(x,s)}{\partial x} = -\beta(s)[A_1(s)e^{-\beta(s)x} - A_2(s)e^{+\beta(s)x}]$$

De este resultado y de la primera ecuación de (8.11) se puede deducir la expresión de la intensidad

$$\begin{aligned} I(x, s) &= -\frac{1}{sL} \frac{\partial V(x, s)}{\partial x} \\ &= \frac{[A_1(s)e^{-\beta(s)x} - A_2(s)e^{+\beta(s)x}]}{Z_c} \end{aligned} \quad (8.15)$$

siendo Z_c la impedancia característica de la línea

$$Z_c = \sqrt{\frac{L}{C}} \quad (8.16)$$

La impedancia característica de una línea ideal tiene las dimensiones de una resistencia, por lo que se designará indistintamente como impedancia o resistencia característica.

La solución particular de las ecuaciones de una línea se deduce teniendo en cuenta las condiciones de contorno. Si la línea se encuentra situada entre los nudos k y m , de las condiciones de contorno se obtienen los siguientes resultados:

- Nudo k ; $x = 0$

$$\begin{aligned} V(k, s) &= A_1(s) + A_2(s) \\ I(k, s) &= \frac{A_1(s) - A_2(s)}{Z_c} \end{aligned} \quad (8.17)$$

- Nudo m ; $x = l$

$$\begin{aligned} V(m, s) &= A_1(s)e^{-\beta(s)l} + A_2(s)e^{+\beta(s)l} \\ I(m, s) &= \frac{A_1(s)e^{-\beta(s)l} - A_2(s)e^{+\beta(s)l}}{Z_c} \end{aligned} \quad (8.18)$$

De las condiciones de contorno en el nudo k se deducen las siguientes relaciones:

$$\begin{aligned} V(k, s) + Z_c I(k, s) &= 2A_1(s) \\ V(k, s) - Z_c I(k, s) &= 2A_2(s) \end{aligned} \quad (8.19)$$

de donde se obtiene

$$\begin{aligned} A_1(s) &= \frac{V(k, s) + Z_c I(k, s)}{2} \\ A_2(s) &= \frac{V(k, s) - Z_c I(k, s)}{2} \end{aligned} \quad (8.20)$$

De las condiciones de contorno en el nudo m se deducen las siguientes relaciones:

$$\begin{aligned} V(m, s) + Z_c I(m, s) &= 2A_1(s)e^{-\beta(s)l} \\ V(m, s) - Z_c I(m, s) &= 2A_2(s)e^{+\beta(s)l} \end{aligned} \quad (8.21)$$

resultando

$$\begin{aligned} A_1(s) &= \frac{V(m, s) + Z_c I(m, s)}{2} e^{+\beta(s)l} \\ A_2(s) &= \frac{V(m, s) - Z_c I(m, s)}{2} e^{-\beta(s)l} \end{aligned} \quad (8.22)$$

Antes de proceder al siguiente paso se introducirá el cambio de variables y de notaciones que se muestra en la Figura 8.4. De la figura se deduce que

$$\begin{aligned} V_k(s) &= V(k, s) & I_{km}(s) &= +I(k, s) \\ V_m(s) &= V(m, s) & I_{mk}(s) &= -I(m, s) \end{aligned}$$

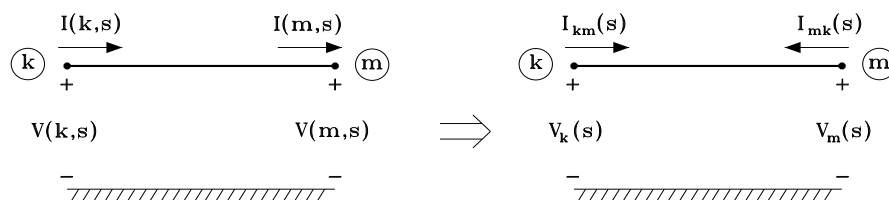


Figura 8.4. Cambio de notación en las variables de la línea.

En una línea ideal

$$v = \frac{s}{\beta(s)} = \frac{1}{\sqrt{LC}} \quad (8.23)$$

$$\tau = \frac{l}{v} \quad (8.24)$$

siendo v la velocidad de propagación de ondas, y τ el tiempo de propagación de ondas en la línea. Se tiene por tanto $\beta(s)l = s\tau$.

Igualando las dos expresiones de $A_1(s)$ y de $A_2(s)$, y teniendo en cuenta estas nuevas constantes, así como el cambio de variables, queda

$$\begin{aligned} V_k(s) + Z_c I_{km}(s) &= [V_m(s) - Z_c I_{mk}(s)] e^{+s\tau} \\ V_k(s) - Z_c I_{km}(s) &= [V_m(s) + Z_c I_{mk}(s)] e^{-s\tau} \end{aligned} \quad (8.25)$$

Despejando $I_{km}(s)$ de la segunda ecuación e $I_{mk}(s)$ de la primera, se obtiene

$$\begin{aligned} I_{km}(s) &= \frac{V_k(s)}{Z_c} - \left[\frac{V_m(s)}{Z_c} + I_{mk}(s) \right] e^{-s\tau} = \frac{V_k(s)}{Z_c} + I_k(s) \\ I_{mk}(s) &= \frac{V_m(s)}{Z_c} - \left[\frac{V_k(s)}{Z_c} + I_{km}(s) \right] e^{-s\tau} = \frac{V_m(s)}{Z_c} + I_m(s) \end{aligned} \quad (8.26)$$

Se puede comprobar que estas ecuaciones corresponden al circuito equivalente transformado que muestra la Figura 8.5, en el que se ha empleado la siguiente notación:

$$\begin{aligned} I_k(s) &= -\left[\frac{V_m(s)}{Z_c} + I_{mk}(s)\right] e^{-s\tau} \\ I_m(s) &= -\left[\frac{V_k(s)}{Z_c} + I_{km}(s)\right] e^{-s\tau} \end{aligned} \tag{8.27}$$

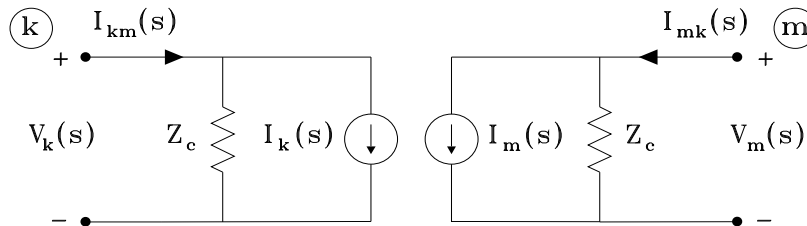


Figura 8.5. Circuito equivalente transformado de una línea ideal.

8.3.2.3 Aplicación de la transformada de Laplace

El procedimiento para analizar transitorios electromagnéticos mediante esta técnica se puede resumir de la siguiente forma:

1. Se obtiene el circuito equivalente transformado del sistema en estudio.
2. Se emplean las leyes de Kirchhoff o cualquier método de análisis de circuitos (nudos, bucles, cortes) para obtener la solución de las variables de interés. Ya se ha mencionado que se ha escogido el equivalente Norton para los circuitos transformados de los elementos básicos porque en la mayoría de casos se empleará el método de los nudos o de las admitancias nodales.
3. Se aplica la antitransformada de Laplace para obtener la expresión en función del tiempo de estas variables.

Aunque se han desarrollado algunos algoritmos que permiten aplicar el procedimiento completo en sistemas de gran tamaño, en general esta técnica se aplica sólo a sistemas pequeños para los que cualquiera de los pasos se realiza de forma manual. Otra limitación importante es que sólo puede aplicarse a sistemas lineales.

El siguiente ejemplo presenta la aplicación de esta técnica en un estudio muy simple, cuya justificación física se verá en la siguiente sección.

Ejemplo 8.1:

Se desea analizar la tensión que se originará en el extremo receptor de la línea que muestra la Figura 8.6. La línea se representará mediante un modelo monofásico ideal con parámetros distribuidos. La fuente de tensión tiene una impedancia interna, representada por una resistencia serie R_0 , cuyo valor es igual al de la impedancia característica de la línea, Z_c .

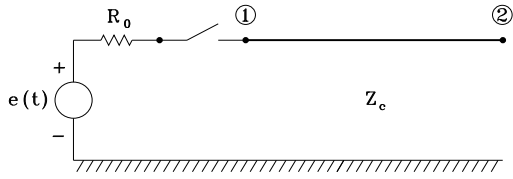


Figura 8.6. Ejemplo 1: Diagrama del sistema en estudio.

El esquema resultante de considerar el circuito equivalente transformado de cada componente del sistema, una vez que se ha cerrado el interruptor, es el que muestra la Figura 8.7.

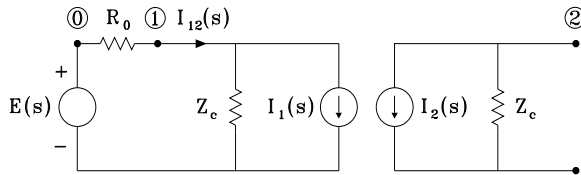


Figura 8.7. Ejemplo 1: Esquema equivalente.

Del circuito de la figura se deduce que la tensión en el nudo 2 es la tensión a través de la impedancia característica Z_c originada por la intensidad de la fuente de corriente del circuito equivalente. Si se tiene en cuenta la expresión de las fuentes controladas del circuito equivalente de una línea y la numeración de nudos del sistema en estudio queda

$$V_2(s) = -Z_c I_2(s) = [V_1(s) + Z_c I_{12}(s)] e^{-s\tau}$$

La intensidad $I_{12}(s)$ en el circuito de la Figura 8.7 es la intensidad que circula por la resistencia R_0 de la fuente a la línea. Así pues,

$$I_{12}(s) = \frac{V_0(s) - V_1(s)}{R_0}$$

Al sustituir la expresión de $I_{12}(s)$ en la de $V_2(s)$ se tiene

$$V_2(s) = \left[V_1(s) + \frac{Z_c}{R_0} [V_0(s) - V_1(s)] \right] e^{-s\tau}$$

Puesto que $R_0 = Z_c$ y $V_0(s) = E(s)$ queda finalmente

$$V_2(s) = E(s) e^{-s\tau}$$

La tensión resultante en el extremo receptor de la línea será la tensión de la fuente retardada un tiempo igual al tiempo que tarda una onda en propagarse de uno a otro extremo de la línea, y su valor será por tanto nulo antes de que llegue la onda.

8.3.3. Técnicas gráficas

Para analizar los procesos transitorios que se originan con la propagación de ondas en una línea ideal con parámetros distribuidos se han desarrollado varios métodos que aprovechan la circunstancia de que la propagación de ondas se realiza sin distorsión ni atenuación. Los

dos métodos más conocidos son el método de Bergeron y el diagrama reticular, también conocido como método de Bewley. El método de Bergeron servirá de base para obtener el circuito equivalente discreto de una línea ideal cuando se emplean métodos numéricos, tal como se verá en la próxima sección; sin embargo, su aplicación gráfica es más compleja que la del método de Bewley, que es el único que se presenta en esta sección.

8.3.3.1 Solución de las ecuaciones de una línea ideal

Anteriormente se han presentado las ecuaciones de una línea ideal [ver (8.10)]. Si se derivan estas ecuaciones respecto a x , y se tiene en cuenta que el orden de derivadas respecto a x y t es indiferente, se obtiene

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 v(x, t)}{\partial x^2} &= LC \frac{\partial^2 v(x, t)}{\partial t^2} \\ \frac{\partial^2 i(x, t)}{\partial x^2} &= LC \frac{\partial^2 i(x, t)}{\partial t^2}\end{aligned}\tag{8.28}$$

La solución general de estas ecuaciones tiene la siguiente forma:

$$\begin{aligned}v(x, t) &= [f_1(x - vt) + f_2(x + vt)] \\ i(x, t) &= \frac{[f_1(x - vt) - f_2(x + vt)]}{Z_c}\end{aligned}\tag{8.29}$$

siendo v la velocidad de propagación de ondas en la línea, y Z_c la impedancia característica de la línea.

Para comprobar que la solución de la tensión tiene la forma que muestra la primera función de (8.29) bastará con derivar dos veces respecto a x y verificar que cumple la primera igualdad de (8.28).

De las expresiones que muestran las ecuaciones (8.29) se deduce que la tensión y la intensidad de corriente en cualquier punto de una línea son el resultado de superponer ondas que viajan en sentido directo y ondas que viajan en sentido inverso.

Si se sustituye la expresión general de la tensión en la segunda ecuación de (8.10) queda

$$\frac{\partial i(x, t)}{\partial x} = Cv \frac{\partial}{\partial t} [f_1(x - vt) - f_2(x + vt)]$$

Puesto que

$$Cv = \frac{C}{\sqrt{LC}} = \sqrt{\frac{C}{L}} = \frac{1}{Z_c}$$

resulta

$$\frac{\partial i(x, t)}{\partial x} = \frac{1}{Z_c} \frac{\partial}{\partial t} [f_1(x - vt) - f_2(x + vt)]$$

De donde se confirma que la expresión de la intensidad es la que muestra la segunda igualdad de (8.29).

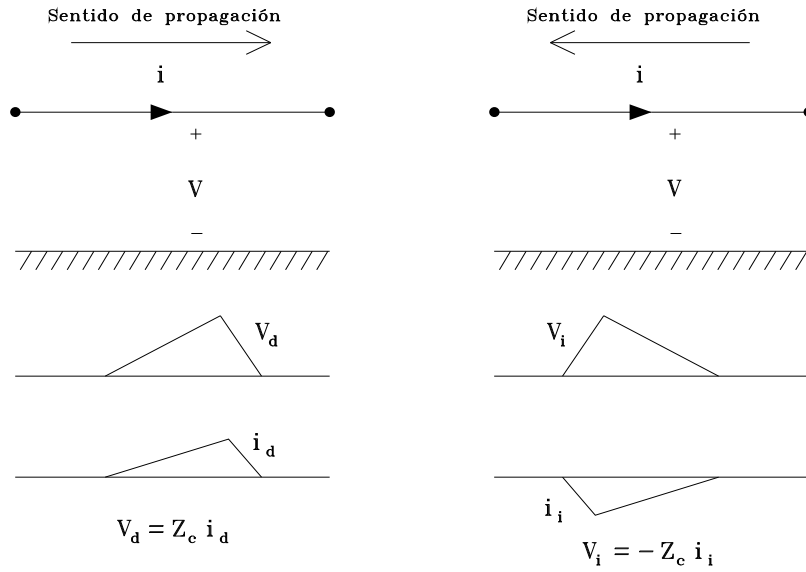


Figura 8.8. Relación entre ondas de tensión y de corriente.

8.3.3.2 Propagación y reflexión de ondas

La relación entre ondas de tensión y de corriente es la impedancia característica de la línea, siendo esta relación positiva para ondas que se desplazan en un sentido, y negativa para ondas que se desplazan en sentido contrario (ver Figura 8.8). La existencia de ondas que se propagan en ambos sentidos es debida a los puntos de discontinuidad que puede haber en una línea. El principio físico de esto puede resumirse de la siguiente forma:

1. Cuando una línea es energizada se inicia la propagación de una onda de tensión y de una onda de corriente, estando ambas relacionadas por la impedancia característica.
2. La propagación de ambas ondas se realiza sin distorsión ni atenuación, y sólo sufrirá un cambio cuando se encuentre una discontinuidad en el medio de propagación.
3. Cuando la onda de tensión, o de corriente, se encuentra con un medio de características distintas a las del medio en el que se propaga se origina una nueva onda, conocida como onda reflejada, que se superpone a la onda incidente.

Un cambio en el medio de propagación puede producirse en muchas situaciones, como es el cambio en el valor de la impedancia característica del medio, la terminación de la línea, o un punto de bifurcación. El cálculo de las ondas que se originan como consecuencia de una discontinuidad se realizará con los siguientes casos.

- Terminación de línea

La Figura 8.9 muestra el caso que se pretende analizar. Se tiene una línea ideal por la que se propaga una onda incidente, que alcanza el extremo en el que se ha instalado una resistencia.

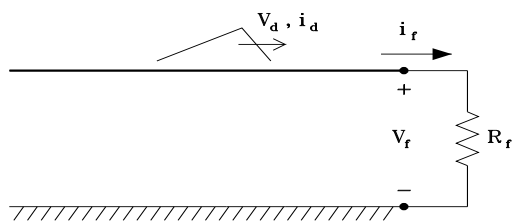


Figura 8.9. Terminación de línea.

En final de línea se tienen las siguientes relaciones entre las ondas de tensión y de corriente:

$$v_f = v_i + v_r \quad i_f = i_i + i_r \quad (8.30)$$

donde los subíndices i , r y f se usan para designar ondas incidentes, reflejadas y en final de línea, respectivamente.

Por otra parte, las ondas de tensión y de corriente están relacionadas según las siguientes expresiones:

$$\begin{aligned} v_f &= R_f i_f \\ v_i &= Z_c i_i \\ v_r &= -Z_c i_r \end{aligned} \quad (8.31)$$

que sustituidas en las anteriores expresiones permiten obtener

$$v_r = r_f v_i \quad i_r = -r_f i_i \quad (8.32)$$

siendo

$$r_f = \frac{R_f - Z_c}{R_f + Z_c} \quad (8.33)$$

el coeficiente de reflexión de ondas en final de línea.

Las ondas de tensión y corriente en final de línea son el resultado de sumar las ondas incidentes y reflejadas. Si se tiene en cuenta la relación entre ambas resulta

$$v_f = (1 + r_f)v_i \quad i_f = (1 - r_f)i_i \quad (8.34)$$

▪ Punto de transición

La Figura 8.10 muestra el diagrama de un sistema formado por dos líneas con distinta impedancia característica. Por la línea 1 se propaga una onda hacia la línea 2.

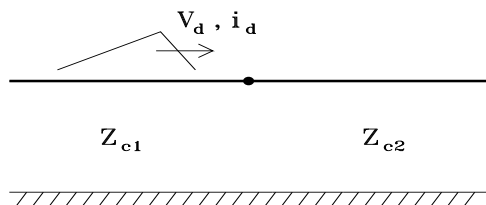


Figura 8.10. Punto de transición.

Cuando la onda incidente (v_i, i_i) alcanza el punto de transición tiene lugar un cambio en el medio de propagación, y se origina una onda reflejada (v_r, i_r) , que se propagará por la línea 1 en sentido contrario al de la onda incidente, y una onda refractada

(v_t, i_t) , que se propagará por la línea 2. La relación entre ondas de tensión y de corriente se puede anotar de la siguiente forma:

$$v_t = v_i + v_r \quad i_t = i_i + i_r \quad (8.35)$$

Teniendo en cuenta que

$$\begin{aligned} v_i &= Z_{c1} i_i \\ v_r &= -Z_{c1} i_r \\ v_t &= Z_{c2} i_t \end{aligned} \quad (8.36)$$

se deduce

$$v_r = r v_i \quad v_t = (1 + r) v_i = t v_i \quad (8.37)$$

siendo

$$r = \frac{Z_{c2} - Z_{c1}}{Z_{c2} + Z_{c1}} \quad t = \frac{2Z_{c2}}{Z_{c2} + Z_{c1}} \quad (8.38)$$

donde r es el coeficiente de reflexión y $t = (1 + r)$ el coeficiente de refracción o transmisión en el punto de discontinuidad.

Por lo que respecta a la intensidad de corriente, se obtiene

$$i_r = -r i_i \quad i_t = (1 - r) i_i \quad (8.39)$$

Conviene tener en cuenta que en este caso la onda incidente también podría propagarse originalmente por la línea 2 hacia la línea 1. En ese caso la expresión del coeficiente de reflexión sería la opuesta de la anterior, es decir,

$$r' = \frac{Z_{c1} - Z_{c2}}{Z_{c1} + Z_{c2}} \quad (8.40)$$

Se puede observar que el cálculo de los coeficientes de reflexión sigue una ley muy simple. Cuando una onda incidente alcanza un punto de discontinuidad, el coeficiente de reflexión se obtiene a partir de la relación entre la diferencia y la suma de impedancias equivalentes, colocando en primer lugar en ambas expresiones la impedancia equivalente de la red en la que incide la onda viajera, vista desde el punto de discontinuidad

$$r' = \frac{Z_{eq} - Z_{c1}}{Z_{eq} + Z_{c1}} \quad (8.41)$$

■ Punto de bifurcación

El análisis del caso de la Figura 8.11 es similar al de los casos anteriores. Los coeficientes de reflexión y de transmisión se obtienen a partir de la impedancia equivalente que ve la onda incidente cuando alcanza un punto de discontinuidad y de la impedancia característica del medio en el que se propaga. Así, los coeficientes de reflexión y de transmisión para una onda que se propaga por la línea 2 cuando alcanza el punto de discontinuidad serán:

- Coeficiente de reflexión

$$r = \frac{Z_{c1} // Z_{c3} - Z_{c2}}{Z_{c1} // Z_{c3} + Z_{c2}} \quad (8.42)$$

- Coeficiente de transmisión

$$t = 1 + r = \frac{2Z_{c1} // Z_{c3}}{Z_{c1} // Z_{c3} + Z_{c2}} \quad (8.43)$$

siendo $Z_{c1} // Z_{c3}$ la impedancia equivalente que resulta del paralelo entre Z_{c1} y Z_{c3} .

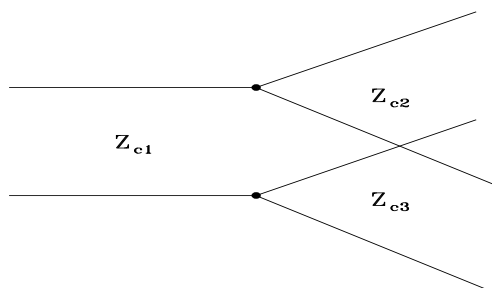


Figura 8.11. Punto de bifurcación.

Así pues, la onda de tensión que se refleja en la línea 2 y que se propaga en sentido opuesto a la onda incidente, y las ondas de tensión transmitidas a las líneas 1 y 3, vienen relacionadas con la onda de tensión incidente según las siguientes relaciones:

$$v_{r2} = r v_{i2} \quad v_{t1} = v_{t3} = t v_{i2} \quad (8.44)$$

De todos los posibles coeficientes de reflexión interesan algunos casos particulares, como los tres que se presentan a continuación.

- Línea en vacío: La onda incidente que alcanza un terminal de línea en circuito abierto o en vacío se encuentra con una impedancia de valor infinito, por lo que de la fórmula general (8.41) se obtiene $r = 1$ (8.45)

En consecuencia, con una línea en vacío se obtiene

$$v_r = v_i \quad i_r = -i_i \quad (8.46)$$

de donde se deduce

$$v_f = v_i + v_r = 2v_i \quad i_f = i_i + i_r = 0 \quad (8.47)$$

Según estos resultados, cuando una onda alcanza un terminal de línea en circuito abierto la onda de tensión incidente se dobla, lo que puede originar sobretensiones importantes, mientras que la onda de corriente se anula, como era lógico esperar.

- Línea en cortocircuito: La onda incidente que alcanza un terminal de línea en cortocircuito se encuentra con una impedancia de valor nulo, por lo que de la fórmula general (8.41) se obtiene $r = -1$ (8.48)

Con una línea en cortocircuito resulta por tanto

$$v_r = -v_i \qquad i_r = i_i \qquad (8.49)$$

de donde se deduce

$$v_f = v_i + v_r = 0 \qquad i_f = i_i + i_r = 2i_i \qquad (8.50)$$

Según estos resultados, cuando una onda alcanza un terminal de línea en cortocircuito la onda de corriente incidente se dobla, lo que puede originar sobrecorrientes importantes, mientras que la onda de tensión se anula, como era lógico esperar.

- Línea adaptada: Se dice que una línea está adaptada cuando la impedancia equivalente instalada en su terminal es igual a la impedancia característica. De la fórmula general (8.41) resulta

$$r = 0 \qquad (8.51)$$

Así pues, con una línea adaptada se tiene

$$v_r = 0 \qquad i_r = 0 \qquad (8.52)$$

de donde se deduce

$$v_f = v_i \qquad i_f = i_i \qquad (8.53)$$

Cuando una onda alcanza un terminal de línea adaptada, no se origina ninguna reflexión de ondas.

8.3.3.3 El diagrama reticular

Es una técnica que permite registrar todas las ondas viajeras que se van generando en una red y construir mediante superposición las ondas de tensión y de corriente originadas en los puntos de interés. La aplicación del método se presentará mediante dos ejemplos que también servirán para ilustrar sus ventajas y sus limitaciones.

Ejemplo 8.2:

Considérese el sistema de la Figura 8.12, que muestra la maniobra de conexión o energización de una línea aérea. Se desean analizar las tensiones que resultarán en los terminales de esta línea. El estudio se realizará suponiendo que la línea tiene un comportamiento ideal, y que la impedancia interna de la fuente es una resistencia R_0 .

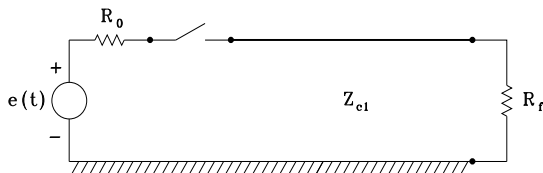


Figura 8.12. Ejemplo 2: Diagrama del sistema en estudio.

Una vez que se ha cerrado el interruptor, el esquema resultante de considerar el circuito equivalente transformado de cada componente del sistema es el que muestra la Figura 8.13.

En el instante en el que se cierra el interruptor la línea se encuentra totalmente relajada, por lo que las intensidades de las fuentes de su circuito equivalente son nulas. Así pues, el circuito equivalente del sistema en ese instante puede reducirse al que muestra la Figura 8.14. De este circuito se puede deducir la tensión que aparecerá en el terminal de la línea conectado a la fuente justo en el instante de cierre. La expresión de esta tensión es la siguiente:

$$V(s) = \frac{Z_c}{R_0 + Z_c} E(s)$$

En expresión temporal se puede anotar de la siguiente forma:

$$v(t) = \frac{Z_c}{R_0 + Z_c} e(t)$$

Esta expresión es general, es decir, se puede aplicar en todos los casos en los que se realiza una maniobra de conexión de una línea, y permite obtener la onda de tensión inicial que comenzará a propagarse por la línea hacia el otro terminal. Cuando esta onda alcance el extremo receptor se reflejará una onda que se propagará en sentido inverso, hacia el origen de la línea, donde esta onda reflejada sufrirá una nueva reflexión, que a su vez se propagará hacia el final de línea, donde se originará nuevamente una onda reflejada.

Así pues, en este sistema existen dos nudos en los que se originarán reflexiones de ondas, el origen y el final de la línea. Los coeficientes de reflexión en ambos nudos se obtienen de las siguientes expresiones:

- Origen:

$$r_o = \frac{R_0 - Z_c}{R_0 + Z_c}$$

- Final:

$$r_f = \frac{R_f - Z_c}{R_f + Z_c}$$

El proceso transitorio completo se puede entender mejor mediante el diagrama de la Figura 8.15. Supóngase que τ es el tiempo que necesita una onda para desplazarse de un extremo a otro de la línea. El diagrama muestra las primeras reflexiones de ondas de tensión que se van superponiendo en cada uno de los extremos de la línea. Debido a que el comportamiento del sistema es lineal se ha omitido el término $v(t)$, correspondiente a la onda que se propaga inicialmente, cuando se conecta la fuente de tensión. Así, por tanto, todos los términos del diagrama deben ir multiplicados por este término, y afectados del correspondiente retardo.

Las ondas de tensión que se van originando en ambos extremos de la línea serán las siguientes:

- Origen:

$$\begin{aligned} v(t)\epsilon(t) \\ v(t - 2\tau)\epsilon(t - 2\tau) (r_f + r_o r_f) &= v(t - 2\tau)\epsilon(t - 2\tau) (1 + r_o)r_f \\ v(t - 4\tau)\epsilon(t - 4\tau) (r_o r_f^2 + r_o^2 r_f^2) &= v(t - 4\tau)\epsilon(t - 4\tau) (1 + r_o)r_o r_f^2 \end{aligned}$$

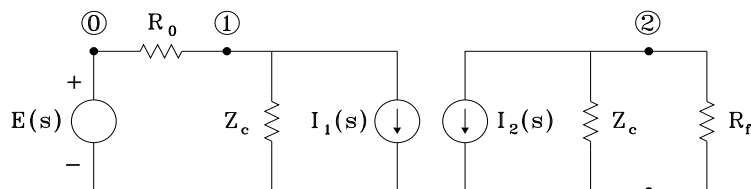


Figura 8.13. Ejemplo 2: Esquema equivalente para el cálculo de procesos transitorios.

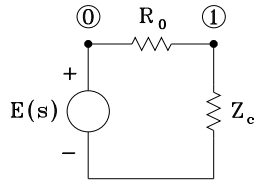


Figura 8.14. Ejemplo 2: Esquema equivalente en el instante de realizarse la maniobra.

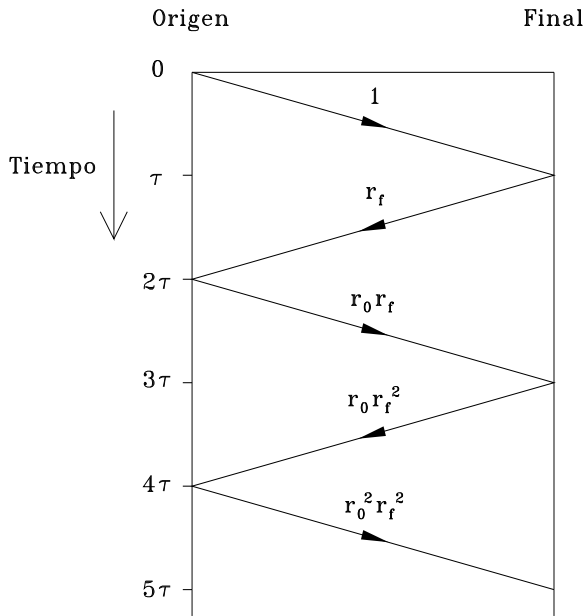


Figura 8.15. Ejemplo 2: Diagrama reticular.

■ Final:

$$\begin{aligned}
 &v(t - \tau)\epsilon(t - \tau) (1 + r_f) \\
 &v(t - 3\tau)\epsilon(t - 3\tau) (r_0 r_f + r_0 r_f^2) = v(t - 3\tau)\epsilon(t - 3\tau) (1 + r_f)r_0 r_f \\
 &v(t - 5\tau)\epsilon(t - 5\tau) (r_0^2 r_f^2 + r_0^2 r_f^3) = v(t - 5\tau)\epsilon(t - 5\tau) (1 + r_f)r_0^2 r_f^2
 \end{aligned}$$

siendo $\epsilon(t - n\tau)$ el escalón unidad afectado por un retardo $n\tau$. Se puede observar que, excepto el primer término de la tensión en el origen, todos los términos de ondas de tensión van acompañados de un escalón unidad retardado, según el instante en el que se origina esa onda. La tensión resultante en cada terminal de la línea será el resultado de superponer todas las ondas de tensión que se van originando.

Ejemplo 8.3:

La Figura 8.16 muestra un sistema formado por una línea aérea y un cable aislado, ambos ideales. Se desea analizar la tensión que se originará en los nudos 1, 2 y 3 después de realizar la maniobra de conexión. Se supone que el tiempo de propagación de ondas en la línea es el doble que en el cable. El modelo de un cable aislado es el mismo que el de una línea aérea, pero con valores distintos para la impedancia característica y la velocidad de propagación de ondas.

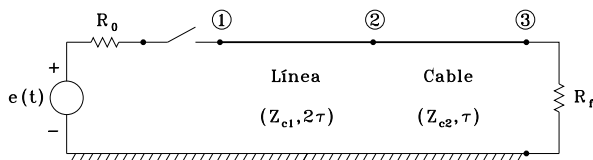


Figura 8.16. Ejemplo 3: Diagrama del sistema en estudio.

En el análisis de este caso es necesario tener en cuenta que se originarán reflexiones en tres puntos, los nudos 1, 2 y 3, y que en el nudo 2 el coeficiente de reflexión dependerá del sentido de propagación de la onda incidente. Por lo que respecta a la onda de tensión que se originará en el momento de conectar la fuente de tensión, se ha visto que se obtiene de una expresión como la siguiente:

$$v(t) = \frac{Z_{c1}}{R_0 + Z_{c1}} e(t)$$

Los coeficientes de reflexión en los tres nudos tienen las siguientes expresiones:

- Nudo 1

$$r_1 = \frac{R_0 - Z_{c1}}{R_0 + Z_{c1}}$$

- Nudo 2

$$r_{2+} = \frac{Z_{c2} - Z_{c1}}{Z_{c2} + Z_{c1}}$$

$$r_{2-} = \frac{Z_{c1} - Z_{c2}}{Z_{c1} + Z_{c2}}$$

donde r_{2+} es el coeficiente de reflexión para las ondas que se propagan de la línea al cable, y r_{2-} es el coeficiente de reflexión para las ondas que se propagan del cable a la línea.

- Nudo 3

$$r_3 = \frac{R_f - Z_{c2}}{R_f + Z_{c2}}$$

Si τ es el tiempo de propagación en el cable, el diagrama reticular resultante, considerando sólo las primeras reflexiones, es el que muestra la Figura 8.17. En este diagrama se han empleado las siguientes relaciones:

$$r_{2+} = r_2 \qquad r_{2-} = -r_2$$

Teniendo en cuenta que todos los términos van multiplicados por $v(t)$ y los retardos que afectan a cada término, la expresión de la tensión en cada nudo será:

- Nudo 1

$$v_1(t) = v(t) + v(t - 4\tau)\epsilon(t - 4\tau)(1 + r_1)r_2 + v(t - 6\tau)\epsilon(t - 6\tau)(1 + r_1)(1 - r_2^2)r_3 + \dots$$

- Nudo 2

$$v_2(t) = v(t - 2\tau)\epsilon(t - 2\tau)(1 + r_2) + v(t - 4\tau)\epsilon(t - 4\tau)(1 - r_2^2)r_3 + \dots$$

- Nudo 3

$$v_3(t) = v(t - 3\tau)\epsilon(t - 3\tau)(1 + r_2)(1 + r_3) - v(t - 5\tau)\epsilon(t - 5\tau)(1 + r_2)(1 + r_3)r_2r_3 + \dots$$

Es evidente que el diagrama reticular empieza a complicarse al cabo de unas pocas reflexiones. Esta técnica es muy útil para introducir el análisis de componentes con parámetros distribuidos en régimen transitorio, pero su aplicación está limitada a ejemplos muy simples o aquellos casos en los que sólo son de interés las primeras ondas generadas.

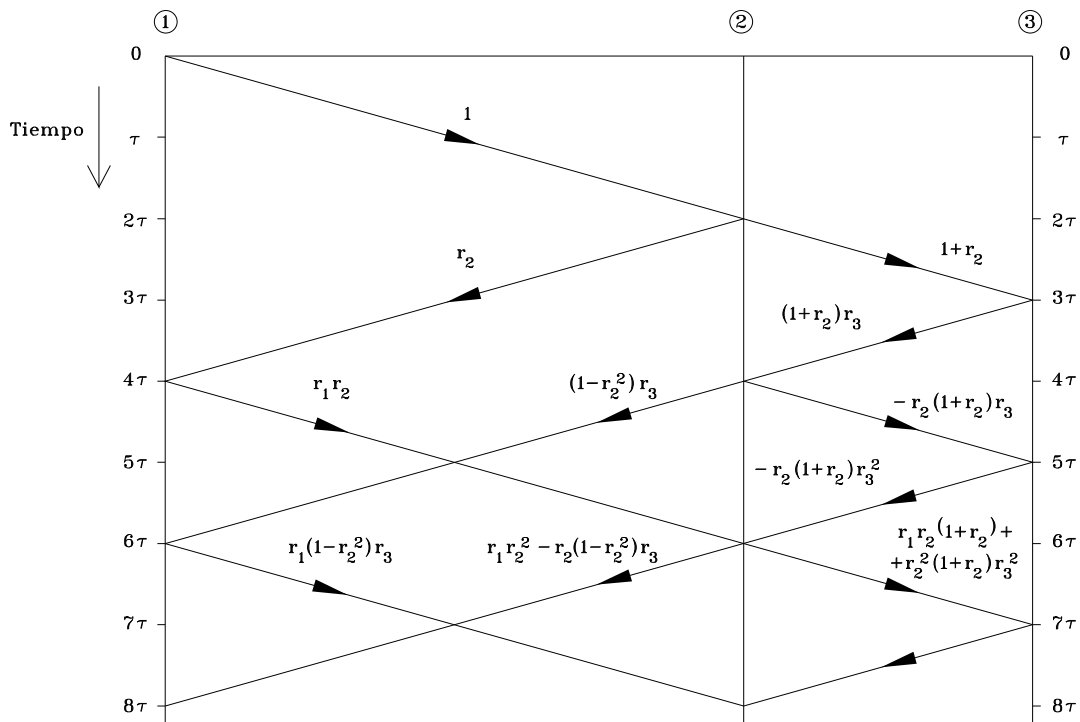


Figura 8.17. Ejemplo 3: Diagrama reticular.

En los apartados anteriores se han presentado las técnicas de análisis basadas en la transformada de Laplace y en el diagrama reticular. La aplicación de este último se ha limitado a redes cuyos únicos elementos pasivos son la resistencia y la línea ideal. Por otra parte, el análisis de sistemas con una o varias líneas mediante la transformada de Laplace puede ser muy complejo y tedioso. A continuación, se verá cómo es posible desarrollar un método híbrido mezclando ambas técnicas, y aprovechar las ventajas de cada una.

Ejemplo 8.4:

Se desea obtener la tensión que se originará en el extremo receptor de la línea que muestra la Figura 8.18. Se analizará la influencia que la resistencia instalada en serie con el banco de condensadores tiene en la tensión resultante de la maniobra. La línea se representará mediante un modelo monofásico ideal con parámetros distribuidos. La fuente de tensión presenta una onda en escalón y una impedancia interna, representada por una resistencia serie R_0 .

Los parámetros del sistema son los siguientes:

Fuente:	Tensión continua	E	=	1 V
	Resistencia interna	R_0	=	300 Ω
Línea aérea:	Resistencia unitaria	R	=	0 (Línea ideal)
	Impedancia característica	Z_c	=	300 Ω
	Velocidad de propagación	v	=	300000 km/s
	Longitud	l	=	60 km
Condensador:	Resistencia	R_f	=	Variable
	Capacidad	C_f	=	5 μF

Se ha visto que la onda de tensión que comienza a propagarse por la línea en el momento de realizarse la maniobra de conexión tiene la siguiente expresión transformada:

$$V(s) = \frac{Z_c}{R_0 + Z_c} E(s)$$

En este ejemplo la tensión de la fuente es un escalón de valor unidad; puesto que la resistencia interna R_0 tiene el mismo valor que la resistencia característica de la línea Z_c , queda la siguiente expresión de la onda de tensión que se propagará por la línea:

$$V(s) = \frac{1}{2s}$$

El análisis teórico de este caso se puede realizar siguiendo un procedimiento similar al empleado en el apartado 8.3.2.3, con el Ejemplo 1; de hecho el diagrama reticular y las expresiones resultantes serán las mismas, bastará con tener en cuenta las expresiones particulares de los coeficientes de reflexión y de la onda de tensión que se propaga inicialmente, $V(s)$. Para la red de la figura se tienen los siguientes coeficientes de reflexión:

- Origen:

$$r_1 = \frac{R_0 - Z_c}{R_0 + Z_c} = 0$$

- Final:

$$r_2 = \frac{(R_f + 1/sC_f) - Z_c}{(R_f + 1/sC_f) + Z_c} = 1 - \frac{2sZ_cC_f}{(R_f + 1/sC_f) + Z_c}$$

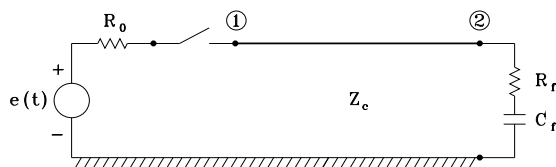


Figura 8.18. Ejemplo 4: Diagrama del sistema en estudio.

La expresión general de la tensión en final de línea se puede obtener fácilmente a partir del diagrama reticular (ver Ejemplo 2). Teniendo en cuenta que $r_1 = 0$ queda

$$V_2(s) = V(s)(1 + r_2) e^{-\tau s}$$

siendo τ el tiempo de propagación de ondas en la línea.

Así pues, la tensión resultante en el extremo receptor de la línea estará constituida por la onda incidente y la primera onda reflejada, ya que no se originará ninguna reflexión adicional de ondas debido a que el coeficiente de reflexión es nulo en el origen.

Sustituyendo la expresión de $V(s)$ y r_2 en la expresión de la tensión V_2 se obtiene

$$V_2(s) = \frac{1}{2s} \left[2 - \frac{2sZ_c C_f}{1 + s(Z_c + R_f)C_f} \right] e^{-\tau s} = \left[\frac{1}{s} - \frac{Z_c}{Z_c + R_f} \frac{1}{s + 1/\tau_f} \right] e^{-\tau s}$$

donde

$$\tau_f = (Z_c + R_f)C_f$$

La antitransformada de esta expresión es

$$v_2(t) = \left[1 - \frac{Z_c}{Z_c + R_f} e^{-(t-\tau)/\tau_f} \right] \epsilon(t - \tau)$$

Esta expresión es válida en caso de disponer en final de línea una capacidad pura, $R_f = 0$,

$$v_2(t) = [1 - e^{-(t-\tau)/\tau_f}] \epsilon(t - \tau)$$

siendo ahora $\tau_f = Z_c R_f$.

En ambas expresiones se distinguen dos términos bien diferenciados, una tensión en escalón y una exponencial decreciente cuyo valor inicial depende de los valores de Z_c y R_f . La Figura 8.19 muestra las curvas de tensión obtenidas para tres valores diferentes de R_f .

Figura 8.19. Ejemplo 4: Tensión resultante en final de línea en función de R_f .

A partir de la figura es posible deducir el comportamiento de este sistema:

- La tensión en final de línea será nula mientras no llegue la primera onda de tensión; una vez que ésta alcanza el extremo receptor la tensión en este punto puede variar bruscamente, dependiendo el valor del salto de tensión de la resistencia R_f ; cuanto más grande sea el valor de esta resistencia más grande será la tensión que aparecerá inicialmente en final de línea. De la expresión de $v_2(t)$ se deduce que para $t = \tau$ el valor inicial queda como sigue:

$$1 - \frac{Z_c}{Z_c + R_f} = \frac{R_f}{Z_c + R_f}$$

Para una capacidad pura, $R_f = 0$, la tensión no sufrirá ninguna variación brusca y será nula en el momento en que llegue la onda incidente proveniente del origen.

- La evolución posterior de la tensión dependerá de la constante de tiempo τ_f ; el valor final alcanzará el de la fuente de tensión, y en ningún caso se producirá oscilación.

8.3.4. Técnicas numéricas

8.3.4.1 Introducción. La regla trapezoidal

Las técnicas presentadas en los dos apartados anteriores tienen limitaciones evidentes cuando se trata de analizar procesos transitorios en sistemas de gran tamaño o con elementos no lineales. En esta sección se presentan los fundamentos del cálculo numérico de procesos transitorios mediante el algoritmo de Dommel, que es la solución implementada en la mayoría de programas dedicados al cálculo de transitorios electromagnéticos en sistemas eléctricos de energía. El método desarrollado por H. W. Dommel se basa en la aplicación de la regla trapezoidal, la cuál es empleada en la obtención de los modelos discretos de los elementos de un circuito representados con parámetros concentrados, y el método de Bergeron, que se aplica en la obtención del modelo discreto de una línea ideal, para la que se emplea una representación con parámetros distribuidos.

Supóngase que la ecuación diferencial que caracteriza el comportamiento dinámico de un componente eléctrico se expresa de la siguiente forma:

$$\frac{dy}{dt} = x(t) \tag{8.54}$$

En notación integral esta ecuación se puede expresar como sigue:

$$y(t) = y(0) + \int_0^t x(z) dz \tag{8.55}$$

La Figura 8.20 muestra el principio en el que se basa la regla trapezoidal, que permite aproximar el valor de la integral sumando las áreas de los trapecios correspondientes a cada paso de integración (ver Figura 8.20.b). Suponiendo que ha sido calculado el valor de y en el instante t_{n-1} , el valor en el instante t_n se obtiene mediante la siguiente expresión:

$$y_n = y_{n-1} + \frac{x_{n-1} + x_n}{2} (t_n - t_{n-1}) \tag{8.56}$$

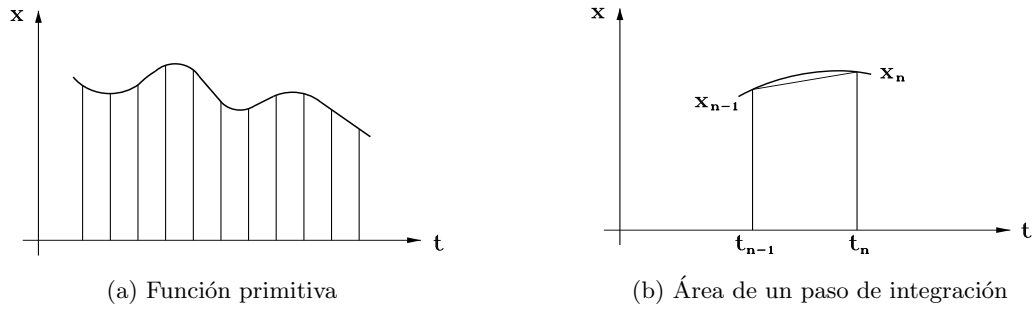


Figura 8.20. Aproximación de una integral mediante la regla trapezoidal.

Si la aproximación de la curva se realiza mediante un paso de integración constante, $(t_n - t_{n-1}) = \Delta t, \forall n$, el proceso de cálculo se puede expresar de la siguiente forma:

$$y(t) = y(t - \Delta t) + \frac{\Delta t}{2} [x(t) + x(t - \Delta t)] \tag{8.57}$$

8.3.4.2 Circuitos equivalentes de los elementos básicos

A continuación, se resume la aplicación de la regla trapezoidal y del método de Bergeron en la deducción de los circuitos equivalentes de los elementos básicos.

1. *Resistencia:* La ecuación en régimen transitorio de una resistencia es la siguiente:

$$v_k(t) - v_m(t) = Ri_{km}(t) \tag{8.58}$$

De la aplicación de la regla trapezoidal resulta la misma expresión ya que el comportamiento de una resistencia no implica ninguna relación integro-diferencial entre sus variables.

2. *Inductancia:* La ecuación en régimen transitorio de una inductancia es la siguiente:

$$v_k(t) - v_m(t) = v_{km}(t) = L \frac{di_{km}(t)}{dt} \tag{8.59}$$

De la aplicación de la regla trapezoidal resulta la siguiente expresión:

$$i_{km}(t) = i_{km}(t - \Delta t) + \frac{\Delta t}{2L} [v_{km}(t) + v_{km}(t - \Delta t)] \tag{8.60}$$

El lado derecho de esta ecuación se puede reordenar quedando

$$i_{km}(t) = \frac{\Delta t}{2L} v_{km}(t) + \left[\frac{\Delta t}{2L} v_{km}(t - \Delta t) + i_{km}(t - \Delta t) \right] \tag{8.61}$$

El segundo término de esta expresión es conocido como “término de historia”. Si se denota

$$I_{km}(t) = \left[\frac{\Delta t}{2L} v_{km}(t - \Delta t) + i_{km}(t - \Delta t) \right] \tag{8.62}$$

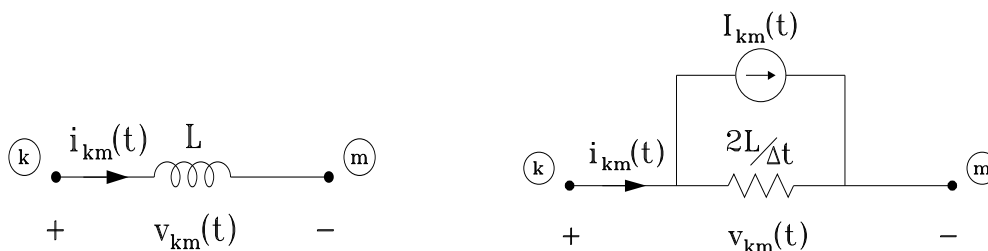


Figura 8.21. Circuito equivalente de una inductancia.

quedará la siguiente ecuación para la inductancia

$$i_{km}(t) = \frac{\Delta t}{2L} v_{km}(t) + I_{km}(t) \quad (8.63)$$

La Figura 8.21 muestra el modelo discreto que corresponde a la relación entre tensiones y corrientes en una inductancia.

3. *Capacidad*: La ecuación en régimen transitorio de una capacidad es la siguiente:

$$i_{km}(t) = C \frac{d}{dt} [v_k(t) - v_m(t)] = C \frac{dv_{km}(t)}{dt} \quad (8.64)$$

De la aplicación de la regla trapezoidal resulta la siguiente expresión:

$$v_{km}(t) = v_{km}(t - \Delta t) + \frac{\Delta t}{2C} [i_{km}(t) + i_{km}(t - \Delta t)] \quad (8.65)$$

Esta ecuación también puede ser expresada de la siguiente forma:

$$i_{km}(t) = \frac{2C}{\Delta t} v_{km}(t) - \left[\frac{2C}{\Delta t} v_{km}(t - \Delta t) + i_{km}(t - \Delta t) \right] \quad (8.66)$$

El segundo término de esta ecuación es conocido como “término de historia”. Si se expresa

$$I_{km}(t) = - \left[\frac{2C}{\Delta t} v_{km}(t - \Delta t) + i_{km}(t - \Delta t) \right] \quad (8.67)$$

quedará la siguiente ecuación para la capacidad:

$$i_{km}(t) = \frac{2C}{\Delta t} v_{km}(t) + I_{km}(t) \quad (8.68)$$

La Figura 8.22 muestra el modelo discreto que resulta de la aplicación de la regla trapezoidal a la ecuación de una capacidad.

4. *Línea ideal*: En secciones anteriores se ha visto que las ecuaciones de una línea aérea ideal se pueden expresar de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} \frac{\partial v(x,t)}{\partial x} &= -L \frac{\partial i(x,t)}{\partial t} \\ \frac{\partial i(x,t)}{\partial x} &= -C \frac{\partial v(x,t)}{\partial t} \end{aligned}$$

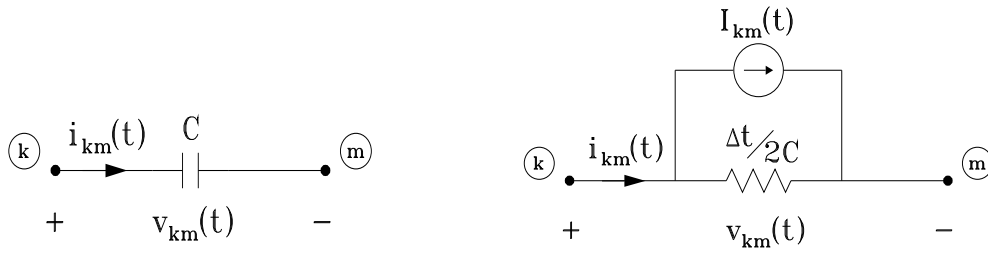


Figura 8.22. Circuito equivalente de una capacidad.

donde L y C son la inductancia y la capacidad por unidad de longitud, y x es la distancia respecto al origen de la línea.

En el apartado anterior se ha visto que la solución general de estas ecuaciones se puede expresar de la siguiente forma:

$$v(x, t) = f_1(x - vt) + f_2(x + vt)$$

$$i(x, t) = \frac{f_1(x - vt) - f_2(x + vt)}{Z_c}$$

siendo v la velocidad de propagación de ondas en la línea y Z_c la impedancia característica.

A partir de esta solución se deduce la siguiente forma:

$$v(x, t) + Z_c i(x, t) = 2f_1(x - vt) \tag{8.69}$$

Se observa que el término $v + Z_c i$ es constante para todos los pares de valores (x, t) tales que la cantidad $x - vt$ permanece inalterada. Si τ es el tiempo de propagación de ondas entre los extremos de una línea, entonces para cualquier onda la cantidad $v + Z_c i$ en un extremo de la línea será la misma que en el otro extremo medida un intervalo de tiempo τ antes.

Si se denotan como k y m los nudos terminales de una línea, para una onda que se desplace desde k hacia m se tiene

$$v(m, t) + Z_c i(m, t) = v(k, t - \tau) + Z_c i(k, t - \tau) \tag{8.70}$$

Si se realiza el cambio de variables que se indica en la Figura 8.23:

$$\begin{aligned} v_k(t) &= v(k, t) & i_{km}(t) &= +i(k, t) \\ v_m(t) &= v(m, t) & i_{mk}(t) &= -i(m, t) \end{aligned}$$

se obtiene la siguiente relación:

$$v_m(t) - Z_c i_{mk}(t) = v_k(t - \tau) + Z_c i_{km}(t - \tau) \tag{8.71}$$

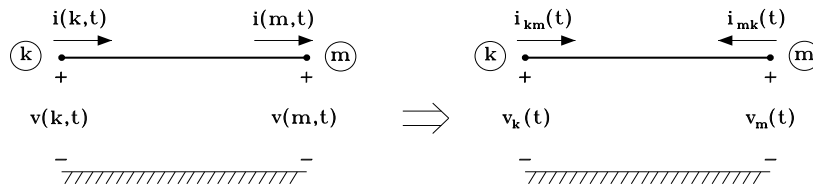


Figura 8.23. Cambio de notación en las variables de la línea.

Realizando un razonamiento similar cuando la onda se propaga desde el terminal m hacia el terminal k resulta

$$v_k(t) - Z_c i_{km}(t) = v_m(t - \tau) + Z_c i_{mk}(t - \tau) \tag{8.72}$$

De ambas relaciones se deducen las siguientes expresiones:

$$\begin{aligned} i_{km}(t) &= \frac{v_k(t)}{Z_c} - \left[\frac{v_m(t - \tau)}{Z_c} + i_{mk}(t - \tau) \right] \\ i_{mk}(t) &= \frac{v_m(t)}{Z_c} - \left[\frac{v_k(t - \tau)}{Z_c} + i_{km}(t - \tau) \right] \end{aligned} \tag{8.73}$$

Empleando la notación

$$\begin{aligned} I_{km}(t) &= - \left[\frac{v_m(t - \tau)}{Z_c} + i_{mk}(t - \tau) \right] \\ I_{mk}(t) &= - \left[\frac{v_k(t - \tau)}{Z_c} + i_{km}(t - \tau) \right] \end{aligned} \tag{8.74}$$

las ecuaciones de la línea quedan finalmente de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} i_{km}(t) &= \frac{v_k(t)}{Z_c} + I_k(t) \\ i_{mk}(t) &= \frac{v_m(t)}{Z_c} + I_m(t) \end{aligned} \tag{8.75}$$

De estas ecuaciones se deduce el circuito equivalente que muestra la Figura 8.24.

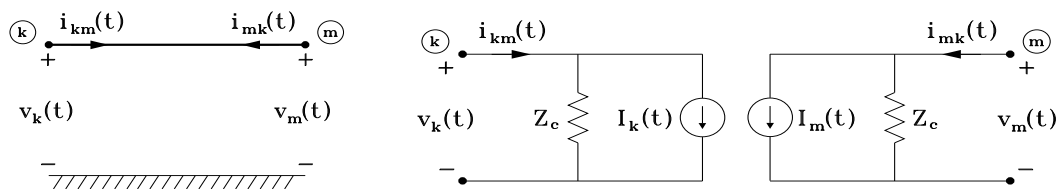


Figura 8.24. Circuito equivalente de una línea aérea.

8.3.4.3 Cálculo de procesos transitorios en redes lineales

Los circuitos equivalentes obtenidos en la sección anterior presentan ventajas evidentes: cualquier circuito equivalente consta de resistencias, cuyo valor se mantiene constante durante el cálculo del proceso transitorio si el paso de integración Δt es fijo, y fuentes de corriente, cuyo valor ha de ser actualizado en cada paso de integración. Esta representación permite resolver las ecuaciones de una red durante el proceso transitorio de una forma similar a la que se emplearía con una red puramente resistiva con todos sus elementos constantes y en la que sólo es necesario variar las fuentes de corriente en cada paso de integración.

A) Ecuaciones nodales de una red lineal

Considérese el caso de la Figura 8.25, un nudo de red al que se encuentran conectados todos los elementos básicos, más una fuente de corriente cuyo valor es conocido en todo momento. La ecuación de corriente de este nudo se puede expresar de la siguiente forma:

$$i_{12}(t) + i_{13}(t) + i_{14}(t) + i_{15}(t) = i_1(t) \quad (8.76)$$

Teniendo en cuenta el circuito equivalente de cada componente, queda la siguiente ecuación para cada rama:

$$\begin{aligned} i_{12}(t) &= \frac{1}{R} v_{12}(t) \\ i_{13}(t) &= \frac{\Delta t}{2L} v_{13}(t) + I_{13}(t) & I_{13}(t) &= \frac{\Delta t}{2L} v_{13}(t - \Delta t) + i_{13}(t - \Delta t) \\ i_{14}(t) &= \frac{2C}{\Delta t} v_{14}(t) + I_{14}(t) & I_{14}(t) &= -\frac{2C}{\Delta t} v_{14}(t - \Delta t) - i_{14}(t - \Delta t) \\ i_{15}(t) &= \frac{1}{Z_c} v_1(t) + I_{11}(t) & I_{11}(t) &= -\frac{1}{Z_c} v_5(t - \tau) - i_{51}(t - \tau) \end{aligned} \quad (8.77)$$

Teniendo en cuenta que

$$v_k(t) - v_m(t) = v_{km}(t)$$

al sustituir todas las relaciones anteriores en (8.76) resulta

$$\begin{aligned} \left[\frac{1}{R} + \frac{\Delta t}{2L} + \frac{2C}{\Delta t} + \frac{1}{Z_c} \right] v_1(t) - \frac{1}{R} v_2(t) - \frac{\Delta t}{2L} v_3(t) - \frac{2C}{\Delta t} v_4(t) = \\ = i_1(t) - I_{13}(t) - I_{14}(t) - I_{11}(t) \end{aligned} \quad (8.78)$$

Aplicando el mismo procedimiento para cada nudo, las ecuaciones de la red completa se pueden expresar empleado notación matricial

$$[G][v(t)] = [i(t)] - [I(t)] \quad (8.79)$$

siendo

G la matriz de conductancias nodales,

$v(t)$ el vector de tensiones nodales,

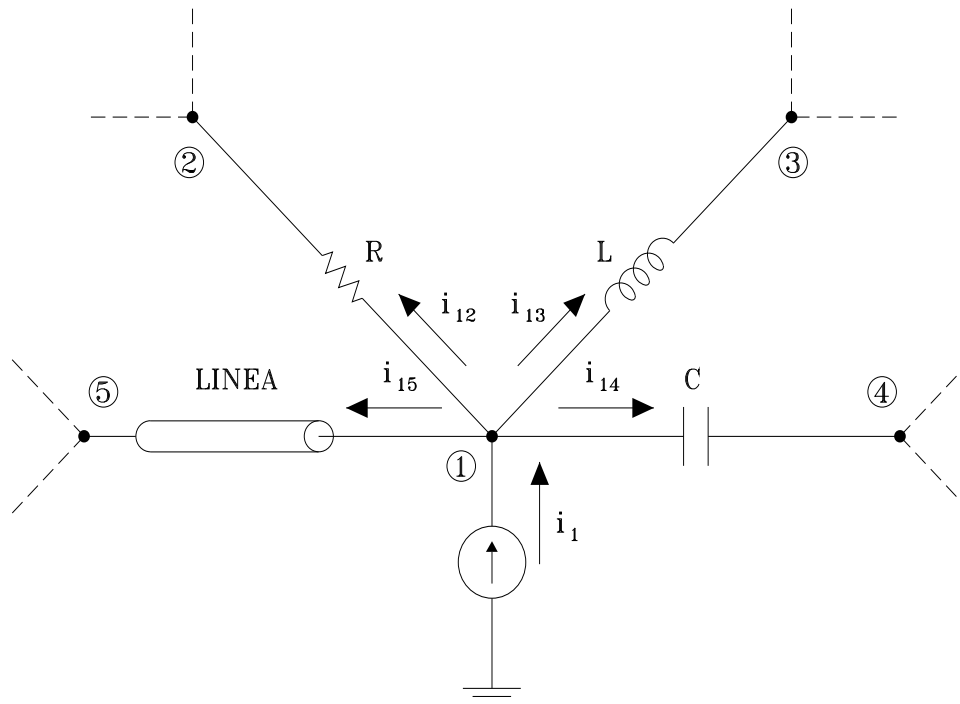


Figura 8.25. Nudo genérico de una red de potencia lineal.

$i(t)$ el vector de fuentes de corriente,

$I(t)$ el vector de fuentes de corriente que representan la historia previa en la red.

Puesto que Δt es constante, sólo el lado derecho de la ecuación (8.79) ha de ser calculado en cada paso del proceso transitorio, ya que los elementos de G permanecen constantes.

En general la red tiene fuentes de tensión conectadas entre tierra y algún nudo de la red, por lo que existen algunos nudos cuya tensión es conocida. En tal caso se puede reducir el orden de las ecuaciones nodales de forma que sólo aparezcan en el vector $v(t)$ aquellos nudos cuya tensión ha de ser calculada. Si se emplea la letra A para designar el conjunto de nudos con tensión desconocida y la letra B para el conjunto de nudos de tensión conocida, se puede hacer

$$\begin{bmatrix} G_{AA} & G_{AB} \\ G_{BA} & G_{BB} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_A(t) \\ v_B(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} i_A(t) \\ i_B(t) \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} I_A(t) \\ I_B(t) \end{bmatrix} \quad (8.80)$$

Después de eliminar la parte B del vector de incógnitas, el sistema de ecuaciones queda de la siguiente forma:

$$[G_{AA}][v_A(t)] = [i_A(t)] - [I_A(t)] - [G_{AB}][v_B(t)] \quad (8.81)$$

La matriz de conductancias de nudo es simétrica, y ya se ha dicho que también es constante, ya que la integración con la regla trapezoidal se realiza con un paso de integración constante.

B) *Proceso de cálculo*

La solución de un proceso transitorio puede obtenerse empleando el siguiente procedimiento general:

1. Antes de empezar el cálculo del proceso transitorio:
 - a) Se calculan las submatrices $[G_{AA}]$ y $[G_{AB}]$, empleando el método usual para el cálculo de matrices de admitancias nodales en redes lineales y sin acoplamientos.
 - b) Se triangulariza la matriz $[G_{AA}]$. Este paso se debe efectuar antes de iniciar el cálculo del régimen transitorio y cada vez que se origine una maniobra o conmutación que altere la topología de la red.
2. En cada paso del proceso transitorio:
 - a) Se calcula el vector de intensidades, lo que implica la actualización de las fuentes de corriente que representan la historia previa en cada componente.
 - b) Se obtiene el vector de tensiones de nudo $[v_A(t)]$ mediante sustitución hacia atrás, usando la matriz triangularizada en el paso 1.

La Figura 8.26 presenta gráficamente el procedimiento descrito; en cada paso de integración se han de repetir dos procedimientos: solución hacia adelante para obtener el vector de excitación, y sustitución hacia atrás para calcular el vector $[v_A(t)]$.

C) *Incorporación de interruptores*

La estructura de una red eléctrica puede ser cambiada mediante maniobras con interruptores o por la conmutación de semiconductores; el cálculo de un proceso transitorio implica en muchos casos la incorporación de estos componentes en las ecuaciones nodales. Asumiendo un comportamiento perfectamente ideal –resistencia nula en estado cerrado o de conducción, y conductancia nula en estado abierto o de bloqueo– cada maniobra o conmutación puede suponer la aparición o desaparición de un nudo en la red, hecho que tiene que reflejarse en las ecuaciones nodales.

Existen varias formas de incorporar este hecho. La más simple consiste en aproximar el funcionamiento en estado cerrado o de conducción mediante una resistencia muy pequeña,

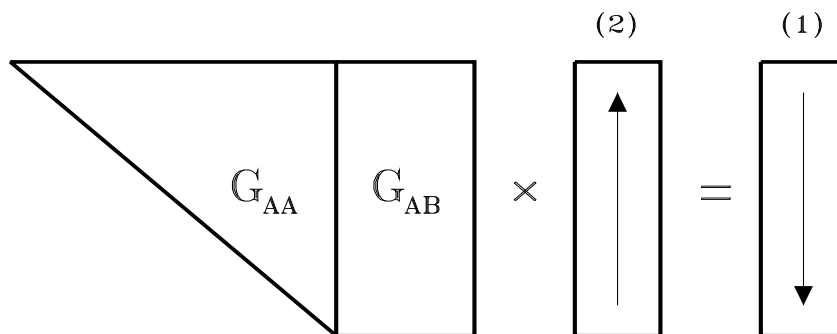


Figura 8.26. Solución de las ecuaciones nodales mediante triangularización.

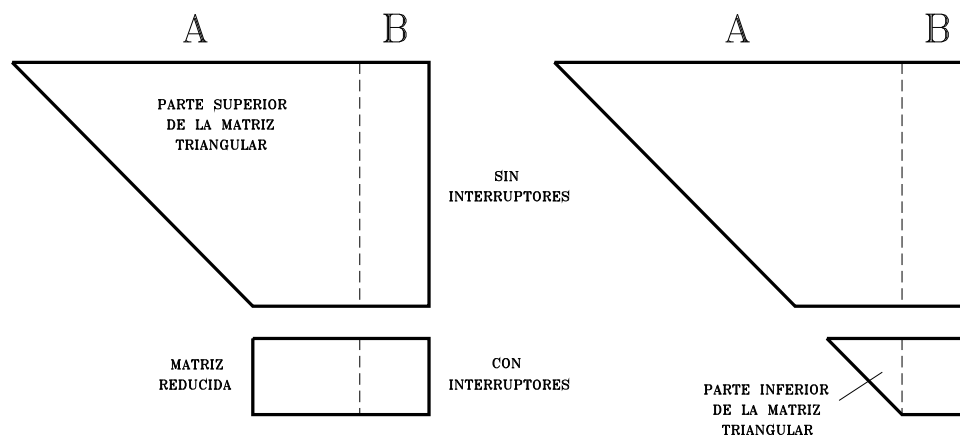


Figura 8.27. Incorporación de cambios debidos a interruptores.

y en estado abierto o de bloqueo mediante una resistencia muy grande. Una segunda solución consiste en cambiar las conexiones en la red cada vez que un interruptor cambia su estado. Esto implica recalcularse las matrices $[G_{AA}]$ y $[G_{AB}]$ cada vez que se produce un cambio. Sin embargo, no es necesaria la triangularización total de las matrices. Si los nudos con interruptores son numerados en último lugar, la factorización triangular sólo se aplica inicialmente en aquellos nudos que no están conectados a un interruptor. Siempre que se produce un cambio en el estado de un interruptor, la matriz reducida, aquella que incluye los nudos conectados a un interruptor, es modificada:

- si el interruptor que se encuentra entre los nudos k y m está cerrado, las dos filas y columnas, k y m , se juntan en una sola;
- si el interruptor está abierto, no se modifica la matriz.

Una vez que han sido implementados los cambios debidos a los interruptores, se termina de triangularizar toda la matriz. La Figura 8.27 ilustra gráficamente este método.

8.3.4.4 Oscilaciones numéricas

Las secciones precedentes han presentado alguna de las ventajas del algoritmo de Dommel: el empleo de un paso de integración constante origina una matriz de conductancias constante que ha de ser calculada y triangularizada una sola vez. Sin embargo, el empleo de un Δt fijo también presenta limitaciones: el usuario debe escoger el paso de integración más adecuado ya que su valor determina la máxima frecuencia que puede ser simulada, por lo que se ha de conocer por adelantado la gama de frecuencias del proceso transitorio a simular.

La regla trapezoidal es un método de resolución de ecuaciones diferenciales de baja precisión, que sin embargo es numéricamente estable; esto es, un paso de integración demasiado grande puede originar errores o desviaciones muy grandes en la solución numérica con respecto a la solución correcta pero no provocará una divergencia respecto a ésta.

En muchas aplicaciones, como en algunos procesos transitorios originados por una maniobra, la regla trapezoidal actúa como diferenciador e introduce lo que se conoce como oscilaciones numéricas sostenidas. Considérese el caso que muestra la Figura 8.28, la desconexión de una red con la interrupción de la corriente en un corte inductivo. Las soluciones correctas de la corriente y la tensión en la inductancia son las que se muestran en la figura con trazo grueso. Sin embargo, la solución que se obtiene de aplicar la regla trapezoidal para la tensión entre los terminales de la inductancia es la que aparece con trazo discontinuo. Es un caso de oscilación numérica producida por un cambio brusco en la derivada de una corriente.

Este comportamiento se puede comprender si se analiza la ecuación de una inductancia después de aplicar la regla trapezoidal. A partir de las ecuaciones que se obtuvieron en el apartado 8.3.4.2, la ecuación de una inductancia se puede expresar de la siguiente forma:

$$v_L(t) = -v_L(t - \Delta t) + \frac{2L}{\Delta t}[i_L(t) - i_L(t - \Delta t)] \tag{8.82}$$

Si se admite que la solución $v_L(t - \Delta t)$ es correcta antes de producirse la interrupción total, instante 1 en Figura 8.28, la solución en los siguientes instantes, cuando $i_L(t - \Delta t)$ e $i_L(t)$ sean nulas, cumplirá

$$v_L(t) = -v_L(t - \Delta t) \tag{8.83}$$

Es decir, la tensión a través de la inductancia comienza a oscilar alrededor de cero (ver Figura 8.28), con el valor de la tensión que existía en el momento en que la corriente se anuló.

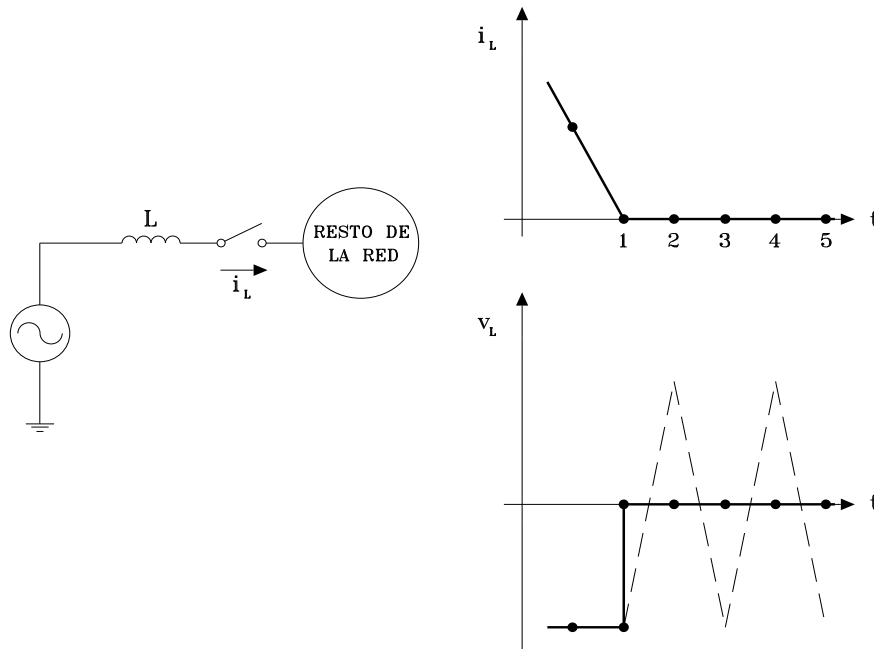


Figura 8.28. Interrupción de corriente en un circuito inductivo.

Varias técnicas han sido propuestas para controlar o reducir estas oscilaciones numéricas:

- regla trapezoidal con amortiguamiento;
- empleo de circuitos *snubber* (circuitos RC);
- ajuste crítico del amortiguamiento;
- interpolación lineal.

El amortiguamiento puede ser obtenido internamente, mediante la modificación de la regla trapezoidal, o bien externamente, mediante la inserción de resistencias en paralelo con las inductancias o en serie con las capacidades. La Figura 8.29 muestra la aplicación de esta técnica en la interrupción de corriente inductiva.

El empleo de circuitos *snubber* en paralelo con los interruptores es una técnica que tiene una ventaja adicional, ya que este tipo de circuitos es empleado en muchas aplicaciones reales para proteger los semiconductores frente a sobretensiones. La Figura 8.30 presenta un caso muy simple, un circuito rectificador monofásico de media onda. Los oscilogramas sin y con el circuito *snubber* en paralelo con el diodo muestran la limitación de la regla trapezoidal y el efecto de esta técnica. La selección de los parámetros del circuito *snubber* se puede realizar aplicando reglas muy simples:

$$Z_{snubber} > Z_{carga} \quad (RC)_{snubber} > \Delta t \quad (8.84)$$

8.3.4.5 Elementos no lineales

El método original de Dommel sólo podía ser aplicado en redes lineales. Sin embargo, muchos componentes de un sistema de potencia, por ejemplo transformadores o pararrayos, tienen un comportamiento no lineal. Varias modificaciones del esquema original han sido propuestas para la resolución de redes no lineales. Algunas de estas modificaciones se basan en la aproximación por tramos de la característica no lineal o en el método de compensación.

Con el método de compensación un componente no lineal es representado como una inyección de corriente que se superpone a la solución de la red lineal. La Figura 8.31 muestra los principios de este esquema.

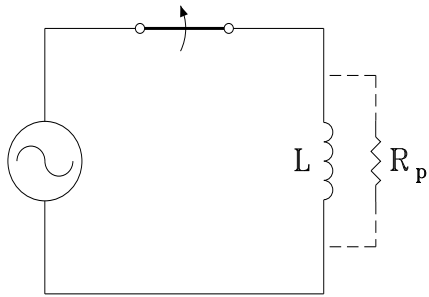
Una vez la solución de la red sin el componente no lineal ha sido calculada, la contribución de este componente se obtiene a partir de la siguiente ecuación:

$$v_{km}(t) = v_{km(o)}(t) - r_{Thev} i_{km}(t) \quad (8.85)$$

y de su característica no lineal

$$v_{km} = f(i_{km}, di_{km}/dt, t, \dots) \quad (8.86)$$

donde $v_{km(o)}$ es la tensión entre los nudos k y m sin el componente no lineal, mientras r_{Thev} es la resistencia equivalente Thevenin. Para resolver este paso es necesaria la aplicación de un método iterativo, como el de Newton.

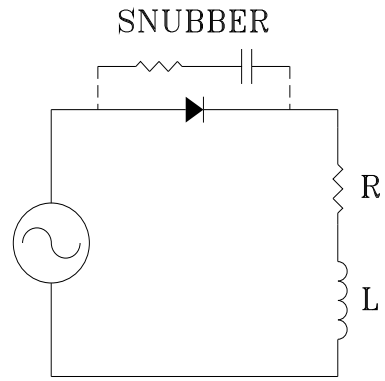


(a) Esquema del circuito

(b) Tensión en la inductancia

(c) Tensión en la inductancia
 $R = 5(2L/\Delta t)$

Figura 8.29. Amortiguamiento de las oscilaciones numéricas.



(a) Esquema del circuito

(b) Tensión en la rama RL

(c) Tensión en la rama RL
 con circuito *snubber*

Figura 8.30. Supresión de oscilaciones numéricas mediante circuito *snubber*.

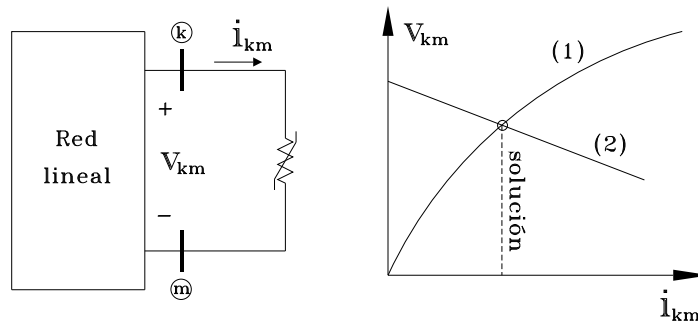


Figura 8.31. Principios del método de compensación.

Ejemplo 8.5:

La Figura 8.32 muestra el sistema a estudiar, una línea aérea terminada en un banco de condensadores es activada desde una fuente de tensión. Se calculará la tensión originada en el terminal de la línea donde se ha instalado el banco de condensadores. La línea se representará mediante un modelo monofásico ideal con parámetros distribuidos. La fuente de tensión presenta una onda en escalón y una impedancia interna, representada por una resistencia R_o .

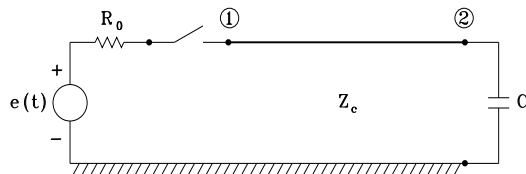


Figura 8.32. Ejemplo 5: Diagrama del sistema en estudio.

Los parámetros del sistema son los siguientes:

Fuente:	Tensión continua	$E = 1 \text{ V}$
	Resistencia interna	$R_o = 10 \ \Omega$
Línea:	Resistencia unitaria	$R = 0$ (línea ideal)
	Impedancia característica	$Z_c = 350 \ \Omega$
	Velocidad de propagación	$v = 300\,000 \text{ km/s}$
	Longitud	$l = 60 \text{ km}$
Condensador:	Capacidad	$C = 0,1 \ \mu\text{F}$

El esquema resultante de considerar el circuito equivalente de cada componente del sistema, una vez que se ha cerrado el interruptor, es el que muestra la Figura 8.33.

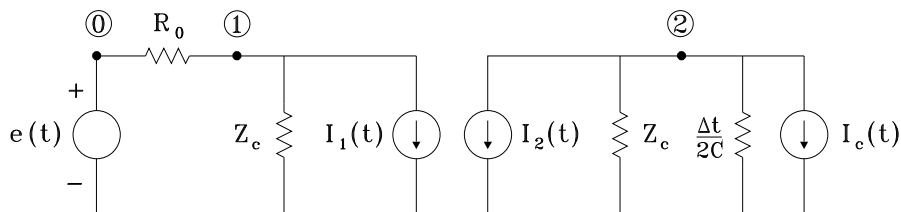


Figura 8.33. Ejemplo 5: Esquema equivalente del sistema en estudio.

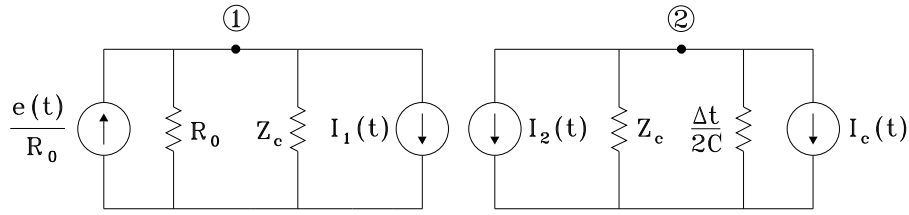


Figura 8.34. Ejemplo 5: Esquema equivalente modificado.

Al sustituir la fuente de tensión y su resistencia interna por su equivalente Norton queda el circuito de la Figura 8.34.

Aplicando el método de los nudos al nuevo circuito equivalente se obtiene el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{R_o} + \frac{1}{Z_c} & 0 \\ 0 & \frac{1}{Z_c} + \frac{\Delta t}{2C} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1(t) \\ v_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e(t)/R_o - I_1(t) \\ -I_2(t) - I_C(t) \end{bmatrix}$$

siendo

$$\begin{aligned} I_1(t) &= -\left[\frac{v_2(t - \tau)}{Z_c} + i_{21}(t - \tau) \right] \\ I_2(t) &= -\left[\frac{v_1(t - \tau)}{Z_c} + i_{12}(t - \tau) \right] \\ I_C(t) &= -\left[\frac{2C}{\Delta t} v_2(t - \Delta t) + i_C(t - \Delta t) \right] \end{aligned}$$

Por otra parte, del circuito equivalente original se pueden deducir las expresiones para obtener las intensidades de corriente:

$$\begin{aligned} i_{12}(t) &= \frac{1}{R_o} [e(t) - v_1(t)] \\ i_{21}(t) &= -i_C(t) \\ i_C(t) &= \frac{2C}{\Delta t} v_2(t) - \left[\frac{2C}{\Delta t} v_2(t - \Delta t) + i_C(t - \Delta t) \right] \end{aligned}$$

Dado que el sistema se encuentra inicialmente relajado se tiene

$$I_1(0) = I_2(0) = I_C(0) = 0$$

Suponiendo que el valor de la fuente es nulo en el instante $t = 0$, y pasa a ser $e(t) = 1$ a partir del instante $t = \Delta t$, el cálculo de las tensiones de los dos nudos del circuito equivalente durante el proceso transitorio que se inicia con el cierre del interruptor en el instante $t = 0$ se puede realizar según el siguiente procedimiento:

1. Se resuelven las ecuaciones de la red prescindiendo de todas las fuentes de corriente que representan la historia previa de esta red, ya que su valor es inicialmente nulo.
2. Se actualizan las fuentes de corriente de historia en $t = \Delta t$. Es necesario tener en cuenta que las fuentes de corriente que forman parte del circuito equivalente de la línea aérea permanecerán con valores nulos tantos pasos como se requieran para que una onda de tensión se propague entre los terminales de la línea. Puesto que el tiempo de propagación de ondas

en la línea es $200 \mu s$, el máximo paso de integración recomendado es $100 \mu s$. Si el paso de integración escogido es $50 \mu s$ se necesitarán 4 pasos de integración para que la primera onda de tensión llegue al terminal donde se encuentra el banco de condensadores. Evidentemente, serán necesarios 4 pasos adicionales para que la primera onda reflejada en el final de línea, nudo 2, llegue al origen de la línea, nudo 1.

3. Se resuelven de nuevo las ecuaciones de circuito equivalente.
4. Se aumenta el tiempo de simulación t en Δt , y se comprueba si se ha superado el tiempo máximo de simulación, $t_{\text{máx}}$. En caso afirmativo se para el proceso de cálculo, en caso contrario se actualizan las fuentes de corriente de historia y se regresa al paso 3.

El cálculo de las intensidades de corriente se puede realizar simultáneamente al de tensiones empleando las ecuaciones mostradas anteriormente.

Los oscilogramas de la Figura 8.35 muestran la tensión en el banco de condensadores con dos escalas de tiempo diferentes. La simulación se ha realizado suponiendo que la fuente de tensión se activa en el instante inicial, $t = 0$, y que el interruptor se cierra al cabo de $10 \mu s$.

Del análisis de estos resultados es posible obtener unas cuantas conclusiones:

- en el extremo receptor se obtiene una importante sobretensión, su valor dobla inicialmente el de la tensión interna de la fuente, posteriormente este valor se incrementa todavía más;
- la tensión resultante en este punto es oscilatoria, llegando incluso a ser negativa (recuérdese que la tensión de la fuente es constante y positiva);
- el valor de los picos positivos y negativos se va amortiguando paulatinamente hasta alcanzar un valor constante e igual al de la tensión interna de la fuente.

Figura 8.35. Ejemplo 5: Tensión en final de la línea.

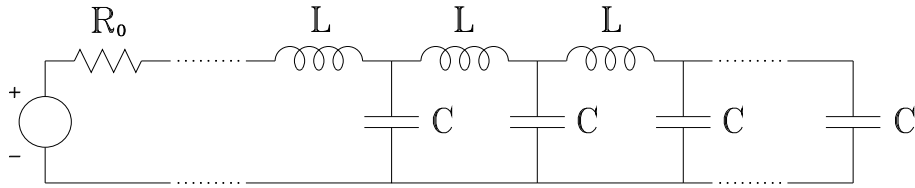


Figura 8.36. Esquema equivalente del sistema en estudio.

Aunque no es sencillo justificar algunos de estos resultados, sí resulta fácil entender el comportamiento final del sistema, es decir, que la tensión en final de línea tiende a ser igual a la tensión interna de la fuente. Este comportamiento se puede entender fácilmente si se analiza el circuito equivalente de este sistema, que se muestra en la Figura 8.36. En la representación de la figura la línea ideal ha sido sustituida por esquemas formados por una inductancia longitudinal y una capacidad transversal, distribuidas homogéneamente a lo largo de toda la longitud de la línea.

Es evidente que conforme el proceso transitorio vaya progresando, las capacidades que se encuentran entre el origen de línea y la capacidad colocada en final se irán cargando hasta alcanzar la tensión interna de la fuente; esto es justamente lo que muestran los gráficos de la Figura 8.35. Por otra parte, al mismo tiempo que la tensión de estas capacidades vaya aumentando, la intensidad de corriente inyectada en origen de línea irá disminuyendo hasta anularse completamente.

Cualitativamente es fácil explicar el proceso transitorio que tiene lugar después de cerrar el interruptor. En el momento de producirse el cierre aparece en origen de línea una tensión cuyo valor depende de la resistencia interna de la fuente y de la resistencia característica de la línea; su expresión operacional es función de la expresión de la tensión interna, y es la siguiente:

$$V(s) = E(s) \frac{Z_c}{R_o + Z_c}$$

siendo $E(s) = 1/s$.

Esta tensión se propagará hacia el extremo receptor donde se encuentra el banco de condensadores; una vez que alcance este punto, la onda sufrirá una reflexión, originándose una nueva onda que se propagará en sentido contrario, hacia el origen. Cuando esta nueva onda alcance el origen dará lugar a una nueva onda que se reflejará en sentido contrario, desde el origen hacia el final de la línea. Ésta a su vez producirá una nueva onda cuando alcance el extremo final; la nueva onda se reflejará hacia el origen donde se producirá una nueva reflexión. Y así sucesivamente.

La expresión de los coeficientes de reflexión para el sistema en estudio es la siguiente:

- Origen

$$r_o = \frac{R_o - Z_c}{R_o + Z_c}$$

- Final

$$r_f = \frac{1/sC - Z_c}{1/sC + Z_c} = \frac{1 - sCZ_c}{1 + sCZ_c}$$

La expresión de las tensiones que aparecerán en origen y final de línea en sucesivas reflexiones puede obtenerse a partir del diagrama reticular, que en este caso coincide con el de la Figura 8.15 empleada para analizar el Ejemplo 2. Teniendo en cuenta que la tensión que se propaga inicialmente por la línea es $V(s)$, las tensiones resultantes en origen y final de línea son las siguientes:

- Origen

$$V_1(s) = V(s)[1 + r_f(1 + r_o)e^{-2\tau s} + r_o r_f^2(1 + r_o)e^{-4\tau s} + \dots]$$

- Final

$$V_2(s) = V(s)[(1 + r_f)e^{-\tau s} + r_o r_f (1 + r_f)e^{-3\tau s} + r_o^2 r_f^2 (1 + r_f)e^{-5\tau s} + \dots]$$

Se puede observar que los términos que aparecen en ambas tensiones, cada vez que una onda alcanza un extremo y se origina una reflexión, han sido afectados de un término exponencial con el correspondiente retraso respecto al instante inicial. A continuación, se analizarán las primeras ondas que se originan en final de línea. Un análisis similar podría ser aplicado a la otra tensión y a las intensidades de corriente en cada extremo de la línea.

De la expresión anterior se deduce que todos los términos de $V_2(s)$ son nulos antes de $t = \tau$. Es decir, la tensión en el nudo 2 es nula entre $t = 0$ y $t = \tau$; a partir de este instante el análisis de los dos primeros términos es el siguiente:

- Tensión entre $t = \tau$ y antes de $t = 3\tau$

$$V_2(s) = V(s)[1 + r_f] e^{-\tau s} = \frac{1}{s} \frac{Z_c}{R_o + Z_c} \left[1 + \frac{1 - sCZ_c}{1 + sCZ_c} \right] e^{-s\tau} = \frac{2Z_c}{R_o + Z_c} \frac{1}{s(s\tau_c + 1)} e^{-\tau s}$$

siendo $\tau_c = Z_c C$

Esta expresión tiene la siguiente antitransformada:

$$v_2(t) = \frac{2Z_c}{R_o + Z_c} [1 - e^{-(t-\tau)/\tau_c}] \epsilon(t - \tau)$$

Teniendo en cuenta el valor de cada parámetro que aparece en esta expresión

$$R_o = 10\Omega \quad ; \quad Z_c = 350\Omega \quad ; \quad C = 0,1\mu F \quad ; \quad t = 200\mu s$$

se obtiene

$$\frac{2Z_c}{R_o + Z_c} = 1,9444 \quad \tau_c = 35\mu s$$

De aquí se deduce que la tensión será nula antes de que llegue la primera onda, es decir, durante $200 \mu s$, aumentará con una constante de tiempo de $35 \mu s$, y alcanzará un valor de 1.9444 voltios. Puesto que la siguiente onda llegará al cabo de $3\tau = 600 \mu s$, y la tensión en este punto prácticamente habrá alcanzado su régimen permanente después de $4\tau_c = 140 \mu s$, se concluye que antes de que aparezca una nueva onda proveniente del origen de la línea, la tensión en este extremo será constante y de valor 1.9444 voltios (ver Figura 8.35).

- Tensión entre $t = 3\tau$ y antes de $t = 5\tau$. Al término de tensión analizado anteriormente se le debe añadir el siguiente:

$$V_2(s) = V(s)r_o r_f [1 + r_f] e^{-3\tau s} = \frac{1}{s} \frac{Z_c}{R_o + Z_c} \frac{R_o - Z_c}{R_o + Z_c} \frac{1 - sCZ_c}{1 + sCZ_c} \left[1 + \frac{1 - sCZ_c}{1 + sCZ_c} \right] e^{-3\tau s}$$

de donde resulta

$$V_2(s) = \frac{2Z_c(R_o - Z_c)}{(R_o + Z_c)^2} \frac{1 - s\tau_c}{s(1 + s\tau_c)^2} e^{-3\tau s}$$

Esta expresión tiene la siguiente antitransformada:

$$v_2(t) = \frac{2Z_c(R_o - Z_c)}{(R_o + Z_c)^2} \left[1 - \frac{2(t - 3\tau) + \tau_c}{\tau_c} e^{(t-3\tau)/\tau_c} \right] \epsilon(t - 3\tau)$$

Se puede comprobar que este nuevo término tiene una expresión similar a la del primer término, así por tanto su valor es nulo para $t < 3\tau = 600 \mu s$, evolucionará con una constante

de tiempo τ_c , y alcanzará su régimen permanente al cabo de aproximadamente $140 \mu s$. Sin embargo, también existen diferencias ya que si $R_o < Z_c$, como sucede en este caso, el factor común a toda la expresión será negativo. El término dentro del paréntesis es inicialmente, para $t = 3\tau$, nulo; para $t > 3\tau$ tiene una evolución inicialmente negativa para después comenzar a aumentar hasta alcanzar de nuevo un valor nulo, cuando $(t - 3\tau) \simeq 45 \mu s$; a partir de este instante su valor aumenta de forma paulatina hasta alcanzar la unidad. Esto significa que, debido a que el factor común

$$\frac{2Z_c(R_o - Z_c)}{(R_o - Z_c)^2}$$

es en todo momento negativo, el nuevo término de la tensión en final de línea será inicialmente positivo, lo que dará lugar a una sobretensión adicional que se debe añadir a los 1.9444 voltios que alcanzó la primera onda de tensión. El valor del nuevo término se anulará $45 \mu s$ después de aparecer, es decir, al cabo de $(3\tau + 45) = 645 \mu s$, tal como se puede comprobar en la primera gráfica de la Figura 8.35 cuando la tensión total alcanza de nuevo un valor cercano a 2.

El valor de la nueva onda se hace negativo a partir de ese instante, con lo cual la tensión en el extremo receptor comienza a decrecer; sin embargo, debido a que el valor máximo de este segundo término es inferior al del primero, el valor total de la tensión no llega a anularse. No será hasta después de que aparezca la nueva onda, en $t = 5\tau$, que la tensión total se hará negativa, aunque por unos pocos microsegundos (ver Figura 8.35).

- Para $t > 5\tau$, irán apareciendo nuevas ondas que harán oscilar la tensión; sin embargo, estas ondas estarán cada vez más amortiguadas debido al efecto de la resistencia interna de la fuente. A partir de un cierto momento, aunque la onda de tensión siga oscilando, no llega a anularse de nuevo. Las sucesivas ondas llegan cada vez más amortiguadas, hasta que finalmente su efecto llega a ser inapreciable y la tensión en el extremo receptor se estabiliza en el valor unidad, es decir, el valor de la tensión interna de la fuente.

Ejemplo 8.6:

La Figura 8.37 muestra el diagrama del sistema analizado en este ejemplo. Se trata de obtener la tensión resultante en bornes del transformador T2 y la tensión transitoria de restablecimiento entre terminales del interruptor después de realizar la maniobra de separación del transformador, que se encuentra en vacío. El proceso transitorio se realizará considerando que ningún componente del sistema disipa energía, y suponiendo que la interrupción de corriente que circula por la línea se realiza en el paso por cero.

Como en los ejemplos anteriores el proceso transitorio se calculará a partir del esquema monofásico del sistema (ver Figura 8.38),

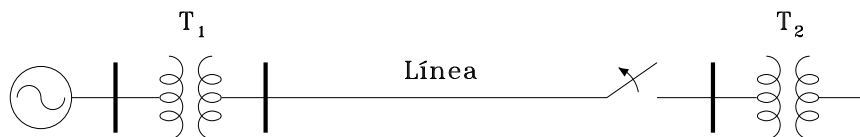


Figura 8.37. Ejemplo 6: Diagrama del sistema en estudio.

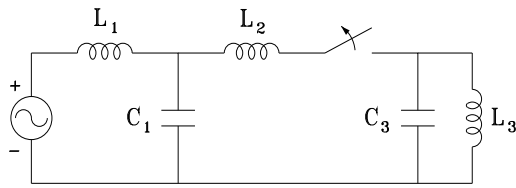


Figura 8.38. Ejemplo 6: Esquema monofásico equivalente.

- la red de alta tensión es representada mediante una fuente de tensión sinusoidal más una inductancia serie L_1 y una capacidad paralelo C_1 ;
- la inductancia L_2 representa el transformador T1 más la línea aérea;
- el circuito equivalente del transformador T2 incluye su inductancia de magnetización L_3 y la capacidad parásita del arrollamiento primario C_3 .

Los parámetros del sistema son los siguientes:

Red de Alta Tensión:	Tensión de pico fase-tierra	V	=	20 kV
	Frecuencia	f	=	50 Hz
	Inductancia serie	L_1	=	10 Ω
	Capacidad paralelo	C_1	=	10 μF
Transformador T1:	Inductancia de cortocircuito	L_{T1}	=	10 mH
Línea aérea:	Inductancia unitaria	L_{Li}	=	1.0 mH/km
Transformador T2:	Inductancia de magnetización	L_3	=	800 mH
	Capacidad parásita	C_3	=	10 pF

Al sustituir cada elemento del esquema anterior por su circuito equivalente resulta el circuito de la Figura 8.39.

El sistema que hay que analizar en régimen transitorio es el que resulta una vez que se ha realizado la interrupción de corriente, es decir, cuando la corriente se anula; a partir del instante en el que esto suceda quedarán dos circuitos completamente separados:

- el circuito del lado de la fuente, que seguirá funcionando en régimen permanente, y por tanto oscilando a 50 Hz, siendo los valores de todas sus variables prácticamente los mismos que antes de realizar la desconexión del transformador;
- el circuito equivalente del transformador T2, en el que se iniciará un régimen transitorio oscilatorio.

Puesto que el circuito equivalente del transformador es puramente reactivo, la interrupción de corriente se realiza en el momento en el que la tensión en los dos elementos de T2 pasa por un

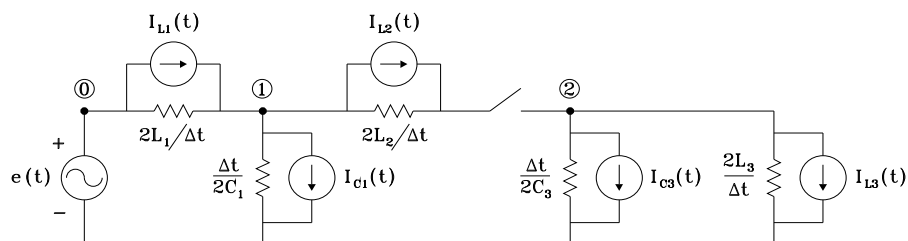


Figura 8.39. Ejemplo 6: Circuito equivalente.

máximo, siendo por tanto la intensidad de corriente en ambos también nula. La ecuación resultante para calcular el proceso transitorio que se originará en el circuito equivalente de T2 es la siguiente:

$$\left[\frac{\Delta t}{2L_3} + \frac{2C_3}{\Delta t} \right] v_2(t) = -[I_{L3}(t) + I_{C3}(t)]$$

de donde se obtiene

$$v_2(t) = -\frac{[I_{L3}(t) + I_{C3}(t)]}{\left[\frac{\Delta t}{2L_3} + \frac{2C_3}{\Delta t} \right]}$$

siendo

$$I_{L3}(t) = \frac{\Delta t}{2L_3} v_{L3}(t - \Delta t) + i_{L3}(t - \Delta t)$$

$$I_{C3}(t) = -\frac{2C_3}{\Delta t} v_{C3}(t - \Delta t) - i_{C3}(t - \Delta t)$$

El proceso transitorio que se originará en el circuito L3-C3 se puede resumir de la siguiente forma:

- La capacidad C3, que ha quedado cargada con una tensión prácticamente igual al valor de pico de la tensión de la fuente, 20 kV, comenzará a descargarse en la inductancia iniciándose un proceso oscilatorio en el que se producirá un intercambio entre la capacidad y la inductancia de la energía inicialmente almacenada en la capacidad (puesto que el proceso se inicia con una corriente nula en la inductancia, la energía almacenada en ésta es también nula).
- Dado que se supone que el circuito no disipa energía, el proceso permanecerá oscilando de forma indefinida, originándose entre los terminales de ambos elementos una tensión sinusoidal con un pico aproximado de 20 kV y una frecuencia de oscilación que vendrá dada por la siguiente expresión:

$$f_{T2} = \frac{1}{2\pi\sqrt{L_3C_3}}$$

- De los parámetros del circuito se obtiene $f_{T2} = 1179,4$ Hz, que corresponde a un periodo de 0.56 ms.
- La tensión entre los terminales del interruptor será la diferencia entre la tensión que se origina en el lado de la fuente, que tendrá un valor de pico aproximado de 20 kV y una frecuencia de 50 Hz, y la tensión en el lado del transformador, que tendrá un valor de pico aproximado de 20 kV y una frecuencia de 1179.4 Hz.
- Así pues, la tensión transitoria de restablecimiento, es decir, la tensión entre terminales del interruptor, presentará una frecuencia principal de 50 Hz modulada por una frecuencia de 1179.4 Hz, y alcanzará un valor de pico aproximado de 40 kV.
- Las intensidades de corriente en la capacidad C3 y en la inductancia L3 tendrán una frecuencia de 1179.4 Hz, con unos valores de pico que se pueden obtener de las siguientes expresiones:

$$I_{L3\max} = \frac{V_{2\max}}{\omega L_3} = \frac{20000}{(2\pi \cdot 1179,41) \cdot 0,8} = 2,24 \text{ (A)}$$

La Figura 8.40 presenta algunos resultados correspondientes a este ejemplo. Se puede comprobar que tanto los valores máximos como las frecuencias de oscilación de las variables calculadas coinciden con los valores deducidos en el análisis teórico.

(a) Tensión en la fuente y en el transformador

(b) Tensión entre terminales del interruptor

(c) Intensidad de corriente en la inductancia de magnetización

Figura 8.40. Ejemplo 6: Resultados obtenidos mediante cálculo numérico.

8.4. Representación de componentes

8.4.1. Selección de modelos

La gama de las frecuencias de las oscilaciones que aparecen en los procesos transitorios abarca desde corriente continua hasta varios MHz. La simulación precisa de un proceso transitorio requiere una representación matemática adecuada para cada componente. El desarrollo de modelos matemáticos no es una tarea fácil debido a que el comportamiento de un componente puede variar de forma significativa según la frecuencia de las oscilaciones. Así por ejemplo, un transformador es un componente que se comporta como un acoplamiento magnético saturable a bajas frecuencias, por debajo de los 3 kHz, mientras que a frecuencias muy elevadas, por encima de 500 kHz, su comportamiento se puede aproximar mediante un acoplamiento capacitivo no saturable.

Otro aspecto muy importante es la representación de la parte del sistema que será incluida en la simulación del proceso transitorio, ya que dependiendo del fenómeno simular puede ser necesario representar una parte significativa de la red o restringir la representación a una pequeña porción de la misma.

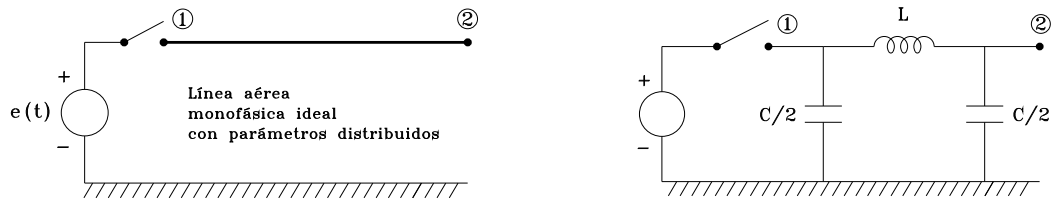
Tanto la representación del sistema como la selección del modelo para cada componente se realizará teniendo en cuenta la escala de tiempo y la frecuencia de las oscilaciones; cuanto más rápido sea el proceso transitorio más reducida será la zona a representar y más detallada la representación de los equipos involucrados.

En los ejemplos presentados en las secciones anteriores se ha representado algún componente utilizando diferentes modelos. Así por ejemplo, una línea aérea era representada mediante un modelo con parámetros distribuidos (ver Ejemplos 1 a 5), o con parámetros concentrados (ver Ejemplo 6). El modelo más riguroso de línea aérea es un modelo polifásico con parámetros distribuidos y dependientes de la frecuencia.

Sin embargo, no siempre es necesario escoger el modelo más riguroso, ya que también será el más sofisticado y el que más tiempo de preparación y simulación requerirá, mientras que en algunas situaciones se pueden obtener resultados similares con el modelo más riguroso y con otro más simple. Los siguientes ejemplos servirán para ilustrar la importancia que puede tener la selección del modelo de una línea aérea y la diferencia entre los resultados que se obtienen según el modelo escogido.

1. El esquema del caso a simular y los modelos escogidos se presentan en la Figura 8.41, se trata de una línea aérea monofásica alimentada por una fuente de tensión sin resistencia interna. En el primer modelo la línea se representa con parámetros distribuidos y constantes, con el segundo la línea se representa con parámetros concentrados, y mediante su esquema equivalente en π . En ambos casos se supone que la línea es ideal, y tiene los siguientes parámetros unitarios: $L = 1$ mH/km, $C = 11.5$ nF/km. Los oscilogramas de la figura muestran la tensión que se obtiene en final de línea según la onda de tensión de la fuente sea sinusoidal o en pulso. En ambos casos el valor de la tensión de pico es 1 voltio.

Se observa que las diferencias entre los resultados obtenidos con uno y otro modelo pueden ser importantes. Cuando la fuente de tensión es sinusoidal, la tensión resultante en final de línea presenta un frente más escarpado si el modelo de línea tiene



(a) Esquema del caso en estudio

(b) Tensión en final de una línea de 50 km - Fuente de tensión sinusoidal

(c) Tensión en final de una línea de 50 km - Onda en forma de pulso

Figura 8.41. Influencia del modelo de línea teniendo en cuenta la forma de onda de la fuente.

parámetros distribuidos; sin embargo el valor de las tensiones es prácticamente el mismo con ambos modelos, el doble que el valor de la tensión de la fuente. Si la onda de la fuente es un pulso de tensión, las diferencias entre uno y otro modelo son apreciables. El modelo con parámetros distribuidos es más preciso ya que un modelo basado en parámetros concentrados no permite incluir toda la gama de frecuencias presentes en la tensión resultante.

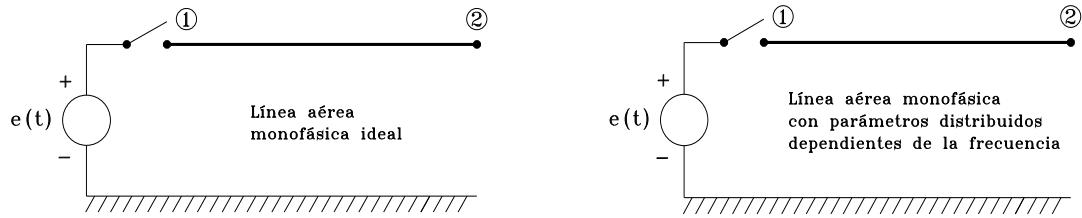
2. Algunos parámetros eléctricos de una línea aérea dependen de la frecuencia del proceso transitorio. Esta dependencia, debida al efecto pelicular en los conductores de la línea y de las corrientes de retorno por tierra, es muy importante para la resistencia y la inductancia, mientras que su efecto es nulo en la capacidad de la línea. Para averiguar el efecto que esta dependencia en la propagación de ondas en una línea aérea se ha simulado el caso que muestra la Figura 8.42.a, una línea aérea monofásica en la que se propaga una onda en forma de pulso.

Las Figuras 8.42.b y 8.42.c presentan las tensiones resultantes en dos puntos de la línea. A partir de estos oscilogramas es fácil deducir el efecto de la dependencia de parámetros con la frecuencia. Cuando el modelo de línea es ideal, la propagación se realiza sin atenuación ni distorsión; cuando el modelo incluye la dependencia de parámetros con la frecuencia se observa una deformación en la onda, que aumenta conforme se aleja del origen de la línea. Además, en el segundo caso la velocidad de propagación de ondas es inferior.

3. Se desea averiguar el efecto que tendrá la representación de la línea en el cálculo de las tensiones que se originarán en final de línea con una maniobra de conexión, cuando la línea se encuentra en vacío y sin carga atrapada. Para realizar el estudio se han escogidos dos modelos de línea aérea:

- Modelo trifásico con parámetros distribuidos, sin considerar la dependencia con la frecuencia y suponiendo que no hay acoplamiento entre fases; esto último equivale a suponer que la línea está formada por tres líneas monofásicas sin acoplamiento entre ellas.
- Modelo trifásico con parámetros distribuidos, considerando su dependencia con la frecuencia, incluyendo el acoplamiento entre fases, y suponiendo que no hay transposición de fases. Los oscilogramas de la Figura 8.43 muestran la tensión resultante con cada modelo en la fase más desfavorable, aquella en la que se origina la tensión más elevada. Se puede comprobar que existen diferencias entre oscilogramas, la tensión obtenida con el modelo dependiente de la frecuencia es más amortiguada, pero también se observa que la tensión máxima es prácticamente la misma en ambos casos. Si el objetivo es el cálculo de sobretensiones de maniobra, parece lógico concluir que en este caso el modelo más simple es suficientemente preciso.

Aunque los ejemplos anteriores sólo han presentado el estudio de procesos transitorios con distintos modelos de línea aérea, la mayoría de conclusiones que se pueden extraer son aplicables a los componentes fundamentales de cualquier sistema:



(a) Esquema del caso en estudio

(b) Tensiones a 50 km del origen de la línea

(c) Tensiones a 150 km del origen de la línea

Figura 8.42. Influencia de la dependencia de parámetros con la frecuencia en la propagación de ondas en una línea aérea.

(a) Línea monofásica ideal

(b) Línea trifásica con parámetros dependientes de la frecuencia

Figura 8.43. Influencia de modelo de línea en el cálculo de tensiones por maniobra.

- Según el caso a simular, no siempre es necesario escoger el modelo más riguroso.
- Incluir la dependencia de parámetros con la frecuencia se traduce en un mayor amortiguamiento de las oscilaciones, pero influye muy poco en los valores máximos de las sobretensiones y en las frecuencias de oscilación naturales.
- En caso de duda es aconsejable emplear modelos con parámetros distribuidos, en lugar de modelos con parámetros concentrados.

8.4.2. Clasificación de frecuencias

Una representación suficientemente aceptable de cualquier componente en la gama completa de frecuencias que pueden aparecer con los procesos transitorios que se originan en un sistema eléctrico de energía es muy difícil, y para la mayoría de componentes es prácticamente imposible. Para resolver este problema, la representación de un componente en simulaciones digitales se realiza mediante el empleo de modelos matemáticos que son suficientemente precisos para una gama específica de frecuencias, correspondiendo cada gama a un tipo particular de fenómenos.

En muchos casos, varios tipos de procesos transitorios están originados por una causa común. Por ejemplo, una falta a tierra puede ser el origen de sobretensiones transitorias,

pero también de procesos electromecánicos en los generadores próximos a la falta, que pueden tener importantes consecuencias.

La Tabla 8.1 muestra la clasificación de gamas de frecuencia propuesta por el Grupo de Trabajo 33-02 de CIGRE. Cada gama se corresponde a un tipo particular de proceso transitorio. Se puede observar que hay cuatro grupos, y que existe solapamiento entre ellos.

Cuadro 8.1. Clasificación de gamas de frecuencia.

GRUPO	GAMA DE FRECUENCIAS	DESIGNACIÓN	APLICACIÓN PRINCIPAL
I	0.1 Hz - 3 kHz	Oscilaciones de baja frecuencia	Sobretensiones temporales
II	50 Hz - 20 kHz	Ondas de frente lento	Sobretensiones por maniobras
III	10 kHz - 3 MHz	Ondas de frente rápido	Sobretensiones por rayos
IV	100 kHz - 50 MHz	Ondas de frente muy rápido	Sobretensiones por recebado

8.4.3. Representación de componentes en el cálculo de transitorios

Actualmente existen varias fuentes de información en las que se proponen directrices para representar los componentes de un sistema de energía en la simulación digital de procesos transitorios:

1. Uno de los primeros documentos publicados en este campo fue producido por el Grupo de Trabajo 33-02 de CIGRE. El documento propone la representación de los componentes más importantes de un sistema de energía teniendo en cuenta la gama de frecuencias de los procesos transitorios a simular (ver Tabla 8.1).
2. Otra fuente de información son los documentos producidos por el Grupo de Trabajo del IEEE "Modeling and Analysis of System Transients Using Digital Programs". Este grupo ha publicado varios trabajos relacionados con la representación de componentes en un tipo particular de estudios, que han sido ampliados y reunidos en una publicación especial.

Los siguientes aspectos pueden tener una influencia decisiva en una simulación digital:

- *Datos del sistema:* Valores aproximados o estimados de parámetros cuya influencia es importante o muy importante son empleados frecuentemente en la representación de un componente. En general, esto ocurre con parámetros dependientes de la frecuencia o con algunos parámetros básicos empleados en representaciones de los Grupos III y IV. Es importante tener en cuenta que algunos parámetros pueden cambiar debido a causas climáticas o debido al mantenimiento.

- *Tipo de estudio:* En muchos estudios la información más importante son los valores de cresta que alcanzan las sobretensiones. Los valores máximos usualmente aparecen durante la primera oscilación después de iniciarse el proceso transitorio. Grandes diferencias entre los valores reales y los obtenidos mediante simulación son debidas fundamentalmente a una pobre representación de las pérdidas, mientras que una representación incorrecta de las inductancias y capacidades conducen a un desplazamiento de los valores de cresta pero no a diferencias importantes entre valores reales y obtenidos mediante simulación. Conviene tener en cuenta que esto es válido cuando la representación del sistema se realiza mediante circuitos con parámetros concentrados, para los que las frecuencias naturales de oscilación dependen de los valores de inductancias y capacidades.
- *Complejidad del sistema:* Cuantos más componentes tenga el sistema en estudio más grande es la probabilidad de que la representación sea incorrecta o insuficiente. Por otra parte, una representación muy detallada requerirá un tiempo de simulación muy largo. Al final siempre es recomendable cierta experiencia para decidir con cuánto detalle se representa el sistema en estudio y cuál es la representación más adecuada para los componentes más importantes.

8.5. Sobretensiones en sistemas eléctricos de energía

8.5.1. Clasificación de sobretensiones

Una sobretensión es una sollicitación variable en el tiempo cuyo valor máximo es superior al valor de cresta de la tensión nominal del sistema en el que se origina. El cálculo de sobretensiones es de vital importancia en el diseño de sistemas eléctricos de energía ya que son estas sollicitaciones las que servirán para escoger el nivel de aislamiento y las protecciones de los equipos. En la actualidad el cálculo de sobretensiones se realiza generalmente con ordenador. Existen varias razones por las que la simulación digital puede ser necesaria: el tamaño de la red a simular, la complejidad de los modelos matemáticos que se han de emplear, la precisión que se puede conseguir en cálculos por ordenador, y el ahorro que puede suponer un cálculo preciso y riguroso de sobretensiones.

La primera clasificación de las sobretensiones se basa en el origen, ya que la causa puede ser interna o externa a la red. Una clasificación más completa incluye las principales características: valor de cresta; frecuencia o gama de frecuencias si el proceso transitorio es oscilatorio, o tiempo al valor de cresta si el proceso transitorio es unidireccional; duración. De acuerdo con esto se pueden distinguir las siguientes categorías:

1. *Sobretensiones temporales:* Son de larga duración (desde varios milisegundos a varios segundos), poco amortiguadas y de frecuencia igual o próxima a la frecuencia de operación.
2. *Sobretensiones de frente lento:* Son de corta duración (pocos milisegundos), fuertemente amortiguadas y se presentan con una gama de frecuencias que varía entre 2 y 20 kHz.

Figura 8.44. Relación entre el tipo de sobretensión, la duración y el valor máximo [16].

3. *Sobretensiones de frente rápido:* Son generalmente unidireccionales, de duración muy corta y amplitud muy superior a la tensión de cresta nominal.
4. *Sobretensiones de frente muy rápido:* Dependiendo del origen pueden ser oscilatorias o unidireccionales, su duración es de pocos microsegundos, y su frecuencia es generalmente superior a 1 MHz.

La Figura 8.44 muestra una relación entre el tipo de sobretensiones (se excluyen las de frente muy rápido), la duración y el orden de magnitud del valor de cresta.

La siguiente sección presenta el estudio de algunos ejemplos particulares de sobretensiones, así como la aplicación del método numérico descrito anteriormente. En ningún caso se detalla este aspecto, pero sí se incluyen resultados obtenidos mediante simulación digital. Posteriormente se presenta una breve introducción al origen y las principales características de las sobretensiones que se pueden originar en un sistema eléctrico de energía, y un resumen sobre los medios empleados para limitar su valor o prevenir su aparición.

8.5.2. Análisis de sobretensiones

En los siguientes apartados se presenta el análisis de tres ejemplos que corresponden a tres tipos diferentes de sobretensiones y que servirán para ilustrar la aplicación de las técnicas numéricas en su cálculo y análisis.

8.5.2.1 Ferrorresonancia

Se denomina ferrorresonancia a un tipo de resonancia originada en redes con reactancias saturables. Este tipo de fenómeno es provocado generalmente por la asociación en serie de un condensador y una reactancia saturable, en redes con amortiguamiento muy débil.

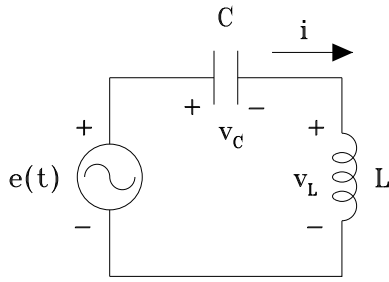


Figura 8.45. Circuito LC serie lineal.

Para entender mejor el origen del fenómeno se analizará inicialmente el caso de resonancia serie en redes lineales. La Figura 8.45 muestra un circuito LC alimentado por una fuente de tensión alterna cuya frecuencia se supone regulable.

Teniendo en cuenta que

$$\mathcal{V}_L = j\omega L\mathcal{I} = jX_L\mathcal{I} \quad (8.87)$$

$$\mathcal{V}_C = \frac{1}{j\omega C}\mathcal{I} = -jX_C\mathcal{I} \quad (8.88)$$

la ecuación de este circuito en régimen permanente se pueden expresar de la siguiente forma:

$$\mathcal{E} = \mathcal{V}_L + \mathcal{V}_C = j(X_L - X_C)\mathcal{I} \quad (8.89)$$

de donde resulta

$$\mathcal{I} = \frac{\mathcal{E}}{j(X_L - X_C)} = \mathcal{E} \frac{\omega C}{j(\omega^2 LC - 1)} \quad (8.90)$$

Es evidente que el valor de la intensidad de corriente depende del valor de la impedancia total $(X_L - X_C)$, y que el valor de esta impedancia se puede variar regulando la frecuencia de la fuente. Existe un valor de la frecuencia, conocido como frecuencia de resonancia, para el que $X_L = X_C$, y que equivale, por tanto, a un cortocircuito. De la expresión de ambas impedancias y de (8.90) se deduce la siguiente expresión para esta frecuencia:

$$\omega_r = \frac{1}{\sqrt{LC}} \quad (8.91)$$

Así pues, cuando $\omega \rightarrow \omega_r$ el valor de la intensidad de corriente tiende a infinito, tal como muestra la Figura 8.46. En un caso real el sistema siempre disipa energía, y el valor de la intensidad viene limitado por la resistencia equivalente del circuito.

La Figura 8.47 presenta de nuevo el circuito anterior con una reactancia no lineal. La ecuación de tensión en el nuevo circuito es la misma que en el caso anterior, aunque ahora se expresará de la siguiente forma:

$$\mathcal{V}_L = \mathcal{E} - \mathcal{V}_C = \mathcal{E} - jX_C\mathcal{I} \quad (8.92)$$

A partir de esta relación y de la característica saturable de la reactancia, el diagrama de tensión-corriente del circuito puede ser el que muestra la Figura 8.48, donde se ha tenido en cuenta la oposición de fase entre V_L y V_C . Se puede comprobar que existen tres posibles

Figura 8.46. Frecuencia de resonancia en un circuito LC serie lineal.

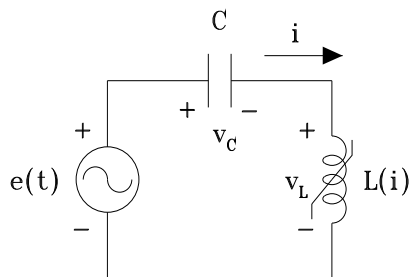
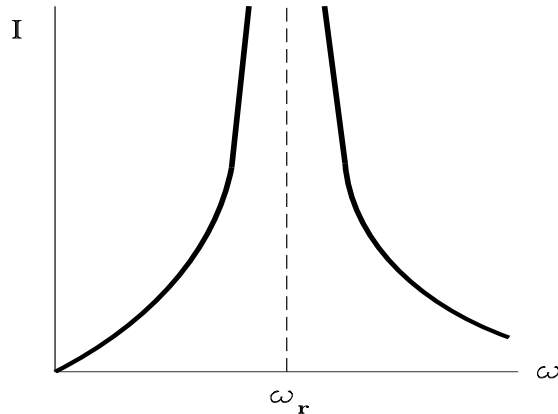


Figura 8.47. Circuito LC serie no lineal.

puntos de funcionamiento en el circuito, y que según el punto de funcionamiento la tensión entre terminales de L o de C puede ser mucho más elevada que la tensión de la fuente.

Al analizar el fenómeno de ferorresonancia conviene tener en cuenta los siguientes aspectos:

1. No es estrictamente un fenómeno de resonancia pues no existe una frecuencia de resonancia, ya que el análisis se ha realizado suponiendo que la frecuencia de la fuente es constante.
2. Cuando la reactancia se satura la intensidad de corriente se distorsiona y contiene, además del armónico a frecuencia fundamental, armónicos a frecuencias múltiples de la fundamental; así pues, el diagrama de la Figura 8.48 no es estrictamente correcto ya que ha sido obtenido considerando exclusivamente variables a frecuencia fundamental.
3. Dependiendo del valor de la capacidad, la pendiente de la característica $V - I$ de la reactancia equivalente X_C será más o menos pronunciada, y el número de posibles puntos de operación en el circuito puede variar entre 1 y 3; en el circuito de la Figura 8.48 existen tres posibles puntos de operación, el 1 y el 2 son estables, mientras que el 3 es inestable.

Las condiciones que pueden provocar la aparición de fenómenos de ferorresonancia en sistemas eléctricos de energía son muy numerosas, aunque es posible reducir a unas pocas las que se presentan con más frecuencia: régimen de neutro aislado; régimen de funcionamiento próximo al vacío; conexión trifásica con una o dos fases abiertas; alimentación mediante cable aislado, que puede proporcionar la capacidad necesaria para provocar este fenómeno.

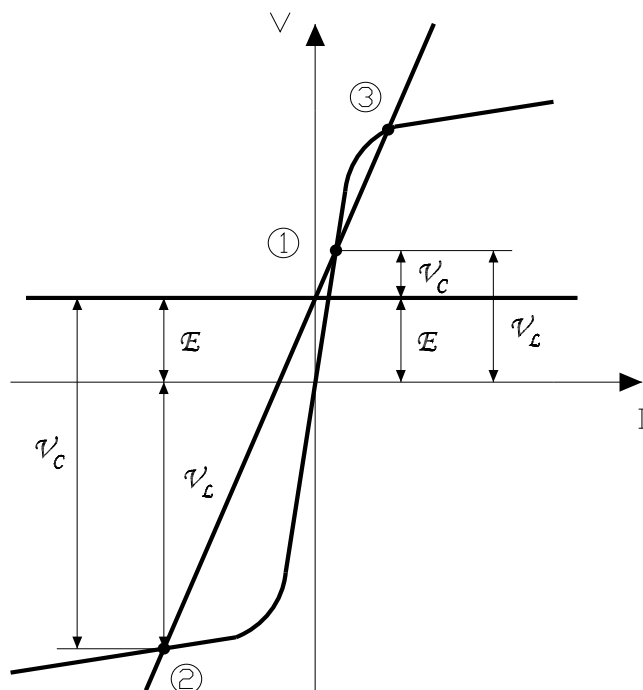


Figura 8.48. Diagrama de tensión-corriente de un circuito LC con reactancia saturable.

Ejemplo 8.7:

La Figura 8.49 muestra el circuito que será analizado en este capítulo y la curva característica $\lambda - i$ de la inductancia saturable. El valor de pico de la tensión de la fuente es variable, mientras que su frecuencia se mantiene constante en 50 Hz.

El cálculo numérico de este caso se puede realizar considerando una representación pseudo-lineal de la inductancia saturable, es decir, aproximando la curva de saturación mediante tramos lineales, o aplicando compensación, tal como fue detallado en el apartado 8.3.4.5. La Figura 8.50 muestra el circuito equivalente que resulta de representar la inductancia saturable mediante una inductancia pseudo-lineal, con lo que el valor de la inductancia que se incluye en las ecuaciones del circuito varía en función del punto de operación. Esto significa que la matriz de conductancias de nudo tiene que ser actualizada cada vez que el punto de operación cambia de segmento.

El fenómeno de ferresonancia puede aparecer como la respuesta transitoria de un sistema a un cambio en su estructura, sin embargo en este caso se trata de analizar un sistema en régimen permanente. Este ejemplo se resolverá exclusivamente mediante el cálculo de la respuesta transitoria, prescindiendo del cálculo en régimen permanente del sistema. Para ello se considerará que la fuente se activa en el instante $t = 0$, lo que equivale a suponer que la fuente está activa y se cierra un interruptor que conecta el resto del circuito.

Aplicando la primera ley de Kirchhoff al nudo 1 queda la siguiente ecuación:

$$[v_0(t) - v_1(t)] \frac{2C}{\Delta t} + I_C(t) = v_1(t) \frac{\Delta t}{2L} + I_L(t)$$

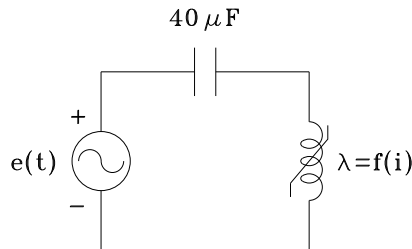


Figura 8.49. Ejemplo 7: Análisis de ferrorresonancia en un circuito LC serie.

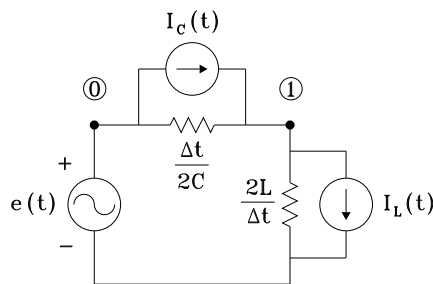


Figura 8.50. Ejemplo 7: Circuito equivalente.

Dado que se conoce la tensión en el nudo 0, $v_0(t) = e(t)$, se puede obtener una ecuación con $v_1(t)$ como incógnita:

$$\left[\frac{2C}{\Delta t} + \frac{\Delta t}{2L} \right] v_1(t) = e(t) \frac{2C}{\Delta t} + I_C(t) - I_L(t)$$

De aquí se deducen las siguientes expresiones:

$$v_L(t) = v_1(t) = \left[\frac{2L \cdot \Delta t}{4LC + \Delta t^2} \right] \left[e(t) \frac{2C}{\Delta t} + I_C(t) - I_L(t) \right]$$

$$v_C(t) = e(t) - v_1(t)$$

El cálculo del proceso transitorio se inicia con valores nulos en las fuentes de corriente que representan términos de historia. El procedimiento es el mismo que ya fue detallado en la sección anterior. La única novedad de este caso está en la inductancia saturable, cuyo valor es necesario actualizar cada vez que el punto de operación cambia de segmento. Debido a esto, es recomendable utilizar un paso de integración pequeño, no superior a 0.1 ms, para evitar rebasamientos importantes en el cambio de segmento de la curva de saturación. La Figura 8.51 muestra los resultados obtenidos con dos valores distintos de la tensión de la fuente. De las gráficas de esta figura se deduce un comportamiento claramente no lineal y que las tensiones tanto en el condensador como en la inductancia alcanzan valores mucho más elevados que el de la fuente que alimenta el circuito.

(a) Tensión de la fuente

(b) Tensión entre terminales de la inductancia

(c) Tensión entre terminales del condensador

Figura 8.51. Ejemplo 7: Resultados de simulación en un análisis de ferrorresonancia.

8.5.2.2 Maniobras con bancos de condensadores

Los efectos de las maniobras con bancos de condensadores en redes de distribución dependerán de la localización del banco, del tipo de maniobra, de la potencia reactiva del banco, y de las condiciones de operación en la red. Una maniobra de conexión puede dar lugar a oscilaciones cuyo valor de pico sea varias veces el valor de pico de la tensión de operación en la red, mientras que una maniobra de desconexión no tendrá efectos importantes si no se produce cebado en el interruptor que se encarga de la desconexión.

Si se dan las condiciones propicias, las sobretensiones pueden ser importantes tanto en el punto donde se realiza la maniobra como en otros puntos de la red de distribución. Uno de los casos más peligrosos es el que se conoce como magnificación de tensión. La Figura 8.52 presenta un diagrama simplificado de una red en la que se puede originar este tipo de proceso. Las sobretensiones más elevadas como consecuencia de la conexión de un banco de condensadores en la red de media tensión se pueden originar en la red de baja tensión debido a la presencia de un segundo banco de condensadores en este nivel de tensión.

La aparición de una elevada tensión en el banco de condensadores situada en baja tensión tendrá lugar cuando se cumplan las condiciones siguientes:

- La potencia reactiva del banco de condensadores que se conecta es mucho más grande que la del banco de condensadores instalado en baja tensión.
- Hay poco amortiguamiento en el lado de baja tensión.
- Las frecuencias naturales f_1 y f_2 están muy próximas (ver Figura 8.53.b).

$$f_1 = \frac{1}{2\pi \cdot \sqrt{L_1 C_1}} \quad f_2 = \frac{1}{2\pi \cdot \sqrt{L_2 C_2}} \quad (8.93)$$

Una demanda moderada de potencia en el momento de producirse la conexión puede reducir sensiblemente la sobretensión máxima.

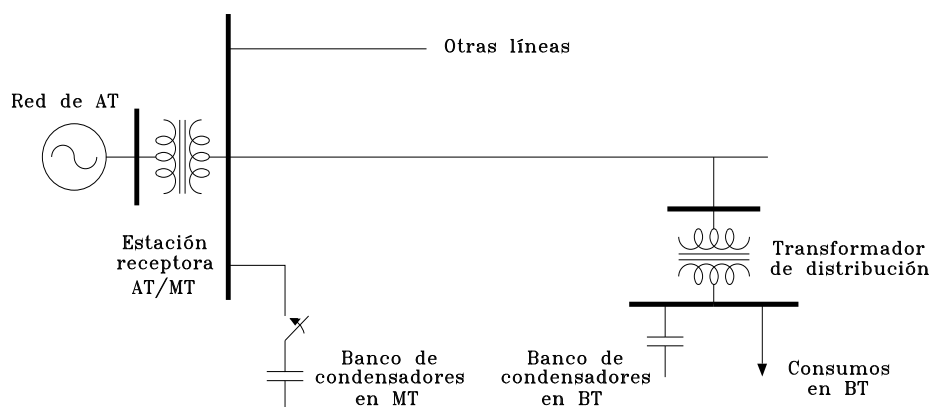


Figura 8.52. Conexión de un banco de condensadores en una red de distribución.

Ejemplo 8.8:

Se pretende conectar un banco de condensadores en los terminales de media tensión de una estación receptora, y analizar el efecto en la red, especialmente en el lado de baja tensión donde se halla instalado un segundo banco de condensadores. La Figura 8.53.a muestra el caso particular que será analizado en esta sección. El estudio y las simulaciones se basarán en el esquema equivalente monofásico de la Figura 8.53.b.

Dado que antes de producirse la conexión el sistema está en régimen permanente, la única configuración que será necesario analizar en régimen transitorio es la que aparece después de cerrar el interruptor. La Figura 8.54 muestra el circuito equivalente del sistema con el interruptor cerrado. El sistema de ecuaciones que resulta de aplicar la primera ley de Kirchhoff en los nudos 1 y 2 es el siguiente:

$$\begin{aligned} \frac{\Delta t}{2L_1} [v_0(t) - v_1(t)] + I_{L1}(t) &= \frac{2C_1}{\Delta t} v_1(t) + I_{C1}(t) + \frac{\Delta t}{2L_2} [v_1(t) - v_2(t)] + I_{L2}(t) \\ \frac{\Delta t}{2L_2} [v_1(t) - v_2(t)] + I_{L2}(t) &= \frac{2C_2}{\Delta t} v_2(t) + I_{C2}(t) \end{aligned}$$

Puesto que $v_0(t) = e(t)$, este sistema de ecuaciones se puede expresar de la siguiente forma:

$$\begin{bmatrix} \frac{\Delta t}{2L_1} + \frac{2C_1}{\Delta t} + \frac{\Delta t}{2L_2} & -\frac{\Delta t}{2L_2} \\ -\frac{\Delta t}{2L_2} & \frac{\Delta t}{2L_2} + \frac{2C_2}{\Delta t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1(t) \\ v_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e(t) \Delta t / 2L_1 \\ 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -I_{L1}(t) + I_{L2}(t) + I_{C1}(t) \\ -I_{L2}(t) + I_{C2}(t) \end{bmatrix}$$

El proceso transitorio se iniciará con valores no nulos de las fuentes de corrientes I_{L1} , I_{L2} y I_{C2} . El valor de estas fuentes se obtiene del análisis del esquema equivalente (ver Figura 8.53.b), en régimen permanente sinusoidal. Para el caso que se está analizando se ha considerado que la fase

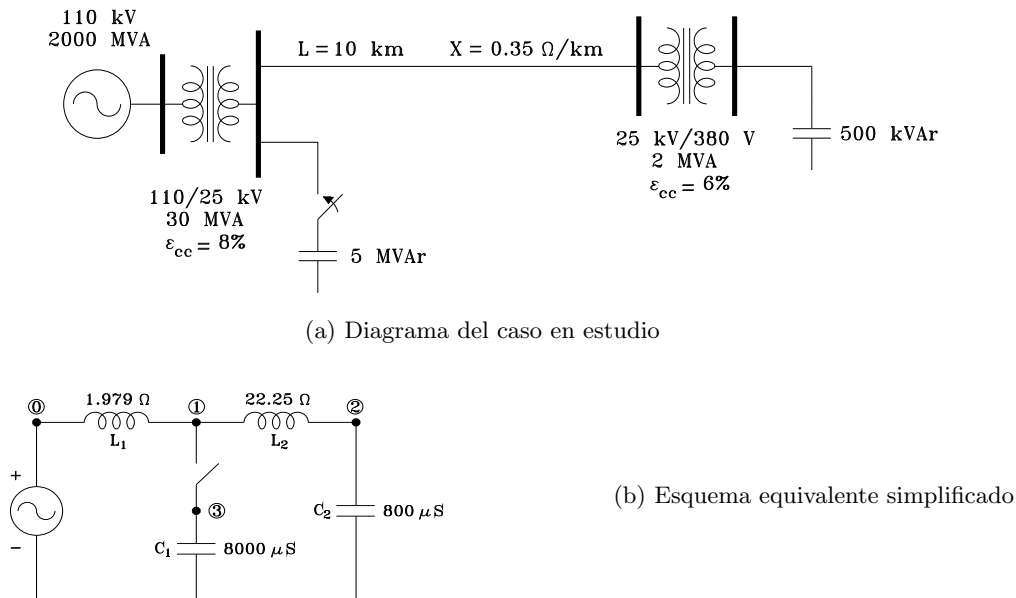


Figura 8.53. Ejemplo 8: Magnificación de tensión en una red de distribución.

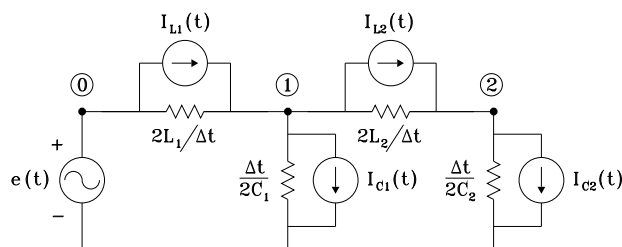


Figura 8.54. Ejemplo 8: Circuito equivalente.

de la fuente de tensión era $-\pi/2$, es decir, $e(t) = 1 \cdot \cos(\omega t - 90^\circ)$, de donde resultan los siguientes valores:

$$i_{L1}(t) = i_{L2}(t) = i_{C2}(t) = 0,8158 \cos(\omega t - 0,226^\circ) \quad (\text{mA})$$

El procedimiento de cálculo una vez establecidas las condiciones iniciales con las que se inicia el proceso transitorio es similar al empleado en ejemplos anteriores (ver Ejemplos 5 y 6).

La Figura 8.55 presenta alguno de los resultados obtenidos en la simulación de este caso, en el que se ha calculado el proceso transitorio que resulta cuando el instante de cierre del interruptor coincide con el pico de la tensión en la fuente. De los oscilogramas de esta figura se deduce que con los valores empleados aparecerá una importante sobretensión en el nudo de baja tensión como consecuencia de la maniobra de conexión del banco de condensadores. La presencia de resistencias en el circuito equivalente no influye de manera sensible en el valor máximo de las sobretensiones, aunque sí añade un importante amortiguamiento en las sobretensiones. Por otra parte, conviene tener en cuenta que no se ha considerado ningún tipo de consumo en baja tensión, ni la existencia de otras líneas alimentadas desde los terminales de media tensión de la estación receptora. Tampoco se ha incluido el efecto de saturación en los transformadores, lo que en el caso del transformador de distribución puede ser particularmente importante. Todo esto hubiera introducido un amortiguamiento más grande y limitado las sobretensiones a valores más reducidos.

8.5.2.3 Protección contra el rayo

El pararrayos de óxidos metálicos es un dispositivo muy eficiente para proteger equipos eléctricos contra el rayo. Como primera aproximación al efecto protector de un pararrayos se puede suponer que cualquier sobretensión que se origine en el equipo a proteger vendrá limitada al valor de la tensión residual del pararrayos escogido. Un pararrayos se instala en paralelo (entre fase y neutro/tierra) con el equipo a proteger y tan cerca de éste como sea posible. Sin embargo, no siempre es posible evitar alguna distancia entre pararrayos y equipos. Como consecuencia de esta distancia, la tensión en el equipo protegido puede ser más elevada que la tensión residual del pararrayos. Éste se conoce como efecto de separación.

La Figura 8.56 muestra el diagrama de una estación receptora que está protegida en su lado de media tensión por pararrayos. Éstos han sido instalados a una cierta distancia del terminal de media tensión del transformador. El ejemplo de la figura corresponde a un caso muy simple en el que del secundario del transformador sólo se alimenta una línea aérea de distribución. Un rayo impacta en el vano contiguo al transformador, originando dos ondas de tensión que se propagarán por la línea hacia el transformador y en dirección opuesta a la estación receptora. Se desea analizar la protección que proporcionan los pararrayos y el efecto que puede tener la distancia de separación entre pararrayos y transformador.

(a) Tensiones en la fuente y en el banco de condensadores

(b) Tensiones en la fuente y en el nudo de baja tensión

(c) Intensidad de corriente en el banco de condensadores en MT

Figura 8.55. Ejemplo 8: Resultados de simulación.

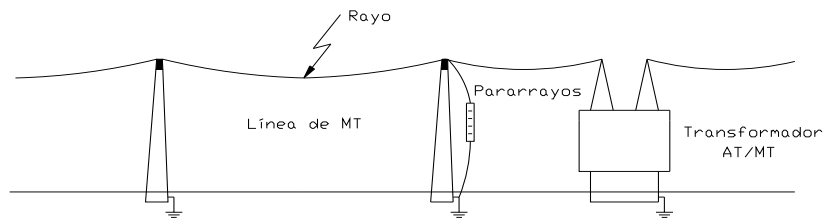


Figura 8.56. Diagrama de una estación transformadora protegida mediante pararrayos.

El estudio se realizará suponiendo un comportamiento ideal para todos los componentes del sistema:

1. Los tramos de línea son representados mediante un modelo no disipativo con parámetros distribuidos y constantes.
2. En el estudio de transitorios de frente rápido, un transformador se puede representar como una capacidad de valor muy pequeño; en este caso su comportamiento se aproximará mediante un circuito abierto.
3. El rayo se representa como una fuente de corriente ideal, es decir, su impedancia paralelo es infinita, y con forma de onda en doble rampa (ver Figura 8.57).
4. Un pararrayos de óxidos metálicos se comporta como una resistencia de valor infinito mientras la tensión es inferior a su tensión residual, y mantiene la tensión entre terminales en su valor residual cuando la tensión tiende a superar este valor.

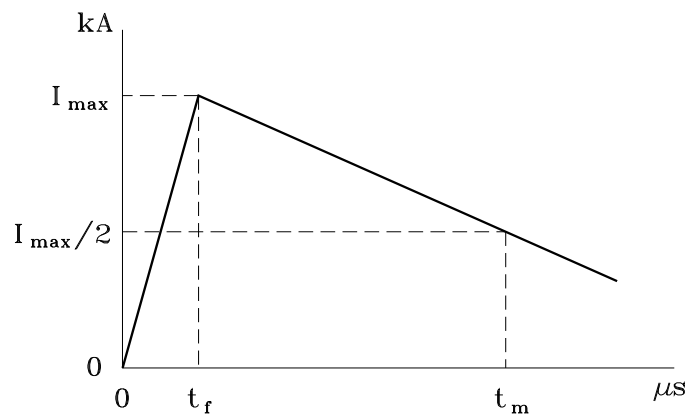


Figura 8.57. Representación de la corriente del rayo

La Figura 8.58 presenta el esquema equivalente que servirá para analizar el comportamiento de este sistema frente al rayo y estudiar la protección que proporciona el pararrayos de óxidos metálicos. Se puede comprobar que

- el rayo impacta en un punto intermedio del vano, nudo 0;
- el vano de la línea, situado entre los nudos 1 y 2, ha sido dividido en dos tramos;
- en el nudo 1 se ha instalado una resistencia igual a la impedancia característica de la línea; de esta forma la línea se encuentra adaptada en este terminal y no se originan

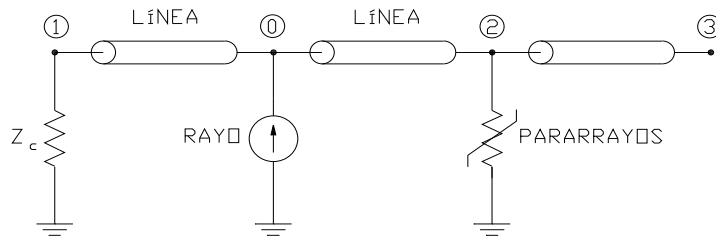


Figura 8.58. Esquema equivalente del sistema en estudio.

reflexiones de onda, y su comportamiento equivale al de una línea de longitud infinita en la que no se produce ningún contorneo;

- el pararrayos ha sido instalado en el nudo 2;
- el transformador, situado en el nudo 3, es representado como un circuito abierto;
- se supone que el tramo que separa el pararrayos del transformador tiene las mismas características que la línea aérea.

El análisis teórico se realizará mediante el diagrama reticular (ver Sección 8.3.3). Cuando el rayo impacta en la línea se originan dos ondas de tensión que viajan en sentidos opuestos desde el punto de impacto. La onda que viaja por la línea en sentido opuesto a la estación receptora se encontrará una resistencia igual a la impedancia característica de la línea con lo que no se originará ninguna reflexión de ondas. La onda que viaja hacia el transformador se encontrará primero con el pararrayos. Inicialmente éste no conduce y se comporta como un circuito abierto, por lo que la onda continuará sin distorsión ni atenuación hacia el transformador. Cuando la primera onda alcanza el punto donde se halla el transformador, dado que éste es un punto terminal y se halla en circuito abierto, se reflejará una onda del mismo signo y valor, que viajará hacia el pararrayos. A partir de este momento se pueden dar las dos situaciones que muestra la Figura 8.59.

- En el primer caso la onda llega antes de que el pararrayos haya alcanzado la tensión residual, por lo que éste se sigue comportando como un circuito abierto, y la onda no sufre ninguna reflexión.
- En el segundo caso la onda llega después de que se ha alcanzado la tensión residual; en tal situación el pararrayos se comporta como un cortocircuito ya que debe mantener la tensión en su valor residual, lo que significa que para cualquier onda que llegue se debe originar una onda igual y de signo contrario.

El efecto del pararrayos se analizará según el principio que se muestra en la Figura 8.60. Cualquier onda que llegue al pararrayos con un valor superior al de la tensión residual verá limitado su valor a esta tensión. Esto equivale a suponer que se origina otra onda, que se conocerá como onda de alivio, cuyo valor en todo momento será tal que superpuesta a la onda original resulta una onda igual a la recortada por el pararrayos. Así pues, el análisis según el diagrama reticular debe incluir la aparición de la onda de alivio en el momento en el que se haya alcanzado la tensión residual en el pararrayos.

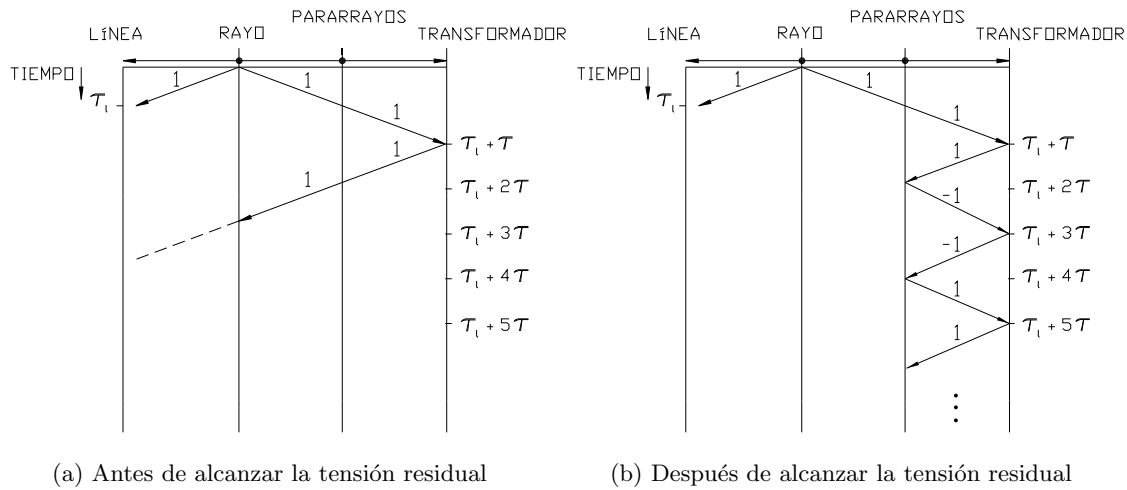


Figura 8.59. Diagrama reticular con el pararrayos instalado.

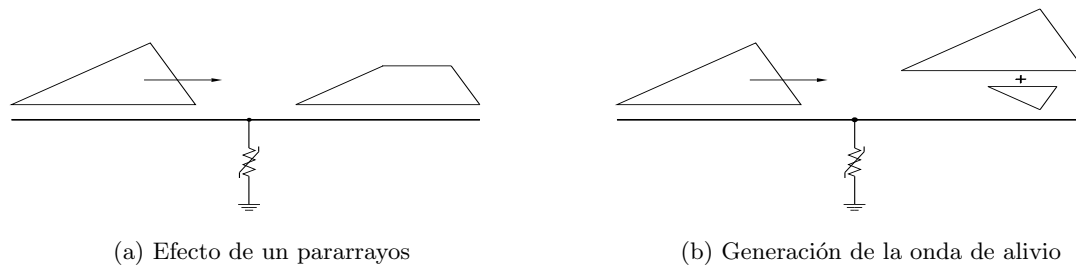


Figura 8.60. Comportamiento de un pararrayos ideal de óxidos metálicos.

La corriente del rayo se representará como una rampa cuya pendiente inicial es $S_i = I_{\max}/t_{\max}$. Las ondas viajeras que se originan con el impacto del rayo en la línea tendrán una pendiente inicial S_v cuyo valor viene dado por la siguiente expresión:

$$S_v = S_i \frac{Z_c}{2} \tag{8.94}$$

siendo Z_c la impedancia característica de la línea.

Se puede comprobar que la tensión máxima en el transformador se originará en una situación como la mostrada en el diagrama de la Figura 8.59.b, es decir, cuando la primera onda reflejada en el transformador llega al pararrayos después de que la tensión en éste ha alcanzado su tensión residual, y que el valor máximo de esta tensión es dos veces la tensión residual del pararrayos. Si se usa τ para designar el tiempo de propagación de ondas entre el pararrayos y el transformador, es evidente que el tiempo que tarda el pararrayos en alcanzar su tensión residual es igual o menor que 2τ (ver Figura 8.59.b). Por otra parte, la onda de alivio (de signo opuesto a la onda producida por el rayo) se originará en el momento en el que la tensión en el pararrayos alcanza su valor residual, y también requiere un tiempo τ para trasladarse entre los dos puntos. La onda de tensión en el punto donde se encuentra el transformador se origina un tiempo τ después que en el pararrayos, y puesto que el

coeficiente de reflexión en este punto es 1, su pendiente será el doble que la pendiente de la onda de tensión en el pararrayos. Así pues, cuando llegue la onda de alivio al transformador, la tensión en éste ha alcanzado un valor doble que la tensión residual del pararrayos.

Es posible obtener el valor mínimo de la separación entre pararrayos y transformador por debajo del cual la onda reflejada en el transformador llegará cuando la tensión en el pararrayos es inferior a la tensión residual, es decir, el diagrama de reflexiones sería el de la Figura 8.59.a. La distancia crítica que separa los dos comportamientos mostrados en la Figura 8.59 será aquella para la que la onda reflejada en el transformador llega al pararrayos en el mismo momento en el que éste alcanza su tensión residual y se origina la onda de alivio. En tal situación se cumple

$$V_{\text{res}} = 2\tau S_v \tag{8.95}$$

de donde

$$\tau = \frac{V_{\text{res}}}{2S_v} = \frac{V_{\text{res}}}{Z_c S_i} \tag{8.96}$$

La distancia crítica es el resultado de multiplicar τ por la velocidad de propagación de las ondas:

$$d_{\text{cri}} = \frac{V_{\text{res}}}{Z_c S_i} v \tag{8.97}$$

Ejemplo 8.9:

Se calcularán las tensiones que resultan en el transformador del sistema que muestra la Figura 8.56 empleando la representación de la Figura 8.58. El estudio y los cálculos se realizarán suponiendo que no se origina ningún contorneo en la línea, que ésta tiene una longitud infinita, y que la tensión en la línea en el momento del impacto es nula.

El caso será analizado considerando los siguientes datos:

Rayo:	Fuente de corriente en doble rampa, 8/20 μs	I_p =	10 kA
Línea aérea:	Impedancia característica	Z_c =	350 Ω
	Velocidad de propagación de ondas	v =	300 m/ μs
Pararrayos:	Tensión residual	V_r =	100 kV

La Figura 8.61 presenta el circuito que resulta de sustituir cada elemento del esquema equivalente mediante su circuito discreto equivalente. El pararrayos se ha representado mediante una resistencia no lineal R_p .

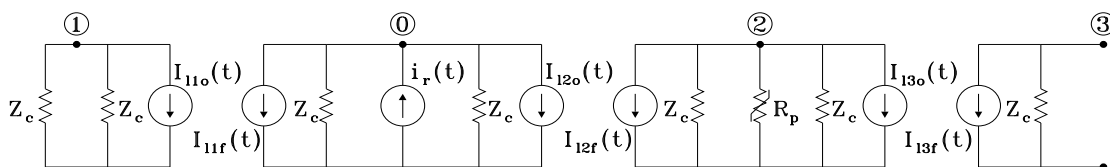


Figura 8.61. Ejemplo 9: Circuito equivalente del sistema en estudio.

De la aplicación del método de los nudos en este circuito se obtiene el siguiente sistema de

ecuaciones:

$$\begin{bmatrix} \frac{2}{Z_c} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{2}{Z_c} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{2}{Z_c} + \frac{1}{R_p} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{Z_c} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1(t) \\ v_0(t) \\ v_2(t) \\ v_3(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ i_r(t) \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} I_{11o}(t) \\ I_{11f}(t) + I_{12o}(t) \\ I_{12f}(t) + I_{13o}(t) \\ I_{13f}(t) \end{bmatrix}$$

La resistencia de un pararrayos de óxidos metálicos durante el proceso transitorio se puede obtener a partir de su característica $v - i$:

$$i = \text{sign}(v) \text{abs} \left[\beta \left(\frac{v}{V_{\text{res}}} \right)^\alpha \right] \quad (8.98)$$

siendo α y β parámetros del pararrayos, y V_{res} la tensión residual.

Un comportamiento ideal del pararrayos se consigue empleando valores elevados para los parámetros α y β . Por ejemplo haciendo $\alpha \geq 500$ y $\beta \geq 1000$. Sin embargo, también es posible reproducir un comportamiento ideal del pararrayos considerando que su resistencia es infinita cuando la tensión entre sus terminales es inferior a su tensión residual, y representando el pararrayos mediante una fuente de tensión ideal de valor V_{res} cuando la tensión alcanza el valor residual.

Se puede comprobar que la matriz de admitancias es diagonal, por lo que es posible indicar de forma explícita la solución de las tensiones en todos los nudos del sistema. Las ecuaciones del sistema pueden expresarse de la siguiente forma:

- Antes de alcanzar la tensión residual ($R_p \approx \infty$)

$$\begin{bmatrix} v_1(t) \\ v_0(t) \\ v_2(t) \\ v_3(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Z_c/2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & Z_c/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & Z_c/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & Z_c \end{bmatrix} \left(\begin{bmatrix} 0 \\ i_r(t) \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} I_{11o}(t) \\ I_{11f}(t) + I_{12o}(t) \\ I_{12f}(t) + I_{13o}(t) \\ I_{13f}(t) \end{bmatrix} \right)$$

- Después de alcanzar la tensión residual ($v_2 = V_{\text{res}}$)

$$\begin{bmatrix} v_1(t) \\ v_0(t) \\ v_3(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Z_c/2 & 0 & 0 \\ 0 & Z_c/2 & 0 \\ 0 & 0 & Z_c \end{bmatrix} \left(\begin{bmatrix} 0 \\ i_r(t) \\ 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} I_{11o}(t) \\ I_{11f}(t) + I_{12o}(t) \\ I_{13o}(t) \end{bmatrix} \right)$$

El cálculo del proceso transitorio se realizará siguiendo el mismo procedimiento que ya ha sido detallado y aplicado en otros ejemplos anteriores. En este caso todas las fuentes de corriente que forman parte de los circuitos equivalentes de los tramos de línea son inicialmente nulas.

La Figura 8.62 muestra la forma de onda de la corriente del rayo, y las tensiones que resultan en este sistema antes y después de instalar el pararrayos. Los cálculos se han realizado suponiendo que el vano de la línea tiene 36 metros, y que el rayo impacta a 15 metros del punto donde se instala el pararrayos. Se comprueba que la tensión en el transformador alcanza un valor extraordinariamente alto sin la instalación del pararrayos. Conviene tener en cuenta que este resultado se ha obtenido suponiendo que ni la línea aérea ni el transformador se averían durante el proceso transitorio simulado. Ningún equipo de distribución puede soportar una tensión tan elevada como la que presenta la Figura 8.62.b, por lo que es lógico esperar que en algún instante intermedio se haya producido un contorneo en la línea aérea y una avería en el transformador. Por otra parte se puede observar

(a) Intensidad de corriente del
rayo - 10 kA, 8/20 μ s

(b) Sobretensión en el
transformador sin pararrayos

(c) Sobretensiones en el
pararrayos y en el
transformador

Figura 8.62. Ejemplo 9: Protección de una estación receptora mediante pararrayos de óxidos metálicos. Separación entre pararrayos y transformador $d = 6$ m.

que el pararrayos limita la tensión en el punto donde se ha instalado a su valor residual, que en este caso es 100 kV.

Los resultados presentados en la Figura 8.62 han sido obtenidos con una onda de rayo y una separación entre pararrayos y transformador determinadas. Tanto los parámetros de la onda del rayo como la distancia que separa el pararrayos del transformador tienen un efecto importante en la sobretensión que puede aparecer en el punto donde se haya instalado el transformador. Las Figuras 8.63 y 8.64 presentan los resultados correspondientes a dos estudios en los que se ha analizado el efecto de estos parámetros. De estos resultados se deduce que

- cuanta más separación existe entre pararrayos y transformador más grande es la sobretensión resultante en el transformador;
- cuanto más elevada es la pendiente de la corriente del rayo, I_{\max}/t_{\max} , más elevada resulta la sobretensión en el transformador;
- la tensión máxima que se puede originar en el transformador es dos veces la tensión residual del pararrayos.

De la expresión (8.97) se puede obtener el valor de la distancia crítica para cada una de las ondas de rayo empleadas en la simulación de los casos anteriores:

- Onda 10 kA, 8/20 μ s $l_{\text{cri}} = 68.57$ metros
- Onda 10 kA, 1/5 μ s $l_{\text{cri}} = 8.57$ metros

Del análisis de los resultados presentados en las Figuras 8.63 y 8.64 se comprueba que con una onda de 10 kA, 8/20 μ s, en ningún caso se alcanza en el transformador una tensión doble que la del pararrayos debido a que todas las distancias son inferiores a 68.57 metros, mientras que con una onda de 1 kA, 1/5 μ s, tan sólo en el primer caso la distancia es inferior a la crítica, 8.57 metros, y la tensión en el transformador no dobla la tensión residual del pararrayos.

8.5.3. Características de las sobretensiones

Aunque las causas de sobretensiones son muchas, así como los parámetros y variables que intervienen en cada categoría, es posible distinguir unos pocos parámetros cuya influencia será decisiva en la mayoría de casos.

1. *Valor de cresta:* El valor máximo de una sobretensión dependerá de ciertos factores, según sea su origen:
 - En tensiones temporales o de frente lento originadas por una falta o maniobra influirán el instante en el que se inicia el proceso transitorio, la carga atrapada en el lado del consumo en caso de maniobra, el amortiguamiento que introducen los distintos equipos de la red, y en algunos casos (maniobra de línea en vacío) algún coeficiente de reflexión.
 - En tensiones de frente rápido o muy rápido originadas por una maniobra, además de las causas mencionadas anteriormente, habrá que añadir las impedancias características de los componentes que intervienen en el proceso transitorio.
 - En sobretensiones provocadas por una descarga atmosférica influirán las impedancias características de líneas, cables y otros equipos, los coeficientes de

(a) Separación entre pararrayos y transformador - $d = 3$ metros

(b) Separación entre pararrayos y transformador - $d = 12$ metros

(c) Separación entre pararrayos y transformador - $d = 30$ metros

Figura 8.63. Onda de rayo: 10 kA, $8/20\mu s$.

Figura 8.64. Onda de rayo: 10 kA, $1/5 \mu s$.

reflexión en puntos cercanos al punto de impacto, y el instante de impacto de la descarga.

2. *Frecuencia de las oscilaciones:* Las frecuencias que aparecerán en sobretensiones oscilatorias serán debidas a la frecuencia de la fuente o fuentes que alimentan la red, las frecuencias naturales que pueden originarse entre los distintos equipos, y la longitud de líneas, cables o conductos para los cuales el modelo matemático incluya una representación con parámetros distribuidos. En este caso, la frecuencia de las oscilaciones viene dada por la expresión

$$f = \frac{1}{4\tau} \quad (8.99)$$

siendo τ el tiempo de propagación en la línea, cable o conducto.

Si la sobretensión es unidireccional no oscilatoria y originada por un rayo, el tiempo a la cresta dependerá fundamentalmente del tiempo a la cresta de la descarga atmosférica, y será del orden de microsegundos.

3. *Duración:* La duración de una sobretensión será debida fundamentalmente a dos factores, la causa y el amortiguamiento que introducen los equipos de la red.

8.5.4. Limitación de sobretensiones

La protección frente a sobretensiones se realiza teniendo en cuenta el tipo de equipo a proteger y su nivel de tensión nominal. La protección de estaciones receptoras y líneas aéreas de transporte se realiza con distintos criterios que la protección de redes aéreas y subterráneas de distribución. Algunos de los aspectos que justifican los principales criterios de protección empleados en redes eléctricas se comentan a continuación:

- Las sobretensiones de origen atmosférico pueden ser originadas por un rayo directo a algún conductor de una línea, o un rayo indirecto que alcance un punto próximo a la línea; debido al nivel de aislamiento que se utiliza en líneas aéreas, las sobretensiones por rayo indirecto no son peligrosas en líneas de transporte, pero pueden serlo en líneas de distribución.
- La protección de una línea aérea frente al rayo se puede conseguir apantallando la línea con conductores de tierra o mediante la instalación de pararrayos en los apoyos; la instalación de conductores de tierra es la solución más extendida para proteger líneas aéreas de transporte, especialmente en zonas de mucha actividad atmosférica; el apantallamiento que se consigue con estos conductores, junto con una resistencia de puesta a tierra relativamente baja en los apoyos de las líneas, permite reducir sensiblemente el número de fallas por rayos en líneas aéreas de transporte; la instalación de cables de tierra en líneas aéreas de distribución puede reducir sensiblemente el número de fallas debidas a descargas indirectas.
- Las sobretensiones temporales y de maniobra, tanto en transporte como en distribución, alcanzan valores de pico mucho más pequeños que las originadas por rayos, su frecuencia es mucho más baja y su duración mucho más larga; generalmente, su valor se mide como un múltiplo de la tensión de pico (fase-tierra) nominal de la red.

- El nivel de aislamiento empleado en redes de distribución es muy bajo frente a las sobretensiones debidas al rayo, pero elevado frente al nivel de las sobretensiones de origen interno, de aquí que en redes de distribución a media tensión la mayoría de averías debidas a una sobretensión tenga un origen atmosférico.
- El momento en el que se origina una sobretensión por rayo o por cortocircuito es evidentemente desconocido, sin embargo se sabe perfectamente cuándo aparecerá una sobretensión de maniobra, por lo que se pueden emplear medios para reducir su efecto en el momento de efectuar la maniobra.

Los métodos de protección frente a sobretensiones se resumen a continuación:

1. Las sobretensiones de maniobra se pueden controlar o reducir controlando el instante de cierre del interruptor utilizado en la maniobra o mediante la inserción de resistencias o inductancias en serie con el interruptor durante el tiempo que pueda durar la sobretensión.
2. El efecto de las sobretensiones de origen atmosférico en estaciones receptoras y en líneas de transporte se puede reducir sensiblemente mediante apantallamiento de estaciones y líneas, y manteniendo las resistencias de puesta a tierra en valores relativamente bajos.
3. Los pararrayos son útiles en la protección frente a sobretensiones de maniobra y de origen atmosférico. Sus valores nominales se escogen teniendo en cuenta la tensión nominal de la red en la que se instalan, la tensión soportada por el equipo o los equipos a proteger frente a choques de maniobra y rayo, y el nivel y la duración que pueden alcanzar las sobretensiones temporales, fundamentalmente las debidas a un cortocircuito fase-tierra.

La Tabla 8.2 muestra un resumen de las causas, características y medios para limitar sobretensiones temporales, de frente lento y de frente rápido, respectivamente.

Cuadro 8.2. Sobretensiones en sistemas eléctricos de energías.

TIPO DE SOBRETENSIÓN	ORIGEN	CARACTERÍSTICAS	LIMITACIÓN	PROTECCIÓN CON PARARRAYOS
TEMPORALES	CORTOCIRCUITOS A TIERRA	Sólo originan sobretensiones fase-tierra en las fases sanas; se presentan a frecuencia de operación, su amplitud depende del sistema de puesta a tierra y de la localización de la falta, y su duración depende del sistema de protección.	Mediante selección de aquellos parámetros que pueden tener una gran influencia en su valor de cresta. Son más reducidas en sistemas con neutro a tierra.	Su tensión nominal se selecciona a partir de la máxima tensión en régimen permanente. Desde un punto de vista práctico, no limitarán las sobretensiones temporales, excepto en ciertos casos de resonancia.
	PÉRDIDA BRUSCA DE CARGA	Pueden originar sobretensiones fase-tierra, entre fases y longitudinales, y su magnitud dependerá de la carga desconectada, de la estructura del sistema y las características de la fuente.	Mediante instalación de reactores paralelo, bancos de condensadores serie, o compensadores estáticos.	
	RESONANCIA Y FERRORRESONANCIA	Generalmente se originan al activar redes con elementos capacitivos grandes y reactancias saturables. Pueden alcanzar valores muy elevados.	De-sintonizando el sistema de la frecuencia de resonancia, cambiando la configuración de la red, o instalando resistencias de amortiguamiento.	
	SOBRETENSIONES LONGITUDINALES DURANTE SINCRONIZACIÓN	Pueden alcanzar una amplitud igual a dos veces el valor de la tensión de operación fase-tierra, con una duración que irá de varios segundos a varios minutos.		
DE FRENTE LENTO	ENERGIZACIÓN Y REENGANCHE DE LÍNEAS	Pueden originar sobretensiones fase-tierra y fase-fase; su amplitud dependerá del tipo de interruptor, el tipo de red, la potencia de cortocircuito en el punto de maniobra, la longitud de la línea, así como de la terminación y la compensación de la línea.	Mediante pre-inserción de resistencias o control del instante de cierre. Transformadores de tensión inductivos, instalados en los terminales de la línea, reducen la carga atrapada en las fases, después de la desconexión.	Son adecuados en redes con sobretensiones temporales moderadas. La dependencia de la tensión residual respecto al frente de onda de la corriente de descarga es despreciable. Se instalan generalmente entre fases y tierra.
	CORTOCIRCUITOS Y ELIMINACIÓN DE CORTOCIRCUITOS	Pueden originar sobretensiones fase-tierra. Los valores máximos serán: - Iniciación $(2k-1) * V_{sis} * \sqrt{\frac{2}{3}}$ - Eliminación $2 * V_{sis} * \sqrt{\frac{2}{3}}$ (k = factor de falta a tierra)	El empleo de varistores puede limitar las sobretensiones de maniobra con líneas, reactores o condensadores.	
	MANIOBRAS CON CORRIENTES INDUCTIVAS O CAPACITIVAS	El recabado de interruptores durante la interrupción de corrientes inductivas o capacitivas puede originar sobretensiones muy peligrosas.		
	PÉRDIDA BRUSCA DE CARGA	Pueden ser importantes en redes en las que las sobretensiones de energización y reenergización están controladas a valores inferiores a 2 pu.		
DE FRENTE RÁPIDO	SOBRETENSIONES POR RAYOS EN LÍNEAS AÉREAS	Son originadas por rayos directos a un conductor de fase o un cebado inverso, o inducidas por rayos a tierra cercanos a la línea. Las tensiones inducidas por rayos son importantes en redes de Gama I.	Mediante diseño apropiado de las líneas: instalando cables de guarda contra rayos directos; reduciendo la impedancia de puesta a tierra en los apoyos para reducir las sobretensiones por cebado inverso.	Su efectividad depende de la amplitud y la forma de onda del rayo, la impedancia de onda del equipo protegido, la distancia entre pararrayos y equipo protegido, la longitud de los cables de conexión. Las corrientes de descarga de los pararrayos se deben seleccionar de acuerdo con los siguientes criterios: - Gama I: 5 a 10 kA - Gama II: 10 a 20 kA
	SOBRETENSIONES POR RAYOS EN ESTACIONES RECEPTORAS	La amplitud de las sobretensiones por rayos es tan elevada que la coordinación de aislamiento se basará generalmente en este tipo de tensiones.		
	MANIOBRAS Y CORTOCIRCUITOS	Se pueden originar en maniobras con equipos conectados a la red mediante cables muy cortos. La máxima sobretensión dependerá del tipo y el comportamiento del equipo de maniobra, y pueden variar entre 2 y 3 veces la tensión de nominal de cresta.	Mediante selección del equipo de maniobra adecuado: interruptores libres de recabados, preinserción de resistencias limitadoras, control del instante de la maniobra.	

Bibliografía

- [1] P. Chowdhuri (ed.), "Power System Transients", Sección 10 de *The Electric Power Engineering Handbook*, L. L. Grigsby (ed.), CRC Press, 2000.
- [2] P. Chowdhuri, *Electromagnetic Transients in Power Systems*, RSP - John Wiley, 1996.
- [3] A. Greenwood, *Electrical Transients in Power Systems*, John Wiley, 1991.
- [4] A. P. Sakis Meliopoulos, *Power System Grounding and Transients*, Marcel Dekker, 1988.
- [5] H. W. Dommel, "Digital Computer Solution of Electromagnetic Transients in Single- and Multi-Phase Networks", *IEEE Trans. on Power Apparatus and Systems*, vol. 88 (2), pp. 734-741, 1969.
- [6] H. W. Dommel, "Nonlinear and Time-Varying Elements in Digital Simulation of Electromagnetic Transients", *IEEE Trans. on Power Apparatus and Systems*, vol. 90 (6), pp. 2561-2567, 1971.
- [7] H. W. Dommel y W. Scott Meyer, "Computation of Electromagnetic Transients", *Proc. of IEEE*, vol. 62 (7), pp. 983-993, 1974.
- [8] "Digital Simulation of Electrical Transient Phenomena", A. Phadke (ed.), IEEE Tutorial Course, Course Text 81 EHO173-5-PWR, 1981.
- [9] H. W. Dommel, *Electromagnetic Transients Program. Reference Manual (EMTP Theory Book)*, Bonneville Power Administration, Portland, 1986.
- [10] J. A. Martínez-Velasco (ed.), *Computer Analysis of Electric Power System Transients*, IEEE Press, 1997.
- [11] H. W. Dommel, "Techniques for Analyzing Electromagnetic Transients", *IEEE Computer Applications in Power*, vol. 10 (3), pp. 18-21, 1997.
- [12] CIGRE WG 33.02, "Guidelines for Representation of Network Elements when Calculating Transients", CIGRE Brochure 63, 1990.
- [13] "Modeling and Analysis of System Transients Using Digital Programs", A. M. Gole, J. A. Martínez-Velasco y A. J. F. Keri (eds.), IEEE PES Special Publication, TP-133-0, 1999.
- [14] A. P. Sakis Meliopoulos, "Lightning and Overvoltage Protection", Sección 27 de *Standard Handbook for Electrical Engineers*, D. G. Fink y H. Wayne Beaty (eds.), McGraw-Hill, 2000.
- [15] A. R. Hileman, *Insulation Coordination for Power Systems*, Marcel Dekker, 1999.
- [16] K. Ragaller (ed.), *Surges in High-Voltage Networks*, Plenum Press, 1980.
- [17] F. Crespo, *Sobretensiones en las Redes de Alta Tensión*, Asinel, 1975.
- [18] CIGRE WG 33.10 y IEEE TF on TOV, "Temporary Overvoltages: Causes, Effects and Evaluation", *CIGRE 1990 Session*, Paper 33-210, 1990.
- [19] CIGRE WG 13.05, "The Calculation of Switching Surges", *Electra*, vol. 19, pp. 67-78, 1971.
- [20] CIGRE WG 13.02, "Switching Overvoltages in EHV and UHV Systems with Special Reference to Closing and Reclosing Transmission Lines", *Electra*, vol. 30, pp. 70-122, 1973.
- [21] CIGRE WG 33.01, "Guide to Procedures for Estimating the Lightning Performance of Transmission Lines", CIGRE Brochure 63, 1991.
- [22] IEEE Std 1243, "IEEE Guide for Improving the Lightning Performance of Transmission Lines", 1997.
- [23] IEEE Std 1410, "IEEE Guide for Improving the Lightning Performance of Electric Power Overhead Distribution Lines", 1997.
- [24] CIGRE WG 33/13.09, "Very Fast Transient Phenomena Associated with Gas Insulated Substations", *CIGRE 1988 Session*, Paper No. 33-13, 1988.

- [25] IEC 71-1, "Insulation Co-ordination. Part 1: Definitions, Principles and Rules", 1993. Existe traducción al español en UNE-EN 60071-1 "Coordinación de Aislamiento. Parte 1: Definiciones, Principios y Reglas", 1997.
- [26] IEC 71-2, "Insulation Co-ordination. Part 2: Application Guide", 1996. Existe traducción al español en UNE-EN 60071-2 "Coordinación de Aislamiento. Parte 2: Guía de Aplicación", 1999.

Capítulo 9

Análisis de faltas y protecciones

JOSÉ CIDRÁS PIDRE Y JOSÉ FÉLIX MIÑAMBRES ARGÜELLES

9.1. Introducción

En una red eléctrica, se dice que se produce un cortocircuito cuando dos o más puntos que en condiciones normales de funcionamiento se encuentran a diferente potencial, se ponen accidentalmente en contacto a través de una pequeña o nula impedancia. En general, se producen al fallar el aislamiento, pudiendo esto ocurrir por diversas causas: pérdida de las propiedades aislantes del medio (envejecimiento, calentamiento, contaminación...), sobretensiones (tanto de origen externo como interno) o efectos mecánicos diversos (roturas, deformaciones, desplazamientos...).

Por tanto, el estudio de los cortocircuitos debe estar presente en la planificación y en la explotación de una red eléctrica, resultando un condicionante directo para cuestiones tan importantes como la correcta elección y el dimensionamiento de los conductores, soportes y de las protecciones del sistema.

Los efectos perjudiciales que las faltas provocan son numerosos y están asociados, fundamentalmente, a las corrientes elevadas que se pueden establecer en el sistema y que a menudo pueden superar en varios órdenes de magnitud a los valores existentes en condiciones normales de funcionamiento, aunque en ocasiones también pueden provocar fenómenos de sobretensiones. Los principales efectos pueden resumirse en los siguientes:

- Calentamiento de conductores por efecto Joule, que en función del valor y la duración de la corriente de cortocircuito puede provocar deterioros irreversibles.
- Esfuerzos electrodinámicos, con la posibilidad de roturas y desplazamientos bruscos que pueden dar lugar a nuevas faltas.
- Variaciones de tensión, con caídas en las fases involucradas en el cortocircuito y eventuales elevaciones en las otras fases.

El análisis de una red eléctrica en condiciones de cortocircuito presentará una mayor o menor dificultad en función de los objetivos que se pretendan conseguir, de la complejidad

de la red en estudio y del grado de precisión buscado. Si el objetivo es el cálculo de una instalación industrial de media y baja tensión, se pretenderá obtener la máxima corriente durante el cortocircuito (generalmente correspondiente a un cortocircuito equilibrado) con el fin de determinar el poder de corte de los interruptores y los límites térmicos y dinámicos en los diversos aparatos y conductores de la instalación. Por el contrario, si lo que se pretende es ajustar las protecciones de una red de alta tensión mallada, será necesario calcular intensidades de cortocircuito en cualquier punto y ante cualquier tipo de falta (tanto equilibradas como desequilibradas).

Típicamente los cortocircuitos se clasifican en equilibrados y desequilibrados. Para el primer caso las tres fases están involucradas en el cortocircuito al mismo tiempo y en el mismo punto, siendo el circuito resultante también equilibrado. De esta forma el estudio puede plantearse mediante un único circuito monofásico equivalente.

Por el contrario, si durante el cortocircuito el sistema que resulta es desequilibrado (no todas las fases están involucradas por igual), es necesario recurrir a modelos trifásicos que mediante técnicas matemáticas adecuadas (componentes simétricas) pueden, en general, reducirse a tres circuitos monofásicos localmente acoplados.

9.2. Relación entre los regímenes transitorio y estacionario en cortocircuitos

Las técnicas de modelado y estudio habituales en las redes eléctricas se pueden dividir en tres regímenes: estacionario, electromecánico y electromagnético. En el caso de análisis de faltas, se tiene un proceso claramente electromagnético donde la red en una situación estacionaria sufre una modificación brusca de su topología. De este modo, para el análisis de una determinada falta, la red debe modelarse por las ecuaciones diferenciales de sus elementos. Esto, que en ciertos casos puede realizarse, no es práctico cuando se requiere el cálculo de redes con cientos de nudos y ramas. Por ello, las normas existentes y el cálculo habitual de cortocircuitos admiten como suficiente aproximación el modelado estacionario de la red.

Con la finalidad de establecer las ecuaciones del comportamiento transitorio de una red ante una falta, se estudiará un caso sencillo constituido por un circuito RL en serie con una fuente de tensión que alimenta a una carga Y , como se muestra en la Figura 9.1.a, sobre la que se realiza un cortocircuito que se representa en la Figura 9.1.b.

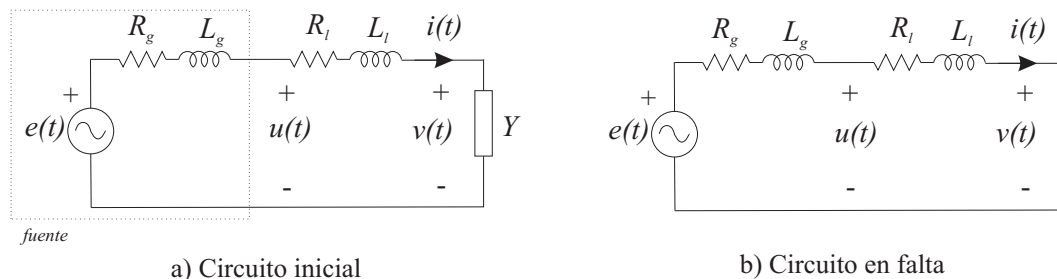


Figura 9.1. Circuito antes y durante el cortocircuito.

La siguiente ecuación diferencial representa el comportamiento del anterior circuito en falta:

$$e(t) = Ri + L \frac{di}{dt} \quad (9.1)$$

donde $R = R_g + R_l$ y $L = L_g + L_l$.

La solución de la ecuación (9.1) es del tipo:

$$i(t) = Ke^{-\frac{R}{L}t} + i_\infty(t)$$

donde $i_\infty(t)$ es la intensidad en estado estacionario en el circuito en falta, y K es una constante que se obtiene de la continuidad de la corriente en el instante inicial, es decir, $K = i(0) - i_\infty(0)$.

Para un valor genérico de $e(t) = \sqrt{2}E \cdot \text{sen}(\omega t + \theta)$ resulta:

$$i(t) = \left(i(0) - \sqrt{2}I_{cc}\text{sen}(\theta - \varphi) \right) e^{-\frac{R}{L}t} + \sqrt{2}I_{cc}\text{sen}(\omega t + \theta - \varphi) \quad (9.2)$$

donde

$$\begin{aligned} I_{cc} &= \frac{E}{\sqrt{R^2 + (L\omega)^2}} \\ \text{tg}(\varphi) &= \frac{L\omega}{R} = \frac{X}{R} \\ i(0) &= \sqrt{2}I_0\text{sen}(\theta - \varphi_0) \\ I_0 &= \frac{E}{\sqrt{(R + R_c)^2 + (L\omega + X_c)^2}} \\ \text{tg}(\varphi_0) &= \frac{L\omega + X_c}{R + R_c} \\ R_c + jX_c &= \frac{1}{Y} \end{aligned}$$

La expresión anterior de la intensidad (9.2) se compone de dos funciones diferentes: la exponencial decreciente y la sinusoidal. La primera sólo tiene existencia en el denominado estado transitorio y se extingue con el tiempo, siendo prácticamente nula al cabo de un tiempo $t = 5L/R$ seg. (comienzo del estado estacionario). Esta componente unidireccional o asimétrica se corresponde con la respuesta natural del circuito o solución de la ecuación homogénea. La segunda función, sinusoidal, también denominada componente periódica o simétrica, representa la respuesta estacionaria o permanente del circuito (solución particular de la ecuación diferencial).

Por otra parte, debido al reducido valor que presentan los elementos serie R y L (que modelan el generador y el transporte de la energía eléctrica) frente al valor de la carga, se acostumbra a despreciar la intensidad en condiciones nominales I_0 respecto a la de cortocircuito I_{cc} . Es decir, la intensidad $i(t)$ prácticamente no se ve afectada por la intensidad existente en condiciones iniciales $i(0)$, y la ecuación puede reducirse a:

$$i(t) = -\sqrt{2}I_{cc}\text{sen}(\theta - \varphi)e^{-\frac{R}{L}t} + \sqrt{2}I_{cc}\text{sen}(\omega t + \theta - \varphi)$$

El carácter sinusoidal de las funciones de $i(t)$ da como resultado que su valor máximo teórico es $2\sqrt{2}I_{cc}$, el cual se presenta en las condiciones de $R = 0$, $\theta - \varphi = -90^\circ$ y $\omega t = \pi$. De admitir el predominio inductivo en las redes eléctricas, es decir, $L\omega > R$, resulta que los máximos valores de $i(t)$ se presentan para $\theta = 0^\circ$ y $\omega t = \pi, 3\pi, 5\pi, \dots$. Por tanto, si las condiciones de intensidades instantáneas máximas se tienen para $\theta = 0^\circ$, la evolución (envolvente) de los máximos valores de la intensidad, que se denominará envolvente de las intensidades máximas $i_{\text{máx}}(t)$, puede expresarse de una forma aproximada por:

$$i_{\text{máx}}(t) = i(0)e^{-\frac{R}{L}t} + \sqrt{2}I_{cc}\text{sen}(\varphi) \left(1 + e^{-\frac{R}{L}t}\right) \quad (9.3)$$

Y de no considerar la intensidad inicial $i(0)$, se tiene:

$$i_{\text{máx}}(t) = \sqrt{2}I_{cc}\text{sen}(\varphi) \left(1 + e^{-\frac{R}{X}\omega t}\right) \quad (9.4)$$

De este modo, se ha establecido una forma de evaluar la intensidad transitoria máxima producida por un cortocircuito, $i_{\text{máx}}$, a partir del cálculo de la intensidad del cortocircuito en régimen permanente I_{cc} . Obsérvese que si la intensidad $i_{\text{máx}}(t)$ se divide por el factor $\sqrt{2}$ se tiene la evolución de la intensidad eficaz $I(t)$.

Si la expresión (9.4) de la intensidad instantánea se aplica a cualquier red eléctrica genérica, resulta la expresión general:

$$i_{\text{máx}}(t) = \sqrt{2}I_{cc}\text{sen}(\varphi_{\text{eq}}) \left(1 + e^{-\frac{R_{\text{eq}}}{X_{\text{eq}}}\omega t}\right)$$

donde R_{eq} , X_{eq} y φ_{eq} son, respectivamente, la resistencia, reactancia y ángulo equivalentes vistas desde el nudo de la falta, que se obtienen a partir de la matriz de impedancias nodales (impedancia Thevenin vista desde el nudo de la falta). Para los casos de redes con elementos en paralelo (cargas, capacidades parásitas, transformadores con regulación...) las normas recomiendan que la impedancia equivalente se calcule sin considerar dichos elementos.

El primer instante en que la envolvente de las intensidades máximas $i_{\text{máx}}(t)$, expresadas en (9.3), coincide con la función $i(t)$, se presenta cuando ésta pasa por un valor máximo, que se corresponde aproximadamente con $\omega t = \pi$, $t = 10$ ms (1/2 ciclo). Este valor máximo de la intensidad se denomina intensidad de pico, de cresta o de choque. En consecuencia, se puede admitir que el mayor valor de la intensidad que se puede presentar en un cortocircuito (caso más desfavorable) como el del circuito de la figura será:

$$I_{\text{pico}} = \sqrt{2}I_{cc}\text{sen}(\varphi) \left(1 + e^{-\frac{R}{X}\pi}\right)$$

Del mismo modo, la intensidad mínima de cortocircuito se presenta para valores de $\theta - \varphi = 0^\circ$ y $\omega t = \pi$, tal que:

$$I_{\text{mín}} = \sqrt{2}I_{cc}$$

La norma IEC 909 recomienda tres métodos para determinar la intensidad de pico:

- El método A, es el menos exacto, y define la intensidad de pico por:

$$I_{\text{pico}} \approx \sqrt{2}I_{cc} \left(1,02 + 0,98e^{-\frac{R}{X}3}\right)$$

donde R/X es el menor valor existente de todas las ramas de la red.

- Para el método B, la intensidad de pico de cortocircuito puede calcularse por:

- Baja tensión

$$I_{\text{pico}} \approx 1,8\sqrt{2}I_{cc}$$

- Media tensión

$$I_{\text{pico}} \approx 1,15\sqrt{2}I_{cc} \left(1,02 + 0,98e^{-\frac{R}{X}3}\right)$$

- Alta tensión

$$I_{\text{pico}} \approx 2\sqrt{2}I_{cc}$$

donde R y X son la parte real e imaginaria de la impedancia nodal en el punto de defecto.

- El método C, más exacto que el anterior, define la intensidad de pico por:

$$I_{\text{pico}} \approx \sqrt{2}I_{cc} \left(1,02 + 0,98e^{-\frac{R}{X}3}\right)$$

donde la relación R/X se establece ahora por: $\frac{R}{X} = \frac{R_c}{X_c} \frac{20}{50}$, siendo R_c y X_c , respectivamente, la parte real y la parte imaginaria de la impedancia nodal en el punto de cortocircuito definida para una frecuencia estacionaria en la red de 20 Hz, si la frecuencia nominal de la red es de 50 Hz. Para el caso de una frecuencia nominal de 60 Hz (típica en el continente americano) la frecuencia de cálculo debe ser de 24 Hz y la relación es $\frac{R}{X} = \frac{R_c}{X_c} \frac{24}{60}$.

Como se extrae de las ecuaciones anteriores, la consecuencia más evidente de un cortocircuito es la elevada intensidad que se produce, pasando de valores I_0 , de amperios en condiciones nominales a miles de amperios, I_{cc} , en condiciones de falta. Esto ocasiona fenómenos térmicos y mecánicos severos en los equipos y elementos de las instalaciones eléctricas. Por ello, este tipo de faltas deben ser eliminadas lo más rápido posible aislando el cortocircuito del generador. Para esta función se dispone de los relés de protección y de los interruptores automáticos (elementos de corte). Los primeros sirven para detectar la existencia de la falta y enviar una orden al interruptor automático para que realice el aislamiento de la falta y, de este modo, se interrumpa el suministro de intensidad a la falta.

El funcionamiento del elemento de corte se analiza en las condiciones más desfavorables que se corresponde con la situación de máxima intensidad. De este modo, si en el circuito de la Figura 9.1 se dispone de un interruptor automático entre la generación y el cortocircuito (Figura 9.2), éste habrá de ser diseñado y calculado para que soporte las condiciones siguientes [1]:

- De forma permanente y cerrado (sin actuar), la intensidad nominal en régimen estacionario I_n , que es una intensidad periódica senoidal.
- Durante el tiempo desde el comienzo de la falta ($t = 0$) hasta su eliminación ($t = t_c$) y cerrado (sin actuar), la intensidad definida por:

$$i_{\text{máx}} = \sqrt{2}I_{cc}\text{sen}(\varphi) \left(1 + e^{-\frac{R}{L}t} \right)$$

- Se define como poder de cierre del interruptor al valor de pico de la corriente que circula por él, cuando se cierra sobre un cortocircuito.
- Para realizar la eliminación del defecto, el interruptor tiene que ser capaz de cortar la intensidad máxima en la situación más desfavorable. Si se admite que el tiempo de actuación del elemento de corte, denominado tiempo de corte t_c , se sitúa entre 0,06 y 0,08 segundos (3 y 4 ciclos), la intensidad máxima viene dada por:

$$I_{\text{corte}} = \sqrt{2}I_{cc}\text{sen}(\varphi) \left(1 + e^{-\frac{R}{L}t_c} \right)$$

Debido a la diferencia en el corte de una intensidad periódica a una unidireccional, se distingue como componente continua I_a a la componente unidireccional de la intensidad de corte, y se expresa por:

$$I_a = \sqrt{2}I_{cc}e^{-\frac{R}{L}t_c}$$

Con la finalidad de caracterizar los elementos de corte, también se define la denominada intensidad de corte eficaz total I :

$$I = \sqrt{I_a^2 + I_{cc}^2}$$

Otro parámetro habitual en la identificación de los interruptores es el denominado poder de corte, que se define por $S_{\text{corte}} = \sqrt{3}U_n I$, donde U_n es la tensión nominal e I la denominada intensidad de corte en valores eficaces.

Como se había comentado anteriormente, la orden de apertura del elemento de corte es suministrada por el denominado relé de protección, después de detectar la presencia del cortocircuito, y éste debe ser detectado en la situación menos favorable de $I_{\text{mín}} = \sqrt{2}I_{cc}$.

En resumen, en el cálculo de intensidades de cortocircuito son de interés las siguientes intensidades:

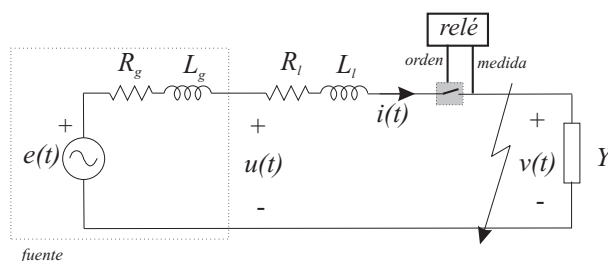


Figura 9.2. Sistema de protección contra cortocircuitos en una red eléctrica.

- Desde el punto de vista del elemento de corte: envolvente de las intensidades máximas $i_{\text{máx}}(t)$, intensidad de pico I_{pico} , intensidad máxima en el instante de apertura (I_{corte}), intensidad de corte asimétrica I_a , intensidad de corte eficaz total I e intensidad de cortocircuito permanente I_{cc} .
- Desde el punto de vista de actuación del relé: fundamentalmente, intensidad mínima de cortocircuito $I_{\text{mín}}$.

9.3. Cortocircuitos equilibrados en redes

Hasta aquí se han establecido las intensidades máximas de cortocircuito en circuitos eléctricos sencillos. A continuación, se estudiarán las mencionadas intensidades en el caso de redes eléctricas equilibradas de cualquier dimensión. Los resultados que se han obtenido para un cortocircuito en un circuito RL monofásico, se pueden aplicar directamente al caso de cortocircuito trifásico equilibrado en un circuito RL trifásico, utilizando el correspondiente circuito monofásico equivalente. Para ello, se establecerán algunas hipótesis habituales en el cálculo de intensidades de cortocircuito:

- Se considera que en las inmediaciones del cortocircuito no se tienen elementos dinámicos (generadores y motores), y las fuentes se simulan por una fuente de tensión. Posteriormente se estudiará el efecto de los elementos dinámicos en el cortocircuito.
- La red inicial, previa a la falta, se considera totalmente en vacío o en carga. Si se considera en carga, su situación estacionaria se suele determinar a partir de un flujo de potencia. Sin embargo, el supuesto de vacío se puede considerar suficientemente realista en la medida que las intensidades de cortocircuito son muy elevadas respecto a las intensidades nominales existentes en la red antes de la falta. Además, esta hipótesis de vacío permite establecer la relación R/X de la expresión exponencial de (9.2) y, por tanto, determinar la correspondencia entre la red y los circuitos sencillos serie que se han estudiado.

En términos generales el cálculo de las intensidades estacionarias de un cortocircuito trifásico en una red equilibrada se puede desarrollar a partir de los métodos de análisis de circuitos eléctricos. De este modo, la presencia de un cortocircuito trifásico en el nudo **f** de la red de la Figura 9.3.a, se analiza considerando las fuentes de tensión con un valor prefijado: con su valor nominal y ángulo nulo ($1|0$) en el caso de vacío, y con el valor $V|\theta$ obtenido del flujo de potencia en el caso de red en carga.

Supuesta la red de la Figura 9.3.a, las intensidades de cortocircuito pueden calcularse mediante el análisis circular o nodal de circuitos eléctricos. Sin embargo, por su generalidad, aquí se presenta únicamente el cálculo de la red mediante el análisis nodal. Para ello, las fuentes de tensión se transforman en fuentes de intensidad, tal y como se muestra en la Figura 9.3.b donde las impedancias Z_i y Z_j , que están en paralelo con las fuentes de intensidad, se consideran incluidas en el bloque RED'. De este modo, el análisis nodal de este circuito (antes de la falta) viene dado por:

$$\mathcal{Y} \cdot \mathcal{U} = \mathcal{I}_g \quad (9.5)$$

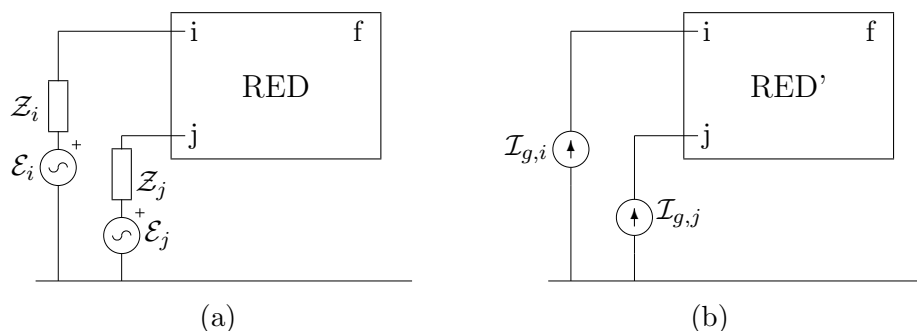


Figura 9.3. Red antes del cortocircuito.

donde \mathcal{Y} es la matriz de admitancias nodales de la red, \mathcal{U} es el vector de las tensiones de los nudos antes del cortocircuito e \mathcal{I}_g es el vector de fuentes de intensidad que alimentan el sistema.

Durante el cortocircuito equilibrado en el nudo f , la red queda representada por el circuito de la Figura 9.4.a, que aplicando la regla de sustitución es equivalente al circuito de la Figura 9.4.b.

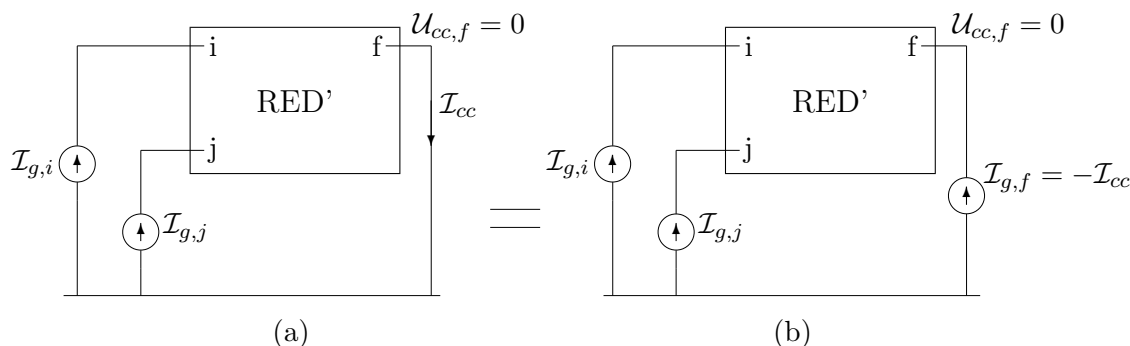


Figura 9.4. Red durante el cortocircuito en el nudo f .

De aplicar el principio de superposición, el circuito de la Figura 9.4.b puede descomponerse en los dos circuitos que se muestran en la Figura 9.5.

El primero de ellos es idéntico al circuito inicial (anterior al cortocircuito) y, en consecuencia, responde a las ecuaciones (9.5). El segundo es un circuito con una única fuente de corriente conectada en el nudo de la falta (f) de valor $-\mathcal{I}_{cc}$, y cuyas ecuaciones nodales son:

$$\mathcal{Y} \cdot \Delta\mathcal{U} = \Delta\mathcal{I}_g$$

donde $\Delta\mathcal{I}_g$ es un vector con un único valor no nulo ($-\mathcal{I}_{cc}$) correspondiente al nudo f .

Utilizando la matriz de impedancias nodales $\mathcal{Z} = \mathcal{Y}^{-1}$, podemos invertir la anterior relación resultando:

$$\Delta\mathcal{U} = \mathcal{Z} \cdot \Delta\mathcal{I}_g \tag{9.6}$$

Dado que en el nudo f la tensión $\mathcal{U}_{cc,f}$ durante el cortocircuito es cero y teniendo en cuenta que $\mathcal{U}_{cc,f} = \mathcal{U}_f + \Delta\mathcal{U}_f$, se cumple que $\Delta\mathcal{U}_f = -\mathcal{U}_f$. Por consiguiente, de la ecuación

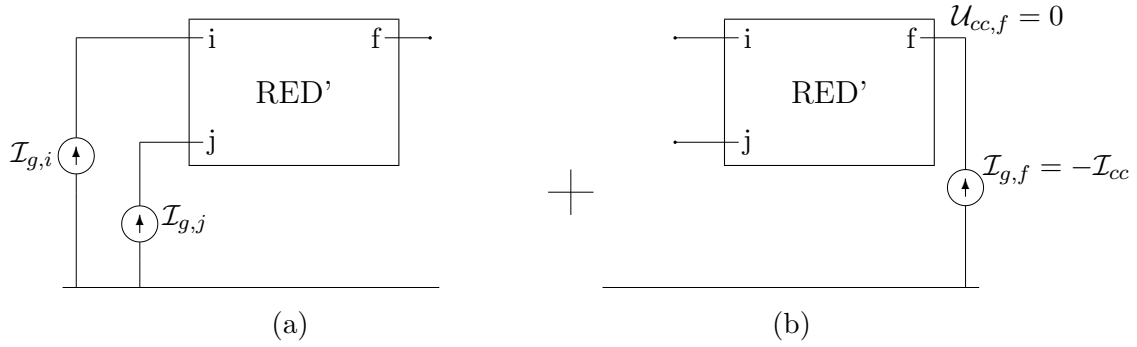


Figura 9.5. Descomposición de la red durante el cortocircuito en dos circuitos.

correspondiente al nudo **f** se tiene:

$$\Delta \mathcal{U}_f = -\mathcal{U}_f = -\mathcal{Z}_{ff} \mathcal{I}_{cc}$$

donde \mathcal{Z}_{ff} es el elemento de la diagonal de \mathcal{Z} correspondiente al nudo **f**.

Y consecuentemente:

$$\mathcal{I}_{cc} = \frac{\mathcal{U}_f}{\mathcal{Z}_{ff}} \tag{9.7}$$

En la norma IEC-909 se definen los valores a considerar para la tensión en el punto de la falta, tal y como se muestra en la Tabla 9.1. Los valores definidos para la máxima intensidad de cortocircuito se utilizarán para determinar las intensidades de pico; mientras que los de mínima para el cálculo de la intensidad de cortocircuito mínima que se requiere para el ajuste de los relés de protección.

Cuadro 9.1. Valores de tensión a considerar según IEC-909.

Tensión nominal	Para intensidad de cortocircuito máxima	Para intensidad de cortocircuito mínima
Baja tensión (hasta 1 kV)	1.00 - 1.05	0.95 - 1.00
Media tensión (hasta 35 kV)	1.10	1.00
Alta tensión	1.10	1.00

A partir de la intensidad de cortocircuito trifásica, \mathcal{I}_{cc} , se define la potencia de cortocircuito S_{cc} en el nudo **f**, como la potencia aparente (en kVA o MVA) dada por el producto:

$$S_{cc} = \sqrt{3} \mathcal{U}_f \mathcal{I}_{cc} \tag{9.8}$$

Mediante las ecuaciones (9.6) se pueden calcular las tensiones en los restantes nudos según:

$$\mathcal{U}_{cc_k} = \mathcal{U}_k + \Delta \mathcal{U}_k = \mathcal{U}_k - \mathcal{Z}_{fk} \mathcal{I}_{cc}$$

Y conocidas las tensiones en todos los nudos, se pueden obtener las corrientes en cualquier rama, por:

$$\mathcal{I}_{kj} = \frac{\mathcal{U}_{cc_k} - \mathcal{U}_{cc_j}}{z_{kj}}$$

donde z_{kj} es la impedancia de la rama comprendida entre los nudos **k** y **j** (no debe confundirse con el elemento \mathcal{Z}_{kj} de la matriz \mathcal{Z} de impedancias nodales).

El cálculo de la intensidad en un cortocircuito trifásico, además del interés para el estudio de los esfuerzos térmicos, dinámicos y protecciones en los elementos de la red, lo tiene para definir un modelo agregado de la red. Para ello, basta recordar que el teorema de Thevenin-Norton permite reducir una porción de red monofásica a un dipolo con una fuente de tensión (intensidad) en serie (en paralelo) con una impedancia equivalente. Esta fuente e impedancia equivalentes se definen a partir de la tensión en vacío y de la intensidad de cortocircuito, ambos en el nudo de la red objeto de la agregación. En el análisis de cortocircuitos realizado, la tensión Thevenin se corresponde con la tensión previa al cortocircuito de valor \mathcal{U}_f , y la intensidad de cortocircuito de valor \mathcal{I}_{cc} se determina según (9.7). Por tanto, el circuito Thevenin visto desde el nudo **f** es el mostrado en la Figura 9.6.

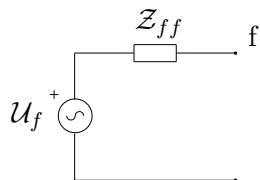


Figura 9.6. Equivalente Thevenin del circuito, visto desde el punto **f**.

En la práctica, los valores del circuito Thevenin se suelen dar en términos de la tensión nominal V (kV) y la potencia de cortocircuito S_{cc} (MVA) definida en (9.8). De este modo, a partir de un sencillo cálculo se tiene:

$$Z_{ff} = \frac{V^2}{S_{cc}} \ (\Omega)$$

9.4. Componentes simétricas

La teoría de las componentes simétricas desarrollada por Fortescue [2], permite descomponer cualquier sistema de variables trifásicas desequilibradas en la suma de otros tres sistemas trifásicos: dos de ellos equilibrados (de secuencia directa e inversa) y otro con la misma variable en las tres fases (denominado de secuencia homopolar). En lo sucesivo al sistema trifásico de secuencia directa se le notará por 1, al de secuencia inversa por 2 y al homopolar por 0.

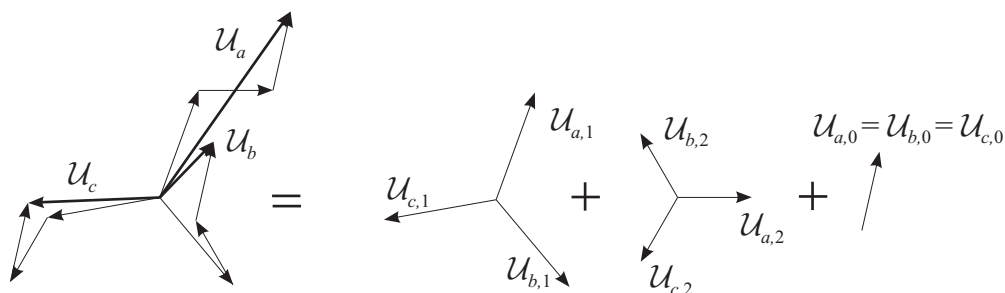


Figura 9.7. Descomposición de un sistema trifásico en sus componentes simétricas.

En la Figura 9.7 se muestra la descomposición de un sistema trifásico desequilibrado de tensiones $(\mathcal{U}_a, \mathcal{U}_b, \mathcal{U}_c)$ en los tres sistemas directo $(\mathcal{U}_{a,1}, \mathcal{U}_{b,1}, \mathcal{U}_{c,1})$, inverso $(\mathcal{U}_{a,2}, \mathcal{U}_{b,2}, \mathcal{U}_{c,2})$ y homopolar $(\mathcal{U}_{a,0}, \mathcal{U}_{b,0}, \mathcal{U}_{c,0})$, tal que:

$$\begin{pmatrix} \mathcal{U}_a \\ \mathcal{U}_b \\ \mathcal{U}_c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathcal{U}_{a,0} \\ \mathcal{U}_{b,0} \\ \mathcal{U}_{c,0} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \mathcal{U}_{a,1} \\ \mathcal{U}_{b,1} \\ \mathcal{U}_{c,1} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \mathcal{U}_{a,2} \\ \mathcal{U}_{b,2} \\ \mathcal{U}_{c,2} \end{pmatrix}$$

Si tenemos en cuenta la relación entre las variables en cada una de las secuencias, y tomando como referencia la fase a , resulta:

$$\begin{pmatrix} \mathcal{U}_a \\ \mathcal{U}_b \\ \mathcal{U}_c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathcal{U}_{a,0} \\ \mathcal{U}_{a,0} \\ \mathcal{U}_{a,0} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \mathcal{U}_{a,1} \\ a^2 \cdot \mathcal{U}_{a,1} \\ a \cdot \mathcal{U}_{a,1} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \mathcal{U}_{a,2} \\ a \cdot \mathcal{U}_{a,2} \\ a^2 \cdot \mathcal{U}_{a,2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & a^2 & a \\ 1 & a & a^2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \mathcal{U}_{a,0} \\ \mathcal{U}_{a,1} \\ \mathcal{U}_{a,2} \end{pmatrix}$$

donde $a = 1 \angle 120^\circ$.

Considerando como norma general que las variables de las secuencias siempre se refieren a la fase a , se puede simplificar la notación admitiendo: $\mathcal{U}_1 \equiv \mathcal{U}_{a,1}$, $\mathcal{U}_2 \equiv \mathcal{U}_{a,2}$ y $\mathcal{U}_0 \equiv \mathcal{U}_{a,0}$. De este modo, la relación matricial anterior se puede expresar como:

$$\mathcal{U}_{abc} = T \cdot \mathcal{U}_{012}$$

donde la matriz T

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & a^2 & a \\ 1 & a & a^2 \end{pmatrix}$$

es una matriz regular, y representa la transformación entre las tensiones de las fases y las componentes simétricas correspondientes para la fase a . La inversa de la matriz T , que vale:

$$T^{-1} = \frac{1}{3} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & a^2 \\ 1 & a^2 & a \end{pmatrix}$$

establece la transformación de los valores de las fases en las componentes simétricas (siempre para la fase a):

$$\mathcal{U}_{012} = T^{-1} \cdot \mathcal{U}_{abc}$$

Del mismo modo, se puede realizar la transformación de un sistema trifásico de intensidades ($\mathcal{I}_a, \mathcal{I}_b, \mathcal{I}_c$) en los tres sistemas directo ($\mathcal{I}_{a,1}, \mathcal{I}_{b,1}, \mathcal{I}_{c,1}$), inverso ($\mathcal{I}_{a,2}, \mathcal{I}_{b,2}, \mathcal{I}_{c,2}$) y homopolar ($\mathcal{I}_{a,0}, \mathcal{I}_{b,0}, \mathcal{I}_{c,0}$), tal que:

$$\mathcal{I}_{abc} = T \cdot \mathcal{I}_{012} \quad ; \quad \mathcal{I}_{012} = T^{-1} \cdot \mathcal{I}_{abc}$$

La aplicación de la teoría de las componentes simétricas a los distintos elementos de una red eléctrica (líneas, transformadores, cargas, generadores) origina los denominados modelos en componentes simétricas o también conocidos como circuitos o redes de secuencias, que tienen una gran utilidad en el análisis de redes con un desequilibrio puntual, como ocurre en el cálculo de faltas.

Pero antes de describir los modelos de secuencias de los elementos de una red eléctrica, es conveniente presentar la aplicación de la teoría de componentes simétricas desde dos enfoques distintos. El primer enfoque se establece a través de relaciones matriciales entre las tensiones e intensidades de elementos, mientras que el segundo punto de vista se fundamenta en el estudio del comportamiento del elemento ante las distintas componentes simétricas. Para ello se considera un elemento trifásico genérico, como el de la Figura 9.8, que responde a la siguiente ecuación matricial:

$$\mathcal{U}_{abc} = \mathcal{E}_{abc} - \mathcal{Z}_{abc} \cdot \mathcal{I}_{abc} \tag{9.9}$$

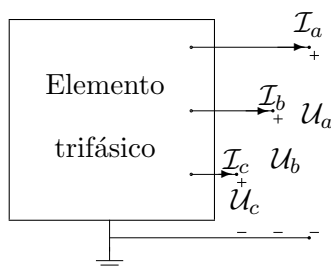


Figura 9.8. Elemento trifásico genérico.

Aplicando la teoría de componentes simétricas al mencionado elemento trifásico, se tiene:

$$\mathcal{U}_{012} = \mathcal{E}_{012} - T^{-1} \cdot \mathcal{Z}_{abc} \cdot T \cdot \mathcal{I}_{012} \tag{9.10}$$

En consecuencia, la relación entre las tensiones e intensidades de secuencias ($\mathcal{U}_0, \mathcal{U}_1, \mathcal{U}_2$) ($\mathcal{I}_0, \mathcal{I}_1, \mathcal{I}_2$), o lo que es lo mismo, el modelo del elemento en componentes simétricas queda definido por:

$$\mathcal{U}_{012} = \mathcal{E}_{012} - \mathcal{Z}_{012} \cdot \mathcal{I}_{012}$$

donde \mathcal{E}_{012} es la fuente de tensión ideal en componentes simétricas y \mathcal{Z}_{012} es la matriz de impedancias en componentes simétricas. Si el elemento trifásico es perfectamente equilibrado, la matriz \mathcal{Z}_{012} es diagonal.

El procedimiento descrito para el modelado de circuitos de secuencia es genérico, pero es posible otra manera más intuitiva de aplicar la teoría de las componentes simétricas, que

en el caso de elementos trifásicos equilibrados puede resultar más cómodo y práctico. Este procedimiento se basa en la descomposición de las variables trifásicas en sus secuencias directa, inversa y homopolar, y posterior utilización del principio de superposición. Para ello se parte de la descomposición del sistema trifásico \mathcal{I}_{abc} , tal que:

$$\mathcal{I}_{abc} = \mathcal{I}_{abc,0} + \mathcal{I}_{abc,1} + \mathcal{I}_{abc,2}$$

Aplicando la descomposición anterior al elemento trifásico lineal se tienen los circuitos de la Figura 9.9.

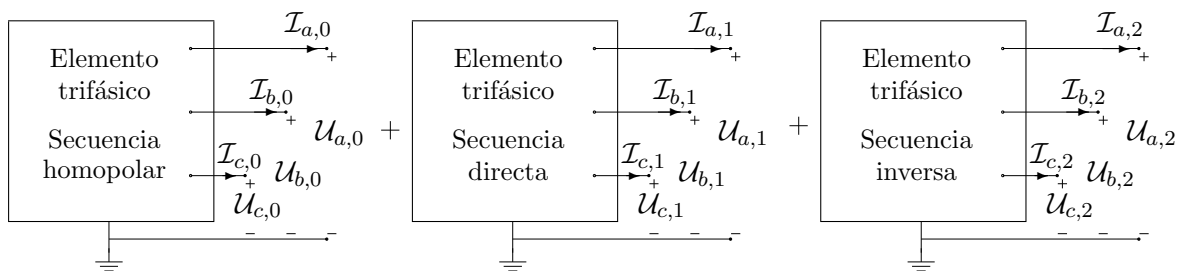


Figura 9.9. Descomposición de elemento trifásico en componentes simétricas.

Como se observa en los circuitos, el modelo del elemento para secuencia directa se puede obtener estudiando el comportamiento del elemento ante un sistema trifásico de intensidades de secuencia directa. Análogamente se pueden obtener los modelos para las secuencias inversa y homopolar. Si de cada uno de los modelos de secuencia obtenidos sólo se considera la fase *a* y se establecen las relaciones entre las tensiones e intensidades de secuencia para esa fase, se tienen los circuitos de secuencias en términos de elementos fuentes y elementos pasivos.

Este segundo enfoque, basado en la inyección de las intensidades de secuencia, es de sumo interés para entender los modelos de secuencia en elementos dinámicos, como sucede en los generadores y motores, o complejos, como en los transformadores trifásicos, donde la modelización matricial resulta poco intuitiva.

9.4.1. Modelo en componentes simétricas de una fuente de tensión trifásica

Desde el punto de vista de una red eléctrica real, una fuente de tensión trifásica se presenta cuando se realiza un modelo equivalente Thevenin trifásico de una porción de red. Sin embargo, el modelado de una máquina síncrona por una fuente de tensión trifásica, como se verá posteriormente, no es adecuado.

Una fuente de tensión trifásica se puede definir como un elemento compuesto por tres fuentes ideales de tensión ($\mathcal{E}_a, \mathcal{E}_b, \mathcal{E}_c$) en estrella y un conjunto de impedancias definidas por una matriz \mathcal{Z} (Figura 9.10). De este modo, las ecuaciones de una fuente trifásica responden

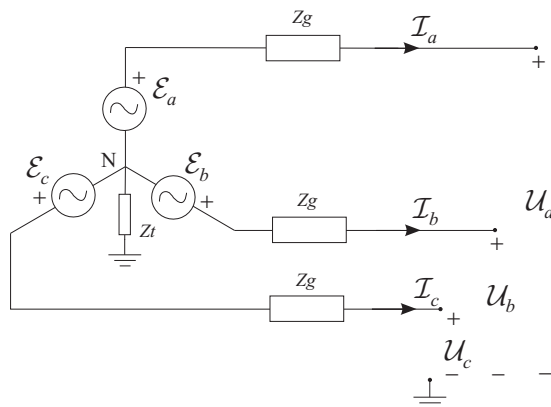


Figura 9.10. Fuente trifásica de tensión.

a la relación (9.9), que aplicadas al circuito de la Figura 9.10, resulta:

$$\begin{pmatrix} U_a \\ U_b \\ U_c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathcal{E}_a \\ \mathcal{E}_b \\ \mathcal{E}_c \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} Z_n & Z_m & Z_m \\ Z_m & Z_n & Z_m \\ Z_m & Z_m & Z_n \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} I_a \\ I_b \\ I_c \end{pmatrix}$$

donde $Z_m = z_t$ y $Z_n = z_g + z_t$.

Aplicando la teoría de componentes simétricas según (9.10) a las anteriores ecuaciones, se obtiene:

$$\begin{pmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathcal{E}_1 \\ \mathcal{E}_2 \\ \mathcal{E}_0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} Z_1 & 0 & 0 \\ 0 & Z_2 & 0 \\ 0 & 0 & Z_0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_0 \end{pmatrix}$$

donde $Z_1 = Z_2 = z_g$, $Z_0 = z_g + 3z_t$ y \mathcal{E}_{012} son las fuentes ideales de tensión de secuencia homopolar, directa e inversa. En el supuesto de que la fuente trifásica sea equilibrada y de secuencia directa, resulta $\mathcal{E}_1 = \mathcal{E}_a$, $\mathcal{E}_2 = 0$ y $\mathcal{E}_0 = 0$.

En la Figura 9.11 se representan los circuitos de secuencia directa, inversa y homopolar de la fuente trifásica analizada.

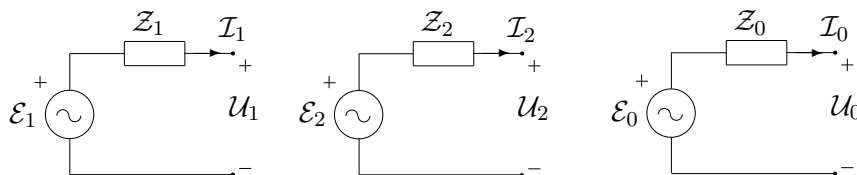


Figura 9.11. Redes de secuencia de una fuente trifásica de tensión.

9.4.2. Modelo en componentes simétricas de líneas

El funcionamiento de una línea trifásica con matrices de impedancias y admitancias por unidad de longitud Z_{abc} e \mathcal{Y}_{abc} responde a las conocidas ecuaciones diferenciales descritas

en el Capítulo 2:

$$\frac{d\mathcal{U}_{abc}}{dx} = -\mathcal{Z}_{abc} \cdot \mathcal{I}_{abc} \quad ; \quad \frac{d\mathcal{I}_{abc}}{dx} = -\mathcal{Y}_{abc} \cdot \mathcal{U}_{abc}$$

Si se expresan los vectores de tensiones y corrientes en función de sus componentes simétricas mediante la matriz de transformación T , las anteriores ecuaciones se convierten en:

$$T \cdot \frac{d\mathcal{U}_{012}}{dx} = -\mathcal{Z}_{abc} \cdot T \cdot \mathcal{I}_{012} \quad ; \quad T \cdot \frac{d\mathcal{I}_{012}}{dx} = -\mathcal{Y}_{abc} \cdot T \cdot \mathcal{U}_{012}$$

que multiplicándolas por la izquierda por la matriz de transformación inversa T^{-1} quedan como sigue:

$$\frac{d\mathcal{U}_{012}}{dx} = -T^{-1} \cdot \mathcal{Z}_{abc} \cdot T \cdot \mathcal{I}_{012} \quad ; \quad \frac{d\mathcal{I}_{012}}{dx} = -T^{-1} \cdot \mathcal{Y}_{abc} \cdot T \cdot \mathcal{U}_{012}$$

Estas últimas son las ecuaciones que representan el funcionamiento de la línea en componentes simétricas, quedando definidas en este dominio las matrices de impedancias y admitancias [3]:

$$\mathcal{Z}_{012} = T^{-1} \cdot \mathcal{Z}_{abc} \cdot T \quad ; \quad \mathcal{Y}_{012} = T^{-1} \cdot \mathcal{Y}_{abc} \cdot T$$

Cuando la línea es equilibrada (es decir, cuando se cumple que $\mathcal{Z}_{ab} = \mathcal{Z}_{ac} = \mathcal{Z}_{bc} = \mathcal{Z}_m$, $\mathcal{Z}_{aa} = \mathcal{Z}_{bb} = \mathcal{Z}_{cc} = \mathcal{Z}_p$, $\mathcal{Y}_{ab} = \mathcal{Y}_{ac} = \mathcal{Y}_{bc} = \mathcal{Y}_m$ e $\mathcal{Y}_{aa} = \mathcal{Y}_{bb} = \mathcal{Y}_{cc} = \mathcal{Y}_p$) las matrices \mathcal{Z}_{012} y \mathcal{Y}_{012} son matrices diagonales tal que:

$$\mathcal{Z}_{012} = \begin{pmatrix} \mathcal{Z}_1 & 0 & 0 \\ 0 & \mathcal{Z}_2 & 0 \\ 0 & 0 & \mathcal{Z}_0 \end{pmatrix} \quad ; \quad \mathcal{Y}_{012} = \begin{pmatrix} \mathcal{Y}_1 & 0 & 0 \\ 0 & \mathcal{Y}_2 & 0 \\ 0 & 0 & \mathcal{Y}_0 \end{pmatrix}$$

donde $\mathcal{Z}_0 = \mathcal{Z}_p + 2\mathcal{Z}_m$, $\mathcal{Z}_1 = \mathcal{Z}_2 = \mathcal{Z}_p - \mathcal{Z}_m$, $\mathcal{Y}_0 = \mathcal{Y}_p + 2\mathcal{Y}_m$ e $\mathcal{Y}_1 = \mathcal{Y}_2 = \mathcal{Y}_p - \mathcal{Y}_m$.

De esta forma, el estudio de la línea trifásica ante tensiones o corrientes desequilibradas se reduce al estudio de tres líneas monofásicas, una para cada secuencia (directa, inversa y homopolar). La condición de línea equilibrada, en la práctica sólo se da de forma aproximada, y sobre todo si la línea es transpuesta.

Utilizando modelos π de parámetros concentrados, los circuitos para cada una de las secuencias son los que se muestran en la Figura 9.12.

En el análisis de cortocircuitos no se suelen considerar las admitancias paralelo de las líneas en las redes de secuencia directa e inversa. Sin embargo, en la red de secuencia cero esta aproximación no es aceptable cuando se trata de faltas a tierra en sistemas de neutro aislado, donde las capacidades a tierra de las líneas son el único camino para que circulen las corrientes homopolares [3].

9.4.3. Modelo en componentes simétricas de transformadores

El modelo por fase de un transformador trifásico en valores por unidad, funcionando ante corrientes y tensiones equilibradas de secuencia directa, viene dado por un circuito como el de la Figura 9.13 (véase el Capítulo 2) donde \mathcal{Z}_p y \mathcal{Z}_s son respectivamente las impedancias por fase del primario y secundario (pérdidas en el cobre y reactancias de dispersión). La

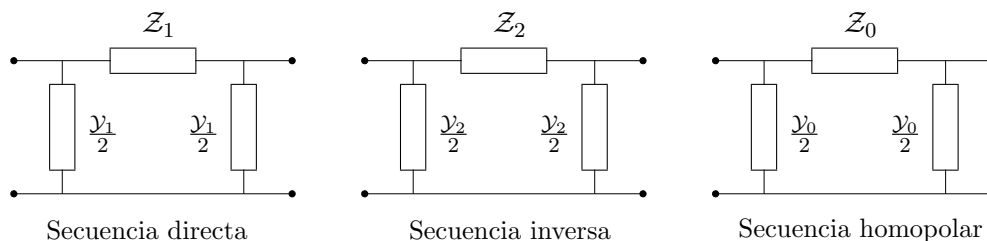


Figura 9.12. Redes de secuencia de una línea eléctrica.

rama paralelo con impedancia Z_m consta de una resistencia que modela las pérdidas en el hierro en paralelo con la reactancia de magnetización. La relación de transformación será en general compleja, para tener en cuenta el desfase α que puede establecerse entre las tensiones y corrientes del primario con las del secundario, debido a las diferentes posibilidades de conexión de los devanados (expresado habitualmente como un índice horario).

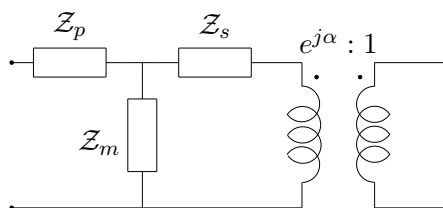


Figura 9.13. Modelo del transformador (p.u.).

Dada la naturaleza estática de los transformadores, sus impedancias son independientes de si las corrientes son de secuencia directa o inversa. La única diferencia existente viene dada por el hecho de que el desfase (si existe) que se obtiene ante tensiones y corrientes de secuencia inversa es justamente de valor opuesto al que se produce cuando la secuencia es directa. Por tanto, la red de secuencia inversa del transformador sería igual a la mostrada en la Figura 9.13 sin más que cambiar α por $-\alpha$.

En la gran mayoría de aplicaciones, y en particular en el análisis de cortocircuitos, las impedancias paralelo que representan las pérdidas en el hierro y las reactancias de magnetización son muy elevadas (miles de ohmios), pudiendo considerarse prácticamente como circuitos abiertos ($Z_m \approx \infty$). De esta forma, los circuitos del transformador en valores por unidad para las secuencias directa e inversa se reducirían a un modelo serie aproximado con una única impedancia Z_{cc} igual a la de cortocircuito (Figura 9.14).

Ante corrientes de secuencia homopolar, el comportamiento del transformador está directamente relacionado con el tipo de conexión de los devanados y de si los neutros están o no puestos a tierra [4]. Así, teniendo en cuenta que la suma de las intensidades en un sistema homopolar no es nula, éstas solamente pueden circular por los terminales del transformador cuando existe un camino posible a tierra. Según esto, para devanados conectados en triángulo o en estrella con neutro aislado la impedancia homopolar vista desde el lado

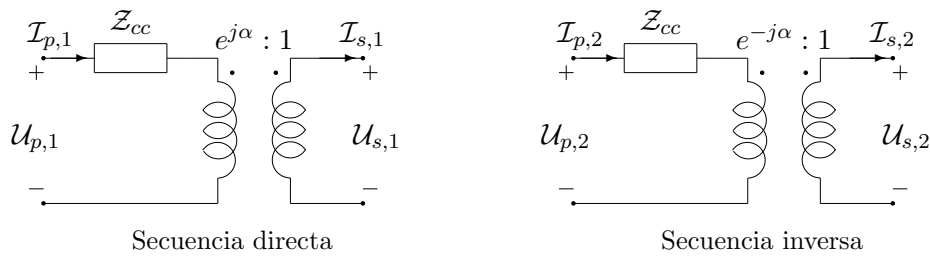


Figura 9.14. Circuitos simplificados del transformador.

correspondiente es infinita, representándose tal condición mediante un circuito abierto.

Cuando los devanados de uno de los lados del transformador (por ejemplo el primario) están conectados en estrella con el neutro conectado a tierra (ya sea directamente o a través de una determinada impedancia Z_{t_p}), las corrientes homopolares pueden circular a tierra. En este caso, el circuito de secuencia homopolar del transformador dependerá también del tipo de conexión y características de los devanados del secundario.

El valor de las impedancias $Z_{p,0}$ y $Z_{s,0}$ que aparecen involucradas son semejantes a los de secuencia directa e inversa.

Sin embargo, el valor de la impedancia Z_m puede ser distinto, en función del tipo y características del circuito magnético. Si el transformador trifásico está constituido por un banco de tres transformadores monofásicos independientes, la reactancia de magnetización ante corrientes homopolares es semejante a la de secuencia directa e inversa. Por su elevado valor, la rama paralelo que representa la corriente de magnetización se puede considerar como un circuito abierto, al igual que en las redes directa e inversa. Esto mismo es aplicable al caso de transformadores con un único núcleo trifásico que posean columnas adicionales que permitan el retorno del flujo neto creado por las corrientes homopolares, por ejemplo, transformadores con núcleos de cinco columnas.

Si el transformador está construido sobre un núcleo trifásico de tres columnas, el flujo neto distinto de cero creado por las tres corrientes homopolares debe retornar por algún camino exterior al núcleo, incrementándose de forma importante la reluctancia del circuito magnético. Esto se traduce en una reducción considerable de la reactancia de magnetización, en comparación con los valores típicos de secuencia directa e inversa. En estos casos, la rama paralelo que contiene la reactancia de magnetización se convierte en un camino adicional a tierra para las corrientes homopolares. Como consecuencia se produce una reducción efectiva de la impedancia de secuencia cero del transformador.

A continuación, se analizará el comportamiento frente a corrientes de secuencia homopolar de un transformador con un primario en estrella con neutro a tierra a través de una impedancia Z_{t_p} , y ante diferentes tipos de secundario. Se suponen unas impedancias por fase de primario y secundario Z_p y Z_s respectivamente, y una impedancia Z_m referida al primario, que representa las pérdidas en el hierro y la reactancia de magnetización. La relación de transformación será $r = V_p/V_s$ (relación entre tensiones de primario y secundario).

Triángulo: El modelo trifásico de este transformador es el mostrado en la Figura 9.15, donde se observa que las intensidades homopolares del secundario, $I'_{s,0}$, sólo circulan por el triángulo; en cambio, las del primario, $I'_{p,0}$, están presentes en las líneas. De este modo, la red de secuencia homopolar del transformador YN-d es un circuito como el de la Figura 9.16.a. Si se considera que Z_m es mucho mayor que Z_p y Z_s (aún en transformadores de tres columnas) el circuito homopolar se puede aproximar por el de la Figura 9.16.b.

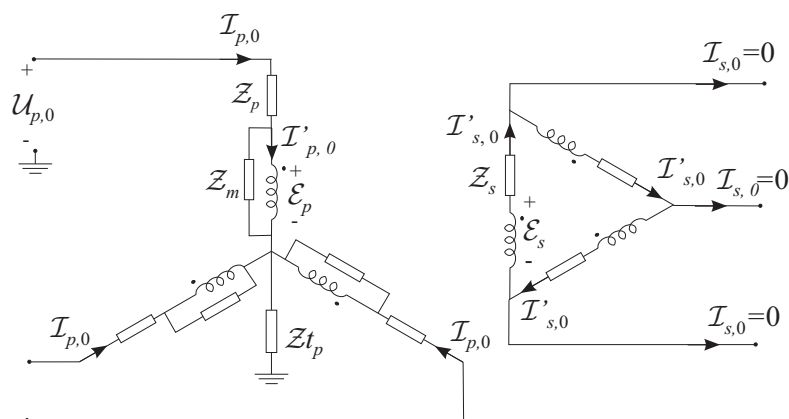


Figura 9.15. Transformador YN-d.

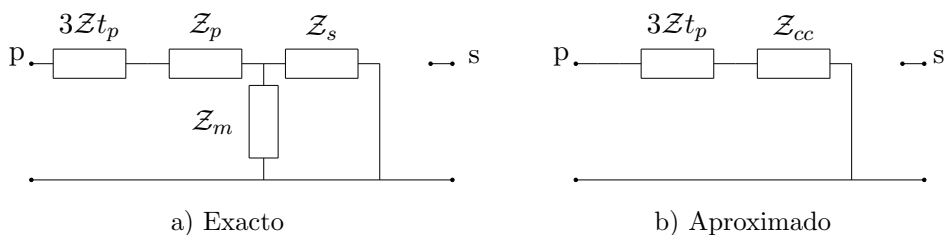


Figura 9.16. Circuito homopolar (p.u.) del transformador YN-d.

Estrella con neutro aislado: El modelo trifásico para este caso es el que se muestra en la Figura 9.17, donde por el secundario con neutro aislado, no pueden circular corrientes homopolares, es decir, $I_{s,0} = 0$. Por tanto, el circuito por fase de este transformador para la secuencia homopolar es el de la Figura 9.16.a con $Z_s = \infty$, resultando desde el secundario un circuito abierto y desde el primario una impedancia a tierra de valor $Z_p + 3Z_{t_p} + Z_m$.

Si el transformador trifásico está construido a base de tres monofásicos o sobre un núcleo trifásico de cinco columnas, ya se ha visto que el valor de Z_m es muy elevado, pudiendo considerarse en la práctica como un circuito abierto. Por el contrario, si el transformador es de núcleo trifásico de tres columnas, el valor de Z_m , aun siendo mayor que el de Z_p , puede ser lo suficientemente bajo como para permitir la circulación de corrientes apreciables.

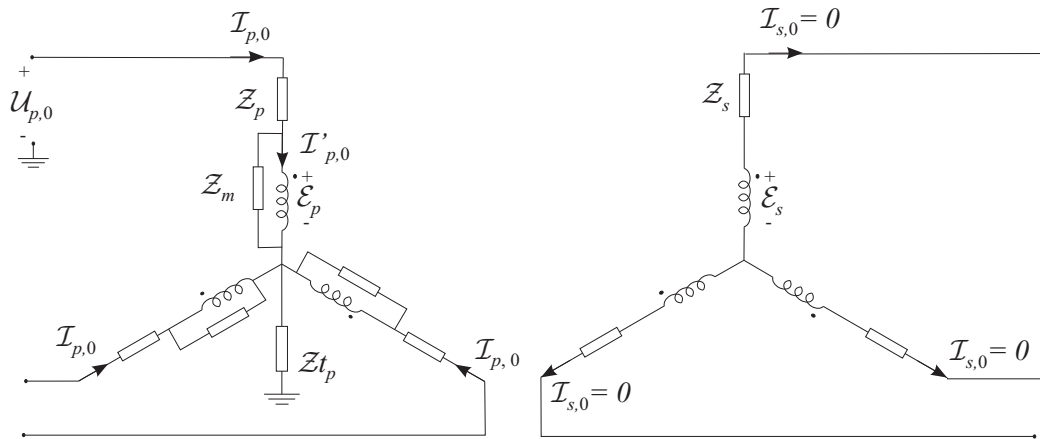


Figura 9.17. Transformador YN-y.

Estrella con neutro a tierra: La diferencia de éste con el caso anterior es que ahora pueden circular corrientes homopolares por el secundario al existir una conexión a tierra a través de Z_{t_s} (Figura 9.18).

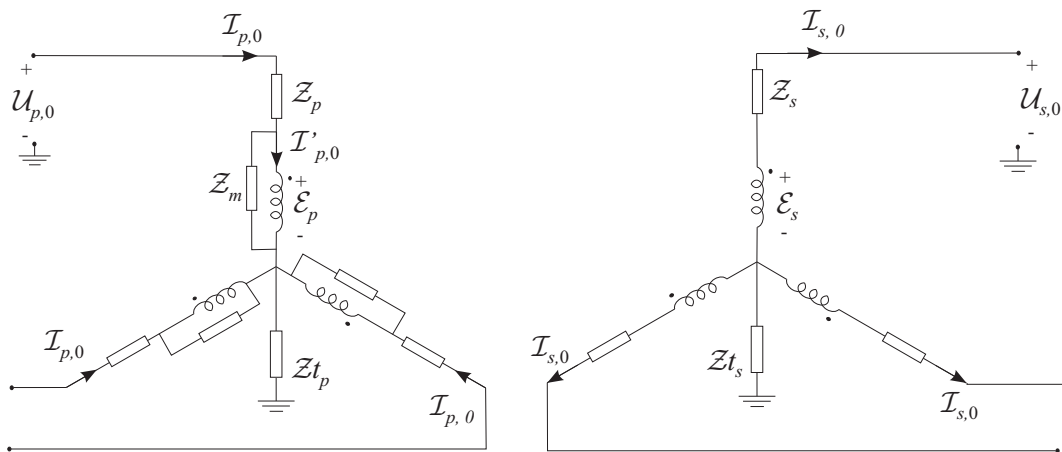


Figura 9.18. Transformador YN-yn.

De lo anterior se deduce que el circuito por fase de secuencia homopolar para este tipo de transformador, es el que se muestra en la Figura 9.19.a. Considerando Z_m como un circuito abierto, el circuito se reduce a un modelo serie (Figura 9.19.b) con la impedancia de cortocircuito en serie con $3Zt$ siendo $Zt = Z_{t_p} + Z_{t_s}$.

Conexión zig-zag

Otra configuración que permite la circulación de corrientes homopolares a tierra es la denominada conexión en *zig-zag* con neutro a tierra. En este tipo de transformador se disponen de seis devanados, dos por cada columna, que se conectan como se indica en la Fi-

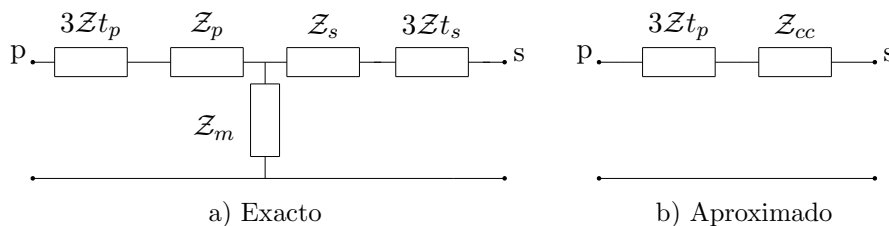


Figura 9.19. Circuito homopolar (p.u.) del transformador YN-yn.

gura 9.20.a, para conseguir dos funciones: i) con intensidades de secuencia directa o inversa, se comporta como una reactancia con un alto valor de magnetización $X_m \approx \infty$, y ii) con intensidades homopolares, el flujo de cada columna creado por sus dos devanados es nulo y, en consecuencia, no existe reactancia de magnetización, como se puede apreciar en el circuito equivalente de la Figura 9.20.b.

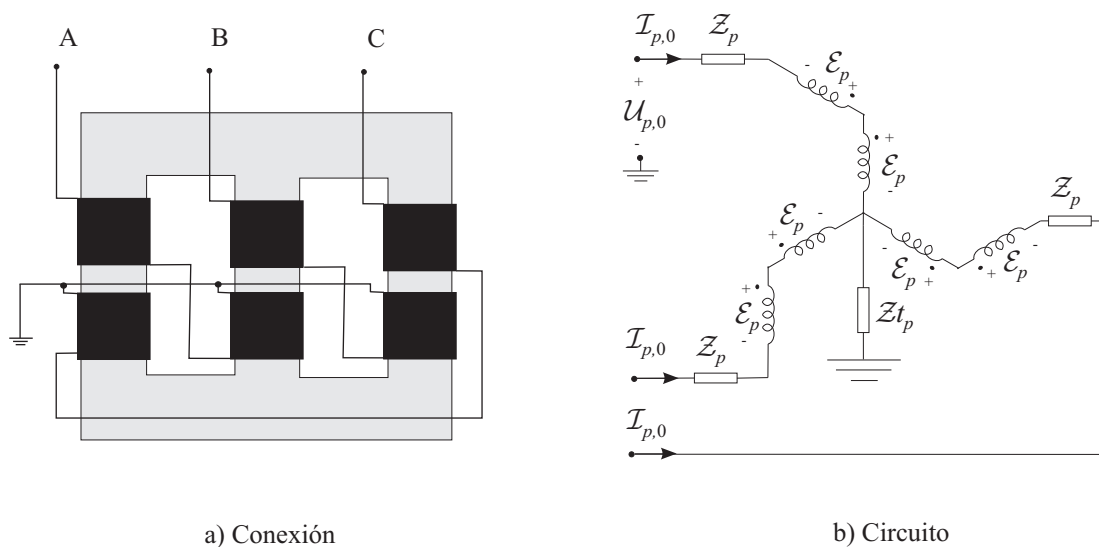


Figura 9.20. Conexión zig-zag con neutro a tierra.

De esto se extrae que la impedancia homopolar de un devanado en *zig-zag* no depende en absoluto del otro devanado que pueda estar acoplado con él. Esta característica es la que permite utilizar un devanado de este tipo como transformador de puesta a tierra, sin necesidad de que haya otro devanado secundario. El modelo de secuencia homopolar es el mostrado en la Figura 9.21.

En base a lo visto hasta aquí, se pueden deducir las redes de secuencia homopolar de transformadores de dos y tres devanados, con distintos tipos de conexión habituales. En las Figuras 9.22 y 9.23 se muestran de forma esquemática algunos casos posibles en los que, para simplificar, la reactancia de magnetización se supone infinita.

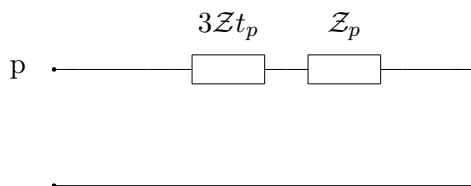


Figura 9.21. Circuito homopolar de la conexión en zig-zag con neutro a tierra.

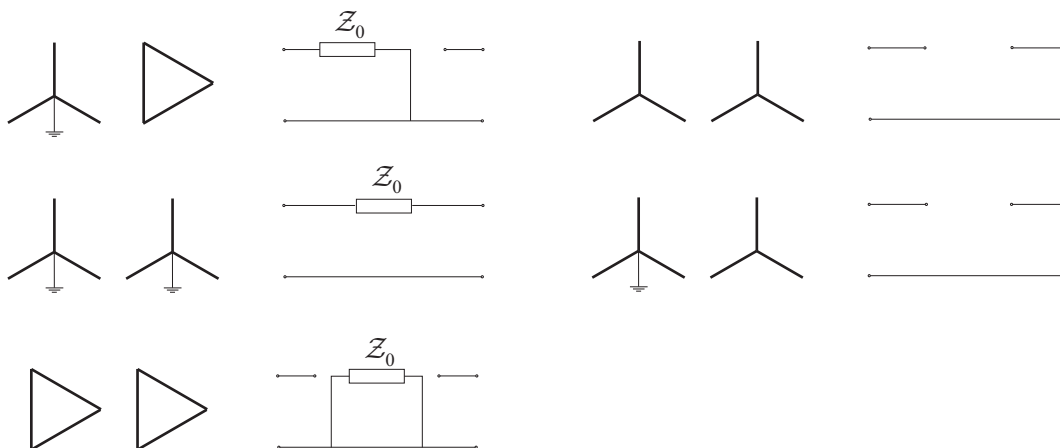


Figura 9.22. Redes de secuencia homopolar de transformadores de dos devanados.

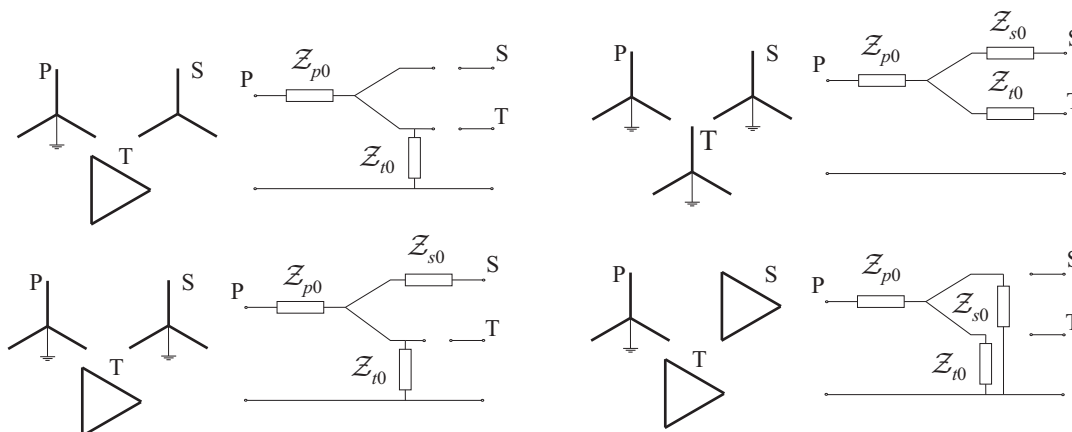


Figura 9.23. Redes de secuencia homopolar de transformadores de tres devanados.

9.5. Cortocircuitos desequilibrados

En el apartado 9.3 se ha estudiado el cálculo de las intensidades y tensiones en una red eléctrica equilibrada que sufre un cortocircuito equilibrado (cortocircuito trifásico franco, es decir, de resistencia nula). Sin embargo, como se puede evidenciar en las redes reales, los

cortocircuitos pueden presentar otros tipos de topologías (Figura 9.24).

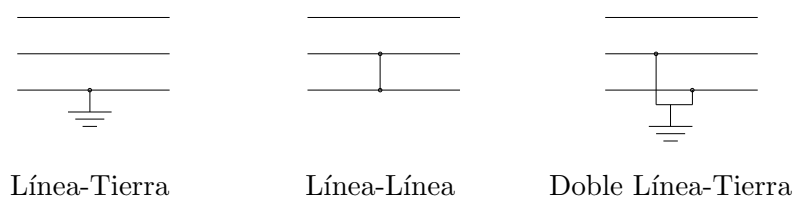


Figura 9.24. Diferentes tipos de cortocircuitos.

Evidentemente, una manera de estudiar una red eléctrica ante cualquier tipo de falta o configuración es mediante el análisis nodal o circular del circuito trifásico correspondiente. Sin embargo, en el caso de disponer de una red equilibrada en todos sus elementos excepto en el nudo de cortocircuito, existe un método basado en la teoría de componentes simétricas de gran interés práctico y con un esfuerzo de cálculo mucho menor.

El método de las componentes simétricas o de las redes de secuencia se puede describir en los siguientes procedimientos:

- a) Determinación del modelo de la red para las tres secuencias (redes de secuencia) en base a los modelos de los diferentes elementos obtenidos en apartados anteriores.
- b) Definición de las condiciones de las tensiones e intensidades en el nudo de la falta en sus versiones de valores de fase y de componentes simétricas.
- c) Análisis de la red mediante sus redes de secuencia, sujetas a las relaciones existentes entre ellas en el punto de la falta.

A continuación, se desarrolla el estudio de los diferentes tipos de faltas desequilibradas producidas en un nudo cualquiera f de una red trifásica que se supone perfectamente equilibrada (Figura 9.25).

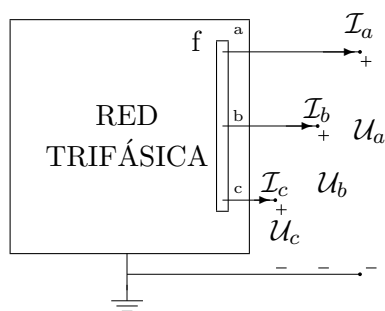


Figura 9.25. Red trifásica equilibrada.

Esta condición permite, como ya se ha visto, analizar el sistema trifásico a partir de los tres circuitos monofásicos desacoplados que denominamos redes de secuencia (Figura 9.26).

Su resolución se simplifica si se reducen dichos circuitos a sus correspondientes equivalentes Thevenin vistos desde el nudo de la falta. Suponiendo que antes de la falta, las

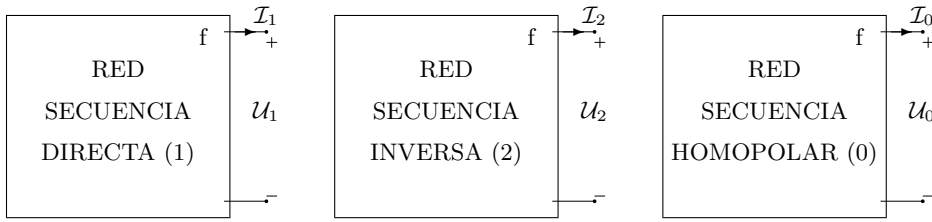


Figura 9.26. Redes de secuencia directa, inversa y homopolar.

tensiones en dicho nudo f (U_a , U_b y U_c) son equilibradas de secuencia directa, los circuitos Thevenin para las tres secuencias son los mostrados en la Figura 9.27, donde solamente existe una fuente, como es lógico, en el de secuencia directa. Las impedancias Z_1 , Z_2 y Z_0 son las impedancias equivalentes vistas desde el nudo f en cada una de las redes.

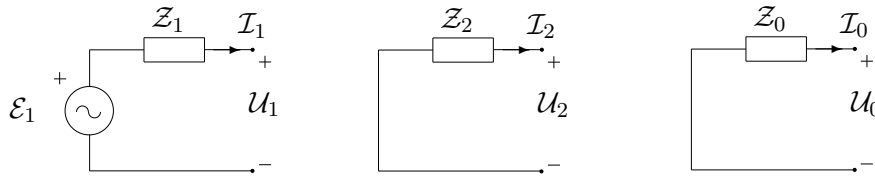


Figura 9.27. Equivalentes Thevenin de las redes de secuencia vistos desde el nudo f .

De los equivalentes Thevenin para cada secuencia, se extraen las relaciones entre tensiones y corrientes siguientes:

$$U_1 = \mathcal{E}_1 - I_1 Z_1 ; \quad U_2 = -I_2 Z_2 ; \quad U_0 = -I_0 Z_0 \tag{9.11}$$

donde $\mathcal{E}_1 = U_a$.

9.5.1. Falta línea-tierra

Para una falta línea-tierra en la fase a a través de una impedancia Z_f , tal y como se muestra en la Figura 9.28, las condiciones de las tensiones y corrientes de fase en el punto de la falta son:

$$U_{cc,a} = I_{cc,a} Z_f$$

$$I_{cc,b} = 0 ; \quad I_{cc,c} = 0$$

Aplicando la transformación de componentes simétricas (9.4) se obtienen las correspondientes relaciones entre las tensiones y corrientes de secuencia:

$$I_1 = I_2 = I_0 = \frac{I_{cc,a}}{3} \tag{9.12}$$

$$U_1 + U_2 + U_0 = I_0 \cdot 3Z_f \tag{9.13}$$

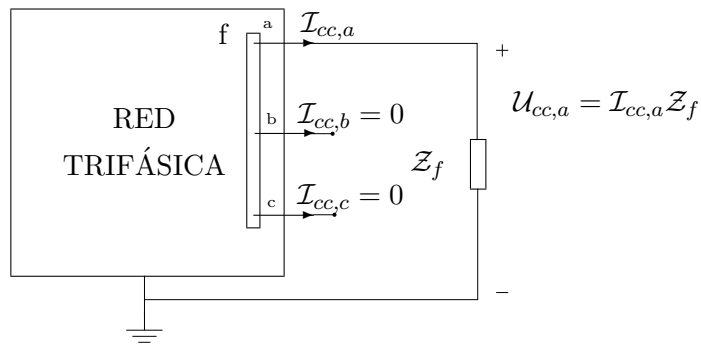


Figura 9.28. Falta Línea-Tierra.

Estas ecuaciones responden a un circuito que se obtiene mediante la conexión en serie de las tres redes de secuencia y de una impedancia igual a $3Z_f$, tal y como se muestra en la Figura 9.29.

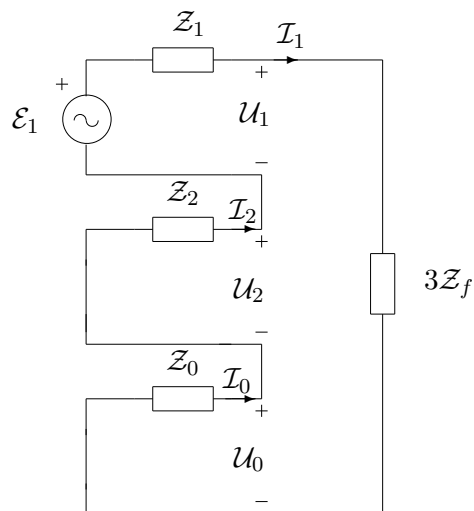


Figura 9.29. Conexión de las redes de secuencia para resolver una falta L-T.

A partir de dicho circuito, o directamente combinando las ecuaciones (9.12) y (9.13) con las (9.11), se obtienen los siguientes resultados para las tensiones y corrientes de secuencia:

$$\begin{aligned}\mathcal{I}_1 = \mathcal{I}_2 = \mathcal{I}_0 &= \frac{\mathcal{E}_1}{\mathcal{Z}_1 + \mathcal{Z}_2 + \mathcal{Z}_0 + 3\mathcal{Z}_f} \\ \mathcal{U}_1 &= \frac{\mathcal{E}_1(\mathcal{Z}_2 + \mathcal{Z}_0 + 3\mathcal{Z}_f)}{\mathcal{Z}_1 + \mathcal{Z}_2 + \mathcal{Z}_0 + 3\mathcal{Z}_f} \\ \mathcal{U}_2 &= -\frac{\mathcal{E}_1\mathcal{Z}_2}{\mathcal{Z}_1 + \mathcal{Z}_2 + \mathcal{Z}_0 + 3\mathcal{Z}_f} \\ \mathcal{U}_0 &= -\frac{\mathcal{E}_1\mathcal{Z}_0}{\mathcal{Z}_1 + \mathcal{Z}_2 + \mathcal{Z}_0 + 3\mathcal{Z}_f}\end{aligned}$$

Una vez conocidas las componentes simétricas (9.4) se pueden obtener las tensiones y corrientes de cada fase mediante la transformación inversa. En concreto, la corriente de falta a tierra (corriente de la fase a) vale:

$$\mathcal{I}_{cc,a} = \mathcal{I}_1 + \mathcal{I}_2 + \mathcal{I}_0 = \frac{3\mathcal{E}_1}{\mathcal{Z}_1 + \mathcal{Z}_2 + \mathcal{Z}_0 + 3\mathcal{Z}_f}$$

El valor más elevado de corriente de cortocircuito línea-tierra se da en el caso particular de falta a través de una impedancia nula. Su resolución se obtiene haciendo $\mathcal{Z}_f = 0$ en las anteriores expresiones.

9.5.2. Falta línea-línea

A continuación, se analiza el caso de un cortocircuito entre las dos fases b y c a través de una impedancia \mathcal{Z}_f . Observando el esquema de la Figura 9.30 se deducen las condiciones que cumplen las corrientes y tensiones en el nudo de la falta y que son:

$$\mathcal{U}_1 = \mathcal{U}_2 + \mathcal{I}_1\mathcal{Z}_f \quad ; \quad \mathcal{U}_0 = 0$$

$$\mathcal{I}_{cc,a} = 0 \quad ; \quad \mathcal{I}_{cc,b} = -\mathcal{I}_{cc,c}$$

Teniendo en cuenta las condiciones en la falta y aplicando la transformación de componentes simétricas, se obtienen las tensiones y corrientes de secuencia siguientes:

$$\mathcal{I}_1 = -\mathcal{I}_2 = \mathcal{I}_{cc,b} \frac{1}{\sqrt{3}} \angle -90^\circ \quad ; \quad \mathcal{I}_0 = 0$$

$$\mathcal{U}_1 = \mathcal{U}_2 + \mathcal{I}_1\mathcal{Z}_f \quad ; \quad \mathcal{U}_0 = 0$$

En este caso, las ecuaciones se corresponden con un circuito obtenido mediante la conexión en paralelo de las redes de secuencia directa e inversa, intercalando entre ellas en serie una impedancia igual a la de la falta (\mathcal{Z}_f) y sin intervención de la red de secuencia homopolar, tal y como se muestra en la Figura 9.31.

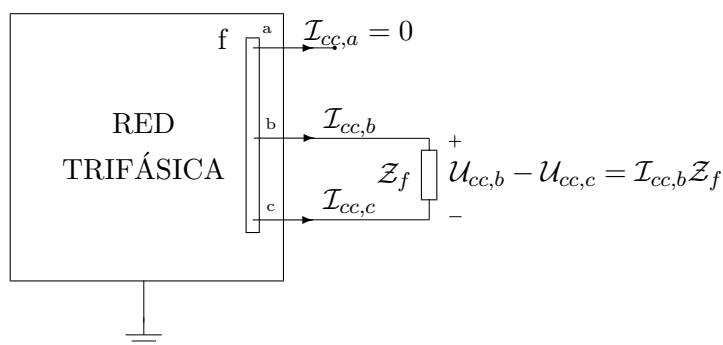


Figura 9.30. Falta Línea-Línea a través de una impedancia Z_f .

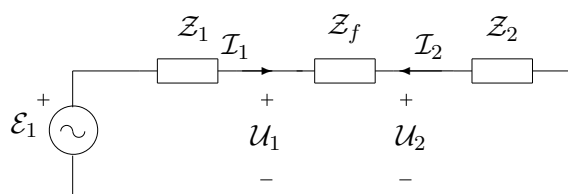


Figura 9.31. Conexión de las redes de secuencia para una falla Línea-Línea a través de una impedancia Z_f .

Los resultados para las corrientes y tensiones de secuencia son:

$$I_1 = -I_2 = \frac{\mathcal{E}_1}{Z_1 + Z_2 + 3Z_f}$$

$$U_1 = \frac{\mathcal{E}_1(Z_2 + 3Z_f)}{Z_1 + Z_2 + 3Z_f} \quad ; \quad U_2 = \frac{\mathcal{E}_1(3Z_f)}{Z_1 + Z_2 + 3Z_f}$$

Obteniéndose una corriente de cortocircuito dada por:

$$I_{cc,b} = -I_{cc,c} = -\frac{\mathcal{E}_1\sqrt{3}|-90^\circ}{Z_1 + Z_2 + Z_f}$$

El caso particular de cortocircuito franco entre dos fases se resuelve haciendo $Z_f = 0$.

9.5.3. Falta línea-línea-tierra

El último tipo de falta desequilibrada que vamos a considerar es el cortocircuito que involucra a dos fases y a la tierra al mismo tiempo. Se supone que las dos fases en falta son la b y la c y que la conexión a tierra se produce a través de una impedancia Z_f , tal y como se indica en la Figura 9.32. En el nudo de la falta se observan las siguientes condiciones entre corrientes y tensiones:

$$U_{cc,b} = U_{cc,c} = (I_{cc,b} + I_{cc,c})Z_f$$

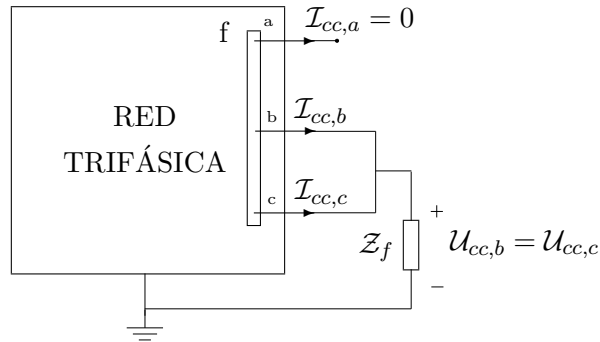


Figura 9.32. Falta Línea-Línea-Tierra.

$$I_{cc,a} = 0$$

Convirtiendo las anteriores condiciones a sus correspondientes componentes simétricas resultan:

$$I_1 + I_2 + I_0 = 0$$

$$U_1 = U_2$$

$$U_1 - U_0 = -3I_0 Z_f$$

Las anteriores ecuaciones indican que la falta puede ser resuelta mediante la conexión en paralelo de las tres redes de secuencia intercalando en serie una impedancia de valor $3Z_f$ entre la red homopolar y las otras dos (Figura 9.33).

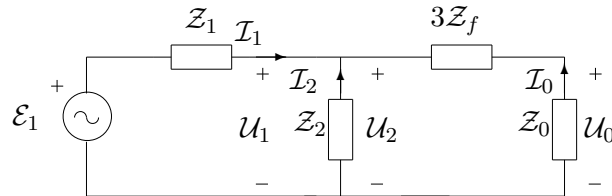


Figura 9.33. Conexión de las redes de secuencia para una falta L-L-T a través de una impedancia Z_f .

A partir del análisis del anterior circuito, se obtienen las siguientes corrientes para cada una de las tres secuencias:

$$I_1 = \frac{\mathcal{E}_1(Z_2 + Z_0 + 3Z_f)}{Z_1 Z_2 + Z_1(Z_0 + 3Z_f) + Z_2(Z_0 + 3Z_f)}$$

$$I_2 = -\frac{\mathcal{E}_1(Z_0 + 3Z_f)}{Z_1 Z_2 + Z_1(Z_0 + 3Z_f) + Z_2(Z_0 + 3Z_f)}$$

$$I_0 = -\frac{\mathcal{E}_1 Z_2}{Z_1 Z_2 + Z_1(Z_0 + 3Z_f) + Z_2(Z_0 + 3Z_f)}$$

Las tensiones U_0 , U_1 y U_2 pueden calcularse directamente a partir de las anteriores corrientes según (9.11).

En este caso, las corrientes de cortocircuito (fases *b* y *c*) son:

$$\mathcal{I}_{cc,b} = -\frac{\mathcal{E}_1\sqrt{3}(\mathcal{Z}_2 1|_{-150^\circ} + (\mathcal{Z}_0 + 3\mathcal{Z}_f) 1|_{-90^\circ})}{\mathcal{Z}_1\mathcal{Z}_2 + \mathcal{Z}_1(\mathcal{Z}_0 + 3\mathcal{Z}_f) + \mathcal{Z}_2(\mathcal{Z}_0 + 3\mathcal{Z}_f)}$$

$$\mathcal{I}_{cc,c} = -\frac{\mathcal{E}_1\sqrt{3}(\mathcal{Z}_2 1|_{150^\circ} + (\mathcal{Z}_0 + 3\mathcal{Z}_f) 1|_{90^\circ})}{\mathcal{Z}_1\mathcal{Z}_2 + \mathcal{Z}_1(\mathcal{Z}_0 + 3\mathcal{Z}_f) + \mathcal{Z}_2(\mathcal{Z}_0 + 3\mathcal{Z}_f)}$$

Haciendo $\mathcal{Z}_f = 0$ se obtienen los correspondientes resultados para el caso particular de falta franca.

9.5.4. Análisis matricial de cortocircuitos desequilibrados

En los apartados anteriores hemos desarrollado para distintos tipos de falta desequilibrada el cálculo de las corrientes y las tensiones únicamente en el nudo donde se produce el cortocircuito. Para obtener las tensiones o las corrientes en cualquier otro punto del circuito, debemos plantear el análisis completo de las tres redes de secuencia en las condiciones de la falta. Dichas condiciones se consiguen conectando en cada red en el nudo de la falta las correspondientes fuentes de intensidad ($\mathcal{I}_1, \mathcal{I}_2, \mathcal{I}_0$) cuyos valores se han obtenido según lo visto en los apartados anteriores (Figura 9.34).

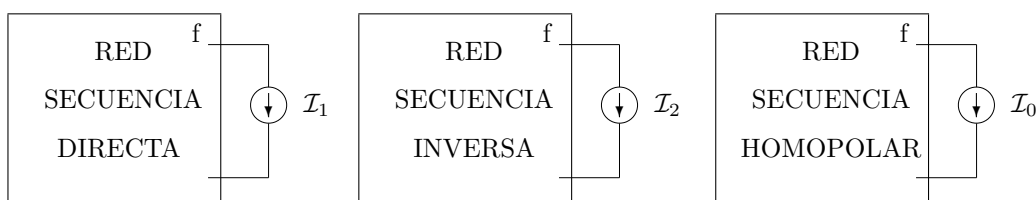


Figura 9.34. Redes de secuencia directa, inversa y homopolar con fuentes de intensidad de la falta.

El análisis de los tres circuitos de secuencia se realiza resolviendo los correspondientes sistemas de ecuaciones nodales que son los siguientes:

$$[\mathcal{I}_{g,1}] = [\mathcal{Y}_1][\mathcal{U}_1] \quad ; \quad [\mathcal{I}_2] = [\mathcal{Y}_2][\mathcal{U}_2] \quad ; \quad [\mathcal{I}_0] = [\mathcal{Y}_0][\mathcal{U}_0]$$

donde $[\mathcal{I}_{g,1}]$ es el vector de fuentes en la red de secuencia directa que contiene todas las fuentes existentes originalmente en la red y una nueva fuente de valor $-\mathcal{I}_1$ en el nudo *f*. Los vectores $[\mathcal{I}_{g,2}]$ y $[\mathcal{I}_{g,0}]$ tienen todos sus elementos nulos salvo el correspondiente al nudo *f* que valen respectivamente $-\mathcal{I}_2$ y $-\mathcal{I}_0$.

Conocidas todas las tensiones nodales en las tres redes de secuencia, se pueden calcular las tensiones de fase en cualquier nudo y las corrientes de fase en cualquier línea. Para obtener las tensiones en las tres fases de un nudo *i* basta con aplicar la transformación de componentes simétricas a las tensiones de secuencia en dicho nudo ($\mathcal{U}_{i,0}, \mathcal{U}_{i,1}$ y $\mathcal{U}_{i,2}$).

Si deseamos calcular las corrientes de fase por cualquier rama *ij*, obtendremos en primer lugar las tres corrientes en cada red de secuencia como:

$$\mathcal{I}_{ij,0} = \frac{\mathcal{U}_{i,0} - \mathcal{U}_{j,0}}{z_{ij,0}} \quad ; \quad \mathcal{I}_{ij,1} = \frac{\mathcal{U}_{i,1} - \mathcal{U}_{j,1}}{z_{ij,1}} \quad ; \quad \mathcal{I}_{ij,2} = \frac{\mathcal{U}_{i,2} - \mathcal{U}_{j,2}}{z_{ij,2}}$$

donde $z_{ij,0}, z_{ij,1}$ y $z_{ij,2}$ son las impedancias serie de la rama *ij* en cada red de secuencia.

9.6. Cortocircuitos en redes con máquinas síncronas

En los apartados anteriores se ha considerado que la alimentación del circuito se realiza a partir de una fuente de tensión ideal. Sin embargo, en las redes reales, la alimentación se lleva a cabo mediante generadores, pudiendo existir cargas dinámicas de importancia. En consecuencia, en las redes eléctricas reales existen dispositivos electromecánicos (máquinas eléctricas rotativas) que es necesario considerar desde el punto de vista del efecto que pueden tener sobre las intensidades de cortocircuito.

En las redes eléctricas, en general, pueden distinguirse dos tipos de máquinas: las síncronas y las asíncronas o de inducción. Las primeras representan la casi totalidad de la generación eléctrica, siendo su utilización como motor de tracción prácticamente nula. Por el contrario, las máquinas de inducción se utilizan principalmente como motores mientras que su aplicación en la producción eléctrica es marginal. No obstante, a continuación se establecen los modelos de las máquinas síncronas y asíncronas en sus versiones de generador y motor para el estudio de faltas en las redes eléctricas.

En primer lugar se aborda el estudio de la contribución de las máquinas síncronas a las faltas en las redes trifásicas equilibradas y en particular, los cortocircuitos. Para ello, se describirán modelos de orden práctico de su comportamiento en situaciones de falta, remitiendo al lector a otros textos específicos sobre máquinas eléctricas para profundizar en su demostración y verificación.

El modelo dinámico de una máquina síncrona trifásica se establece a partir de nueve ecuaciones diferenciales que relacionan las tensiones, los flujos y las intensidades presentes en sus devanados y masas ferromagnéticas. No obstante, como en otras ocasiones, este tipo de modelos, por su complejidad, son de poca utilidad práctica. Los modelos de máquinas síncronas que se consideran en el análisis de cortocircuitos son estacionarios equilibrados y, como en el caso del circuito RL del apartado 9.2, se evalúa el régimen transitorio a partir del estudio del estacionario. Así pues, debido a la presencia de fuertes flujos magnéticos y del devanado terciario o de compensación, se presentan tres etapas o periodos en el comportamiento dinámico de las máquinas síncronas ante faltas o perturbaciones trifásicas equilibradas [5]:

- a) Periodo sub-transitorio.
- b) Periodo transitorio.
- c) Periodo estacionario o permanente¹.

En cada uno de estos periodos, la máquina síncrona se puede modelar mediante el correspondiente circuito en estado estacionario sinusoidal, por lo que se definen un circuito sub-transitorio, un circuito transitorio y un circuito estacionario o permanente.

La explicación del comportamiento transitorio de un circuito electromagnético, como el existente en una máquina eléctrica, se puede realizar a partir del circuito de la Figura 9.35.a donde se disponen una fuente de intensidad i_1 , situada en el devanado primario (estátor), y otra de tensión V en el devanado secundario (rotor). El flujo ψ_p representa el flujo creado

¹ Este último régimen de la máquina se corresponde con el descrito en el Capítulo 2 (régimen estacionario equilibrado de una máquina síncrona).

por el primario que no concatena las espiras del secundario, mientras que el flujo ψ es el flujo común a ambos devanados. De este modo, el efecto del flujo ψ_p puede ser representado eléctricamente mediante una inductancia L_p , como se muestra en la Figura 9.35.b.

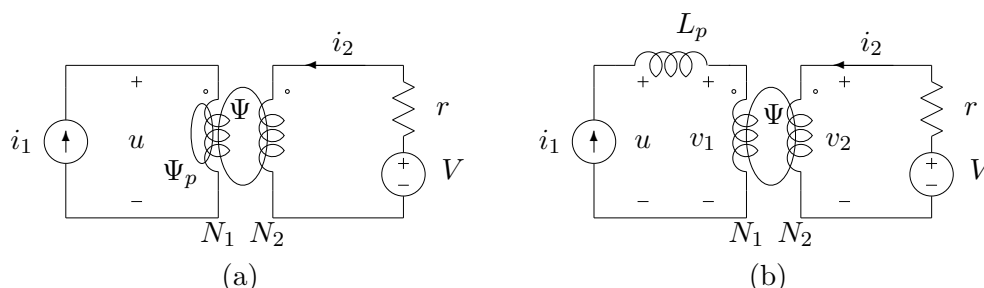


Figura 9.35. Acoplamiento rotor-estátor en una máquina síncrona.

Aplicando el análisis circular de tensiones a dicho circuito y considerando la ecuación del flujo magnético $\psi = (N_1 \cdot i_1 + N_2 \cdot i_2) \cdot \Lambda_m$ (Λ_m representa la permeancia magnética), se obtienen las siguientes expresiones, donde $M = N_1 N_2 \Lambda_m$, $L_2 = N_2^2 \Lambda_m$ y $L_1 = N_1^2 \Lambda_m$:

$$u = L_p \frac{di_1}{dt} + N_1 \frac{d\psi}{dt} = (L_p + L_1) \frac{di_1}{dt} + M \frac{di_2}{dt}$$

$$V = r \cdot i_2 + N_2 \frac{d\psi}{dt} = r \cdot i_2 + L_2 \frac{di_2}{dt} + M \frac{di_1}{dt}$$

En condiciones estacionarias, estátor con fuente senoidal, las tensiones en el primario pueden identificarse con los parámetros de la máquina síncrona: la reactancia síncrona, X_s , asociada a la inductancia $L = L_p + L_1$ y la tensión interna e correspondiente al término $M \frac{di_2}{dt}$.

Ante una perturbación brusca de la intensidad del primario, que aquí se representa por el término $\Delta i_1 \cdot \mathbb{U}(t)$, donde $\mathbb{U}(t)$ es la función escalón unitario, el flujo se modifica en un valor dado por $\Delta \psi = (N_1 \Delta i_1 + N_2 \Delta i_2) \cdot \Lambda_m$. De aplicar la expresión del flujo a la ecuación de las tensiones en el secundario (rotor) se tiene la ecuación diferencial:

$$0 = r \cdot \Delta i_2 + N_2 \frac{d\Delta \psi}{dt} = r \cdot \Delta i_2 + M \cdot \Delta i_1 \cdot \delta(t) + L_2 \frac{d\Delta i_2}{dt}$$

donde $\delta(t)$ es la función delta de Dirac.

La solución de la ecuación diferencial anterior resulta:

$$\Delta i_2 = -\frac{N_1}{N_2} \Delta i_1 e^{-\frac{r}{L_2} t} \quad \text{y} \quad \Delta \psi = N_1 \Lambda_m \Delta i_1 \left(1 - e^{-\frac{r}{L_2} t}\right)$$

Para valores r/L_2 bajos, lo que sucede en las máquinas eléctricas, y tiempos cortos, que se presentan en los análisis transitorios, se tiene:

$$\Delta i_2 \approx -\frac{N_1}{N_2} \Delta i_1 \quad \text{y} \quad \Delta \psi \approx 0$$

De ello, se concluye que el efecto de una perturbación en la intensidad de una bobina (devanado 1) se traduce en otra perturbación en la otra bobina (devanado 2) de tal modo que el flujo mutuo tiende a permanecer constante y, por tanto, también las tensiones en el acoplamiento (v_1 y v_2). Así, las tensiones en el circuito durante el transitorio vienen dadas por:

$$u' = L_p \frac{di'_1}{dt} + N_1 \frac{d\psi'}{dt} = (L_p + L_1) \frac{di'_1}{dt} + M \frac{di'_2}{dt}$$

$$V = ri'_2 + N_2 \frac{d\psi'}{dt} = ri'_2 + L_2 \frac{di'_2}{dt} + M \frac{di'_1}{dt} = ri'_2 + v_2$$

donde i'_1 e i'_2 son las intensidades definidas por: $i'_1 = i_1 + \Delta i_1$ e $i'_2 = i_2 + \Delta i_2$.

Despejando el término $\frac{di'_2}{dt}$ en la ecuación del secundario y sustituyendo en el primario se obtiene la expresión:

$$u' = \left(L_p + L_1 - \frac{M^2}{L_2} \right) \frac{di'_1}{dt} + \frac{M}{L_2} v_2 = L' \frac{di'_1}{dt} + v_1$$

De este modo, puede concluirse que, en condiciones transitorias, el modelo de una máquina síncrona vista desde el estátor se puede identificar con unos nuevos parámetros: la reactancia transitoria X' , asociada a la inductancia L' y la tensión interna v_1 (e'), debida al término $N_1 \frac{d\psi'}{dt}$.

Cuando en la máquina síncrona se dispone de devanados de amortiguamiento (bobinas cortocircuitadas), aparecen nuevas trayectorias y flujos magnéticos que, si se considera el principio mencionado de conservación del flujo, hace que la tensión del primario se pueda aproximar por una nueva inductancia L'' , denominada inductancia sub-transitoria, y una tensión interna sub-transitoria e'' . Como es de esperar, la inductancia L'' tiene un valor inferior a la transitoria L' , cumpliéndose que $L'' < L' < L$.

Durante el periodo sub-transitorio la máquina síncrona se modela por la tensión interna sinusoidal de valor eficaz E'' y una reactancia inductiva serie X'' , y se considera que este periodo tiene una duración de entre 20 y 50 ms. Del mismo modo, el periodo transitorio se define por la tensión sinusoidal E' y la reactancia X' , con una constante de tiempo entre 0.5 y 3 s. Y, como es de esperar, el período estacionario o permanente se define por la tensión interna E y la reactancia síncrona X_s ².

Si se atiende a la duración de los periodos, la utilización de un modelo u otro dependerá del tipo de análisis que se desee realizar. De este modo, el modelo estacionario, correspondiente al periodo permanente, se utiliza para el análisis de redes en explotación (flujo de potencia). En cambio, para el estudio de redes ante perturbaciones bruscas, como ocurre en los cortocircuitos, los modelos habituales son el sub-transitorio y el transitorio. El circuito sub-transitorio por su corta duración es el adecuado para el cálculo de las intensidades de iniciales (intensidades de pico) presentes en el cálculo de cortocircuitos. El modelo transitorio tiene interés para el estudio de la estabilidad de redes y en el cálculo de las intensidades de corte (entre 3 y 5 ciclos) e intensidades que deben hacer actuar a los

² Las tensiones internas de los distintos periodos se definen a partir de las condiciones iniciales que se tienen antes de producirse la perturbación; típicamente las condiciones iniciales se obtienen mediante un flujo de potencia o bien en condiciones de vacío. En este último caso se cumple que $E'' = E' = E = U_{nominal}$.

relés de protección. En la Tabla 9.2 se dan algunos valores típicos de las reactancias para los diferentes tipos de máquinas síncronas, y en la Tabla 9.3 se muestra un resumen de los periodos y circuitos estacionarios de secuencia directa de una máquina síncrona.

Cuadro 9.2. Parámetros típicos de máquinas síncronas.

	Rotor cilíndrico	Rotor polos salientes
X_s, X_d	1.0 - 1.3	1.0 - 1.3
X_q	1.0 - 1.3	0.6 - 0.8
X'_d, X'_q	0.2 - 0.4	0.2 - 0.4
X''_d, X''_q	0.1 - 0.2	0.2 - 0.3
X_2	0.1 - 0.2	0.2 - 0.3
X_0	0.05 - 0.1	0.05 - 0.1

De este modo, la presencia de máquinas síncronas en una red eléctrica, que sufre un cortocircuito trifásico “alejado” de los bornes de los generadores³, se reduce a la implantación en el modelo de la red de su circuito equivalente correspondiente.

A modo de resumen, en la Tabla 9.4 se presentan los modelos de aplicación y el cálculo de las intensidades de interés en el análisis de cortocircuitos trifásico de redes eléctricas.

9.6.1. Modelo en componentes simétricas de una máquina síncrona

Como se ha descrito en el Capítulo 2, una máquina síncrona en vacío puede representarse eléctricamente por un circuito equivalente con tres tensiones estatóricas \mathcal{E}_a , \mathcal{E}_b y \mathcal{E}_c , que representan las tensiones inducidas en cada uno de los tres devanados del estátor. Si se considera que por los devanados estatóricos circula una intensidad de frecuencia f igual a la frecuencia de rotación de la máquina, se origina un flujo magnético giratorio que gira a la

³ En las normas IEC-909 y IEC-363 se establecen expresiones y ecuaciones para generadores síncronos cercanos al cortocircuito.

Cuadro 9.3. Circuitos de secuencia directa de una máquina síncrona.

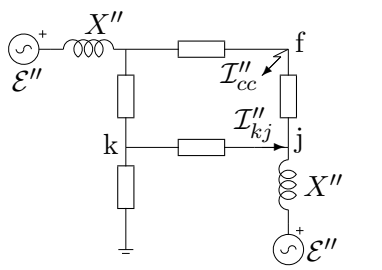
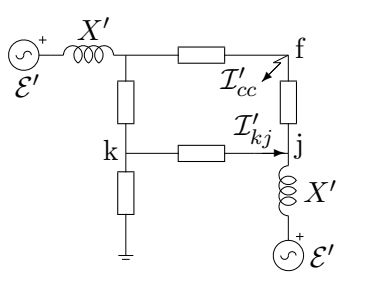
	Rotor cilíndrico	Rotor polos salientes
Sub-transitorio Cortocircuitos (intensidades de pico)		$\mathcal{E}'' = U + jX_d''I_d'' + jX_q''I_q''$
Transitorio Estabilidad, dinámico, cortocircuitos (intensidades de corte y ajuste de relés)		$\mathcal{E}' = U + jX_d'I_d' + jX_q'I_q'$
Estacionario Cortocircuitos (intensidades de pico)		$\mathcal{E} = U + jX_dI_d + jX_qI_q$

misma velocidad que el rotor, y que se denomina de reacción de inducido. En consecuencia, los flujos rotórico y estatórico se combinan vectorialmente y el resultado final es un flujo magnético distinto al que se tiene con la máquina en vacío. Además, existe el flujo creado por el estátor y que no abarca a las bobinas del rotor, que origina la reactancia X_p .

Desde el punto de vista de la teoría de circuitos, el efecto del flujo de reacción de inducido puede representarse por una fuente de tensión \mathcal{E}_{ri} , de la misma frecuencia que la tensión interna \mathcal{E} , aunque lo más habitual, a pesar de perder su significado físico, es su representación mediante la denominada “reactancia de reacción de inducido” X_{ri} . De este modo, el circuito equivalente de una máquina síncrona de rotor liso puede expresarse como se indica en la Figura 9.36, donde se dispone la fuente de tensión interna y el circuito de excitación del rotor, la fuente de tensión de reacción de inducido, \mathcal{E}_{ri} , y la reactancia X_p [5].

Para analizar las redes de secuencia de una máquina síncrona, se considera la existencia de una fuente trifásica desequilibrada de intensidades \mathcal{I}_a , \mathcal{I}_b e \mathcal{I}_c circulando por los devanados estatóricos de la máquina. De acuerdo con la teoría de las componentes simétricas,

Cuadro 9.4. Aplicación de modelos de máquinas síncronas al calculo de intensidades de cortocircuito trifásica en redes eléctricas.

Modelo de la red	Cálculo de intensidades de cortocircuito
	<p>Intensidad de pico:</p> $I_{\text{pico}} = i_{\text{máx}}(t = 10 \text{ ms}) = \sqrt{2} I''_{cc} \text{sen}(\varphi'') \cdot \left(1 + e^{-\frac{R''_{eq}}{X''_{eq}} \omega t} \right)$
	<p>Intensidad de corte:</p> $I_{\text{corte}} = i_{\text{máx}}(t = t_c) = \sqrt{2} I'_{cc} \text{sen}(\varphi') \cdot \left(1 + e^{-\frac{R'_{eq}}{X'_{eq}} \omega t_c} \right)$ <p>Intensidad de cortocircuito para el ajuste de relés:</p> $I_{\text{mín}} = \sqrt{2} I'_{cc}$

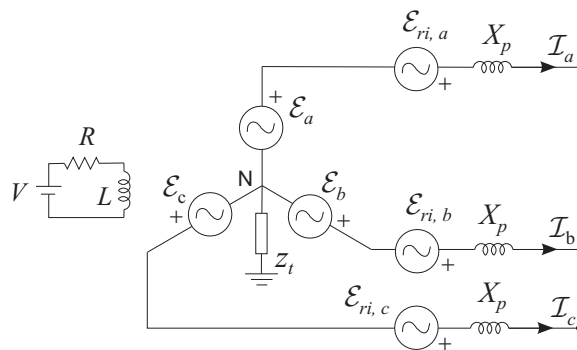


Figura 9.36. Modelo de una máquina síncrona.

la fuente trifásica puede descomponerse en:

$$I_{abc} = I_{abc,0} + I_{abc,1} + I_{abc,2}$$

De aplicar el sistema trifásico de intensidades de secuencia directa (como se sabe equilibrado) al generador, resulta la ecuación, para la fase a , descrita en el Capítulo 2:

$$\mathcal{U}_1 = \mathcal{E}_1 + \mathcal{E}_{ri,1} - jX_p \cdot \mathcal{I}_1 = \mathcal{E}_1 - (jX_p + j \cdot X_{ri}) \cdot \mathcal{I}_1$$

donde $\mathcal{E}_1 = \mathcal{E}_a$ por consideraciones de diseño y construcción de la máquina.

Para el sistema trifásico de intensidades de secuencia inversa, los devanados del estátor, como en el caso de secuencia directa, crean un flujo de dispersión y otro giratorio. Sin embargo, no existen los flujos que originan las tensiones internas. En consecuencia, el flujo giratorio de secuencia inversa del estátor sólo se cierra sobre la masa magnética del rotor, donde existe, para esa frecuencia inversa, únicamente un devanado cortocircuitado. Es decir, para efectos de la secuencia inversa la máquina no presenta las tensiones internas y, por tanto, tampoco presenta las tensiones asociadas al flujo de reacción de inducido, y únicamente existen los flujos de dispersión y un flujo giratorio. Este flujo giratorio, desde el punto de vista del estátor, es equivalente a una bobina con excitación constante que gira a una frecuencia $2f$ sobre una masa ferromagnética con un devanado cortocircuitado (similar al caso de un transformador con el secundario -rotor- cortocircuitado). La consecuencia es una red de secuencia inversa de la máquina síncrona definida por la ecuación:

$$\mathcal{U}_2 = -z_2 \cdot \mathcal{I}_2 = -jX_2 \cdot \mathcal{I}_2$$

donde X_2 es la reactancia suma de la de dispersión más la reactancia debida al acoplamiento magnético entre campo giratorio del estátor y devanado cortocircuitado del rotor.

Para el caso de la secuencia homopolar los flujos del estátor y entre estátor y rotor son muy diferentes a los de la secuencia inversa. Ahora no se origina un flujo giratorio, y el circuito eléctrico equivalente, desde el punto de vista del estátor, son tres devanados desplazados 120° geométricos que pulsán al mismo tiempo, lo cual originan un campo magnético nulo. La consecuencia es la ecuación:

$$\mathcal{U}_0 = -(jX_0 + 3 \cdot z_t) \cdot \mathcal{I}_0$$

donde X_0 es la reactancia homopolar con un valor muy bajo, próxima a la mitad de la reactancia de dispersión, y en la que influye de forma apreciable el paso del devanado debido al acoplamiento entre los flujos de dispersión (flujos mutuos de dispersión).

De este modo, el modelo de secuencias de una máquina síncrona se puede expresar mediante la siguiente relación matricial:

$$\begin{pmatrix} \mathcal{U}_1 \\ \mathcal{U}_2 \\ \mathcal{U}_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathcal{E}_1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} jX_1 & 0 & 0 \\ 0 & jX_2 & 0 \\ 0 & 0 & jX_0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \mathcal{I}_1 \\ \mathcal{I}_2 \\ \mathcal{I}_0 \end{pmatrix} \quad (9.14)$$

donde $X_1 \gg X_2 > X_0$ (valores típicos en la Tabla 9.2).

En resumen, se puede concluir que, para cortocircuitos asimétricos (L-T, L-L, L-L-T) con o sin resistencia de defecto, los procedimientos de análisis de las intensidades de falta son idénticos a los descritos en el apartado 9.5, sin más que disponer en las fuentes de tensión los modelos de secuencia de los generadores síncronos correspondientes. Los circuitos de secuencia directa para cada tipo de régimen son los mostrados en la Tabla 9.3 y los circuitos de secuencia inversa y homopolar pueden verse en la Figura 9.37.

9.7. Cortocircuitos en redes con máquinas asíncronas

El modelo estacionario equilibrado de las máquinas de inducción, sea funcionando como motor o generador, ha sido descrito en el Capítulo 2. Su modelo dinámico, al igual que las máquinas síncronas, se establece mediante ecuaciones diferenciales. Sin embargo, también de una manera similar a lo que ocurre con las máquinas síncronas, en las máquinas asíncronas se puede obtener un circuito en régimen estacionario sinusoidal que permite evaluar el régimen transitorio para faltas equilibradas.

El modelo transitorio que se representa en la Figura 9.38 es adecuado para el análisis de las intensidades que circulan en el régimen transitorio, con una duración en torno a los 100 ms. Este modelo, que se define por una fuente de tensión en serie con una impedancia, se debe a la existencia de la inercia de las masas y a la presencia de flujos magnéticos que no pueden modificarse de forma instantánea. El valor U_n de la fuente de tensión, habitualmente se define por la tensión nominal de la máquina. La impedancia Z_{cc} es la de cortocircuito.

9.7.1. Modelo en componentes simétricas de una máquina asíncrona

El modelo de la máquina de inducción en régimen estacionario sinusoidal viene dado, para una fase, por un circuito como el de la Figura 9.39 (véase Capítulo 2), donde R_{cc} y X_{cc} son las denominadas resistencia y reactancia de cortocircuito, X_m es la reactancia de magnetización, R_r es la resistencia del rotor y s es el deslizamiento que se define como

$$s = \frac{\omega_s - \omega}{\omega_s}$$

donde ω es la velocidad del rotor y ω_s es la velocidad síncrona (velocidad del campo giratorio originado por los devanados del estátor).

Si se aplica una intensidad de secuencia directa en el estátor de la máquina, ésta trabaja con un deslizamiento s_1 que suele tener un valor inferior al 1% (0.01), siendo positivo si la

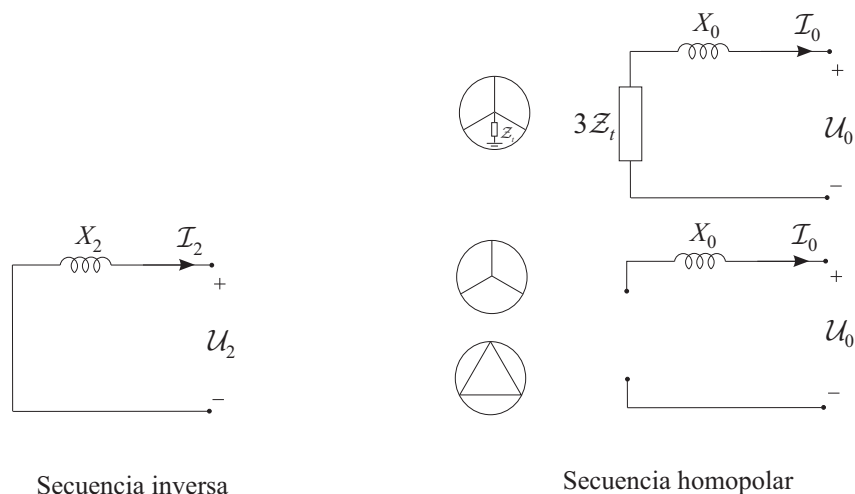


Figura 9.37. Circuitos de secuencia inversa y homopolar de una máquina síncrona.

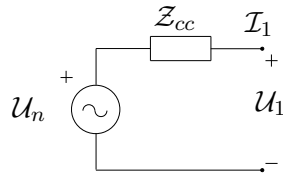


Figura 9.38. Modelo de una máquina asíncrona en régimen transitorio.

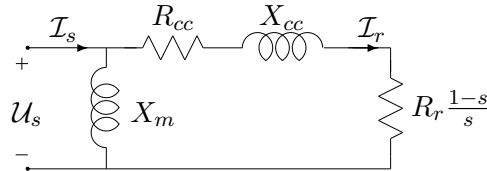


Figura 9.39. Circuito equivalente de una máquina asíncrona en régimen estacionario equilibrado.

máquina es un motor, y negativo si está funcionando como generador. Si la intensidad representa una falta equilibrada, el modelo de la máquina se establece por el circuito dinámico aproximado definido en el anterior apartado.

En cambio si se inyecta una intensidad de secuencia inversa, se origina un campo giratorio con una velocidad ω_2 que es contraria a la creada por la de secuencia directa. Con la misma referencia de la velocidad de giro del rotor se tiene $\omega_2 = -\omega_s$. En consecuencia, el deslizamiento que se obtiene para esta secuencia inversa de intensidades de estátor es:

$$s_2 = \frac{\omega_2 - \omega}{\omega_2} = \frac{\omega_s + \omega}{\omega_s} = 2 - s_1$$

Teniendo en cuenta los valores habituales de s_1 (<0.01), resulta que la resistencia ficticia del rotor para la secuencia inversa se reduce aproximadamente a $R_r/2$, que es un valor prácticamente despreciable. Por otra parte, si se considera que la reactancia de magnetización X_m tiene un valor elevado respecto a la impedancia de cortocircuito Z_{cc} de la máquina, el equivalente paralelo de las dos es prácticamente Z_{cc} . Por ello, se acostumbra a considerar como modelo de secuencia inversa de la máquina el correspondiente a la impedancia de cortocircuito (modelo que también se utiliza para calcular su intensidad de arranque) [5]. De este modo, el circuito de secuencia inversa de una máquina asíncrona, tanto en el régimen estacionario como en el transitorio, es el que se muestra en la Figura 9.40, siendo en consecuencia $Z_2 = Z_{cc}$.

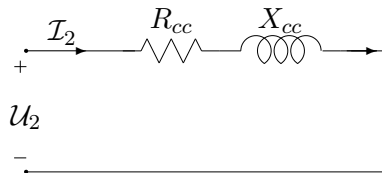


Figura 9.40. Circuito de secuencia inversa de una máquina asíncrona.

En general, las máquinas asíncronas trifásicas, al no disponer de conductor neutro, porque están en configuración triángulo o por no tenerlo accesible, no permiten la circulación de corrientes homopolares, lo que significa que su impedancia homopolar Z_0 es infinita.

Por consiguiente, en régimen transitorio, las secuencias de una máquina de inducción vista desde el estátor, responden a la ecuación matricial:

$$\begin{pmatrix} \mathcal{U}_1 \\ \mathcal{U}_2 \\ \mathcal{U}_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathcal{U}_n \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} Z_1 & 0 & 0 \\ 0 & Z_2 & 0 \\ 0 & 0 & \infty \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \mathcal{I}_1 \\ \mathcal{I}_2 \\ \mathcal{I}_0 \end{pmatrix} \quad (9.15)$$

donde $Z_1 = Z_2 = Z_{cc}$ y \mathcal{U}_n es la tensión nominal de la máquina.

Como en el caso de las máquinas síncronas, el análisis de cortocircuitos con presencia de máquinas de inducción se realiza sin más que implantar su circuito transitorio, que en este caso es común para el cálculo de las intensidades de pico, de corte y de ajuste de relés de protección. Para el caso de cortocircuitos en bornes de la máquina asíncrona, se originan únicamente intensidades transitorias que se pueden determinar según las normas IEC-363 y IEC-909.

9.8. Los sistemas de puesta a tierra desde el punto de vista del análisis de cortocircuitos

Como sistema de puesta a tierra de una red eléctrica se entiende la topología y los elementos de que dispone la red para detectar, neutralizar o conducir las intensidades que se producen ante un cortocircuito entre una fase activa y tierra.

El estudio de los sistemas de puesta a tierra abarca distintos aspectos: la tierra como conductor eléctrico, tomas de tierra, líneas de enlace... Sin embargo, en este apartado sólo se describen los sistemas de puesta a tierra desde el punto de vista del análisis de las intensidades que se presentan en los cortocircuitos L-T y L-L-T [3], sin entrar en los fenómenos de sobretensiones que se pueden producir.

En el análisis de faltas en redes trifásicas, la puesta a tierra se puede establecer a partir de la denominada red de secuencia homopolar, manifestándose en la presencia de las intensidades homopolares o, lo que es lo mismo, en la existencia de un camino hacia tierra de las intensidades presentes en la falta. Para una mayor aclaración de esto último, se remite al lector a considerar lo descrito en el apartado 9.5 de este capítulo, sobre las faltas L-T y L-L-T. En ambos casos, la existencia de la intensidad homopolar se establecía a través del circuito homopolar correspondiente. Dicho circuito homopolar presenta dos impedancias diferenciadas: Z_f es la impedancia del propio cortocircuito, y Z_0 es la impedancia equivalente obtenida a partir del equivalente Thevenin de la red vista desde el nudo de la falta. Como se ha estudiado en el apartado 9.5, el valor de la impedancia homopolar Z_0 depende del circuito de secuencia homopolar de los elementos que constituyan la red anexa al nudo de la falta y, en concreto, de los generadores y transformadores de acoplamiento. La puesta a tierra de estos elementos puede presentar, como se sabe, dos posibles situaciones: conexión de neutro directamente a tierra o conexión a tierra a través de una impedancia Z_t .

Por otra parte, para realizar una clasificación de los sistemas de puesta a tierra se suelen agrupar las redes, como en otros casos, en redes de transporte (AT, malladas) y en redes de

distribución (MT o BT, radiales)⁴. Las primeras pueden presentar elementos generadores y transformadores con distintas situaciones de puesta a tierra. Sin embargo, con la finalidad de detectar fácilmente las faltas L-T, estas redes de transporte presentan todos sus elementos conectados con conexión a tierra: transformadores en estrella con neutro conectado a tierra.

Las redes de distribución, debido a su topología radial suelen presentar una única fuente de alimentación (transformador de acoplamiento AT/MT o MT/BT) y, por tanto, el tipo de transformador y la conexión de su neutro a tierra permite identificar el sistema de puesta a tierra. Según esto, las redes de distribución (MT y BT) se pueden clasificar en:

- Red directamente puesta a tierra: Se trata de redes donde el neutro del secundario del transformador de acoplamiento está unido sólidamente a tierra y el primario en triángulo o estrella con neutro a tierra.
- Red puesta a tierra a través de una reactancia: Son las redes donde el neutro del secundario del transformador de acoplamiento está unido a tierra a través de una reactancia. Un caso particular se tiene cuando el valor de la inductancia se fija para que presente resonancia con las capacidades parásitas homopolares de las líneas, denominándose sistema de puesta a tierra a través de bobina Petersen o neutralizadora.
- Red puesta a tierra a través de una resistencia: Se trata de las redes donde el neutro del secundario del transformador de acoplamiento está unido a tierra a través de una resistencia.
- Red aislada de tierra: Son aquellas redes donde el neutro del secundario del transformador de acoplamiento o no existe, por tener una configuración triángulo, o bien no está unido a tierra.

Los sistemas de puesta a tierra aislados, desde el punto de vista del análisis de cortocircuitos que se ha descrito a lo largo de este capítulo, al no considerar en la red los elementos paralelo (capacidades de las líneas, consumos), presentan una intensidad de cortocircuito nula. Pero aunque se tuviesen en cuenta las capacidades de la líneas, la intensidad de defecto sería muy baja. Es decir, para los sistemas de neutro aislado el cálculo de las intensidades de cortocircuito no refleja una situación de interés; y lo mismo ocurre con los sistemas de puesta a tierra con bobina neutralizadora. Sin embargo, este tipo de sistemas presentan graves problemas transitorios en lo relativo a las sobretensiones que se originan, y que se establecen a partir de las ecuaciones diferenciales de la red [6].

9.9. Ejemplo de construcción de redes de secuencias y cálculo de cortocircuitos

En este apartado se presenta un ejemplo de construcción de los circuitos de secuencias y cálculo de cortocircuitos de la red eléctrica que se representa en la Figura 9.41.

Los datos de la red se presentan en las Tablas 9.5, 9.6 y 9.7. Se considera en los transformadores YdN que $X_0 = 0,95 \cdot X_1$ y en las líneas que $X_0 = 3 \cdot X_1$ y $R_0 = 3 \cdot R_1$.

⁴ Para las redes de BT con puesta a tierra, la existencia de un conductor neutro distribuido, puede ser ignorado en el análisis de cortocircuitos L-T de los conductores activos, al considerarse la red en vacío.

Cuadro 9.5. Elementos paralelo de la red ejemplo.

Elemento	Nudo	Conf.	U_n	Valores
Nudo interconexión	1	Yn	380 kV	$S_{cc} = 5\,000\text{ MVA}$ $X_1 = X_2 ; X_0 = 1,1 \cdot X_1$
Generador síncrono	2	Yn	11 kV	150 MVA ; $X_s=1,2$ $X'' = X_2 = 0,1 ; X' = 0,25 ; X_0 = 0,05$
Generador síncrono	3	Yn	20 kV	200 MVA ; $X_s=0,8$ $X'' = X_2 = 0,05 ; X' = 0,2 ; X_0 = 0,02$

Cuadro 9.6. Transformadores de la red ejemplo.

Elemento	Nudos	Conf.	Tensiones	Valores
Transformador	3-4	YdN5	220/20 kV	200 MVA ; $Z_{cc} = 12\%$
Transformador	2-9	YdN5	220/11 kV	100 MVA ; $Z_{cc} = 10\%$
Transformador	1-8	YyNn0	380/220 kV	200 MVA ; $Z_{cc} = 15\%$

A continuación, se representan los circuitos de secuencias directa, inversa y homopolar de la red ejemplo. Para ello, se considera la red inicialmente en equilibrio y en vacío y, en consecuencia, sus tensiones iniciales son $1\angle 0^\circ$ para la red de secuencia directa y $0\angle 0^\circ$ para las de secuencia inversa y homopolar. Los circuitos de secuencia se expresan en p.u. sobre la potencia base de 100 MVA y las tensiones base correspondientes a sus tensiones nominales.

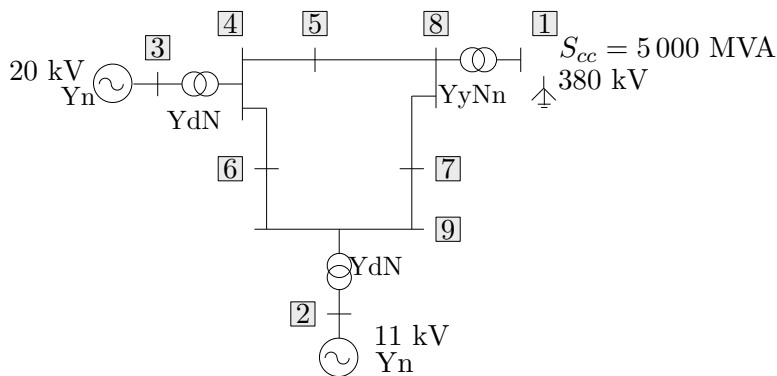


Figura 9.41. Ejemplo de red eléctrica.

Cuadro 9.7. Líneas de la red ejemplo.

Elemento	Nudos	Tensión	X_{pu} ($S_{base} = 100$ MVA)
Línea	4-5	220 kV	$0,072j$
Línea	5-8	220 kV	$0,1j$
Línea	4-6	220 kV	$0,15j$
Línea	6-9	220 kV	$0,085j$
Línea	8-7	220 kV	$0,17j$
Línea	7-9	220 kV	$0,09j$

La red de secuencia directa se muestra en la Figura 9.42, la de secuencia inversa en la Figura 9.43 y la de secuencia homopolar en la Figura 9.44.

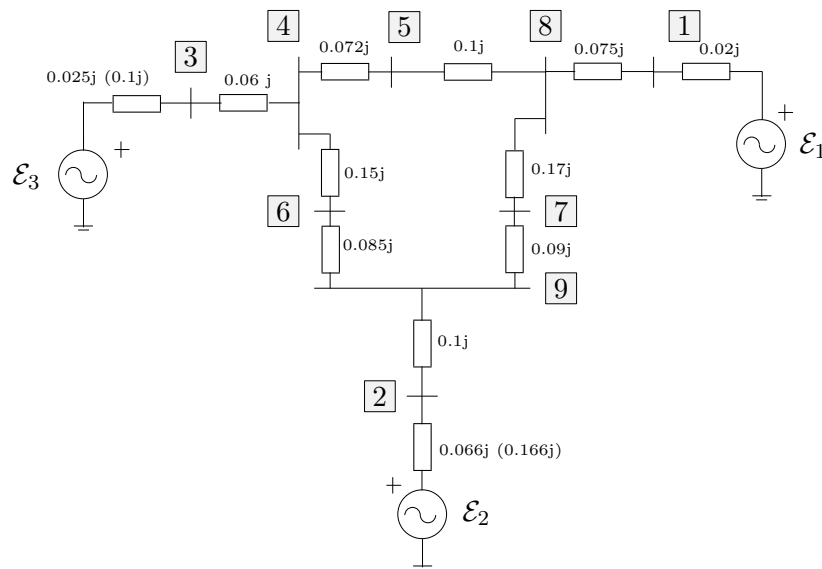


Figura 9.42. Red de secuencia directa de la red ejemplo.

A modo de ejemplo, a continuación se analizan dos faltas en la red de la Figura 9.41: falta línea-tierra en el nudo 9 y falta trifásica en distintos puntos de la línea 5-8.

Falta línea-tierra

Por tratarse de un falta línea-tierra de resistencia nula, se han de considerar los tres circuitos de secuencia directa, inversa y homopolar (Figuras 9.42, 9.43 y 9.44, respectivamente).

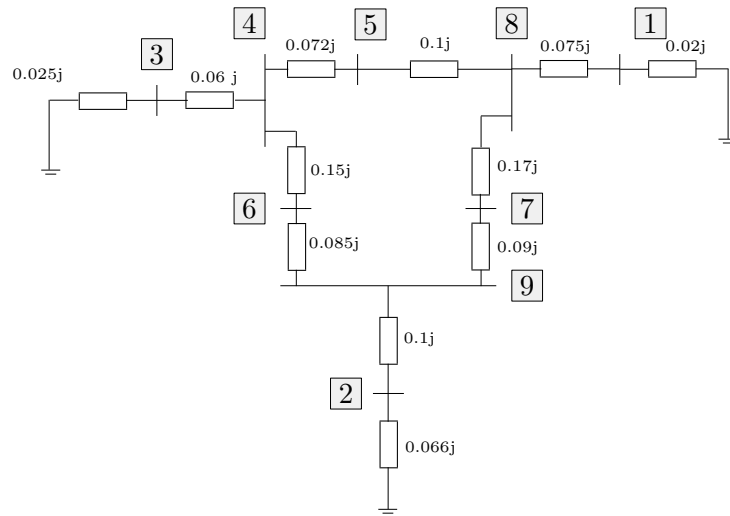


Figura 9.43. Red de secuencia inversa de la red ejemplo.

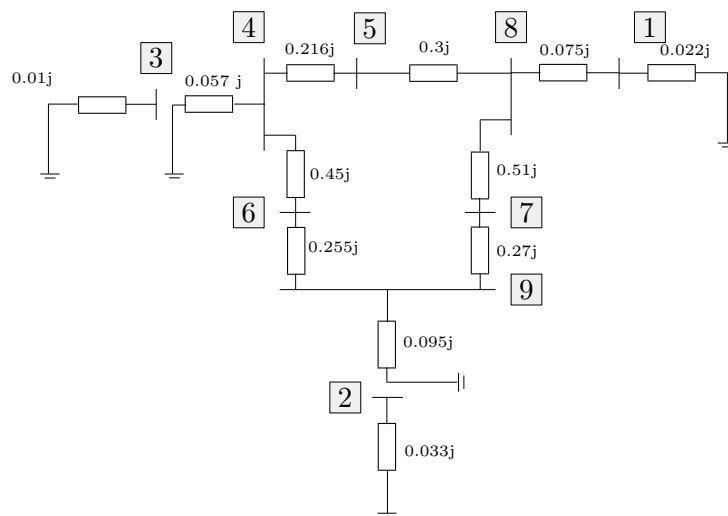


Figura 9.44. Red de secuencia homopolar de la red ejemplo.

De acuerdo con el apartado 9.5.1, para el cortocircuito entre la fase *a* y tierra en el nudo

9, la intensidad de cortocircuito se obtiene de:

$$\mathcal{I}_{cc,9} = \frac{3}{\mathcal{Z}_{1,99} + \mathcal{Z}_{2,99} + \mathcal{Z}_{0,99}} = \frac{3}{0,0836j + 0,0836j + 0,0636j} = -13,0j \text{ p.u.}$$

donde $\mathcal{Z}_{1,99}$, $\mathcal{Z}_{2,99}$ y $\mathcal{Z}_{0,99}$ son, respectivamente, los elementos (9,9) de las matrices de impedancias nodales directa, inversa y homopolar.

Multiplicando por la intensidad base de la zona del nudo 9, $I_{\text{base},9}$, se obtiene la intensidad de cortocircuito línea-tierra en el nudo 9 (corriente de la fase a) en valor eficaz:

$$I_{cc,9} = 13,0 \cdot I_{\text{base},9} = 3,41 \text{ kA}$$

Faltas trifásicas en distintos puntos de una línea

Se han calculado cortocircuitos trifásicos en distintos puntos a lo largo de la línea 5-8. En la Tabla 9.8 se muestran algunas tensiones e intensidades obtenidas en cada caso, en valores por unidad. El parámetro x expresa en %, la distancia desde el nudo 5 al punto de la falta.

Cuadro 9.8. Resultados en p.u. de cortocircuitos trifásicos equilibrados en la línea 5-8.

x	\mathcal{U}_4	\mathcal{U}_5	\mathcal{U}_8	\mathcal{U}_7	$\mathcal{I}_{4,5}$	$\mathcal{I}_{8,x}$	$\mathcal{I}_{7,8}$	$\mathcal{I}_{cc,x}$
0 %	0.4965	0	0.5463	0.6630	-6,8954j	-5.4627j	-0.6865j	-12.3581j
10 %	0.5267	0.0642	0.5229	0.6567	-6.4230j	-5.8096j	-0.7871j	-12.2325j
80 %	0.6481	0.3411	0.2040	0.5134	-4.2639j	-10.1993j	-1.8203j	-14.4632j
95 %	0.6586	0.3746	0.0606	0.4430	-3.9436j	-12.1220j	-2.2337j	-16.0655j
100 %	0.6607	0.3841	0	0.4090	-3.8415j	-12.9321j	-2.4058j	-16.7736j

9.10. Protección ante faltas en redes eléctricas

9.10.1. Necesidad de un sistema de protección

La continuidad y la calidad del servicio [7] son dos requisitos íntimamente ligados al funcionamiento satisfactorio de un Sistema Eléctrico de Potencia (SEP).

La continuidad hace referencia al hecho de que el SEP debe garantizar que la energía producida en los centros de generación sea suministrada de forma ininterrumpida a los centros de consumo. Esta característica adquiere especial importancia si se tiene en cuenta que la energía eléctrica, a diferencia de otros tipos de energía, no puede ser almacenada en forma significativa, por lo que una interrupción del suministro tiene repercusiones directas e inmediatas sobre los procesos que se desarrollan a partir del consumo de energía eléctrica.

El requisito de calidad se refiere a que la energía debe ser suministrada en unas determinadas condiciones, con el fin de garantizar que los diferentes equipos conectados a la red van a operar en las condiciones para las que han sido proyectados. Los márgenes de variación admitidos en cada magnitud (valores de onda, frecuencia, equilibrio, contenido en armónicos, etc.) son función de la sensibilidad de la instalación alimentada pero, a nivel general, se puede asegurar que el nivel de exigencia se está incrementando en los últimos años para todo tipo de instalaciones.

Cuando se produce una falta, como las descritas en puntos anteriores, las magnitudes asociadas al SEP alcanzan valores situados fuera de sus rangos normales de funcionamiento y determinadas áreas del sistema pueden pasar a operar en condiciones desequilibradas, con

el riesgo que ello conlleva para los diferentes elementos que lo integran. En caso de no tomar ningún tipo de medida en contra, la falta se propagaría a través de la red y sus efectos se irían extendiendo. Como consecuencia de todo ello, importantes zonas de la red podrían llegar a quedar fuera de servicio y la calidad del suministro se resentiría, incluso en zonas alejadas del punto en que se ha producido la falta.

Tanto por razones técnicas como económicas, es imposible evitar que se produzcan faltas. El diseño de un sistema eléctrico debe contemplar el hecho de que van a producirse faltas de manera aleatoria e inesperada, por lo que es necesario dotarlo de los medios adecuados para su tratamiento. Por esta razón, los SEP incorporan un sistema de protección que tiene por objetivo minimizar los efectos derivados de los diferentes tipos de faltas que pueden producirse.

La actuación del sistema de protección va encaminada, por tanto, a mantener tanto la calidad como la continuidad del servicio, intentando que ambas características se resientan mínimamente durante un tiempo mínimo. Para ello es necesario que la red sea planificada de manera que permita ofrecer alternativas de operación que posibiliten la adecuada alimentación de todos los puntos de consumo aunque se produzcan faltas que afecten a elementos de la generación, transporte o distribución.

Aunque una falta puede aparecer en cualquiera de los elementos que lo componen, los estudios realizados al efecto ponen de manifiesto que alrededor del 90% de las faltas se producen en las líneas aéreas, siendo las del tipo fase-tierra las más comunes. Este dato es fácilmente justificable por el hecho de que las líneas aéreas abarcan grandes extensiones de terreno, se encuentran a la intemperie y están sometidas a acciones exteriores que escapan de cualquier tipo de control mientras que otro tipo de elementos como generadores, transformadores, etc., operan bajo condiciones más fácilmente controlables.

Independientemente del punto en que se produzca la falta, la primera reacción del sistema de protección es la de desconectar el circuito en falta, para impedir que la falta se propague y disminuir el tiempo de permanencia bajo solicitaciones extremas de los equipos más directamente afectados. La desconexión del circuito en falta mediante interruptores automáticos origina un transitorio que, asimismo, puede implicar una serie de alteraciones como sobretensiones, descompensación entre generación y consumo con cambio de la frecuencia, etc. Cuando estas consecuencias den origen a condiciones inadmisibles para determinados elementos, el sistema de protección debe actuar en segunda instancia desconectando los circuitos que, aunque no estaban directamente afectados por la falta, se ven alcanzados por sus efectos.

Una vez que la falta y sus efectos han sido neutralizados, se debe proceder a realizar las acciones necesarias para restituir lo más rápidamente posible el sistema a sus condiciones iniciales de funcionamiento.

9.10.2. Características funcionales de un sistema de protección

Tanto un sistema de protección en su conjunto como cada una de las protecciones que lo componen, deben satisfacer las siguientes características funcionales:

Sensibilidad

La protección debe saber distinguir inequívocamente las situaciones de falta de aquellas que no lo son. Para dotar a un sistema de protección de esta característica es necesario:

- Establecer para cada tipo de protección las magnitudes mínimas necesarias que permiten distinguir las situaciones de falta de las situaciones normales de operación.
- Establecer para cada una de las magnitudes necesarias las condiciones límite que separan las situaciones de falta de las situaciones normales de operación.

Las “condiciones límite” son un concepto más amplio que el de “valores límite” ya que, en muchas ocasiones, el solo conocimiento del valor de una magnitud no basta para determinar si ha sido alcanzado como consecuencia de una situación anómala de funcionamiento o es el resultado de una incidencia normal dentro de la explotación del sistema.

Tal es el caso, por ejemplo, de la energización de un transformador de potencia. La conexión del primario del transformador a la red origina una fuerte intensidad de vacío, denominada en inglés *inrush current*, que si es analizada única y exclusivamente desde el punto de vista de su elevado valor puede llevar a interpretaciones erróneas. Un análisis más amplio, que incluya el estudio de la forma de onda a través de sus componentes armónicos, permite establecer si el súbito incremento de la corriente es debido a la energización del transformador o ha sido originado por una situación de falta.

Selectividad

La selectividad es la capacidad que debe tener la protección para, una vez detectada la existencia de falta, discernir si la misma se ha producido dentro o fuera de su área de vigilancia y, en consecuencia, dar orden de disparar los interruptores automáticos que controla, cuando así sea necesario para despejar la falta.

Tan importante es que una protección actúe cuando tiene que actuar como que no actúe cuando no tiene que actuar. Si la falta se ha producido dentro del área vigilada por la protección ésta debe dar la orden de abrir los interruptores que aíslen el circuito en falta. Si, por el contrario, la falta se ha producido fuera de su área de vigilancia, la protección debe dejar que sean otras protecciones las que actúen para despejarla, ya que su actuación dejaría fuera de servicio un número de circuitos más elevado que el estrictamente necesario para aislar la falta y, consecuentemente, implicaría un innecesario debilitamiento del sistema.

Existen diversas formas de dotar a las protecciones de la característica de selectividad. En algunos casos, la propia configuración de la protección hace que solamente sea sensible ante faltas ocurridas en su área de protección y, por tanto, la selectividad resulta ser una cualidad inherente al propio funcionamiento de la protección. En los casos en que las protecciones sí son sensibles a faltas ocurridas fuera de su área de vigilancia la selectividad puede lograrse, por ejemplo, mediante un adecuado ajuste de condiciones y tiempos de actuación en coordinación con el resto de protecciones relacionadas.

Rapidez

Tras haber sido detectada, una falta debe ser despejada lo más rápidamente posible. Cuanto menos tiempo se tarde en aislar la falta, menos se extenderán sus efectos y menores daños y alteraciones se producirán al reducirse el tiempo de permanencia bajo condiciones anómalas en los diferentes elementos. Todo ello redundará en una disminución de los costes y tiempos de restablecimiento de las condiciones normales de operación, así como de reparación o reposición de equipos dañados, y, por tanto, en un menor tiempo de indisponibilidad de las instalaciones afectadas por la falta, lo que posibilita un mayor y mejor aprovechamiento de los recursos ofrecidos por el SEP.

La rapidez con que puede actuar una protección depende directamente de la tecnología empleada en su construcción y de la de la velocidad de respuesta del sistema de mando y control de los interruptores automáticos asociados a la misma.

Sin embargo, un despeje óptimo de la falta no exige que todas las protecciones que la detectan actúen de forma inmediata. En función de esta característica las protecciones se clasifican en:

1. Protecciones instantáneas

Son aquellas que actúan tan rápido como es posible debido a que la falta se ha producido dentro del área que vigilan directamente. En la actualidad, a nivel orientativo, el tiempo usual de despeje de una falta en AT mediante una protección instantánea puede situarse en el entorno de dos o tres ciclos. Si el tiempo de despeje es menor la protección se denomina de alta velocidad.

2. Protecciones de tiempo diferido

Son aquellas en las que de manera intencionada se introduce un tiempo de espera que retrasa su operación, es decir, que retrasa el inicio de la maniobra de apertura de interruptores una vez que ha sido tomada la decisión de operar. Este retraso facilita, por ejemplo, la coordinación entre protecciones con el objetivo de que actúen solamente aquellas que permiten aislar la falta desconectando la mínima parte posible del SEP.

Fiabilidad

Una protección fiable es aquella que responde siempre correctamente. Esto significa que la protección debe responder con seguridad y efectividad ante cualquier situación que se produzca.

No debe confundirse la respuesta de la protección con su actuación u operación. La protección está vigilando continuamente lo que pasa en el sistema y, por tanto, está respondiendo en cada instante en función de las condiciones que en él se producen. En consecuencia, la respuesta de la protección puede ser tanto de actuación como de no actuación. Seguridad significa que no deben producirse actuaciones innecesarias ni omitirse actuaciones necesarias.

Por otra parte, cuando la protección debe actuar es necesario que todas las etapas que componen el proceso de despeje de la falta sean cumplidas con efectividad. El fallo en

cualquiera de ellas implicaría que la orden de actuación dada por la protección no podría ser cumplida con la debida obediencia por el interruptor automático correspondiente.

En este sentido, es necesario resaltar la gran importancia que tiene para las protecciones la definición de un adecuado programa de mantenimiento preventivo [8, 9]. Hay que tener en cuenta que una protección solamente actúa en condiciones de falta y que estas condiciones son escasas y excepcionales en cualquier SEP moderno. Por tanto, aunque una protección a lo largo de su vida útil va a operar en escasas ocasiones, se debe tener la seguridad de que operará correctamente aunque haya transcurrido un largo período de tiempo desde la última vez que lo hizo.

Economía y simplicidad

La instalación de una protección debe estar justificada tanto por motivos técnicos como económicos. La protección de una línea es importante, pero mucho más lo es impedir que los efectos de la falta alcancen a las instalaciones alimentadas por la línea o que éstas queden fuera de servicio. El sistema de protección es una pieza clave del SEP ya que permite:

- Impedir que la falta se extienda a través del sistema y alcance a otros equipos e instalaciones provocando un deterioro de la calidad y continuidad del servicio.
- Reducir los costes de reparación del daño.
- Reducir los tiempos de permanencia fuera de servicio de equipos e instalaciones.

Por tanto, la valoración económica no debe restringirse solamente al elemento directamente protegido, sino que debe tener en cuenta las consecuencias que implicaría el fallo o funcionamiento anómalo del mencionado elemento.

Finalmente, es necesario señalar que una protección o sistema de protección debe evitar complejidades innecesarias, ya que éstas serían fuentes de riesgo que comprometerían el cumplimiento de las propiedades que deben caracterizar su funcionamiento.

9.10.3. Estructura de un sistema de protección

La gran importancia de la función realizada por el sistema de protección hace aconsejable dotarlo de una estructura que impida que el fallo de uno cualquiera de sus equipos deje desprotegido al SEP y desencadene una serie de consecuencias indeseables.

Un análisis técnico aconsejaría cubrir mediante equipos de apoyo el posible fallo de los equipos de protección principales. Sin embargo, consideraciones de tipo económico hacen inviable la utilización de equipos de apoyo en los casos que la experiencia muestra que la probabilidad de producirse una falta es mínima. Por contra, en casos como el de la protección de líneas aéreas que soportan estadísticamente alrededor del 90 % de las faltas que ocurren en un SEP, el establecimiento de sistemas de apoyo resulta imprescindible.

Por esta razón, el sistema de protección de la red se estructura en base a:

1. Protecciones primarias.
2. Protecciones de apoyo.

Protecciones primarias

Las protecciones primarias son aquellas que tienen la responsabilidad de despejar la falta en primera instancia. Están definidas para desconectar el mínimo número de elementos necesarios para aislar la falta.

Con el fin de optimizar sus prestaciones, el SEP se divide en zonas de protección primaria definidas en torno a cada elemento importante, tal y como se indica en la Figura 9.45. Cada zona se solapa con sus adyacentes con el fin de evitar que se produzcan zonas muertas no cubiertas por protecciones primarias. El solape entre dos zonas se establece alrededor del interruptor común a ambas que sirve de separación entre los dos elementos contiguos correspondientes.

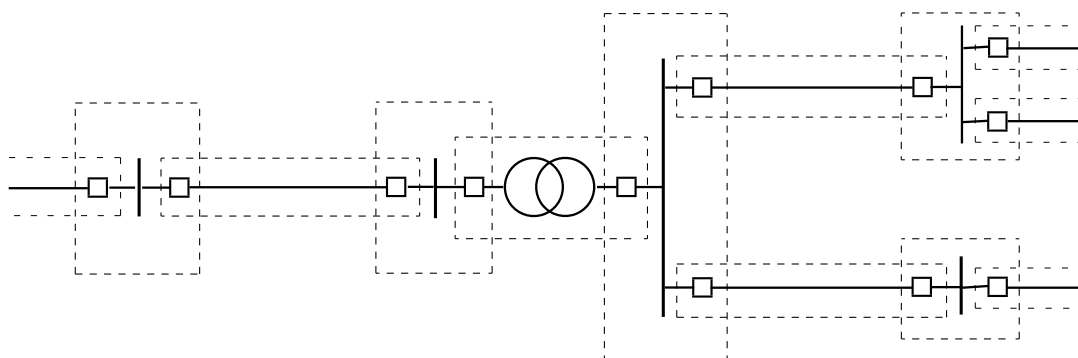


Figura 9.45. Zonas de protección primaria.

Cuando se produce una falta en el interior de una zona las protecciones primarias correspondientes deben disparar los interruptores pertenecientes a la misma, pero solamente éstos y ninguno más debe ser disparado para despejar la falta. Únicamente en el caso, poco probable pero posible, de que la falta se produzca en la zona solapada, la actuación de las protecciones primarias pueden llevar a desconectar un área más amplia que la estrictamente necesaria para aislar la falta.

Protecciones de apoyo

Las protecciones de apoyo son aquellas que tienen la responsabilidad de despejar la falta en segunda instancia, es decir, solamente deben operar en el caso de que hayan fallado las

protecciones primarias correspondientes. Por esta razón es muy importante independizar entre sí las causas de fallo de la protección principal y de apoyo, de forma tal que nada que pueda producir el fallo de la protección principal sea capaz también de provocar el fallo de la protección de apoyo. Usualmente esto se consigue empleando distintos elementos y circuitos de alimentación, control, etc., en uno y otro tipo de protección.

Las protecciones de apoyo deben operar con retardo respecto a las principales con el fin de dejarles tiempo suficiente para que puedan actuar. Una vez que se haya producido esta actuación, las protecciones de apoyo deben ser reinicializadas con el fin de impedir innecesarias aperturas de interruptores.

Se denomina protección de apoyo local [10] a aquella que se ubica en la misma subestación que la protección primaria correspondiente. La duplicidad de elementos, como por ejemplo los transformadores de medida para protección que las alimentan, se hace imprescindible en algunos casos si se quiere conseguir independizar las causas de fallo en uno y otro tipo de protección.

Cuando la protección de apoyo está instalada en una subestación contigua a la que contiene la protección principal recibe el nombre de protección de apoyo remoto. Las protecciones de apoyo remoto presentan la ventaja de separar, como consecuencia de su propia filosofía de instalación, las causas de fallo respecto a las protecciones primarias correspondientes. Sin embargo, presentan el inconveniente de que su actuación conduce siempre a la desconexión de un área de la red mayor que la estrictamente necesaria para aislar la falta.

Finalmente, es necesario señalar que una misma protección puede desempeñar funciones de protección primaria para un determinado elemento y, al mismo tiempo, funciones de protección de apoyo para otro elemento. Asimismo, cuando las protecciones primarias se encuentran fuera de servicio debido a tareas de reparación o mantenimiento, las protecciones de apoyo correspondientes se convierten en protección primaria frente a las faltas que puedan producirse.

9.10.4. Elementos de un equipo de protección

Un equipo de protección no es solamente la protección o relé, propiamente dicho, sino que incluye a todos aquellos componentes que permiten detectar, analizar y despejar la falta [11, 12]. Los principales elementos que componen un equipo de protección son:

- Batería de alimentación.
- Transformadores de medida para protección.
- Relé de protección.
- Interruptor automático.

Batería de alimentación

La batería de alimentación es el elemento que garantiza la continuidad del suministro de la energía necesaria para el funcionamiento del equipo de protección. La alimentación del equipo de protección no puede realizarse directamente desde la línea. Si así se hiciese, una falta que dejase sin alimentación una subestación, o provocase una defectuosa alimentación de la misma, dejaría también fuera de servicio a todos los equipos de protección ubicados en ella. Ello implicaría graves consecuencias debido a que es precisamente en condiciones de falta cuando un equipo de protección debe actuar.

Por tanto, un equipo de protección debe contar con una fuente de alimentación propia que le permita operar en isla, sin depender de fuentes externas, durante un tiempo suficiente.

Generalmente, la batería de corriente continua está permanente conectada a través de un cargador a la línea de corriente alterna de los servicios auxiliares de la subestación y, en caso de fallo en la línea de c.a., tiene una autonomía del orden de 10 o 12 horas.

Transformadores de medida para protección

Los datos de entrada a la protección, o relé, deben reflejar el estado en que se encuentra el SEP. Aunque existen excepciones, los datos que se utilizan habitualmente son los correspondientes a las magnitudes de tensión e intensidad. Lógicamente, debido a su elevado valor, las tensiones e intensidades existentes en la red no pueden ser utilizadas directamente como señales de entrada al relé, por lo que deben emplearse elementos que las reduzcan a un nivel adecuado. Estos elementos son los transformadores de medida para protección [13].

Los transformadores de medida reproducen a escala reducida en su secundario la magnitud de elevado valor que alimenta su primario. Para que la información llegue correctamente a la protección es necesario que, además, las conexiones secundarias se realicen respetando los sentidos marcados por los terminales correspondientes de primario y secundario, máxime si se tiene en cuenta que algunos tipos de protecciones son sensibles a la polaridad de la señal que les llega.

El dato proporcionado por los transformadores de medida está afectado de un determinado error. La clase de precisión es un dato característico de cada transformador de medida que hace referencia al máximo error que puede incorporar la información proporcionada por el transformador cuando funciona dentro de las condiciones para las que se define. Cuanto menor sea el valor de la clase de precisión, menor será el error máximo y mayor será la exactitud de los datos obtenidos mediante el transformador.

Los transformadores de medida convencionales proporcionan información fiable cuando trabajan en el rango de valores correspondientes a la operación normal del sistema. Sin embargo, es en condiciones de falta cuando es más necesario que las protecciones reciban datos fiables. Por esta razón, los datos de la red deben ser suministrados a las protecciones mediante transformadores de medida para protección, que son proyectados y construidos para garantizar precisión en las condiciones extremas que se producen cuando ocurre una falta.

En función de la magnitud que transforman, los transformadores de medida para protección pueden ser:

- Transformadores de tensión.
- Transformadores de intensidad.

Los transformadores de tensión tienen el mismo principio de funcionamiento que los transformadores de potencia. Habitualmente, su tensión nominal secundaria es de 110 V en los países europeos y de 120 V en Estados Unidos y Canadá. Pueden ser del tipo fase-fase, utilizados solamente para tensiones inferiores a 72.5 kV, o del tipo fase-tierra. En la red de transporte es muy común la utilización de transformadores de tensión capacitivos que, básicamente, consisten en un divisor capacitivo que sirve para reducir la tensión aplicada al primario de un transformador de tensión inductivo convencional. En función de la tensión

que se quiera medir, los transformadores de tensión pueden ser conectados según diversos esquemas de conexión. Por ejemplo, para medir la tensión homopolar los secundarios deben ser dispuestos en triángulo abierto.

Los transformadores de intensidad se conectan en serie con el conductor por el que circula la corriente que quiere ser medida. Su intensidad nominal secundaria es usualmente de 5 A, aunque también suele ser utilizada la de 1 A. El mayor peligro para su precisión es que las grandes corrientes que se producen como consecuencia de una falta provoquen su entrada en saturación.

Es muy habitual que los transformadores de intensidad dispongan de varios secundarios con diferentes características, ya que cada secundario tiene su propio núcleo y es independiente de los otros. Un transformador de intensidad que disponga, por ejemplo, de dos secundarios es normal que tenga uno destinado a medida y otro a protección. En función de la intensidad que se quiera medir, los transformadores de intensidad se conectan según diversos esquemas de conexión. Por ejemplo, para medir la intensidad homopolar los secundarios deben ser dispuestos en estrella.

Relé de protección

El relé de protección, que usualmente es denominado simplemente relé o protección, es el elemento más importante del equipo de protección. En sentido figurado puede decirse que desempeña la misión de cerebro, ya que es el que recibe la información, la procesa, toma las decisiones y ordena la actuación en uno u otro sentido.

Para realizar todo ello, con independencia de la tecnología empleada para su construcción, una protección desarrolla internamente tres etapas fundamentales:

1. Acondicionamiento de señales.
2. Aplicación de funciones de protección.
3. Lógica de disparo.

Las protecciones necesitan datos que, generalmente, no pueden ser proporcionados directamente por los transformadores de medida que las alimentan. Por esta razón, la primera etapa consiste en acondicionar las señales de entrada al formato que el relé necesita para su funcionamiento. Normalmente los datos de entrada son los valores instantáneos de las magnitudes de fase (tensión y/o intensidad). A partir de ellos se determinan, en función de las necesidades específicas de cada relé, valores eficaces, valores máximos, componentes aperiódicas, componentes de secuencia, armónicos fundamentales o de orden superior, etc.

Una vez que la protección dispone de los datos que necesita procede a aplicar los criterios de decisión que le hayan sido implementados. Los criterios de decisión se construyen mediante funciones básicas de protección que serán explicadas más adelante. El elemento en el que se realiza cada función básica se denomina unidad de medida. El adecuado funcionamiento de una protección, debido a la complejidad y variedad de factores que es necesario tener en cuenta, exige generalmente la incorporación de varias funciones básicas. Por tanto, una protección está compuesta normalmente por varias unidades de medida.

Los resultados proporcionados por las distintas funciones que integran la protección se analizan conjuntamente mediante la lógica de disparo, que es la responsable de tomar la decisión de cómo debe actuar la protección. Esta actuación se lleva a cabo mediante los circuitos auxiliares de control de los interruptores asociados al funcionamiento de la protección. La orden se transmite a través de los contactos que energizan los circuitos de disparo de los interruptores que hayan sido definidos por la lógica de disparo como aquellos que es necesario abrir para aislar la falta.

Asimismo, la protección gobierna otra serie de circuitos auxiliares de control que sirven, por ejemplo, para activar alarmas, enviar información al despacho central de maniobras, etcétera.

Interruptor automático

El interruptor automático [14] es el elemento que permite abrir o cerrar un circuito en tensión, interrumpiendo o estableciendo una circulación de intensidad. Opera bajo el control de la protección y su apertura, coordinada con la de otros interruptores, permite aislar el punto en que se ha producido la falta.

Básicamente consta de:

- Circuito de control, que es gobernado por la protección correspondiente.
- Contactos principales, que al separarse o juntarse implican, respectivamente, la apertura o cierre del interruptor.
- Contactos auxiliares, que reflejan el estado en que se encuentra el interruptor. Mediante ellos se realimenta a la protección y a otros equipos con la información de si el interruptor está abierto o cerrado y, por tanto, permiten conocer si el interruptor ha operado correctamente siguiendo la orden dada por la protección.
- Cámara de extinción, en la que se crea un ambiente de alta rigidez dieléctrica que favorece la extinción del arco que se produce como consecuencia de la separación de los contactos del interruptor que se encuentran inmersos en ella. Como medios dieléctricos más empleados actualmente cabe citar el aceite y el hexafluoruro de azufre.

Desde el punto de vista de la protección, con independencia de la tecnología empleada para su construcción, las dos características principales que debe satisfacer el interruptor son:

- Rapidez de separación de los contactos principales, con el fin de minimizar el tiempo necesario para llevar a cabo la maniobra de apertura. Cuando la protección da orden de realizar la apertura para aislar la falta se activa el circuito de disparo y, como consecuencia de ello, los contactos empiezan a separarse. Sin embargo, la separación inicial de los contactos no implica la inmediata apertura del circuito ya que en los primeros instantes se establece un arco que mantiene la circulación de corriente entre los dos contactos. La interrupción se produce en el primer paso de la intensidad por cero, pero, si en ese instante la separación de los contactos no es suficiente, la

tensión entre ellos hace que se establezca de nuevo el arco. La interrupción definitiva, y consecuentemente la apertura del circuito, se produce en posteriores pasos de la corriente por cero, ya que entonces los contactos han tenido tiempo de separarse lo suficiente como para impedir el recibido del arco. Cuanto mayor sea la velocidad con que se separan los contactos menor será el tiempo necesario para alcanzar la distancia que garantice la apertura del circuito. A nivel orientativo se puede señalar como normal que la interrupción definitiva se produzca en el segundo o tercer paso de la corriente por cero.

- Poder de corte suficiente para garantizar la interrupción de la máxima corriente de cortocircuito que puede producirse en el punto en que está instalado el interruptor. El poder de corte está íntimamente ligado a la capacidad que debe tener el medio dieléctrico para desempeñar también la función de medio refrigerante, ya que debe ser capaz de canalizar hacia el exterior la energía liberada en el proceso de extinción del arco. En líneas de AT es habitual que para aumentar el poder de corte se utilicen varias cámaras de extinción en serie, cuyos contactos deben operar de manera sincronizada. Este hecho no introduce ninguna modificación desde el punto de vista de la protección, ya que ésta da en todos los casos una orden única de actuación y es el interruptor quien debe incorporar los mecanismos necesarios para asegurar la sincronización.

En líneas aéreas es muy habitual que las causas que provocan una falta tengan carácter transitorio, es decir, que desaparezcan tras haberla originado y haberse despejado la falta. Por esta razón en la protección de líneas aéreas se emplea la maniobra de reenganche [15]. Transcurrido un tiempo prudencial tras haberse producido una falta y haberse realizado un disparo monofásico o trifásico para despejarla, la maniobra de reenganche consiste en volver a cerrar el circuito mediante el cierre monofásico o trifásico correspondiente. El tiempo de espera desde que se abre el interruptor hasta que se vuelve a intentar su cierre es necesario para desionizar el medio contenido en la cámara de extinción. Si las causas eran de carácter transitorio el reenganche se producirá con éxito y el sistema continuará funcionando satisfactoriamente habiendo tenido un tiempo mínimo de indisponibilidad. Si, por el contrario, las causas que originaron la falta aún persisten la protección volverá a ordenar el disparo de los interruptores.

En ocasiones, sobre todo en redes de distribución, se programan varios intentos de reenganche, separados entre sí por intervalos de tiempo crecientes, con el fin de asegurarse de que las causas que motivaron la falta no han desaparecido por sí solas al cabo de cierto tiempo. Para tener una idea del orden de magnitud de los tiempos programados habitualmente cabe citar que, en líneas de distribución, el primer intento de reenganche se realiza tras un tiempo aproximado de 0.2 segundos y que los dos o tres intentos de reenganche sucesivos, caso de ser necesarios, se realizan entre los 10 y 150 segundos siguientes.

Por tanto, la protección controla tanto el circuito de disparo como el circuito de cierre del interruptor automático. Cuando la importancia de las instalaciones o equipos protegidos así lo justifica, los circuitos de control se instalan por duplicado para asegurar, por ejemplo, que aunque se produzca una avería que inutilice el circuito de disparo principal la apertura del interruptor quede garantizada por la actuación del circuito de disparo de reserva.

9.10.5. Funciones de protección

Aunque las funciones desarrolladas por las protecciones son muy variadas y complejas, puede realizarse una abstracción de las mismas que permite clasificarlas en los cuatro tipos básicos siguientes [12]:

1. Función de nivel de una sola magnitud.
2. Función cociente de dos magnitudes.
3. Función de comparación de fase.
4. Función de comparación de magnitud.

Además existen otras funciones que, sin pertenecer a ninguno de los cuatro tipos anteriores ni corresponder a funciones específicas de protección, son necesarias para que el sistema de protección opere adecuadamente en su conjunto. A este grupo, que podríamos denominar de funciones complementarias, pertenecen entre otras la función de reenganche, ya explicada anteriormente, o todas aquellas funciones que permiten comunicar o conectar entre sí los diferentes elementos que componen el sistema de protección.

La particularización y combinación de estas funciones básicas da origen a las diferentes funciones que caracterizan la operación de los distintos tipos de protecciones existentes.

A continuación, se presentan someramente cada una de estas funciones básicas para, en puntos posteriores, pasar a exponer las principales protecciones utilizadas en redes de energía eléctrica.

Función de nivel de una sola magnitud

Esta función toma como dato el valor de una sola magnitud en un único punto del sistema y lo compara con el nivel umbral que haya sido establecido para caracterizar la situación de funcionamiento anómalo que debe ser detectada por la protección. No todas las funciones pertenecientes a esta categoría toman como dato el mismo tipo de valor. Así por ejemplo, en algunas de ellas puede ser conveniente considerar el valor eficaz y en otras ser más adecuado tener en cuenta el valor máximo o de pico.

La función de sobreintensidad, junto a la función de subtensión y la función de frecuencia, son los ejemplos más característicos de este tipo de funciones.

Función cociente de dos magnitudes

Esta función establece mediante cociente la relación entre las dos magnitudes dato de entrada a la protección. El resultado del cociente es el factor empleado para analizar la situación vigilada por la protección y, en base a su valor, se toma la decisión de actuación en uno u otro sentido.

Entre las funciones de este tipo más importantes y utilizadas se encuentra la función de impedancia. Esta función se emplea en las protecciones de distancia y utiliza como datos de entrada las magnitudes de tensión e intensidad existentes en el extremo de línea en que está instalada la protección.

Función de comparación de fase

Lo que esta función realiza básicamente es una comparación entre la secuencia temporal de dos magnitudes. Explicando lo anterior en términos de representación fasorial o vectorial, puede decirse que mediante esta función se comparan los ángulos de fase correspondientes a dos magnitudes obteniéndose como resultado el ángulo existente entre ambas. Mediante este tipo de funciones puede vigilarse, por ejemplo, el sentido del flujo de potencia y detectarse su inversión, etc.

A este grupo de funciones pertenece la función direccional, que emplea como datos de entrada una tensión y una intensidad, o en ocasiones dos intensidades, y establece el ángulo existente entre ambas magnitudes. A partir del ángulo obtenido como resultado, la protección direccional correspondiente toma la decisión de actuación en uno u otro sentido.

Función de comparación de magnitud

Mediante este tipo de funciones se compara el resultado de la combinación de las magnitudes de entrada con el valor de referencia establecido en cada caso, para diferenciar las condiciones normales de operación de aquellas que no lo son.

Aunque cada función concreta tiene sus propias características, en lo que a tipo y número de magnitudes de entrada hace referencia, lo más habitual es que las magnitudes consideradas sean intensidades.

A este grupo de funciones básicas pertenece entre otras la función diferencial que, básicamente, emplea como datos de entrada las intensidades en dos puntos y permite determinar si existe alguna fuga de corriente en el tramo de circuito comprendido entre ambos.

9.11. Protecciones de sobreintensidad

Las protecciones de sobreintensidad son las más sencillas de todas las existentes. Su operación se basa en la función de sobreintensidad que consiste en la comparación del valor de la intensidad utilizada como dato de entrada a la protección con un valor de referencia. Este valor de referencia se establece en función de las condiciones que concurren en el punto en que se instala el relé, por lo que debe ser reajustado convenientemente si la configuración del sistema cambia. La protección opera cuando la intensidad de entrada supera el valor de la intensidad de referencia. Por esta razón, las protecciones de sobreintensidad solamente pueden ser utilizadas cuando la corriente que circula por el punto en que se instalan cumple la condición de que la máxima intensidad de carga, correspondiente a condiciones normales de operación del sistema, es menor que la mínima intensidad de falta.

En función del tiempo de operación, las protecciones de sobreintensidad se clasifican en:

1. Protecciones de sobreintensidad instantáneas.
2. Protecciones de sobreintensidad de tiempo diferido:
 - De tiempo fijo.
 - De tiempo inverso.

Las protecciones de sobreintensidad instantáneas son aquellas que operan de manera inmediata, es decir, no introducen ningún tiempo intencionado de retraso en su operación desde el instante en que la intensidad de entrada sobrepasa el valor de referencia.

Las protecciones de sobreintensidad de tiempo diferido son aquellas que introducen un tiempo intencionado de retraso en su operación. Cuando este tiempo es independiente del valor de la intensidad de entrada recibe el nombre de protección de sobreintensidad de tiempo fijo.

Cuando el tiempo de retraso es función del valor de la intensidad de entrada se denominan protecciones de tiempo inverso. En estos casos cuanto mayor es el valor de la intensidad menor es el tiempo de retraso introducido y, por tanto, menor el tiempo que la protección tarda en operar.

La Figura 9.46 muestra las curvas características correspondientes a los distintos tipos de protecciones de sobreintensidad señalados. En ella puede apreciarse cómo la característica correspondiente a las protecciones de tiempo inverso puede ser, en función de su pendiente, inversa, muy inversa o extremadamente inversa.

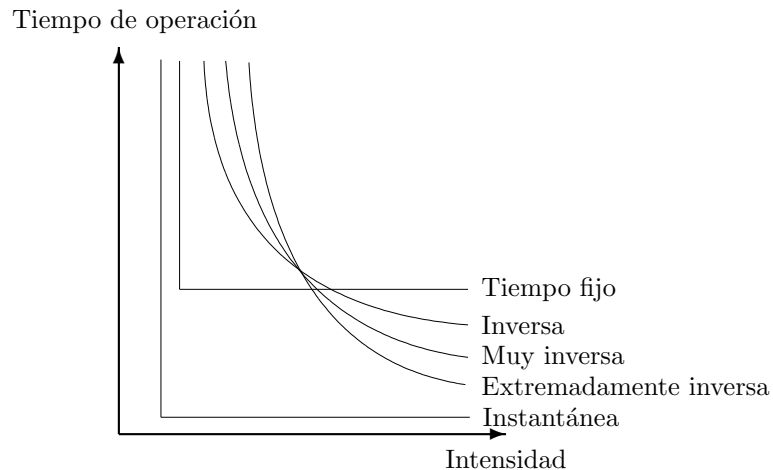


Figura 9.46. Curvas características de protecciones de sobreintensidad.

En cada unidad de protección concreta los factores que definen su curva característica pueden ser ajustados dentro del rango para el que ha sido diseñada. Por esta razón, cada protección dispone de una familia de curvas características y, cuando se instala, debe ajustarse para que funcione con aquella que mejor responda a las condiciones particulares del punto en que se ubica y mejor se adecue a las necesidades de coordinación con otras protecciones.

La principal desventaja de las protecciones de sobreintensidad es que individualmente son escasamente selectivas debido a que su respuesta es función únicamente del valor de la intensidad que vigilan, con independencia de la causa que la origina, de su sentido de circulación o del punto en que se ha producido la falta. Por esta razón, la selectividad de las protecciones de sobreintensidad se define a nivel de conjunto, es decir, coordinando

adecuadamente la respuesta de todas ellas. Esta coordinación se puede realizar mediante canales de comunicación, ajustes de tipo amperimétrico, ajustes de tipo cronométrico o técnicas resultantes de su combinación.

El empleo de canales de comunicación da lugar a la denominada selectividad lógica. Esta técnica se basa en el establecimiento de una cadena de transmisión de información entre protecciones de modo que cada una recibe y transmite, caso de ser necesario, información relativa a si ve o no ve intensidad de falta. En función de la lógica definida en base a la estructura del sistema vigilado se establece cuál de las protecciones es la que debe operar para despejar la falta.

El principal inconveniente de esta forma de coordinación es que la fiabilidad del sistema de protección se ve afectada por un importante factor de riesgo. En efecto, si la selectividad se basa solamente en esta técnica un fallo en los canales de comunicación privaría a las protecciones de selectividad y daría lugar, casi con toda seguridad, a que se dejase fuera de servicio una zona mucho más amplia que la estrictamente necesaria para despejar la falta.

La selectividad se denomina amperimétrica si la coordinación se realiza mediante el ajuste del valor de referencia de cada protección, es decir, del valor de intensidad a partir del cual opera. Esta técnica es poco utilizada en la práctica debido a que exige que el valor de la intensidad vista por la protección permita definir unívocamente la zona en que se ha producido la falta y discernir, como consecuencia de ello, si la protección debe o no debe operar.

Cuando la selectividad se logra ajustando convenientemente los tiempos de operación de las protecciones recibe el nombre de selectividad cronométrica. Lógicamente, este tipo de selectividad se aplica a las protecciones de sobreintensidad de tiempo diferido, ya que las protecciones de sobreintensidad instantáneas no permiten ajustar su tiempo de operación. La gran desventaja de esta técnica es que en la mayor parte de los casos provoca un retraso en el despeje de la falta, con lo que ello puede implicar de agravamiento de sus consecuencias. A pesar de ello, la selectividad cronométrica es la más empleada entre protecciones de sobreintensidad.

Las pobres prestaciones de selectividad y los inconvenientes inherentes a su coordinación hacen que las protecciones de sobreintensidad se empleen fundamentalmente en el ámbito de las redes de distribución, siendo mucho menor su utilización en líneas de transporte de AT. Ello es debido a que las faltas en líneas de distribución generalmente no comprometen la estabilidad del sistema, por lo que el coste es el factor predominante a la hora de establecer su sistema de protección. En las líneas de transporte, por el contrario, es muy importante tanto despejar la falta lo más rápidamente posible como aislarla desconectando el mínimo número de circuitos posible ya que, en caso contrario, se pondría en peligro la estabilidad del sistema y se le debilitaría de forma innecesaria. Por esta causa, para la protección de líneas de transporte de AT se recurre a la utilización de otros tipos de protecciones más sofisticados y costosos como, por ejemplo, las protecciones de distancia.

Por otro lado, la filosofía de aplicación de protecciones de sobreintensidad depende en gran medida de la topología del sistema que vigilan y, por ello, difiere notablemente cuando se trate de proteger redes radiales o redes malladas.

9.11.1. Redes radiales

Para una red radial de distribución el flujo de potencia siempre tiene el mismo sentido. En cada línea que la compone este flujo de potencia se dirige siempre desde el extremo más cercano a la generación hacia el extremo más cercano a la carga. Si en una red radial se produce una falta puede considerarse, despreciando las corrientes provenientes de posibles inversiones del funcionamiento de motores, que la intensidad de falta se aporta solamente desde el lado de generación. Por tanto, en este tipo de redes se cuenta *a priori* con la información complementaria del sentido de circulación de la intensidad en cada línea. Este dato resulta fundamental a la hora de aplicar protecciones de sobreintensidad ya que, al facilitar en gran medida su coordinación, permite alcanzar el imprescindible grado de selectividad exigible a todo sistema de protección.

Las faltas en redes radiales deben ser despejadas, en cada caso, mediante la apertura del interruptor automático que, estando situado del lado de la generación, se encuentra más próximo al punto en que se ha producido la falta. De acuerdo con esto, si en la red radial de distribución mostrada en la Figura 9.47 se produce una falta en el punto F el interruptor que debe despejarla es el B.

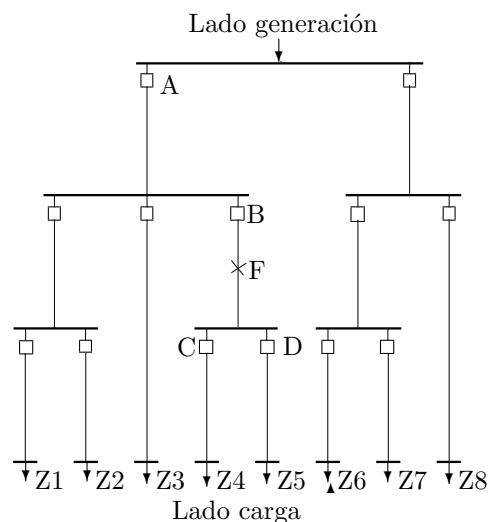


Figura 9.47. Red radial

Sobre el esquema puede comprobarse fácilmente cómo la apertura de los interruptores C o D no eliminan la falta, ya que la corriente de falta se aporta desde el lado de generación a través de A y B. Por otro lado, la apertura del interruptor A permite despejar la falta pero provoca la desconexión de los circuitos Z1 a Z5. Solamente la apertura del interruptor B despeja la falta y, al mismo tiempo, deja fuera de servicio el mínimo número de circuitos, que en este caso son los circuitos Z4 y Z5, debido a que su alimentación se realiza a través de la línea en la que se ha producido la falta.

Generalmente esta selectividad se consigue mediante la coordinación cronométrica de

las protecciones de sobreintensidad que gobiernan los interruptores automáticos. Para ello es necesario ajustarlas de modo que, referidos a intensidades equivalentes, sus tiempos de operación sean crecientes a medida que están situados más cerca de la generación y más alejados del consumo.

Aunque este escalonamiento de tiempos puede conseguirse con protecciones de sobreintensidad de tiempo fijo, lo habitual es que se realice con unidades de tiempo inverso, debido a que permiten reducir los tiempos de permanencia bajo condiciones de falta a medida que aumenta el valor de la corriente de falta y, por tanto, mitigan la gravedad de las consecuencias de su circulación.

La Figura 9.48.a muestra las curvas características correspondientes a las protecciones de sobreintensidad de tiempo inverso que controlan los interruptores involucrados en la falta señalada en la Figura 9.47. En ella puede apreciarse cómo, para las corrientes de circulación provocadas por la falta en F, las protecciones en C y D, aunque son las más rápidas, no actuarán debido a que no ven intensidad de falta, que es solamente vista por las protecciones en A y B. En este caso actuará la protección en B porque es la más rápida de las dos y, debido a ello, realiza funciones de protección primaria de la línea en que está instalada. Solamente si falla la protección en B será la protección en A la que despejará la falta, ya que en este caso desempeña funciones de protección de apoyo de la línea en falta.

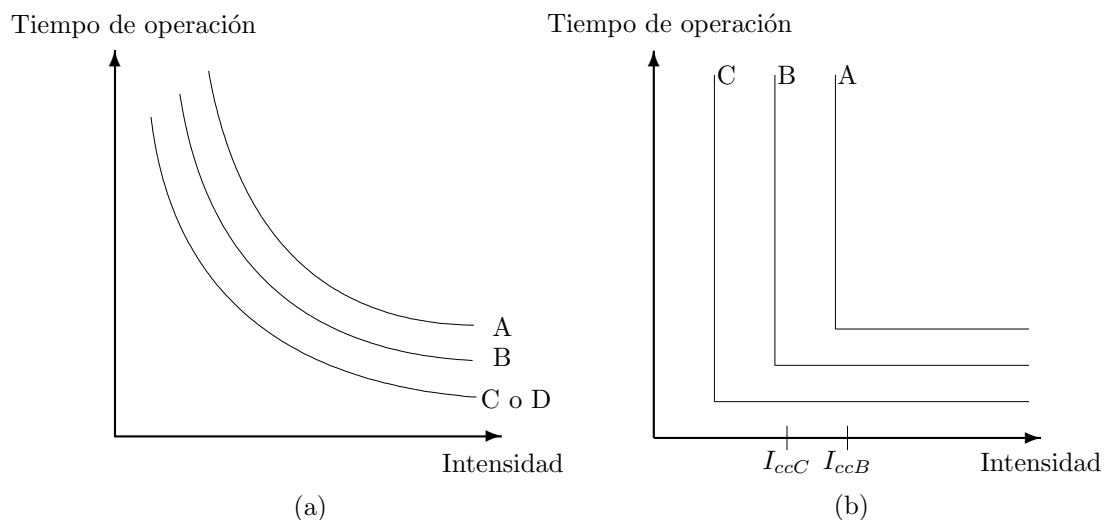


Figura 9.48. Selectividad entre protecciones de sobreintensidad.

El establecimiento de una selectividad lógica resultaría mucho más costoso ya que exigiría disponer de canales de comunicación entre todas las protecciones. En este caso, una protección operará solamente cuando detecte paso de intensidad de falta y, además, reciba información de que las protecciones situadas inmediatamente detrás hacia el lado de la carga no detectan paso de corriente de falta. En el supuesto analizado, la protección en B abriría el interruptor debido a que ve intensidad de falta y recibe la información de que C y D no

detectan corriente de falta. Por su parte, la protección en A no operaría porque

aunque ve corriente de falta recibe el dato de que B también detecta intensidad de falta. Esta técnica, combinada con la selectividad cronométrica, permitiría disminuir los tiempos necesarios para despejar la falta, ya que posibilita que B anule su tiempo de espera al recibir los datos que le confirman que debe ser la encargada de despejar la falta.

El escalonamiento de los valores de las corrientes de cortocircuito, creciente a medida que nos acercamos al lado de la generación, posibilita el establecimiento de selectividad amperimétrica en una red radial. Cada protección debe ser ajustada de modo que opere solamente si la intensidad es mayor que la corriente de cortocircuito correspondiente a la posición del interruptor contiguo ubicado hacia el lado de la carga. Por tanto, para la red mostrada en la Figura 9.47, el valor de referencia para la protección en B debe ser la corriente de cortocircuito en C, mientras que para la protección en A se tomará como referencia el valor de la corriente de cortocircuito en B.

Un inconveniente de la selectividad amperimétrica es que para garantizar que las faltas que se produzcan justamente a la entrada de un interruptor sean despejadas correctamente es necesario ajustar las protecciones para unos valores de referencia un poco menores que los indicados. Sin embargo, esto puede conducir a una selectividad errónea entre las protecciones ya que, por ejemplo, si la falta F se produce en un punto muy próximo a la salida del interruptor B, puede llegar a ser la protección en A quien la despeje, si es más rápida que la ubicada en B, ya que ambas protecciones ven intensidades de falta dentro de su rango de operación. Por esta razón, para garantizar un comportamiento satisfactorio del sistema de protección, es conveniente complementar la selectividad amperimétrica con una adecuada selectividad cronométrica. La Figura 9.48.b muestra las curvas características correspondientes a una selectividad amperimétrica y cronométrica conjuntas, en caso de emplearse protecciones de sobreintensidad de tiempo fijo.

9.11.2. Redes malladas

En redes malladas no es posible definir la selectividad utilizando solamente funciones de sobreintensidad. Por esta razón, para este tipo de redes es necesario utilizar protecciones de sobreintensidad direccionales, que se denominan así debido a que operan cuando la intensidad supera el valor de referencia fijado y, además, circula en una dirección determinada.

Una protección de sobreintensidad direccional consta internamente de dos unidades de medida. La primera es una unidad de sobreintensidad, análoga a las ya descritas anteriormente, y la segunda es una unidad direccional, que permite conocer el sentido de circulación de la corriente vigilada. La lógica de disparo que desarrollan hace que solamente opere cuando en ambas unidades se cumplan las condiciones de disparo para las que hayan sido ajustadas. La función direccional, perteneciente al grupo de las funciones básicas de comparación de fase, toma como datos los ángulos correspondientes a los fasores de las magnitudes de polarización y de operación con que es alimentada. La magnitud de polarización es la fijada como referencia. Para que la función direccional proporcione resultados satisfactorios es necesario que la magnitud de polarización cumpla los requisitos de no anularse cuando se produce una falta y de mantener invariante su dirección aunque cambie la dirección de la magnitud de operación. La magnitud de operación es la que se compara con la de polarización y, en este caso, coincide con la corriente vigilada por la función de sobreintensidad que se implementa junto a la función direccional.

La Figura 9.49 muestra un bucle perteneciente a una red mallada de distribución en la que se ha producido una falta en el punto F que provoca que las intensidades de falta en cada línea circulen con el sentido indicado en la misma. En este caso, la apertura de un solo interruptor no es suficiente para eliminar la falta ya que, debido a la existencia de un bucle, ésta se mantendría a través del resto de interruptores que permanecen cerrados. Aunque todas las protecciones ven intensidad de falta, para despejarla correctamente es necesario que se abran los dos interruptores ubicados en los extremos de la línea en que se haya producido. Por esta razón, las protecciones deben ser ajustadas para operar solamente cuando la intensidad de falta se dirija hacia el interior de la línea en cuyo extremo están ubicadas, es decir, cuando la dirección de la intensidad de falta sea la indicada en la Figura 9.49 mediante una flecha situada junto a cada interruptor.

De este modo, en el caso analizado, la falta F debe ser despejada mediante la apertura de los interruptores B1 y B2. La protección B2 operará debido a que ve intensidad de falta en el sentido en que ha sido polarizada, mientras que las protecciones A2, C2 y D2 no operarán debido a que, aunque ven intensidad de falta, su dirección es saliente de la línea que vigilan. Finalmente, la selectividad de B1 frente a A1, C1 y D1 deberá conseguirse mediante otros métodos de coordinación como, por ejemplo, los indicados anteriormente de tipo cronométrico o lógico.

9.12. Protecciones de distancia

Las protecciones de distancia [16] son las más utilizadas en la protección de líneas de transporte de AT. Aunque las protecciones de sobreintensidad aún se utilizan en algunas ocasiones, principalmente para la protección ante faltas fase-tierra o como apoyo de otras,

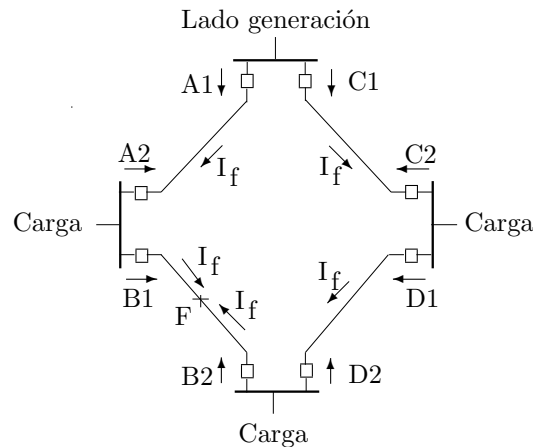


Figura 9.49. Protecciones de sobreintensidad en redes mallaadas.

las protecciones de distancia son más adecuadas debido a que, aunque son más complejas, ofrecen mejores prestaciones y este hecho prevalece sobre el coste cuando se trata de proteger un elemento tan importante como la red de transporte a AT.

Algunas ventajas de las protecciones de distancia frente a las de sobreintensidad son:

- Ofrecen mejor selectividad, debido a que son más fáciles de coordinar entre sí.
- Su coordinación permite respuestas más rápidas.
- Los cambios de configuración del sistema influyen menos en sus valores de ajuste.
- Los penduleos de potencia les afectan menos.

A pesar de lo que su nombre pudiera dar a entender, las protecciones de distancia no calculan la distancia a la que se encuentra la falta sino que determinan si la misma es interna o externa a la zona que vigilan. Para ello, realizan funciones pertenecientes al grupo de funciones básicas de cociente de dos magnitudes que, en este caso, se obtienen a partir de los datos de tensión e intensidad relativos al extremo de línea en que se encuentra ubicada la protección. A partir de ellos se obtiene la impedancia vista por la protección. Por esta razón, las protecciones de distancia reciben también el nombre de protecciones de impedancia.

Esta conversión posibilita la representación de la impedancia vista por la protección y de su característica de operación sobre unos ejes cartesianos en los que en el eje de abscisas se representa la parte real o resistencia y en el eje de ordenadas la parte imaginaria o reactancia, dando origen al denominado diagrama R-X [17].

La impedancia vista por la protección es mayor en condiciones normales de operación del sistema que en condiciones de falta, ya que en este último caso la impedancia vista es sólo la correspondiente al circuito comprendido entre el punto en el que se ubica la protección y el punto en que se ha producido la falta. Para aplicar este principio se representa sobre el diagrama R-X la impedancia vista por la protección y su característica de operación, que representa el valor límite de la zona que se quiere proteger y define un área de operación

sobre el diagrama R-X. La protección solamente debe operar si el punto definido por las coordenadas de la impedancia vista por la protección se encuentra dentro del área de operación, ya que en caso contrario o no existe falta o ésta se encuentra fuera de la zona que debe proteger.

La forma en que se define el área de operación da origen a distintos tipos de unidades de distancia. Básicamente los tipos existentes son los correspondientes a unidades de impedancia, unidades de reactancia y unidades de admitancia, denominadas comúnmente mho.

Aunque actualmente se pueden conseguir otras formas más sofisticadas, en la Figura 9.50 se ha representado una curva característica de operación de cada uno de estos tipos y, además, se ha sombreado el área de operación correspondiente a cada una de ellas. Asimismo, sobre cada diagrama R-X se han representado dos posibles valores de impedancias vistas por la protección. En el caso correspondiente al punto P la protección deberá operar por tratarse de un punto interno al área de operación. En el caso del punto Q la protección no deberá operar por tratarse de un punto externo al área de operación.

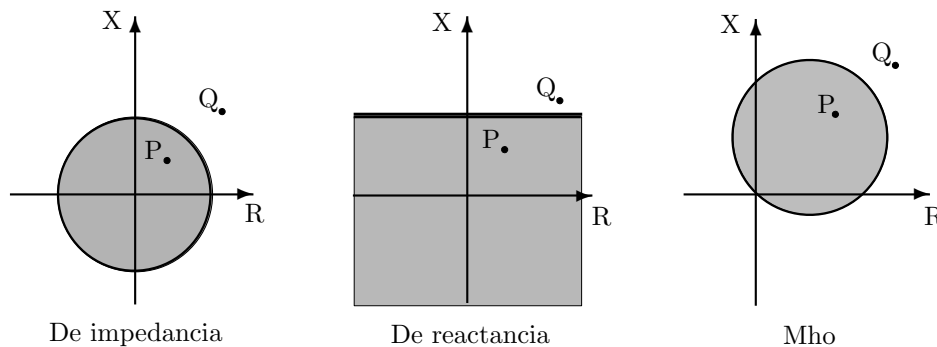


Figura 9.50. Curvas características de protecciones de distancia.

Observando la Figura 9.50 se comprueba que solamente las unidades mho son direccionales. Las unidades de impedancia y reactancia, debido a que pueden operar para puntos situados en los cuatro cuadrantes, carecen de esta característica. Por esta razón, con el fin de dotarles de una adecuada selectividad, las unidades de impedancia y reactancia deben ser utilizadas junto a otras unidades que les permitan adquirir la característica de direccionalidad. Por otro lado, las unidades de tipo reactancia toman la decisión de operación en base solamente al valor de la reactancia vista por la protección y, por ello, son las más indicadas para la protección de líneas cortas y las que mejor responden ante faltas muy resistivas.

El ajuste de los parámetros que definen el área de operación permite definir en cada caso concreto el alcance de la unidad, es decir, la zona que se encuentra bajo su protección. En principio podría pensarse que para proteger una línea la unidad que se ubicase en su extremo debería ser ajustada para proteger el 100 % de la longitud de la misma. La aplicación de esta metodología a la línea AB de la Figura 9.51 llevaría a ajustar la unidad que se ubicase en

A de modo que cubriese toda la longitud AB. Sin embargo, aplicando este procedimiento, cualquier causa que motivase un error en el cálculo de la impedancia vista por la protección podría conducir a una selectividad errónea, ya que faltas ocurridas en el tramo inicial de la línea CD podrían ser vistas por la protección en A dentro de su zona de operación. Este hecho implica el riesgo de que se abra el interruptor A en vez del C, que es el que debe abrirse en ese caso para despejar correctamente la falta.

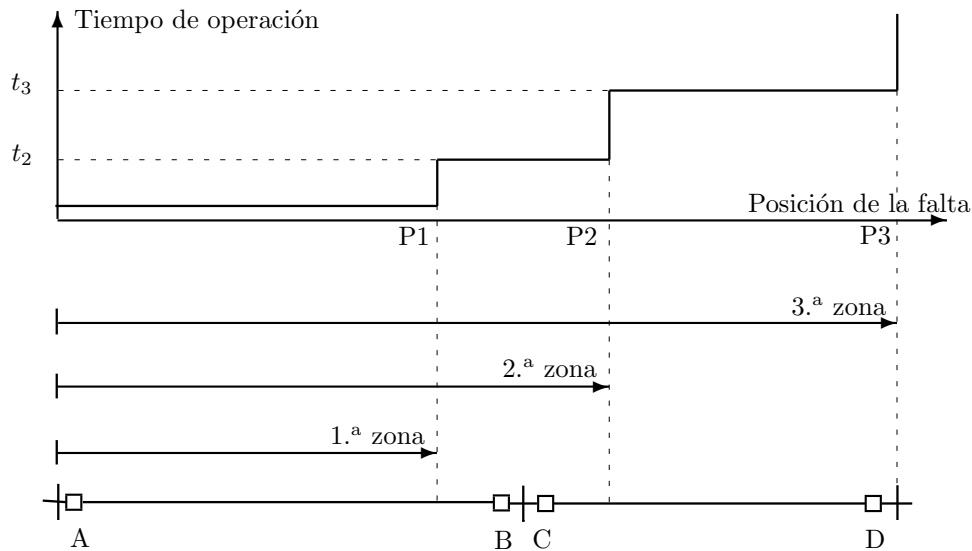


Figura 9.51. Alcances y tiempos de operación de una protección de distancia ubicada en A.

Por esta razón, para dotar a las protecciones de distancia de una adecuada selectividad, y facilitar su coordinación, es norma habitual definir, a partir del extremo de línea en que se ubica la protección, tres zonas de protección con alcances y tiempos de operación escalonados entre sí.

La primera zona abarca del orden del 80 o 90% de la longitud de la línea, contada a partir del extremo en que se ubica la protección. Esta protección se realiza mediante unidades instantáneas que, por tanto, operan tan rápido como permite su tecnología debido a que no introducen ningún tiempo intencionado de demora.

La segunda zona incluye toda la línea y, además, se extiende hasta un 20 o 30% de la línea siguiente. En este caso se emplean unidades de tiempo diferido que son ajustadas para operar en un tiempo del orden de 0.3 a 0.4 segundos.

La tercera zona abarca toda la línea y el 100% de la línea siguiente. Esta zona se suele extender incluso algo más con el fin de garantizar que incluya la totalidad de la línea siguiente. Esta protección también se realiza mediante unidades de tiempo diferido con tiempos de operación mayores que los de la segunda zona y que, típicamente, se sitúan en valores del orden de 0.8 a 1 segundos.

En la práctica, el alcance real de cada zona se ve influido, además de por los errores que

puedan producirse en la captación y procesamiento de datos, por el valor de la resistencia de falta.

Las unidades que cubren cada una de las zonas, dentro de una misma protección, no tienen porqué ser todas del mismo tipo. Una práctica habitual es emplear unidades tipo reactancia para las zonas primera y segunda y una unidad tipo mho para la tercera zona. La utilización de unidades mho para la tercera zona tiene la ventaja de que pueden ser utilizadas para dotar de direccionalidad a las unidades de primera y segunda zona que, como en el caso señalado, carecen de ella.

La Figura 9.51 muestra el alcance de las zonas correspondientes a una protección de distancia instalada en el extremo A de la línea AB. Asimismo, sobre el esquema de la línea, se ha indicado el escalonamiento correspondiente a los tiempos de operación de las unidades de cada zona. Este gráfico permite comprobar de manera muy clara el comportamiento de la protección ante faltas ocurridas en distintos puntos.

Si se produce una falta en la primera zona, la unidad de primera zona actúa como protección primaria instantánea. En caso de que esta unidad no opere y que las causas que motivan su fallo no afecten a la unidad de segunda zona, ésta última operará en un tiempo t_2 , pudiéndose considerar que actúa como protección de apoyo local para faltas ocurridas en primera zona. Asimismo, caso de que fallasen estas dos unidades por motivos que no implicasen el fallo de la unidad de tercera zona, ésta operaría en un tiempo t_3 , actuando como protección de apoyo local respecto a las otras dos.

Si la falta se produce entre P1 y P2, pero dentro de la línea AB, la unidad de segunda zona actuará como protección primaria de tiempo diferido, pudiendo considerarse que la unidad de tercera zona desempeñará el papel de protección de apoyo local.

Si la falta se produce entre P1 y P2, pero dentro de la línea contigua CD, las unidades de segunda y tercera zona pasan a desempeñar el papel de protecciones de apoyo remoto respecto a la protección instalada en C, que deberá ser quien despeje la falta debido a que es protección primaria instantánea respecto al punto en que se ha producido la falta.

Finalmente, si la falta se produce entre P2 y P3 la unidad de la tercera zona desempeña el papel de protección de apoyo remoto respecto a la protección instalada en C. Este caso da pie a reseñar la importancia de respetar el escalonamiento de tiempos, ya que para garantizar la selectividad es imprescindible que el tiempo de operación en segunda zona de la protección en C sea menor que el tiempo de operación en tercera zona de la protección en A.

Por tanto, como resumen puede decirse que las unidades de primera y segunda zona ofrecen protección primaria a la línea AB y que las unidades de segunda y tercera actúan como protección de apoyo remoto para la línea CD.

Lo anterior se refiere solamente al comportamiento de la protección de distancia instalada en A. Sin embargo, hay que recordar que para despejar una falta en líneas que pueden ser alimentadas por los dos extremos, como es generalmente el caso de las líneas de transporte, es necesario abrir los interruptores de los dos extremos de la línea en que se produce la falta. Por tanto, para proteger mediante protecciones de distancia la línea AB es preciso instalar una protección en el extremo A, con direccionalidad que le haga ver de A hacia B, y otra protección en el extremo B, con direccionalidad que le haga ver de B hacia A.

En la Figura 9.52 puede apreciarse como, por ejemplo, si se produjese una falta en

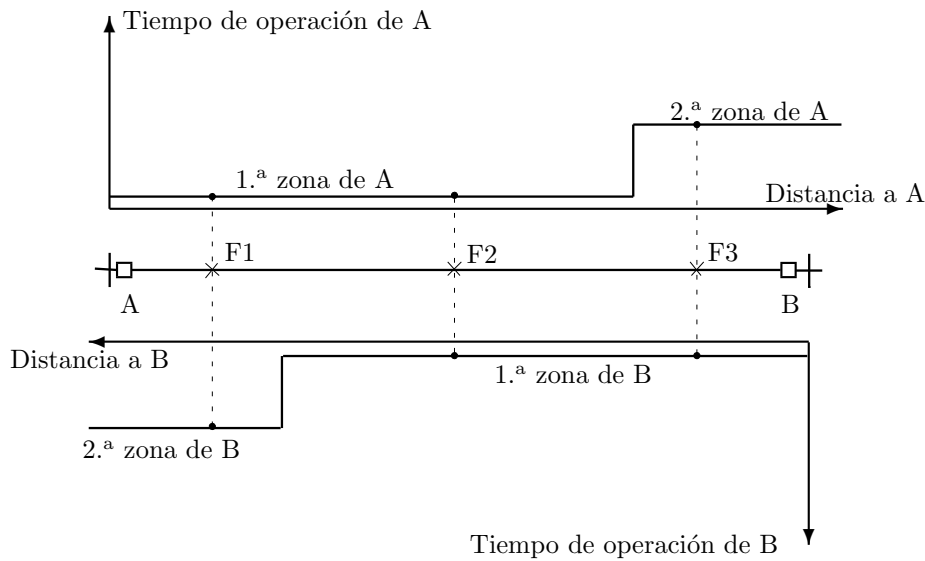


Figura 9.52. Coordinación de protecciones de distancia.

F1; cerca del extremo A, la protección A vería la falta en primera zona y operaría de forma instantánea abriendo el interruptor A. Por su parte, la protección en B vería la falta en segunda zona y operaría abriendo el interruptor B al cabo del tiempo de demora ajustado para la operación en segunda zona. Si la falta se produjese en F2, zona central de la línea, ambas protecciones verían la falta en primera zona y operarían abriendo sin demora intencionada los interruptores A y B. Por último, si la falta se produjese en un punto como el F3, cerca del extremo B, la protección en A operaría en segunda zona y la protección en B operaría en primera zona. Sin embargo, debido a su gran repercusión sobre el sistema, hay que recordar que en la protección de líneas de transporte a AT es fundamental la rapidez en el despeje de la falta. Para evitar la demora correspondiente a la operación en segunda zona puede establecerse una comunicación entre las dos protecciones de modo que cuando una opere en primera zona envíe a la otra una señal para que abra su interruptor sin esperar a que transcurra el tiempo de demora, ya que en ese caso existe la certeza de que la falta es interna a la línea que protegen. Por otra parte, en caso de producirse algún fallo en la operación en cualquiera de las protecciones, actuarían las protecciones de apoyo tal y como se ha indicado anteriormente.

Por tanto, la selectividad entre protecciones de distancia se consigue más fácilmente que entre protecciones de sobreintensidad, ya que basta respetar los escalonamientos de alcances y tiempos de operación indicados para conseguir una respuesta selectiva del sistema de protección. Además, el establecimiento de comunicación entre las protecciones contribuye a aumentar la rapidez de respuesta al eliminar los tiempos de demora intencionada en su operación.

Las líneas multiterminales, debido a sus características particulares, merecen una consi-

deración especial. Las ramas intermedias de la línea realizan aportaciones, en un sentido u otro, a las corrientes vistas por las protecciones ubicadas en sus extremos. Este hecho provoca una distorsión en la impedancia vista por la protección que dificulta el establecimiento de una adecuada selectividad. Por esta razón, en líneas multiterminales es norma habitual comunicar entre sí las protecciones ubicadas en cada extremo con el fin de establecer una selectividad lógica que permita discernir si deben o no deben operar.

Ejemplo 9.1:

A continuación, se analiza el comportamiento de las protecciones de distancia ante faltas ocurridas en la línea 5-8 de la Figura 9.41.

Las faltas ocurridas en la línea 5-8 deben ser despejadas mediante la apertura de los interruptores ubicados en los extremos de línea correspondientes. Por esta razón, las protecciones de distancia ubicadas en las barras 5 y 8 actuarán en este caso como protecciones primarias, operando en primera o segunda zona según el punto concreto en que se encuentre localizada la falta.

Veamos en primer lugar cuál debe ser y cómo debe calcularse la impedancia vista por cada una de las protecciones.

Las protecciones de distancia miden la impedancia de secuencia directa y, con el fin de que su operación sea correcta, la impedancia vista por la protección (Z_{V1}) debe ser la impedancia existente entre el punto en que se ubica la protección y el punto de falta. Teniendo en cuenta las relaciones existentes entre las redes de secuencia es fácilmente deducible que las expresiones para el cálculo de esta impedancia, según el tipo de falta que se haya producido, son las siguientes:

- Falta monofásica (fase a , tierra)

$$Z_{V1} = \frac{U_a}{I_a + k \cdot I_0}$$

siendo

$$k = \frac{Z_0 - Z_1}{Z_1}$$

por lo que su valor absoluto oscila, normalmente, entre 1.25 y 2.50 debido a la relación existente entre las impedancias de secuencia directa y homopolar en líneas aéreas. En el caso de la línea 5-8 se cumple que:

$$k = \frac{X_0 - X_1}{X_1} = \frac{3 - 1}{1} = 2$$

- Falta bifásica (fase a , fase b)

$$Z_{V1} = \frac{U_a - U_b}{I_a - I_b}$$

- Falta trifásica

$$Z_{V1} = \frac{U_a}{I_a} = \frac{U_b}{I_b} = \frac{U_c}{I_c}$$

En estas expresiones las tensiones de fase se refieren al punto en que se ubica la protección y las intensidades de fase son las correspondientes al sentido entrante a la línea protegida.

Por tanto, una protección de distancia debe incluir para cada zona el número de unidades necesario para garantizar que, sea cual sea el tipo de falta que se produzca, pueda ser calculada la impedancia existente entre el punto en que se ubica la protección y el punto en que se ha producido la falta. Sin embargo, el número de unidades necesario no es tan elevado como en principio pudiera

pensarse ya que, por ejemplo, ante una falta trifásica tanto las expresiones correspondientes a faltas monofásicas como a bifásicas proporcionan el mismo valor de impedancia vista, dado que en las trifásicas la intensidad homopolar es nula y existe equilibrio entre las tres fases.

El anterior desarrollo se ha realizado considerando que la impedancia de falta es nula, es decir, faltas francas. Lógicamente, si las unidades se ajustan para operar según las expresiones señaladas, la existencia de una impedancia de falta distorsiona el valor de la impedancia vista por la protección y puede llegar a conducir a una mala operación de ésta.

El ajuste de la unidad de distancia debe ser realizado teniendo en cuenta que las señales de tensión y de intensidad llegan a la protección a través de los correspondientes transformadores de tensión (TT) e intensidad (TI). Por tanto, los valores utilizados para el ajuste deben ser los correspondientes a las impedancias vistas en el secundario de éstos transformadores:

$$Z_{V1}^S = Z_{V1} \cdot \frac{r_I}{r_V}$$

donde Z_{V1}^S es la impedancia vista en el secundario y r_I, r_V son, respectivamente, las relaciones de transformación del TI y del TT. Teniendo en cuenta los valores base de tensión (220 kV entre fases) y potencia (100 MVA), el valor base de la impedancia es

$$Z_{base} = \frac{(220 \text{ kV})^2}{100 \text{ MVA}} = 484 \ \Omega$$

A partir de este valor base y los valores por unidad correspondientes, indicados en la Tabla 9.7, las impedancias de secuencia directa de la línea 5-8 y adyacentes son las indicadas en la Tabla 9.9.

Cuadro 9.9. Impedancias de secuencia directa (en Ω).

Línea 5-8	Línea 4-5	Línea 8-7
48.4 j	34.848 j	82.28 j

En el caso de que las relaciones de transformación de los TT y TI que alimentan las protecciones fuesen las indicadas en la Tabla 9.10 y que las zonas primera y segunda de las protecciones de distancia ubicadas en las barras 5 y 8 fuesen definidas siguiendo los siguientes criterios:

- característica de tipo Mho;
- ángulo de la impedancia de ajuste coincidente con el ángulo de la impedancia de línea;
- módulo de la impedancia de ajuste igual al 85 % de la impedancia de línea para la primera zona e igual a la impedancia de línea más 30 % de la línea adyacente para la segunda zona;

los valores de ajuste, referidos al secundario de los TT y TI, serían los señalados en la Tabla 9.11.

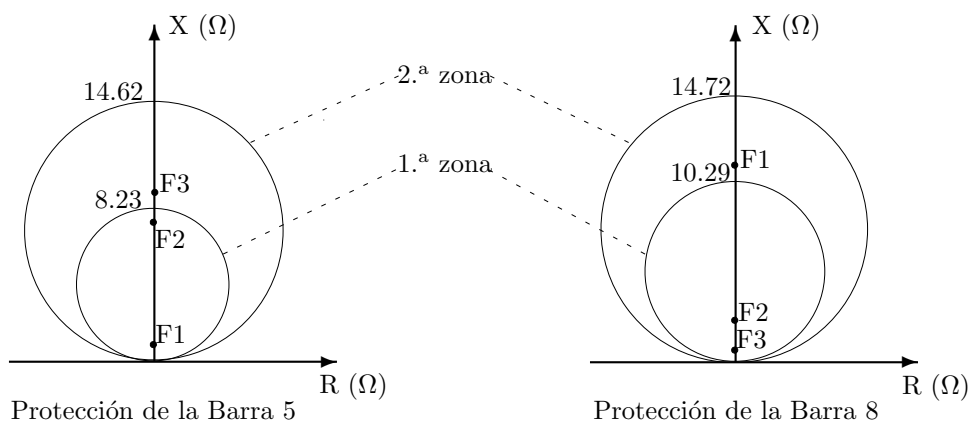
Cuadro 9.10. Relaciones de transformación de los TT y TI.

Barra	r_V	r_I
5	2 000	400
8	2 000	500

Cuadro 9.11. Valores de ajuste de 1ª y 2ª zona.

Barra	1ª zona (tipo mho)	2ª zona (tipo mho)
5	8,23 $90^\circ \Omega$	14,62 $90^\circ \Omega$
8	10,29 $90^\circ \Omega$	14,72 $90^\circ \Omega$

La representación sobre el diagrama R-X de la impedancia de ajuste define el diámetro de la característica mho correspondiente. Por tanto, debido a las hipótesis simplificadoras adoptadas, las características mho resultan ser en este caso círculos cuyo diámetro coincide con el eje vertical, tal y como se indica en la Figura 9.53.

**Figura 9.53.** Características mho de 1ª y 2ª zona.

Una vez vistas las características de las protecciones ubicadas en los extremos de línea, se pasa a analizar su actuación ante faltas en la línea 5-8. Para ello se tomarán como datos de partida los resultados de las faltas trifásicas francas mostrados en la Tabla 9.8. La conversión de los valores p.u de tensiones e intensidades a valores absolutos, en V y A, se realiza multiplicándolos, respectivamente, por el valor base de la tensión simple (127 kV) y el de la intensidad que, en este caso, es:

$$I_{\text{base}} = \frac{100 \text{ MVA}}{\sqrt{3} \cdot 220 \text{ kV}} = 262,43 \text{ A}$$

A continuación, se presentan los casos relativos a faltas ocurridas a una distancia del 0.10, 0.80 y 0.95 de la barra 5 que, por su posición, son asimilables a las faltas F1, F2 y F3 señaladas en la Figura 9.52 si en la misma se considera que A es la barra 5 y B la barra 8. Los resultados a que dan lugar son los indicados, respectivamente, en las Tablas 9.12, 9.13 y 9.14. En ellas la tensión se expresa en kV, la intensidad en A y la impedancia en Ω .

Cuadro 9.12. Falta trifásica franca al 0.10 de 5 en la línea 5-8 (F1).

Barra	\mathcal{U}_a	\mathcal{I}_a	\mathcal{Z}_{V1}	\mathcal{Z}_{V1}^S	Operación
5	8,15 0°	1 685,58 -90°	4,84 90°	0,968 90°	en 1. ^a zona
8	66,40 0°	1 524,61 -90°	43,56 90°	10,89 90°	en 2. ^a zona

Cuadro 9.13. Falta trifásica franca al 0.80 de 5 en la línea 5-8 (F2).

Barra	\mathcal{U}_a	\mathcal{I}_a	\mathcal{Z}_{V1}	\mathcal{Z}_{V1}^S	Operación
5	43,32 0°	1 118,97 -90°	38,72 90°	7,744 90°	en 1. ^a zona
8	25,91 0°	2 676,60 -90°	9,68 90°	2,419 90°	en 1. ^a zona

Cuadro 9.14. Falta trifásica franca al 0.95 de 5 en la línea 5-8 (F3).

Barra	\mathcal{U}_a	\mathcal{I}_a	\mathcal{Z}_{V1}	\mathcal{Z}_{V1}^S	Operación
5	47,57 0°	1 034,92 -90°	45,98 90°	9,20 90°	en 2. ^a zona
8	7,69 0°	3 181,17 -90°	2,42 90°	0,60 90°	en 1. ^a zona

Cuadro 9.15. Zonas vistas por las protecciones en 4 y 7.

	Protección en 4	Protección en 7
F1 (0.10)	2. ^a zona	3. ^a zona
F2 (0.80)	3. ^a zona	2. ^a zona
F3 (0.95)	3. ^a zona	2. ^a zona

Los tiempos de operación de cada protección, en cada uno de los casos presentados, son los indicados en la Figura 9.52.

Por su parte, las protecciones de distancia ubicadas en las barras 4 y 7 deben ver estas faltas en las zonas indicadas en la Tabla 9.15. Lógicamente, estas protecciones no deberán actuar ya que desempeñan función de protección de apoyo y las protecciones primarias instaladas en las barras 5 y 8 son, salvo fallo en su operación, más rápidas.

Si se realiza para estas protecciones un estudio similar al señalado para las protecciones primarias, puede comprobarse que la impedancia vista por la protección 7 es mayor que la comprendida estrictamente entre el punto en que se ubica la protección y el punto de falta. Ante esta situación la solución no es aumentar el valor de la impedancia de ajuste de estas protecciones ya que ello, en otros casos, conduciría a operaciones indebidas y, debe recordarse, que en muchas ocasiones es peor que una protección opere cuando no debe operar que al contrario.

Aunque no es objeto de este texto pormenorizar el proceso de ajuste de estas protecciones, sí lo es poner de manifiesto la causa que motiva esa distorsión en el valor de la impedancia vista por la protección. El motivo es similar al señalado anteriormente para el caso de líneas multiterminales ya

que, entre el punto en que se ubica la protección y el punto en que se ha producido la falta, existen puntos intermedios de inyección de corriente. En el caso analizado esta aportación intermedia se produce a través del transformador 1-8 (en la barra 8).

Además, la impedancia vista por la protección está influida por otros factores que no han sido tenidos en cuenta en el análisis anterior como, por ejemplo, el error inherente a la utilización de transformadores de medida, la posible saturación de los transformadores de intensidad, la existencia de impedancias de falta, las variaciones de topología entre unas faltas y otras, etc. Por todo ello, cada fabricante incorpora tecnología y técnicas propias con el fin de minimizar las distorsiones en la impedancia vista y optimizar las prestaciones de la protección.

9.13. Protecciones diferenciales

Las protecciones diferenciales se basan en la comparación de la composición de dos o más magnitudes con un valor de operación establecido que es fijado mediante el ajuste de la protección correspondiente. El tipo más comúnmente utilizado es la protección diferencial de corriente.

En la Figura 9.54.a se muestra el montaje correspondiente a la protección diferencial de un elemento genérico del SEP.

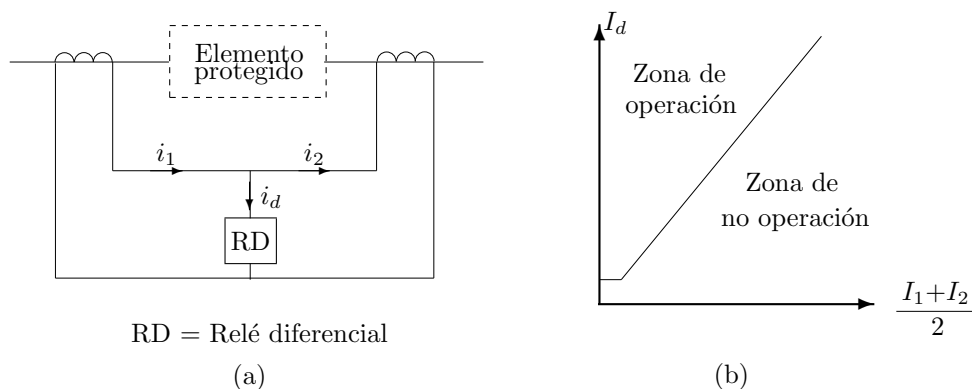


Figura 9.54. Protección diferencial.

Las relaciones de transformación de los transformadores de intensidad ubicados en los extremos del mismo deben ser escogidas de modo que, en condiciones normales de operación, las intensidades correspondientes a uno y otro lado del elemento protegido provoquen la misma circulación de corriente por sus secundarios. Por su parte, el relé de protección diferencial opera solamente cuando la intensidad diferencial que circula por él supera el valor de la intensidad de arranque, que es el valor de referencia con el que ha sido ajustado para poder distinguir si se ha producido una falta interna a la zona que vigila. Si, por ejemplo, el elemento protegido es un transformador de potencia TP, las relaciones de transformación de los transformadores de intensidad deben estar en la proporción de la relación de trans-

formación del TP y la intensidad de arranque debe ser ajustada al valor de la corriente de vacío del TP, ampliado en el margen que se considere adecuado para impedir actuaciones indebidas de la protección.

Si no existe falta interna al elemento protegido, la intensidad diferencial es menor que la de arranque y la protección no opera. Una falta interna al elemento protegido implica una diferencia entre las corrientes secundarias de los transformadores de intensidad que hace que la intensidad diferencial supere a la de arranque, lo que implica la operación de la protección que disparará los interruptores que aíslan al elemento protegido.

Sin embargo, una selectividad basada solamente en el valor de la corriente diferencial puede conducir a falsas operaciones de la protección. En efecto, una falta externa implica la circulación de elevadas corrientes, tanto a la entrada como a la salida del elemento protegido, que pueden provocar diferente saturación de los transformadores de intensidad. Este hecho introduciría diferentes e importantes errores en las corrientes secundarias que harían que la intensidad diferencial se elevase por encima del valor de arranque y, consecuentemente, se produjese la operación indebida de la protección.

Para mejorar la selectividad de la protección diferencial, impidiendo actuaciones erróneas, se utilizan las denominadas protecciones diferenciales de porcentaje. En ellas la decisión de operación se toma en base al valor relativo de la intensidad diferencial, con un valor mínimo absoluto igual a la intensidad de arranque. Su curva característica de operación se encuentra representada en la Figura 9.54.b y en ella se puede apreciar que operan solamente cuando la intensidad diferencial supera un determinado porcentaje del valor de la intensidad de frenado, que es definida como la media de las intensidades a la entrada y salida del elemento protegido. También es habitual que el tanto por ciento se tome sobre la base de la corriente a la salida del elemento protegido, que se conoce comúnmente con el nombre de intensidad de paso. Este valor porcentual es, generalmente, constante y puede ser ajustado en cada protección concreta.

En otras ocasiones, la mejora de la selectividad se consigue supeditando la operación de la protección al resultado del análisis de los componentes armónicos de la intensidad vigilada que, por ejemplo, en el caso de un transformador de potencia permiten distinguir entre la corriente de conexión y la intensidad de falta.

La aplicación de la técnica diferencial a la protección de líneas [20] está supeditada en gran medida al establecimiento de comunicación entre sus extremos. Ello es debido a que la elevada longitud de las líneas, en comparación con la de otros elementos como transformadores, generadores o barras, implica una gran distancia entre los transformadores de intensidad ubicados en sus extremos. En consecuencia, la realización de una conexión física entre sus secundarios conlleva el empleo de cables de gran longitud. Cuanto mayor sea la longitud de estos cables más se encarece la instalación y, sobre todo, más se perjudica su precisión. Por esta razón, las protecciones diferenciales han sido tradicionalmente poco utilizadas en líneas y su aplicación se ha limitado al ámbito de líneas cortas. Sin embargo, las ventajas que presentan frente a otros tipos de protecciones y el desarrollo que han experimentado en los últimos años las tecnologías de comunicación entre extremos, así como de fabricación de los diversos elementos del equipo de protección, posibilitan actualmente la ampliación de su campo de aplicación a líneas de mayor longitud.

9.13.1. Protección diferencial de barras

La protección diferencial de barras [18] se basa en principios análogos a los reseñados en el punto anterior aunque, en este caso, es necesario componer tantas magnitudes como líneas concurren en la barra. Tal como se indica en la Figura 9.55, la intensidad diferencial se halla sumando las intensidades secundarias correspondientes a las corrientes de línea entrantes a la barra. Para que esta suma represente a escala la composición de intensidades de línea es necesario que todos los transformadores de intensidad utilizados tengan la misma relación de transformación. Por tanto, la intensidad diferencial debe ser nula si no existe falta en la barra.

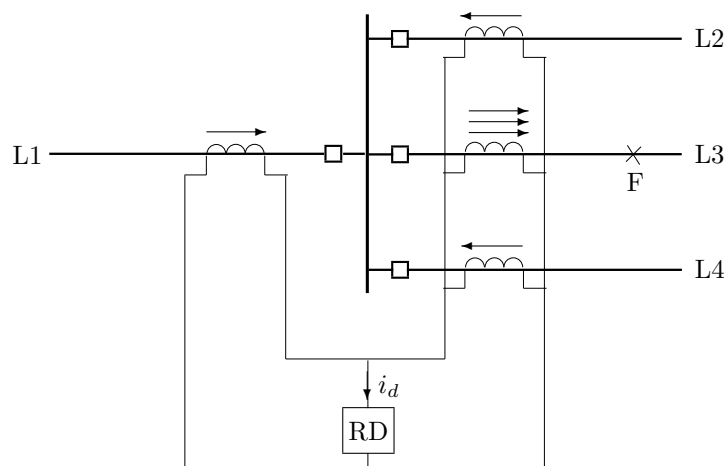


Figura 9.55. Protección diferencial de barras.

La necesidad de componer un número de intensidades superior a dos introduce, respecto al caso anterior, una nueva problemática que supone un factor de riesgo añadido que pone en peligro la selectividad de la protección. Si en el caso de una barra como la indicada en la Figura 9.55 se produce una falta en un punto F externo a ella, la totalidad de la intensidad de falta aportada desde la barra fluye a través de la línea en la que se ha producido la falta. Debido a ello, ya que la intensidad de falta se reparte entre las otras líneas que concurren en la barra, el transformador de intensidad ubicado en la línea en falta alcanzará una saturación mucho mayor que el resto. Los errores que este hecho implica en las corrientes secundarias hacen que su suma no se anule y, en consecuencia, pueden conducir a una operación incorrecta de la protección. Para evitarlo podría optarse por incrementar los valores de ajuste de la protección, lo cual puede llevar en otros casos a una mala selectividad por omisión en la operación, o podría introducirse un tiempo intencionado de demora para dar tiempo a que la intensidad transitoria se redujese lo suficiente o actuasen otras protecciones, lo cual tiene el inconveniente de retrasar también la operación ante faltas en la barra que deben ser despejadas lo más rápidamente posible mediante la apertura de los interruptores de todas las líneas que concurren en ella.

Ante las desventajas que presentan las dos soluciones expuestas, en la práctica se opta por el empleo de transformadores de intensidad de núcleo de aire, debido a que en ellos no existe saturación, o por la utilización de la denominada protección diferencial de alta impedancia. Esta última opción es la más utilizada debido a que presenta las ventajas de emplear transformadores de intensidad convencionales, ser de alta velocidad y operar correctamente aunque se saturen los transformadores. Se basa, fundamentalmente, en la sustitución del relé diferencial de corriente por un relé de máxima tensión, que debe ajustarse para operar a partir de un determinado valor de tensión ya que las faltas en la barra producen mayores tensiones que las faltas externas a ella.

9.14. Otras protecciones

Existe un gran espectro de causas y condiciones anómalas que pueden alterar y poner en peligro el correcto funcionamiento del SEP. Aunque algunas de ellas se derivan directa o indirectamente de los tipos de faltas expuestos en el presente capítulo, en otros casos son consecuencia de la evolución de las condiciones de explotación del sistema.

Tal es el caso, por ejemplo, de la alimentación de un motor con una tensión anormalmente reducida como consecuencia de una sobrecarga de líneas que puede ser debida a la desconexión de alguna línea con motivo del despeje de una falta o, simplemente, a la evolución creciente de la carga que alimentan. Con independencia de que la subtensión haya sido producida por una u otra causa, es necesario evitar que el motor funcione en condiciones perjudiciales para él ya que, si la bajada de tensión es lo suficientemente grande, la reducción experimentada por el par puede llevar a un bloqueo del eje, un aumento de las pérdidas, una peor refrigeración, un incremento de temperatura, etc. Por esta razón, la protección del motor frente a subtensiones se realiza con un relé que opera cuando la tensión se hace menor que el valor para el cual ha sido ajustado, con un tiempo de demora adecuado que impida su operación si la bajada de tensión es transitoria y no da origen a los efectos anteriormente mencionados.

Este ejemplo pone de manifiesto que, para salvaguardar cada uno de los elementos que componen un SEP ante cualquier situación que pueda producirse, es necesario emplear y coordinar entre sí una gran variedad de protecciones [12, 19]. Aunque no es objeto de esta obra pormenorizar todas ellas, a continuación se indican algunas que, junto a las ya expuestas anteriormente, son imprescindibles para garantizar la protección de los diversos elementos que componen el SEP.

La protección de generadores debe incluir fundamentalmente funciones de protección que operen en caso de cortocircuitos en sus bobinados (tanto de inductor como de inducido), faltas externas no despejadas, pérdida de excitación, sobreexcitación, frecuencias anómalas, pérdida de sincronismo, sobrecargas, desequilibrio de fases o motorización (inversión del flujo de potencia).

En los transformadores de potencia, además de las protecciones puramente eléctricas contra, por ejemplo, faltas internas o sobreexcitación, es típico el uso del denominado relé Buchholz que detecta la formación de gases en el interior de la cuba del transformador y, mediante su análisis, posibilita la identificación de la causa anómala que los motiva.

La protección de motores contempla básicamente relés que responden ante faltas internas o ante condiciones externas que supongan una deficiente alimentación del motor por causa de sobretensiones, subtensiones, desequilibrio de fases, etc.

Mención aparte merece, por lo que supone de gestión conjunta del SEP, el deslastre de cargas. Como es de todos conocido, en un SEP la potencia generada debe ser en todo momento igual a la consumida más las pérdidas. Sin embargo, existen motivos que pueden romper brusca o gradualmente este equilibrio. Tal es el caso, por ejemplo, de la desconexión de generadores o líneas importantes a causa de una falta o de un aumento progresivo en la carga que no puede ser seguido por la generación disponible. El exceso de consumo implica un descenso de la frecuencia que, en primera instancia, debe ser neutralizado para, posteriormente, poder realizar una recuperación de la frecuencia hasta su valor nominal.

En estos casos, ante la imposibilidad de aumentar la generación, para restablecer la igualdad de potencias es necesario desconectar cargas. Esta maniobra de reducción de consumo recibe el nombre de deslastre de cargas y debe ser considerada como un mal menor inevitable ya que, aunque supone interrumpir el servicio a algunos centros de consumo, sirve para impedir que llegue a producirse una interrupción que afecte a un área mucho mayor del sistema y que, a nivel general, se deteriore la calidad del servicio.

Dado que es imposible predecir las numerosas situaciones particulares que pueden llegar a producirse, así como la carga concreta a eliminar en cada caso, lo que se hace es establecer un programa de deslastre de cargas que fija la frecuencia a partir de la cual debe empezar a reducirse carga y define, por escalones del valor de la frecuencia, el porcentaje de carga que debe separarse. Posteriormente, antes de volver a conectar las cargas de manera escalonada, debe recuperarse la frecuencia hasta su valor nominal y conectar todas las líneas de alimentación posibles.

Finalmente, reseñar la existencia de otro tipo de protecciones cuya misión no es proteger al sistema ante faltas que se hayan producido sino impedir que se produzcan. Tal es el caso, por ejemplo, del relé de comprobación de sincronismo que tiene por misión autorizar la ejecución de la maniobra de conexión entre dos partes de un circuito. De este modo, el relé autoriza la conexión cuando las dos partes están sincronizadas y la impide cuando no es así, evitando de esta forma que la ejecución de la maniobra de conexión implique un cortocircuito por poner en contacto puntos sometidos a diferentes tensiones.

9.15. Tipos constructivos

La tecnología de fabricación de relés de protección ha experimentado grandes cambios a lo largo del tiempo [11, 12, 19]. Las dos grandes etapas de esta evolución son, en orden cronológico, los relés electromecánicos y los relés estáticos. Las diferentes posibilidades que ofrecen una y otra tecnología hace que las prestaciones en uno y otro caso hayan experimentado asimismo grandes cambios.

Los relés electromecánicos son, fundamentalmente, electromagnéticos o de inducción. En los primeros la energización del circuito de operación o disparo se realiza mediante la fuerza de atracción que se crea entre dos contactos que cierran el circuito. En los segundos el cierre del circuito se realiza gracias al giro de un disco o copa que, al llegar a una determinada posición, cierra los contactos.

Los relés estáticos se dividen en electrónicos y digitales. Estos relés reciben el nombre de estáticos debido a que, a diferencia de los electromecánicos, no tienen elementos móviles. Este hecho hace que sean de respuesta más rápida que los electromecánicos y, además, modifiquen significativamente algunos aspectos de su respuesta como, por ejemplo, el tiempo de reposición. El tiempo de reposición puede definirse como el necesario para reinicializar el relé, es decir, para devolverlo a su estado inicial una vez que ha operado o comenzado a operar. En el caso de los relés electromecánicos este tiempo puede llegar a ser apreciable debido a que requiere el desplazamiento o giro de elementos móviles que, además, pueden llegar a implicar el vencimiento de una determinada inercia. Sin embargo, en los relés estáticos este tiempo puede considerarse nulo lo que, a su vez, implica una serie de consecuencias como, por ejemplo, menores tiempos para estar en disposición de realizar un reenganche.

Los relés digitales están dotados de una gran versatilidad gracias a la utilización de microprocesadores en los que pueden ser implementadas una gran variedad de funciones. Por tanto, en este tipo de protecciones no tiene sentido hablar de unidades independientes para cada función, que se integran para formar la protección, ya que todas ellas se implementan en el microprocesador. Este hecho hace que el tamaño de una protección digital sea mucho menor que el de una protección electromecánica y que, además, ofrezca una gama de prestaciones mucho más amplia que hoy en día es habitual que incluya, por ejemplo, un localizador de faltas, un analizador de ondas, un registrador, interface con sistemas de comunicación, etc.

Por otra parte, la tecnología de comunicación entre protecciones ha sufrido también grandes cambios, evolucionando desde el empleo de hilos piloto, onda portadora o microondas a la utilización de fibra óptica. Este desarrollo ha dado origen a un nuevo tipo de protecciones que algunos autores coinciden en llamar teleprotecciones y otros prefieren denominar protecciones basadas en comunicaciones. Independientemente de la denominación que quiera dárseles, de lo que no cabe duda es de que cuanto mejor, más fiable y más rápida sea la comunicación entre protecciones mayor será la facilidad para coordinarlas entre sí y, en consecuencia, mejor será la selectividad y comportamiento del sistema de protección.

Las protecciones adaptativas son, por el momento, el último campo que está siendo desarrollado. Su característica fundamental es que utilizan las posibilidades ofrecidas por las actuales tecnologías para modificar sus ajustes y pautas de actuación según las condiciones existentes en el sistema que vigilan. Esta modificación permite optimizar el comportamiento del sistema de protección, ya que se adapta en cada situación a las necesidades del sistema vigilado.

Bibliografía

- [1] M. Khalifa, *High-Voltage Engineering*, Dekker, 1990.
- [2] C. F. Wagner y R. D. Evans, *Symmetrical Components*, McGraw-Hill, 1961.
- [3] T. Gönen, *Modern Power System Analysis*, Wiley, 1988.
- [4] *Electrical Transmission and Distribution Reference Book*, Westinghouse Electric Corporation, 1964.
- [5] P. Anderson, *Analysis of Faulted Power Systems*, Iowa State Univ. Press, 1978.
- [6] A. Greenwood, *Electric Transients in Power Systems*, Wiley, 1971.

- [7] J. H. Blom y otros, *Seguridad y Calidad del Suministro Eléctrico*, Iberdrola Instituto Tecnológico, 1995.
- [8] A. Bueno y otros, "Modelos de Protección Avanzados para la Operación y el Mantenimiento del Sistema Eléctrico". *Energía*, julio-agosto 1993, pp. 65-75.
- [9] I. Zamora, J. F. Miñambres y J. M. Gallastegui, "Supervisión y Ensayo de Relés de Protección". *Protecciones de los Sistemas Eléctricos de Potencia*, Iberdrola Instituto Tecnológico, 1994, pp. 401-423.
- [10] J. Berdy, *Local Back-up Protection for an Electric Power System*, GE Publication, 1998.
- [11] S. H. Horowitz y A. G. Phadke, *Power System Relaying*, Research Studies Press Ltd., 1993.
- [12] A. Iriondo, *Protecciones de Sistemas de Potencia*, Servicio Editorial UPV/EHU, 1997.
- [13] J. Berrostequieta, *Introducción a los Transformadores de Medida*, Electrotecnia Artech Hermanos S.A., 1997.
- [14] C. H. Flurscheim y otros, *Power Circuit Breaker Theory and Design*, Peter Peregrinus Ltd.-IEE Power Engineering Series 1, 1985.
- [15] L. E. Goff, *Automatic Reclosing of Distribution and Transmission Line Circuit Breaker*, GE Publication, 1998.
- [16] J. G. Andrichak y G. E. Alexander, *Distance Relay Fundamentals*, GE Publication, 1998.
- [17] Switchgear Department, *The Use of the R-X Diagram in Relay Work*, GE Publication, 1998.
- [18] J. G. Andrichak y J. Cárdenas, "Bus Differential Protection", *Twenty Second Annual Western Protective Relay Conference*, 1995.
- [19] C. R. Mason, *The Art and Science of Protective Relaying*, GE Publication, 1998.
- [20] M. G. Adamiak, G. E. Alexander y W. Premerlani, *A New Approach to Current Differential Protection for Transmission Lines*, Electric Council of New England, Protective Relaying Committee, 1998.

Capítulo 10

Estabilidad de ángulo y de tensiones

LUIS ROUCO RODRÍGUEZ Y CLAUDIO CAÑIZARES

10.1. Introducción

El problema de estabilidad ha afectado la planificación, explotación, control y protección de los sistemas de energía eléctrica desde el comienzo del desarrollo de los sistemas eléctricos en corriente alterna. Por una parte, la estabilidad del sistema ha impuesto límites en la utilización de las redes de transporte de energía eléctrica inferiores a los límites térmicos. Por el contrario, los sistemas de control y protección han permitido en muchos casos superar esos límites.

La primera forma conocida del problema de estabilidad aparece cuando se plantea la conexión de generadores hidráulicos a centros de consumo distantes. Las primeras referencias al problema de estabilidad datan de los años veinte. El problema que se planteaba era saber si un generador podría mantenerse funcionando en sincronismo tras la ocurrencia de un cortocircuito en algún punto de su red de transporte. En otras palabras, si el tiempo que invertían las protecciones e interruptores en el despeje de la falta (si era transitoria) era superior al denominado tiempo crítico de despeje de la falta. En caso de ser superior a dicho tiempo crítico se hacía preciso una modificación del diseño de la citada red de transporte (por ejemplo construyendo líneas adicionales en paralelo a las inicialmente consideradas). La instalación de protecciones e interruptores cada vez más rápidos logró reducir los tiempos de despeje. En [1] se encuentra una presentación detallada de esta visión del problema.

También la instalación de reguladores de tensión rápidos y de elevadas ganancias (basados en rectificadores controlados electrónicos) lograron reducir los tiempos de despeje. Sin embargo, dieron lugar a una nueva forma de inestabilidad: las oscilaciones sostenidas o incluso crecientes del rotor del generador sin que mediara una perturbación severa alguna (los primeros casos referenciados datan de los años sesenta). En realidad, las oscilaciones sostenidas aparecían cuando se aumentaba la potencia generada por encima de un cierto valor. La incorporación de controles suplementarios a los reguladores de tensión (los esta-

bilizadores del sistema de potencia) logró amortiguar las citadas oscilaciones. La referencia [2] contiene una colección de artículos que presentan las experiencias más relevantes en este problema.

Otra forma de inestabilidad que ha aparecido en los años setenta y ochenta no está relacionada con la capacidad de los generadores de funcionar en sincronismo, sino con la capacidad del sistema de alimentar una carga a una tensión aceptable (ver, por ejemplo, [3] y [4]). La inestabilidad de tensiones o colapso de tensiones se pone de manifiesto por la caída progresiva e incontrolable de la tensión en la carga tras una perturbación.

Los problemas de estabilidad se van progresivamente haciendo más complejos al crecer los sistemas de energía eléctrica en extensión al producirse la interconexión de sistemas cada vez más distantes. La complejidad del problema se ve afectada también por la presencia de sistemas de control y protección cada vez más sofisticados. Por ello, se pasa de hablar de la estabilidad de un generador a la estabilidad del sistema. La presentación más amplia y actualizada del problema de estabilidad de los sistemas de energía eléctrica es la que se encuentra en [5].

El capítulo comienza con la definición del problema de estabilidad y con el establecimiento de clasificaciones que ayuden a caracterizar los diferentes fenómenos que pueden aparecer. El resto del capítulo tiene dos partes fundamentales. Una dedicada a la estabilidad de ángulo y otra dedicada a la estabilidad de tensiones como las dos manifestaciones más importantes del problema de estabilidad.

El estudio del problema de estabilidad de ángulo está separado en dos grandes partes. Primero se analiza el problema considerando modelos simplificados de los generadores. Después se contemplan modelos detallados. El estudio mediante modelos simplificados del problema de estabilidad ayuda a comprender los aspectos fundamentales del problema bajo consideración. La consideración de modelos detallados ayuda a identificar los efectos de las diferentes dinámicas de los generadores.

La presentación del problema de estabilidad de ángulo cuando se consideran modelos simplificados comprende los detalles del modelo simplificado del generador síncrono considerado y el análisis de la estabilidad de gran y de pequeña perturbación. Dichos estudios se realizan tanto en el caso de un generador conectado a un nudo de potencia infinita como en el caso de un sistema multimáquina. La explicación del problema de estabilidad cuando se contempla un modelo detallado del generador síncrono contiene tanto los detalles de dicho modelo como un estudio del efecto de dicho modelo detallado sobre la estabilidad de gran y pequeña perturbación en el caso más simple de un generador conectado a un nudo de potencia infinita.

La primera parte del capítulo concluye con la explicación somera de los métodos de mejora de la estabilidad de ángulo. La presentación del problema de estabilidad de tensiones incluye los conceptos y teorías básicas para comprender y analizar el problema y la aplicación de las mismas al análisis de sistemas reales.

10.2. Definiciones y clasificaciones del problema de estabilidad

Supóngase que el sistema de energía eléctrica se encuentra en un punto de funcionamiento (punto de equilibrio) estable. La estabilidad está interesada en el estudio de la capacidad del sistema de alcanzar un nuevo punto de equilibrio estable o de volver al punto de equilibrio estable original tras la ocurrencia de una perturbación.

La estabilidad es una propiedad inherente a los sistemas dinámicos (en [6] se puede encontrar una presentación general sobre sistemas dinámicos en muy diferentes ámbitos). En efecto, los sistemas de energía eléctrica son unos de los sistemas dinámicos más grandes construidos por el hombre.

Los sistemas de energía eléctrica presentan dinámicas en una amplia escala de tiempos (ver, por ejemplo, [7]). Desde la escala de los microsegundos correspondientes a las sobretensiones debidas a la caída del rayo hasta la escala de las horas correspondiente al seguimiento de la carga a lo largo del día. El problema de estabilidad se encuentra en la escala de tiempo de los segundos o incluso minutos.

Pese a esta precisión inicial, el problema de la estabilidad de los sistemas de energía eléctrica es todavía de gran complejidad. Una forma de abordar la comprensión de un problema de estabilidad específico es su caracterización en términos de los siguientes criterios:

- la naturaleza de fenómeno físico involucrado (se habla de estabilidad de ángulo y de estabilidad de tensiones),
- la magnitud de la perturbación (se habla de estabilidad de gran perturbación y de estabilidad de pequeña perturbación) y
- las dinámicas involucradas (se habla de estabilidad de corto plazo y de estabilidad de largo plazo).

La *estabilidad de ángulo* está interesada en la capacidad de los generadores de seguir funcionando en sincronismo tras la ocurrencia de una perturbación. Se dice que un conjunto de generadores funcionan en sincronismo cuando las diferencias angulares se mantienen constantes y por tanto sus velocidades angulares eléctricas son iguales.

La *estabilidad de tensiones* está interesada por la capacidad del sistema de energía eléctrica por mantener las tensiones de los nudos dentro de unos límites aceptables. La inestabilidad de tensiones se produce cuando las tensiones caen de forma progresiva e incontrolada tras la ocurrencia de una perturbación.

Se habla de *estabilidad de pequeña perturbación* cuando la magnitud de la perturbación que tiene lugar es tal que las ecuaciones diferenciales que describen el comportamiento dinámico del sistema se pueden linealizar para su análisis. En otras palabras, un modelo linealizado alrededor del punto de funcionamiento caracteriza satisfactoriamente el comportamiento dinámico del sistema. Ejemplos de pequeñas perturbaciones son las pequeñas variaciones de la generación o de la carga que se producen en el funcionamiento normal del sistema de energía eléctrica.

Se habla de *estabilidad de gran perturbación* cuando la magnitud de la perturbación que tiene lugar es tal que las ecuaciones diferenciales que describen el comportamiento dinámico

del sistema no se pueden linealizar para su análisis. Ejemplos de grandes perturbaciones son los cortocircuitos, las pérdida de generadores, líneas o cargas.

La *estabilidad de corto plazo* considera que las dinámicas dominantes son las de los generadores síncronos y sus sistemas de control primario (tensión y carga-velocidad).

La *estabilidad de largo plazo* supone que las dinámicas involucradas son las de las fuentes de energía primaria de los generadores síncronos (calderas de centrales térmicas convencionales, reactores de las centrales térmicas nucleares, circuito hidráulico con túnel, chimenea de equilibrio y conducción forzada de centrales hidráulicas con circuito hidráulico complejo) y los sistemas de regulación secundaria frecuencia-potencia (control automático de generación) y tensión-reactiva (tomas de transformadores, reactancias y condensadores, etc.)

La mejor forma de comprender la clasificación de los problemas de estabilidad es aplicarla a casos concretos. La introducción de este capítulo ha descrito tres problemas característicos de estabilidad.

El problema del despeje de un cortocircuito en la red de transporte de un generador es un problema de estabilidad de ángulo ya que interesa la capacidad del generador de funcionar en sincronismo. Es también un problema de estabilidad de gran perturbación ya que las ecuaciones que describen el comportamiento del sistema no se pueden linealizar para realizar el análisis del fenómeno de interés. Finalmente, es un problema de estabilidad de corto plazo ya que las dinámicas involucradas son las de los generadores y sus controles asociados.

El problema de las oscilaciones sostenidas del rotor del generador es un problema de estabilidad de ángulo ya que interesa la capacidad del generador de funcionar en sincronismo. Es también un problema de estabilidad de pequeña perturbación ya que las ecuaciones que describen el comportamiento de sistema se pueden linealizar para realizar el análisis del fenómeno de interés. Finalmente es un problema de estabilidad de corto plazo ya que las dinámicas involucradas son las de los generadores y sus controles asociados.

El problema del colapso de tensiones es un problema de estabilidad de tensiones ya que interesa la capacidad del sistema de mantener las tensiones de los nudos en valores aceptables.

10.3. Modelo simplificado del generador síncrono

El generador síncrono es el componente fundamental del sistema para el estudio de la estabilidad de ángulo. El modelo del generador se puede construir considerando por separado los modelos mecánico y eléctrico y luego planteando su conexión. La simplificación del modelo del generador síncrono atañe al modelo eléctrico.

10.3.1. Modelo mecánico

La ecuación que describe la dinámica del rotor del generador es la ecuación de la dinámica de rotación de un sólido rígido. En estudios de estabilidad se considera que los rotores del motor primario (turbina hidráulica, de vapor, de gas o motor diesel) y del generador síncrono forman un sólido rígido. En otros estudios, como los de resonancia subsíncrona, se considera que los rotores están acoplados elásticamente [8].

El par motor es el par mecánico aplicado por el motor primario. El par resistente es la suma del par eléctrico y el par amortiguador. El par amortiguador es proporcional a la diferencia de la velocidad del rotor con relación a la velocidad de sincronismo.

$$J \frac{d\Omega}{dt} = T_m - T_e - T_a = T_m - T_e - K_a (\Omega - \Omega_0) \quad (10.1)$$

donde

J es el momento de inercia del conjunto de masas acoplados al rotor del generador expresado en Nms^2 ,

Ω es la velocidad angular mecánica expresada en rad/s ,

T_m es el par mecánico expresado en Nm ,

T_e es el par eléctrico expresado también en Nm ,

T_a es el par amortiguador expresado también en Nm ,

K_a es el coeficiente de par amortiguador expresado en Nms y

Ω_0 es la velocidad angular mecánica de sincronismo expresada en rad/s .

La ecuación (10.1) se expresa en magnitudes unitarias dividiendo sus términos por el par base T_{base} .

$$\frac{J}{T_{\text{base}}} \frac{d\Omega}{dt} = \frac{T_m}{T_{\text{base}}} - \frac{T_e}{T_{\text{base}}} - \frac{K_a}{T_{\text{base}}} (\Omega - \Omega_0) \quad (10.2)$$

Teniendo presente que el par base se puede expresar en términos de la potencia aparente base S_{base} y de la velocidad angular base Ω_{base} (es precisamente la velocidad angular de sincronismo Ω_0) como:

$$T_{\text{base}} = \frac{S_{\text{base}}}{\Omega_{\text{base}}} = \frac{S_{\text{base}}}{\Omega_0}$$

entonces la ecuación (10.2) resulta:

$$\frac{J\Omega_0^2}{S_{\text{base}}\Omega_0} \frac{d\Omega}{dt} = t_m - t_e - \frac{K_a\Omega_0^2}{S_{\text{base}}\Omega_0} (\Omega - \Omega_0) \quad (10.3)$$

donde t_m y t_e son, respectivamente, los pares mecánico y eléctrico expresados en magnitudes unitarias. La ecuación (10.3) expresada en términos de la constante de inercia H y el factor de amortiguamiento D resulta:

$$\frac{2H}{\Omega_0} \frac{d\Omega}{dt} = t_m - t_e - \frac{D}{\Omega_0} (\Omega - \Omega_0) \quad (10.4)$$

La constante de inercia H se define como la energía cinética de rotación de rotor del conjunto turbina-generador a la velocidad de sincronismo expresada en magnitudes unitarias de la potencia aparente base:

$$H = \frac{E_c}{S_{\text{base}}} = \frac{\frac{1}{2}J\Omega_0^2}{S_{\text{base}}}$$

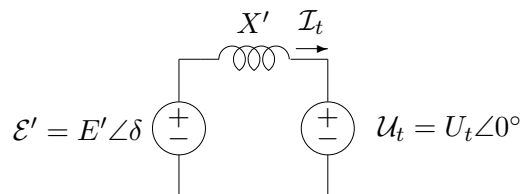


Figura 10.1. Circuito equivalente de un generador conectado a un nudo de potencia infinita.

la constante de inercia H está expresada en segundos ya que la energía cinética de rotación está expresada en Ws y la potencia aparente base está expresada en VA.

El factor de amortiguamiento D se define como:

$$D = \frac{K_a \Omega_0^2}{S_{\text{base}}}$$

Si las velocidades angulares mecánicas (Ω y Ω_0) se expresan en términos de las velocidades angulares eléctricas (ω , ω_0) y del número de pares del polos p , entonces la ecuación (10.4) resulta en la forma:

$$\frac{2H}{\omega_0} \frac{d\omega}{dt} = t_m - t_e - \frac{D}{\omega_0} (\omega - \omega_0) \quad (10.5)$$

Por otra parte, como en los estudios de estabilidad la variación de la velocidad del rotor es pequeña¹, entonces los pares expresados en magnitudes unitarias se pueden aproximar por las potencias expresadas en magnitudes unitarias. Con lo cual, la ecuación (10.5) resulta en la forma:

$$\frac{2H}{\omega_0} \frac{d\omega}{dt} = P_m - P_e - \frac{D}{\omega_0} (\omega - \omega_0) \quad (10.6)$$

10.3.2. Modelo eléctrico

El generador síncrono se representa como una fuente de tensión ideal detrás de la reactancia transitoria X' de la máquina síncrona (véase el circuito de la Figura 10.1). Se considera que el módulo de la fuente de tensión detrás de la reactancia transitoria E' es constante debido a que se supone que el flujo de excitación es constante durante el transitorio². El ángulo de la fuente de tensión detrás de la reactancia transitoria δ es precisamente el ángulo del rotor. En el siguiente apartado se justifica esta última hipótesis.

La potencia eléctrica suministrada por un generador síncrono conectado a un nudo de potencia infinita se calcula como:

$$P_e = \Re\{\mathcal{U}_t \mathcal{I}_t^*\} \quad (10.7)$$

¹ Variaciones superiores al 20 % o al 30 % dan lugar típicamente a la desconexión del generador por actuación de las protecciones de sobrevelocidad.

² El Capítulo 9 ha discutido el modelo de la máquina síncrona para estudios de cortocircuito. Se ha mencionado, también, la aplicabilidad del denominado modelo transitorio para estudios de estabilidad. Dicho modelo es el considerado en este apartado.

Teniendo que presente la corriente suministrada por el generador se puede calcular como:

$$\mathcal{I}_t = \frac{\mathcal{E}' - \mathcal{U}_t}{jX'} \quad (10.8)$$

entonces la expresión (10.7) resulta:

$$P_e = \Re \left\{ U_t \frac{E' \cos \delta - jE' \operatorname{sen} \delta - U_t}{-jX'} \right\} = \frac{E' U_t}{X'} \operatorname{sen} \delta \quad (10.9)$$

10.3.3. Conexión de los modelos mecánico y eléctrico

La conexión de los modelos mecánico y eléctrico se establece a través del ángulo de la tensión detrás de la reactancia transitoria y la velocidad del rotor. En efecto, supóngase que el generador está en vacío, entonces el ángulo mecánico del eje de rotor con relación a una referencia fija es:

$$\alpha = \Omega_0 t \quad (10.10)$$

Sin embargo, cuando la máquina está en carga, el citado ángulo α está incrementado por el ángulo del rotor expresado en magnitudes mecánicas δ/p . Es decir,

$$\alpha = \Omega_0 t + \frac{\delta}{p} \quad (10.11)$$

La velocidad mecánica del rotor se obtiene derivando con relación al tiempo la expresión del ángulo α (10.11):

$$\Omega = \frac{d\alpha}{dt} = \Omega_0 + \frac{1}{p} \frac{d\delta}{dt} \quad (10.12)$$

Multiplicando la ecuación (10.12) por el número de pares de polos, la velocidad eléctrica del rotor viene dada por la expresión

$$\omega = \omega_0 + \frac{d\delta}{dt} \quad (10.13)$$

10.4. Estabilidad de gran perturbación con modelos simplificados

El análisis de la estabilidad de gran perturbación con modelos simplificados se aborda en tres pasos. El primer paso obtiene el denominado criterio de igualdad de áreas que permite analizar la estabilidad de gran perturbación de un generador conectado a un nudo de potencia infinita cuando el factor de amortiguamiento es nulo. La segunda etapa presenta la integración numérica de las ecuaciones diferenciales de un generador conectado a un nudo de potencia infinita como método de análisis de la estabilidad de gran perturbación. En este paso no se hace ninguna suposición sobre el factor de amortiguamiento. El tercer paso aborda la integración numérica de las ecuaciones diferenciales que describen un sistema multimáquina.

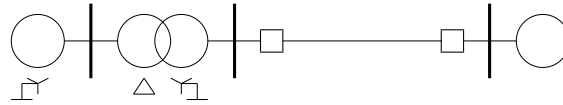


Figura 10.2. Diagrama unifilar de un generador conectado a un nudo de potencia infinita a través de un transformador elevador y una línea.

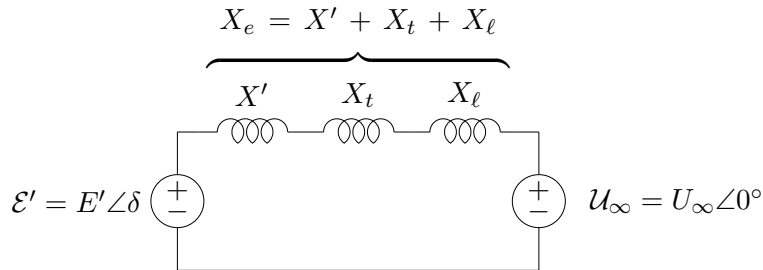


Figura 10.3. Circuito equivalente de un generador conectado a un nudo de potencia infinita a través de un transformador elevador y una línea.

10.4.1. Generador conectado a un nudo infinito: criterio de las áreas

Considérese el caso de un generador conectado a un nudo de potencia infinita a través de un transformador elevador y una línea según el diagrama unifilar de la Figura 10.2. Se considera que tanto el transformador como la línea están representados ambos por impedancias puramente inductivas. Se va a estudiar la estabilidad del generador cuando ocurre una falta trifásica en la línea y la falta se despeja por apertura de la línea. De forma más precisa, el proceso transitorio que tiene lugar es el siguiente: aparece una falta trifásica transitoria en la línea, se desconecta la línea en sus dos extremos y ello logra que desaparezca la falta trifásica transitoria y finalmente se vuelve a conectar la línea.

El análisis de estabilidad de gran perturbación consiste en determinar cuánto tiempo puede permanecer la falta transitoria y la línea abierta sin que al volver a conectar la línea se produzca la pérdida de sincronismo. La pérdida de sincronismo es consecuencia de que la aceleración experimentada por el rotor del generador durante el periodo en que permanece la falta transitoria y la línea abierta (la potencia eléctrica aplicada por el generador al rotor es nula mientras que la potencia mecánica permanece constante) no puede ser absorbida cuando se vuelve a conectar la línea. Este balance entre aceleración y deceleración se evalúa mediante el denominado *criterio de igualdad de áreas*.

En efecto, si el factor de amortiguamiento se considera nulo, la ecuación de oscilación (10.6) resulta:

$$\frac{2H}{\omega_0} \frac{d\omega}{dt} = P_m - P_e = P_{ace} \tag{10.14}$$

donde P_{ace} es la potencia aceleradora.

En este caso, a la vista del circuito equivalente de la Figura 10.3, la potencia eléctrica suministrada por el generador viene dada por la expresión:

$$P_e = \frac{E'U_\infty}{X_e} \text{sen}\delta \quad (10.15)$$

siendo X_e la reactancia equivalente entre la fuente de tensión detrás de la reactancia transitoria y la tensión en el nudo de potencia infinita. Nótese que aquí el ángulo del rotor δ es en realidad el ángulo de la fuente de tensión de la reactancia transitoria \mathcal{E}' con relación a la tensión en el nudo de potencia infinita \mathcal{U}_∞ .

Si se multiplica por $d\delta$ ambos términos de la ecuación (10.14) resulta:

$$\frac{d\omega}{dt}d\delta = \frac{\omega_0}{2H}P_{ace}d\delta \quad (10.16)$$

La ecuación (10.16) también se puede escribir como:

$$\frac{d\delta}{dt}d\omega = \frac{\omega_0}{2H}P_{ace}d\delta \quad (10.17)$$

o como:

$$(\omega - \omega_0) d\omega = \Delta\omega d\Delta\omega = \frac{\omega_0}{2H}P_{ace}d\delta \quad (10.18)$$

Si la ecuación (10.18) se integra entre δ_0 y δ a los que corresponden respectivamente $\Delta\omega = 0$ y $\Delta\omega$:

$$\int_0^{\Delta\omega} \Delta\omega d\Delta\omega = \frac{\omega_0}{2H} \int_{\delta_0}^{\delta} P_{ace}d\delta \quad (10.19)$$

resulta:

$$\frac{1}{2}\Delta\omega^2 = \frac{\omega_0}{2H} \int_{\delta_0}^{\delta} P_{ace}d\delta \quad (10.20)$$

El generador será estable si la variación de velocidad en un cierto instante de tiempo del proceso transitorio es nula. En este caso, la ecuación (10.20) se puede expresar como:

$$\int_{\delta_0}^{\delta_{des}} P_{ace}d\delta = \int_{\delta_{des}}^{\delta_{max}} P_{dec}d\delta \quad (10.21)$$

$$A_{ace} = A_{dec} \quad (10.22)$$

donde

δ_{des} es el valor del ángulo del rotor en el instante del despeje de la falta,

δ_{max} es el valor máximo de ángulo del rotor correspondiente a un cierto ángulo de despeje (en el valor máximo de ángulo del rotor la variación de velocidad es nula),

P_{dec} es la potencia deceleradora,

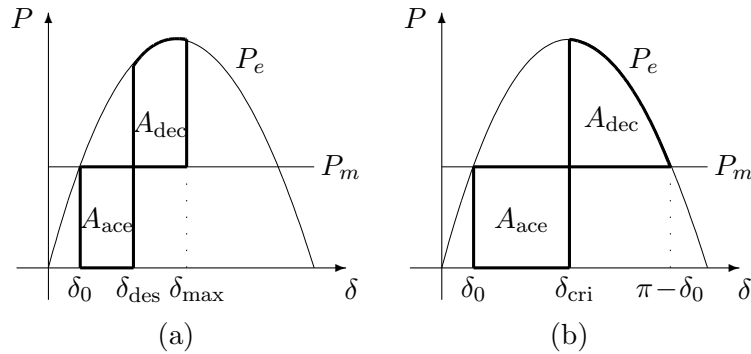


Figura 10.4. Criterio de igualdad de áreas aplicado al caso de un generador conectado a un nudo de potencia infinita a través de un transformador elevador y una línea.

A_{ace} es el área aceleradora y

A_{dec} es la área deceleradora.

La ecuación (10.21) indica que el generador es estable si existe un ángulo de despeje de la falta para el cual el área deceleradora es igual al área aceleradora que constituye el denominado criterio de igualdad de áreas. La Figura 10.4.a muestra la aplicación del citado criterio al análisis de la estabilidad del generador con un cierto ángulo de despeje de la falta δ_{des} .

El valor crítico del ángulo de despeje de la falta δ_{cri} se obtiene cuando el valor máximo del ángulo δ_{max} es $\pi - \delta_0$. Es decir,

$$\int_{\delta_0}^{\delta_{cri}} P_{ace} d\delta = \int_{\delta_{cri}}^{\pi - \delta_0} P_{dec} d\delta \quad (10.23)$$

La Figura 10.4.b muestra la aplicación del criterio de igualdad de áreas a la determinación del ángulo crítico de despeje.

Si se sustituyen las expresiones de las potencias aceleradora y deceleradora en la ecuación (10.23) resulta:

$$\int_{\delta_0}^{\delta_{cri}} P_m d\delta = \int_{\delta_{cri}}^{\pi - \delta_0} (P_e - P_m) d\delta \quad (10.24)$$

Si se sustituye la expresión de la potencia eléctrica (10.15) en la ecuación (10.24) y ésta se integra resulta (debe notarse que se ha supuesto que la potencia mecánica aplicada por el motor primario es constante durante el proceso transitorio):

$$P_m (\pi - 2\delta_0) = \frac{E'U_\infty}{X_e} (\cos \delta_{cri} + \cos \delta_0) \quad (10.25)$$

Teniendo presente que la potencia mecánica resulta igual a la potencia eléctrica en el punto de equilibrio inicial:

$$P_m = P_{e0} = \frac{E'U_\infty}{X_e} \text{sen} \delta_0 \quad (10.26)$$

se puede obtener una expresión analítica del tiempo crítico de despeje:

$$\delta_{\text{cri}} = \arccos [\text{sen}\delta_0 (\pi - 2\delta_0) - \cos \delta_0] \quad (10.27)$$

Cuando la falta trifásica está aplicada, o cuando la línea está abierta, la potencia eléctrica aplicada al eje del rotor es nula. Como se supone que la potencia mecánica suministrada por la turbina es constante la potencia aceleradora es también constante. La evolución en el tiempo de la velocidad angular se obtiene de forma sencilla integrando la ecuación (10.14) entre 0 y t :

$$\int_{\omega_0}^{\omega} d\omega = \int_0^t \frac{\omega_0}{2H} P_{\text{ace}} dt \quad (10.28)$$

que resulta en:

$$\omega - \omega_0 = \frac{\omega_0}{2H} P_{\text{ace}} t \quad (10.29)$$

La ecuación (10.29) indica que la variación de velocidad angular crece linealmente con el tiempo. Por otra parte, si se sustituye la diferencia de velocidades $\omega - \omega_0$ por la derivada del ángulo del rotor con relación al tiempo $d\delta/dt$ en la ecuación (10.29) y se integra también entre 0 y t :

$$\int_{\delta_0}^{\delta} d\delta = \int_0^t \frac{\omega_0}{2H} P_a t dt \quad (10.30)$$

resulta en:

$$\delta - \delta_0 = \frac{\omega_0}{4H} P_a t^2 \quad (10.31)$$

La ecuación (10.31) indica que la variación del ángulo del rotor crece cuadráticamente con el tiempo. Además, permite determinar el tiempo de despeje t_{des} de una falta una vez determinado el ángulo δ_{des} .

$$t_{\text{des}} = \sqrt{\frac{4H}{\omega_0 P_a} (\delta_{\text{des}} - \delta_0)} \quad (10.32)$$

Ejemplo 10.1:

Sea un generador, de 100 MVA y 15 kV y cuyas inercia y reactancia transitoria son respectivamente $H = 3$ s y $X' = 0,3$ pu en la base de la propia máquina, conectado a un nudo de potencia infinita a través de un transformador elevador de 100 MVA y 220 kV / 15 kV, cuya reactancia es $X_t = 0,15$ pu y una línea de 220 kV cuya reactancia en la base de 100 MVA es $X_\ell = 0,1$ pu. Suponiendo que el generador está trabajando a plena carga con factor de potencia 0.8 inductivo y a la tensión nominal. Determinar el tiempo crítico de despeje de una falta trifásica que ocurra al comienzo de la línea y que se despeja por apertura de la misma.

En primer término es preciso determinar el ángulo de la tensión detrás de la reactancia transitoria del generador con relación a la tensión en el nudo de potencia infinita. Dado que se dan las condiciones

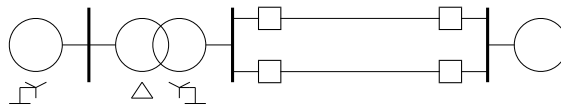


Figura 10.5. Diagrama unifilar de un generador conectado a un nudo de potencia infinita a través de un transformador elevador y dos líneas en paralelo.

en bornes del generador, se determina tanto la tensión detrás de la reactancia transitoria como la tensión en el nudo de potencia infinita con relación a la tensión en bornes del generador como:

$$\mathcal{E}' = \mathcal{U}_t + jX'_t \mathcal{I}_t = 1,0 \angle 0^\circ + j0,3 \times 1 \angle -36,87^\circ = 1,2042 \angle 11,50^\circ$$

$$\mathcal{U}_\infty = \mathcal{U}_t - j(X_t + X_\ell) \mathcal{I}_t = 1,0 \angle 0^\circ + j0,25 \times 1 \angle -36,87^\circ = 0,8732 \angle -13,24^\circ$$

El ángulo del rotor, es decir, el ángulo de la tensión detrás de la reactancia transitoria con relación a la tensión del nudo de potencia infinita, es por tanto:

$$\delta_0 = 11,50^\circ + 13,24^\circ = 24,74^\circ$$

A partir del ángulo de la tensión detrás de la reactancia transitoria, el ángulo crítico de despeje se determina por aplicación de la ecuación (10.27):

$$\delta_{\text{cri}} = 87,42^\circ$$

Aunque en este caso el ángulo crítico de despeje de la falta no supera 90° , es preciso resaltar que puede superarlos. El tiempo crítico de despeje se determina a partir del ángulo crítico de despeje por aplicación de la ecuación (10.32):

$$t_{\text{cri}} = 0,228 \text{ s} = 228 \text{ ms}$$

Tiempos críticos de despeje de una falta inferiores a 100 milisegundos no serían compatibles con los tiempos de actuación de las protecciones y de los interruptores.

Se ha considerado el caso más sencillo del análisis de estabilidad de gran perturbación de un generador conectado a un nudo de potencia infinita. La consideración de un caso un poco más complicado puede ayudar a una comprensión más profunda de los conceptos presentados hasta este momento. Se plantea, ahora, el caso de un generador conectado a un nudo de potencia infinita a través de un transformador elevador y dos líneas en paralelo (véase el diagrama unifilar de la Figura 10.5). Se va a estudiar la estabilidad del generador cuando ocurre una falta trifásica en un punto intermedio de una de las líneas y la falta se despeja por apertura de la línea afectada. En este caso, se considera que la falta en la línea es permanente y que su despeje precisa la desconexión de la citada línea.

En cada uno de los periodos del proceso transitorio (prefalta, falta y postfalta), la potencia eléctrica suministrada por el generador responde a una función del ángulo del rotor distinta que depende de la impedancia de transferencia equivalente entre la fuente de tensión detrás de la reactancia transitoria y la fuente de tensión que representa la red de potencia infinita.

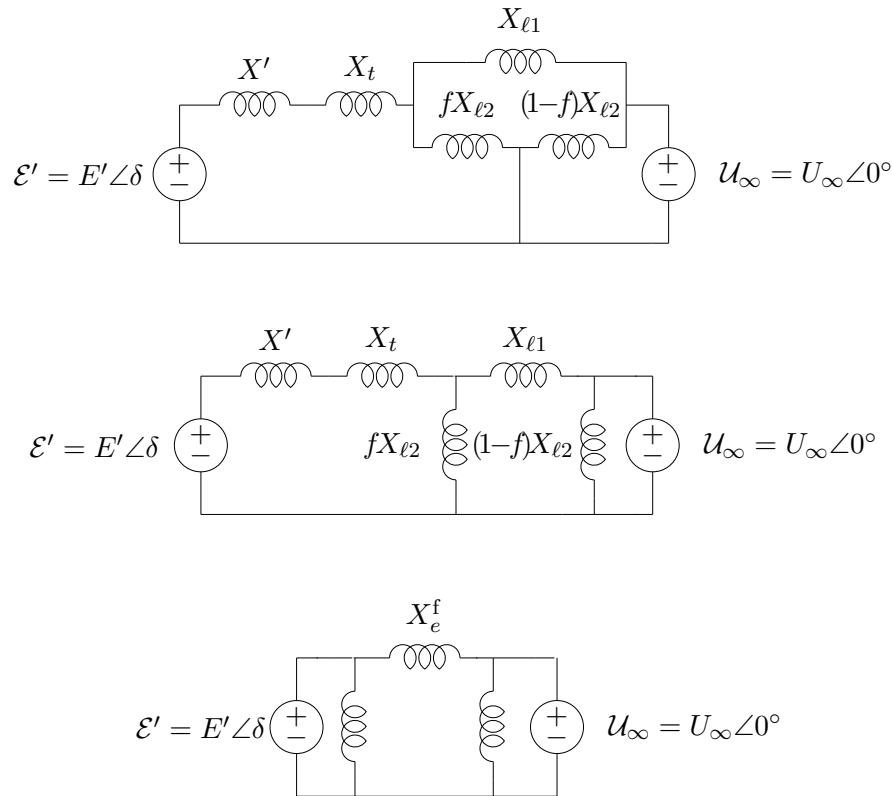


Figura 10.6. Circuito equivalente en el periodo en falta.

1. Periodo prefalta:

$$X_e^{\text{pref}} = X' + X_t + \frac{X_{\ell 1} X_{\ell 2}}{X_{\ell 1} + X_{\ell 2}} \quad (10.33)$$

2. Periodo en falta (suponiendo que la falta se encuentra en un punto intermedio de la línea definido por un factor f que afecta a la impedancia de la misma). La Figura 10.6 muestra las transformaciones del circuito equivalente para determinar la impedancia de transferencia.

$$X_e^f = X' + X_t + X_{\ell 1} + \frac{(X' + X_t) X_{\ell 1}}{X_{\ell 2} f} \quad (10.34)$$

3. Periodo postfalta:

$$X_e^{\text{posf}} = X' + X_t + X_{\ell 1} \quad (10.35)$$

La Figura 10.7 muestra las funciones de la potencia eléctrica suministrada por el generador en los periodos anteriormente definidos. La Figura 10.7 también muestra la aplicación

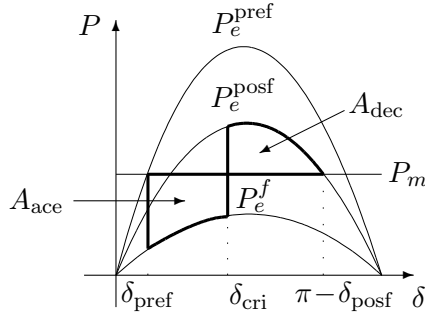


Figura 10.7. Criterio de igualdad de áreas aplicado al caso de un generador conectado a un nudo de potencia infinita a través de un transformador elevador y dos líneas en paralelo.

del criterio de igualdad de áreas³. Inicialmente el generador está trabajando en un punto de la característica de prefault $P_e^{\text{pref}}(\delta)$. Al producirse la falta el generador pasa a trabajar en la característica en falta $P_e^f(\delta)$ hasta que se produce el despeje de la misma en que pasa a trabajar en la característica de postfault $P_e^{\text{posf}}(\delta)$. El ángulo crítico de despeje de la falta δ_{cri} se calcula igualando las áreas aceleradora y deceleradora. Es decir,

$$A_{\text{ace}} = A_{\text{dec}} \quad (10.36)$$

$$\int_{\delta_{\text{pref}}}^{\delta_{\text{cri}}} (P_m - P_e^f) d\delta = \int_{\delta_{\text{cri}}}^{\delta_{\text{max}}} (P_e^{\text{posf}} - P_m) d\delta \quad (10.37)$$

El valor máximo del ángulo para que el generador sea estable es $\pi - \delta_{\text{posf}}$. Sustituyendo las expresiones de la potencia eléctrica en la ecuación (10.37) resulta:

$$\int_{\delta_{\text{pref}}}^{\delta_{\text{cri}}} \left(P_m - \frac{E'U}{X_e^f} \text{sen}\delta \right) d\delta = \int_{\delta_{\text{cri}}}^{\pi - \delta_{\text{posf}}} \left(\frac{E'U}{X_e^{\text{posf}}} \text{sen}\delta - P_m \right) d\delta \quad (10.38)$$

que integrando y sustituyendo la expresión de la potencia mecánica se obtiene:

$$\frac{1}{X_e^{\text{pref}}} \text{sen}\delta_{\text{pref}} (\pi - \delta_{\text{pref}} - \delta_{\text{posf}}) + \frac{1}{X_e^f} (\cos \delta_{\text{cri}} - \cos \delta_{\text{pref}}) - \frac{1}{X_e^{\text{posf}}} (\cos \delta_{\text{posf}} + \cos \delta_{\text{cri}}) = 0 \quad (10.39)$$

La ecuación (10.39) es una ecuación no lineal en función del ángulo crítico de despeje. Esta ecuación no tiene solución analítica. Se puede resolver numéricamente, por ejemplo, por el método de Newton. Por otra parte, es preciso señalar que, en este caso, el tiempo crítico de despeje no se puede calcular a partir del ángulo crítico de despeje por medio de la ecuación (10.14) ya que dicha ecuación ha sido obtenida suponiendo que la potencia aceleradora P_a es constante. En este caso la potencia aceleradora (10.40) depende del ángulo:

$$P_a(\delta) = P_m - P_e^f(\delta) = P_m - \frac{E'U}{X_e^f} \text{sen}\delta \quad (10.40)$$

³ Se ha supuesto que la potencia eléctrica máxima en el periodo en falta $P_{e,\text{max}}^f$ es inferior a la potencia eléctrica en el periodo de prefault P_e^{pref} . Si no fuera así el desarrollo que sigue quedaría afectado.

El cálculo del tiempo crítico de despeje se ha de realizar integrando numéricamente las ecuaciones diferenciales que gobiernan el comportamiento dinámico del generador. Precisamente el siguiente apartado aborda el problema de la simulación de la estabilidad de gran perturbación de un generador conectado a un nudo de potencia infinita.

Ejemplo 10.2:

Considerar el generador del Ejemplo 10.1. Suponer que el generador está conectado al nudo de potencia infinita a través del mismo transformador elevador y de dos líneas en paralelo iguales y cuya reactancia en la base de 100 MVA es $X_\ell = 0,2$ pu. Suponiendo que tiene lugar una falta trifásica en el punto medio de una de las dos líneas y que la falta se despeja por apertura de la citada línea, determinar el ángulo crítico de despeje de la falta.

Si se cumple que $P_{e,\max}^f < P_e^{\text{pref}}$, el cálculo del ángulo crítico de despeje se realiza por solución de la ecuación (10.39). Para ello es preciso el cálculo de la impedancia de transferencia equivalente en cada uno de los periodos del proceso transitorio, así como el ángulo en condiciones de prefalta y de posfalta.

Las impedancias de transferencia equivalente en los periodos de prefalta, falta y posfalta son respectivamente:

$$\begin{aligned} X_e^{\text{pref}} &= 0,3 + 0,15 + \frac{0,1 \times 0,1}{0,1 + 0,1} = 0,55 \text{ pu} \\ X_e^f &= 0,3 + 0,15 + 0,1 + \frac{(0,3 + 0,15) \times 0,1}{0,2 \times 0,5} = 1,55 \text{ pu} \\ X_e^{\text{posf}} &= 0,3 + 0,15 + 0,2 = 0,65 \text{ pu} \end{aligned}$$

A partir de la impedancia de transferencia en el periodo en falta X_e^f se puede calcular el valor máximo de la potencia eléctrica en dicho periodo como:

$$P_{e,\max}^f = \frac{1,2042 \times 0,8732}{1,55} = 0,6784 \text{ pu}$$

Se comprueba que $P_{e,\max}^f < P_e^{\text{pref}}$. Por tanto, la expresión (10.39) es aplicable al presente ejemplo.

El ángulo del rotor en condiciones de prefalta es precisamente el calculado en el Ejemplo 10.1 ya que las condiciones iniciales del generador son las mismas y la impedancia equivalente también es la misma:

$$\delta_{\text{pref}} = 24,74^\circ$$

El ángulo del rotor en condiciones de posfalta se calcula teniendo presente que, en condiciones de posfalta, la potencia eléctrica suministrada por el generador, la tensión detrás de la reactancia transitoria y la tensión en el nudo de potencia infinita son iguales a las de las condiciones de prefalta. Por tanto,

$$\delta_{\text{posf}} = \arcsen \frac{P_e^{\text{pref}} X_e^{\text{posf}}}{E' U_\infty} = 29,64^\circ$$

La solución de la ecuación no lineal (10.39) proporciona el valor del ángulo crítico de despeje de la falta:

$$\delta_{\text{cri}} = 106,58^\circ$$

Nótese que ahora el ángulo crítico de despeje de la falta es superior al obtenido en el Ejemplo 10.1, ya que durante la falta el generador sigue suministrando potencia eléctrica y, por tanto, el generador experimenta una menor aceleración.

Hasta el momento presente se ha considerado la ocurrencia de faltas trifásicas. Sin embargo, las faltas pueden ser además monofásicas, bifásicas y bifásicas a tierra. De todas ellas, las más frecuentes son las faltas monofásicas. Por ello es de gran interés estudiar cómo se ve afectada la estabilidad de gran perturbación de un generador conectado a un nudo de potencia infinita en caso que se produzca una falta monofásica. Se considerará que la falta es despejada por apertura trifásica de la línea.

Se va a estudiar la ocurrencia de una falta monofásica en el caso del generador conectado a un nudo de potencia infinita a través de un transformador y una línea. La falta monofásica ocurre al comienzo de la línea.

El tipo de falta sólo afecta a la respuesta del generador en el periodo en falta. El estudio de la respuesta del generador en el periodo en falta se aborda considerando los circuitos equivalentes del sistema a las secuencias directa, inversa y homopolar y conectándolos según el tipo de falta (el Capítulo 9 justifica las citadas formas de conexión). En caso de falta monofásica los circuitos equivalentes a las secuencias directa, inversa y homopolar se conectan en serie. La Figura 10.8 muestra los citados circuitos y su conexión. La construcción del circuito a la secuencia homopolar ha tenido en cuenta la forma de conexión de los arrollamientos del generador y del transformador y la puesta a tierra de los neutros indicados en la Figura 10.2. Se ha supuesto que las impedancias de secuencia directa e inversa del generador, el transformador y la línea son iguales.

La Figura 10.9 muestra la reducción del circuito de la Figura 10.8. Nótese que el circuito equivalente de la Figura 10.9 es similar al de la Figura 10.6. Por tanto, a efectos del cálculo del tiempo crítico de despeje de la falta monofásica, durante el periodo en falta, la característica de potencia eléctrica suministrada por el generador está determinada por una impedancia equivalente de valor:

$$X_e^f = X' + X_t + X_\ell \frac{(X' + X_t) X_\ell}{X_{e2} + X_{e0}} = X' + X_t + X_\ell \frac{(X' + X_t) X_\ell}{\frac{(X' + X_t) X_\ell}{(X' + X_t) + X_\ell} + \frac{X_t X_{\ell,0}}{X_t + X_{\ell,0}}} \quad (10.41)$$

donde $X_{\ell,0}$ es la impedancia de secuencia homopolar de la línea.

Nótese que la impedancia equivalente X_e^f es independiente de la resistencia a puesta a tierra del neutro del generador R_n y de la reactancia de secuencia homopolar del generador X_{g0} debido a la forma de conexión de los arrollamientos de menor tensión del transformador elevador del generador.

El método desarrollado para el análisis de estabilidad de gran perturbación en caso de faltas monofásicas es aplicable en el análisis de estabilidad de gran perturbación con faltas bifásicas y faltas bifásicas a tierra sin más que considerar la adecuada conexión de las redes de secuencia.

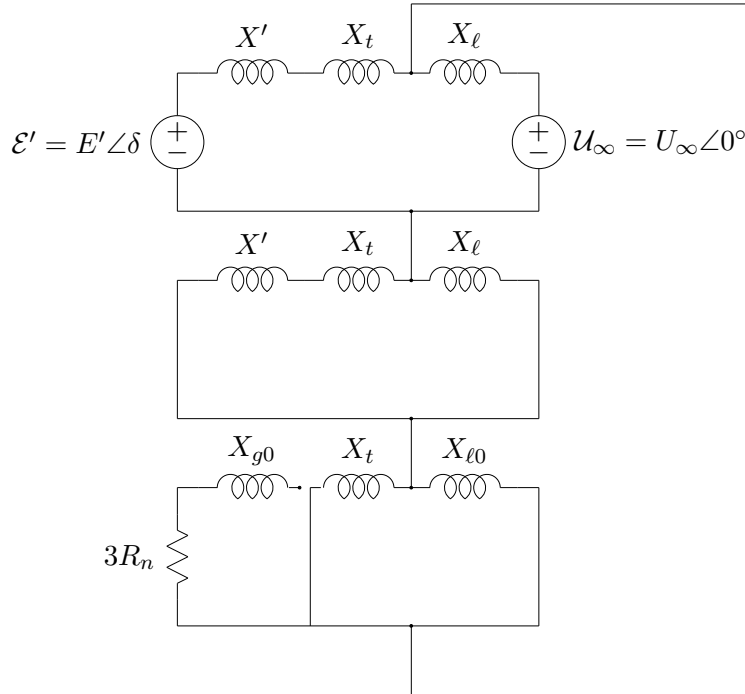


Figura 10.8. Conexión de los circuitos equivalentes a las secuencias directa, inversa y homopolar en caso de falta monofásica durante el periodo en falta.

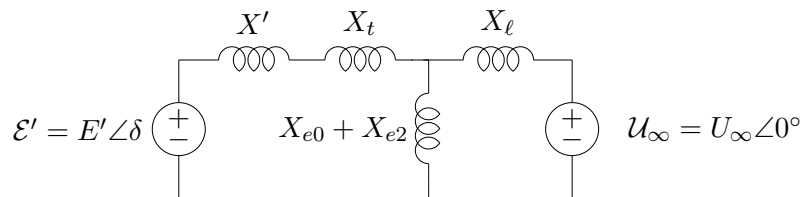


Figura 10.9. Circuito equivalente en caso de falta monofásica durante el periodo en falta.

Ejemplo 10.3:

Considerar el generador del Ejemplo 10.1. La impedancias de secuencia directa e inversa del generador, el transformador y la línea son iguales. La impedancia de secuencia homopolar de la línea es $X_{\ell,0} = 0,3$ pu. Suponiendo que tiene lugar una falta monofásica al comienzo de la línea y que la falta se despeja por apertura de la citada línea, determinar el ángulo crítico de despeje de la falta.

En primer lugar se calcula la impedancia de transferencia en el periodo en falta por medio de la ecuación (10.41):

$$X_e^f = 0,3 + 0,15 + 0,1 + \frac{(0,3 + 0,15) \times 0,1}{\frac{(0,3+0,15) \times 0,1}{0,3+0,15+0,1} + \frac{0,15 \times 0,3}{0,15+0,3}} = 0,7975 \text{ pu}$$

Antes de proceder a aplicar el criterio de igualdad de áreas se debe comprobar si la potencia eléctrica máxima en el periodo en falta es mayor o menor que la potencia eléctrica en prefalta.

$$P_{e,\max}^f = \frac{1,2042 \times 0,8732}{0,7975} = 1,3185 \text{ pu}$$

En el caso que la potencia eléctrica máxima en el periodo en falta es superior a la potencia eléctrica en prefalta, la aplicación del criterio de igualdad de áreas es la mostrada en la Figura 10.10. El análisis de la Figura 10.10 pone de manifiesto que es necesario comprobar si el área aceleradora es mayor o menor que el área deceleradora. Las áreas aceleradora y deceleradora se calculan como:

$$\begin{aligned} A_{\text{ace}} &= \int_{\delta_{\text{pref}}}^{\delta_f} (P_m - P_e^f) d\delta \\ &= P_m (\delta_f - \delta_{\text{pref}}) + \frac{E'U_\infty}{X_e^f} (\cos \delta_f - \cos \delta_{\text{pref}}) \\ A_{\text{dec}} &= \int_{\delta_f}^{\pi - \delta_f} (P_e^f - P_m) d\delta \\ &= 2 \frac{E'U_\infty}{X_e^f} \cos \delta_f - P_m (\pi - 2\delta_f) \end{aligned}$$

teniendo presente que δ_f se calcula como:

$$\delta_f = \arcsen \frac{P_e^{\text{pref}} X_e^f}{E'U_\infty} = 37,36^\circ$$

entonces:

$$\begin{aligned} A_{\text{ace}} &= 0,0267 \text{ pu} \times \text{rad} \\ A_{\text{dec}} &= 0,6260 \text{ pu} \times \text{rad} \end{aligned}$$

Como el área aceleradora es inferior al área deceleradora, la falta monofásica puede estar aplicada de forma permanente sin que el generador pierda sincronismo.

10.4.2. Generador conectado a un nudo infinito: simulación en el tiempo

El desarrollo del criterio de igualdad de áreas para el análisis de la estabilidad de gran perturbación de un generador conectado a un nudo de potencia infinita está basado en la

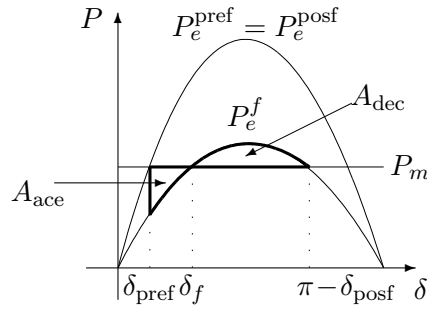


Figura 10.10. Aplicación del criterio de igualdad de áreas cuando ocurre una falta monofásica.

hipótesis que el factor de amortiguamiento del generador D es nulo. En caso contrario, dicho análisis se realiza por medio de la simulación en el dominio del tiempo del generador. La simulación en el dominio del tiempo del generador consiste en la integración numérica de las ecuaciones diferenciales que describen su comportamiento dinámico. La determinación, por ejemplo, del tiempo crítico de despeje de una falta consiste en simular repetidamente el comportamiento del generador para varios tiempos de despeje hasta encontrar el valor crítico. Es preciso resaltar que las cualidades del criterio de igualdad de áreas frente al método de simulación en el tiempo han suscitado el interés por el desarrollo de extensiones del citado criterio para sistemas multimáquina por aplicación de la teoría de estabilidad de Lyapunov. Presentaciones detalladas de dichos métodos pueden encontrarse en las referencias [9] y [10].

Las ecuaciones que describen el comportamiento del generador en forma de espacio de estado son:

$$\frac{d\delta}{dt} = \omega - \omega_0 \tag{10.42}$$

$$\frac{d\omega}{dt} = \frac{\omega_0}{2H} \left[P_m - \frac{EU_\infty}{X_e} \text{sen}\delta - \frac{D}{\omega_0} (\omega - \omega_0) \right] \tag{10.43}$$

que escritas en forma compacta resultan ser:

$$\dot{x} = F(x) \tag{10.44}$$

siendo x el vector de variables de estado y $F(x)$ un vector de funciones no lineales de las variables de estado.

Un algoritmo de integración numérica de un sistema de ecuaciones diferenciales, como el descrito por la ecuación (10.44), calcula la evolución en el tiempo de las variables de estado en instantes de tiempo discreto (x_0, \dots, x_k, \dots) separados un intervalo de tiempo Δt . Un algoritmo de integración numérica de ecuaciones diferenciales debe atender a varios requisitos: estabilidad, precisión y simplicidad [11]. La estabilidad se refiere a que el error entre la solución exacta y la simulada esté acotado durante todo el proceso. La precisión se refiere a la magnitud del citado error. La simplicidad se refiere a la forma de calcular los valores de las variables de estado en cada paso. De estas tres cualidades la más importante es la estabilidad ya que la solución simulada podría indicar que el generador es inestable

cuando el generador es estable. Por otra parte, precisión y simplicidad suelen ser cualidades contrapuestas ya que una mayor precisión suele precisar un algoritmo más complicado.

El algoritmo más sencillo que se puede considerar es el *método de Euler*, que calcula las variables de estado en el paso $k + 1$ de acuerdo con la expresión:

$$x_{k+1} = x_k + \dot{x}_k \Delta t \quad (10.45)$$

Como se aprecia el método de Euler aproxima la función $x(t)$ en $k + 1$ por los dos primeros términos del desarrollo en serie de Taylor alrededor del punto $x(t_k)$.

La estabilidad del método de Euler se puede analizar considerando la ecuación diferencial lineal más sencilla $\dot{x} = \lambda x$ donde λ es un número complejo de parte real negativa. La solución analítica de la ecuación diferencial es $x = e^{\lambda t} x_0$. La solución numérica en el paso k es $x_k = (1 + \lambda \Delta t)^k x_0$. La solución numérica tenderá a cero conforme aumenta k , al igual que hace la solución exacta, si $|1 + \lambda \Delta t| < 1$. Si se supone que $\lambda \Delta t = \sigma + j\omega$, entonces las condición de estabilidad del algoritmo es $|(1 + \sigma) + j\omega| < 1$. Es decir, que si $\lambda \Delta t$ se encuentra en un círculo de centro $(-1, 0)$ y radio 1 el algoritmo será estable. Por el contrario, hay valores de $\lambda \Delta t$ para los cuales aun cuando la ecuación diferencial es estable, la simulación en el dominio del tiempo indica que la ecuación diferencial es inestable.

Una alternativa al método de Euler es el *método Euler predictor-corrector*. Calcula las variables de estado en el paso $k + 1$, como su propio nombre indica, en dos etapas:

1. Etapa de predicción:

$$x_{k+1,p} = x_k + \dot{x}_k \Delta t \quad (10.46)$$

2. Etapa de corrección:

$$x_{k+1,c} = x_k + (\dot{x}_k + \dot{x}_{k+1,p}) \frac{\Delta t}{2} \quad (10.47)$$

La estabilidad del método de Euler predictor-corrector se puede estudiar siguiendo un procedimiento similar al aplicado al método de Euler. El algoritmo es estable si se cumple que $\left| \left(1 + \frac{\lambda^2 \Delta t^2}{2} + \sigma \right) + j\omega \right| < 1$. Es decir, que si $\lambda \Delta t$ se encuentra en un círculo de centro $\left(-1 - \frac{\lambda^2 \Delta t^2}{2}, 0 \right)$ y radio $1 + \frac{\lambda^2 \Delta t^2}{2}$ el algoritmo será estable. El método de Euler predictor-corrector tiene una región de estabilidad más grande que la del método de Euler.

El método de Euler y el método de Euler predictor-corrector pertenecen a la categoría de algoritmos de integración de ecuaciones diferenciales explícitos. Los *algoritmos explícitos* son aquellos en los que las variables de estado en el paso presente sólo dependen de las derivadas y de las variables de estado en el paso precedente $x_{k+1} = \Gamma(x_k, \dot{x}_k)$. La ventaja de los algoritmos explícitos es debida a la sencillez de la evaluación de las derivadas de las variables de estado $\dot{x}_k = F(x_k)$. Por el contrario presentan regiones de estabilidad reducidas tal y como se ha visto en los casos del métodos de Euler y de Euler predictor-corrector.

Una alternativa a los algoritmos explícitos son los *algoritmos implícitos*. Los algoritmos implícitos son aquellos en los que las variables de estado en el paso presente no sólo dependen

de las derivadas y de las variables de estado en el paso precedente sino también de las derivadas de las variables de estado en el paso presente $x_{k+1} = \Gamma(x_k, \dot{x}_k, \dot{x}_{k+1})$.

De los algoritmos implícitos, el que ofrece un mejor compromiso de estabilidad y simplicidad es la *regla trapezoidal*. La regla trapezoidal calcula las variables de estado en el paso $k + 1$ por medio de la expresión:

$$x_{k+1} = x_k + (\dot{x}_k + \dot{x}_{k+1}) \frac{\Delta t}{2} \quad (10.48)$$

La estabilidad de la regla trapezoidal se puede analizar siguiendo el mismo procedimiento que se ha utilizado en los casos precedentes. El algoritmo es estable si se cumple que $\sigma < 0$. Es decir, que si el sistema es estable, el algoritmo será estable.

El cálculo de las variables de estado en el paso $k + 1$ por medio de la ecuación (10.48) implica la resolución de un sistema de ecuaciones no lineales. Ello se puede apreciar sin más que sustituir en la ecuación (10.48) \dot{x} por $F(x)$. La solución del sistema de ecuaciones no lineales (10.49) se puede realizar, por ejemplo, por medio del método de Newton.

$$x_{k+1} = x_k + [F(x_k) + F(x_{k+1})] \frac{\Delta t}{2} \quad (10.49)$$

Ejemplo 10.4:

Considerar el generador del Ejemplo 10.1. Comprobar por medio de la simulación en el dominio del tiempo el tiempo crítico de despeje de una falta trifásica que ocurre al comienzo de la línea obtenido por aplicación del criterio de igualdad de áreas.

Para determinar el tiempo crítico de despeje de la falta se simula repetidamente la perturbación con diferentes tiempos de despeje hasta encontrar aquel tiempo de despeje que si se incrementa en 1 milisegundo resulta en la pérdida de sincronismo del generador.

La Figura 10.11 compara la respuesta del ángulo del rotor cuando el tiempo de despeje de la falta es 228 milisegundos (línea continua) y 229 milisegundos (línea discontinua). Las respuestas se han obtenido utilizando el método de Euler predictor-corrector. Las simulaciones se realizan considerando que la perturbación se aplica cuando $t = 1$ s para apreciar el régimen permanente en el periodo de prefalta. Cuando el tiempo de despeje es 229 milisegundos, el generador es inestable; mientras que cuando el tiempo de despeje es 228 milisegundos, el generador es estable. El generador es inestable cuando el ángulo crece indefinidamente. Como el factor de amortiguamiento del generador es nulo entonces el ángulo oscila de forma sostenida cuando el generador es estable.

Ejemplo 10.5:

Considerar el generador del Ejemplo 10.1 suponiendo que el factor de amortiguamiento del generador D es 2 pu. Determinar por medio de la simulación en el dominio del tiempo el tiempo crítico de despeje de una falta trifásica que ocurre al comienzo de la línea.

El tiempo crítico de despeje se determina de igual forma que en el Ejemplo 10.4. La Figura 10.12 compara la respuesta del ángulo del rotor cuando el tiempo de despeje es 236 milisegundos y 237 milisegundos. Las respuestas se han obtenido utilizando también el método de Euler predictor-corrector. Las simulaciones se realizan considerando que la perturbación se aplica cuando $t = 1$ s para apreciar

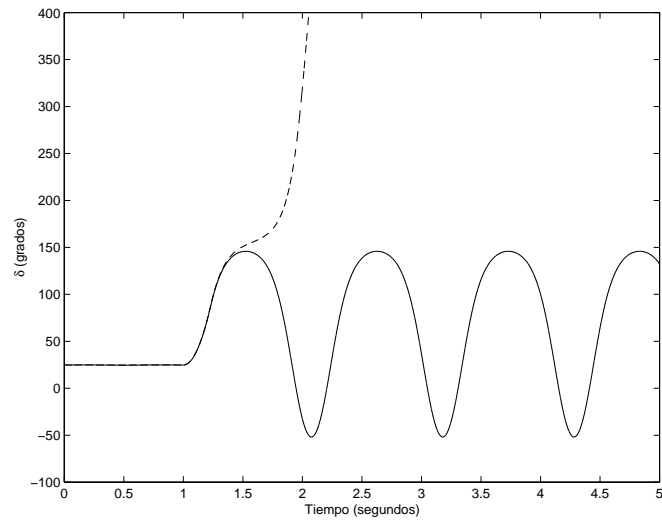


Figura 10.11. Simulación en el tiempo de la respuesta de un generador conectado a un nudo de potencia infinita tras una falta trifásica al comienzo de la línea cuando el factor de amortiguamiento del generador es nulo.

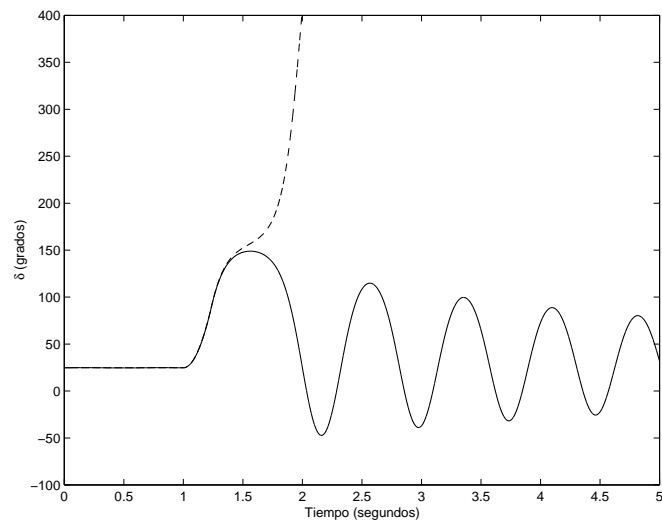


Figura 10.12. Simulación en el tiempo de la respuesta de un generador conectado a un nudo de potencia infinita tras una falta trifásica al comienzo de la línea cuando el factor de amortiguamiento del generador no es nulo.

el régimen permanente en el periodo de prefalta. Cuando el tiempo de despeje es 237 milisegundos, el generador es inestable; mientras que cuando el tiempo de despeje es 236 milisegundos, el generador es estable.

El tiempo crítico de despeje de la falta ha aumentado con relación al caso en el que el factor de amortiguamiento es nulo. Ello quiere decir que el modelo sin amortiguamiento ofrece una estimación pesimista sobre el tiempo crítico de despeje de la falta. Por otra parte, como el factor de amortiguamiento del generador no es nulo, entonces la oscilación del ángulo es decreciente.

10.4.3. Sistema multimáquina: simulación en el tiempo

El modelo de un sistema multimáquina para la simulación en el dominio del tiempo de la estabilidad de gran perturbación tiene tres componentes: los generadores, la red eléctrica y las cargas. Las ecuaciones diferenciales y algebraicas de cada generador son:

$$\frac{d\delta_i}{dt} = \omega_i - \omega_0 \quad (10.50)$$

$$\frac{d\omega_i}{dt} = \frac{\omega_0}{2H_i} \left[P_{mi} - P_{ei} - \frac{D_i}{\omega_0} (\omega_i - \omega_0) \right] \quad (10.51)$$

$$P_{ei} = \Re \{ \mathcal{E}'_i \mathcal{I}_{gi}^* \} \quad (10.52)$$

$$\mathcal{I}_{gi} = \frac{\mathcal{E}'_i - \mathcal{U}_{gi}}{jX'_i} \quad (10.53)$$

La red eléctrica se representa en términos de la matriz de admitancias nodales. Las corrientes inyectadas por los generadores dependen de las variables de estado y de las tensiones de los nudos de los generadores. Las corrientes inyectadas por las cargas dependen, en general, de las tensiones de los nudos de las cargas.

$$\begin{bmatrix} \mathcal{Y}_{gg} & \mathcal{Y}_{gc} \\ \mathcal{Y}_{cg} & \mathcal{Y}_{cc} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathcal{U}_g \\ \mathcal{U}_c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathcal{I}_g(x, \mathcal{U}_g) \\ \mathcal{I}_c(\mathcal{U}_c) \end{bmatrix} \quad (10.54)$$

En la ecuación 10.54 los subíndices g y c indican respectivamente los nudos de los generadores y de las cargas. Cuando se eliminan las corrientes suministradas por los generadores, las ecuaciones de los generadores, de la red eléctrica y las cargas se pueden escribir como un sistema de ecuaciones algebraico-diferenciales no-lineales de la forma:

$$\dot{x} = f(x, \mathcal{U}) \quad (10.55)$$

$$0 = g(x, \mathcal{U}) = \mathcal{Y}\mathcal{U} - \mathcal{I}(x, \mathcal{U}) \quad (10.56)$$

Si las cargas fueran de admitancia constante, se podrían eliminar primero las corrientes demandadas por las cargas y después las tensiones de los nudos resultando un sistema de ecuaciones diferenciales no-lineales de la forma (10.44). En efecto, considérese el modelo de la red eléctrica expandida a los nudos internos de los generadores y que incluye las cargas en términos de la matriz de admitancias nodales:

$$\left[\begin{array}{c|cc} \mathcal{Y}' & -\mathcal{Y}' & 0 \\ -\mathcal{Y}' & \mathcal{Y}' + \mathcal{Y}_{gg} & \mathcal{Y}_{gc} \\ 0 & \mathcal{Y}_{cg} & \mathcal{Y}_{cc} + \mathcal{Y}_c \end{array} \right] \begin{bmatrix} \mathcal{E}' \\ \mathcal{U}_g \\ \mathcal{U}_c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathcal{I}_g \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (10.57)$$

donde

$$\begin{aligned}\mathcal{Y}' &= \text{diag} \left\{ \frac{1}{jX'_i} \right\} \\ \mathcal{Y}_c &= \text{diag} \left\{ \frac{P_{ci} - jQ_{ci}}{U_{ci}^2} \right\}\end{aligned}$$

La ecuación (10.57) también se puede escribir como:

$$\left[\begin{array}{c|c} \mathcal{Y}_{11} & \mathcal{Y}_{12} \\ \hline \mathcal{Y}_{21} & \mathcal{Y}_{22} \end{array} \right] \begin{bmatrix} \mathcal{E}' \\ \mathcal{U}_g \\ \mathcal{U}_c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathcal{I}_g \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (10.58)$$

Si se realiza la reducción de Kron de la ecuación (10.58), entonces resulta:

$$(\mathcal{Y}_{11} - \mathcal{Y}_{12}\mathcal{Y}_{22}^{-1}\mathcal{Y}_{21}) \mathcal{E}' = \mathcal{Y}_R \mathcal{E}' = \mathcal{I}_g \quad (10.59)$$

Teniendo presente la representación reducida de la red, la potencia eléctrica suministrada por cada generador se puede expresar en términos de las variables de estado como:

$$\begin{aligned}P_{ei} &= \Re \{ \mathcal{E}'_i \mathcal{I}_{gi}^* \} = \Re \left\{ \mathcal{E}'_i \sum_{j=1}^{N_g} \mathcal{Y}_{Rij}^* (\mathcal{E}'_j)^* \right\} \\ &= (E'_i)^2 G_{Rii} + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n E'_i E'_j [G_{Rij} \cos(\delta_i - \delta_j) + B_{Rij} \text{sen}(\delta_i - \delta_j)]\end{aligned} \quad (10.60)$$

siendo n el número de generadores.

Sustituyendo la ecuación (10.60) en la ecuación (10.51), las ecuaciones diferenciales de cada generador quedan en la forma:

$$\begin{aligned}\frac{d\delta_i}{dt} &= \omega_i - \omega_0 \quad (10.61) \\ \frac{d\omega_i}{dt} &= \frac{\omega_0}{2H_i} \left\{ P_{mi} - (E'_i)^2 G_{Rii} - \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n E'_i E'_j [G_{Rij} \cos(\delta_i - \delta_j) + B_{Rij} \text{sen}(\delta_i - \delta_j)] \right. \\ &\quad \left. - \frac{D_i}{\omega_0} (\omega_i - \omega_0) \right\} \quad (10.62)\end{aligned}$$

Si por el contrario se consideran cargas no lineales (distintas de las cargas de admitancia constante), entonces el sistema de ecuaciones algebraico-diferenciales no-lineales no se puede reducir a un sistema de ecuaciones diferenciales no-lineales (10.44). En ese caso la simulación en el dominio del tiempo precisa que en cada paso de integración se resuelvan las ecuaciones algebraicas no-lineales (10.55). Asociado a la elección de un algoritmo de integración de ecuaciones diferenciales explícito o implícito, se pueden considerar dos métodos de solución

de las ecuaciones algebraicas: la *solución particionada* y la *solución simultánea* [20]. La solución particionada está asociada a los algoritmos de integración explícitos mientras que la solución simultánea está asociada a los algoritmos implícitos.

La solución particionada con un algoritmo de integración explícito calcula primero las tensiones y después las variables de estado. En efecto, considérese que en el instante t_{0-} el sistema se encuentra en equilibrio. Es decir, las derivadas de las variables de estado son nulas y las variables de estado, las tensiones y las corrientes verifican el sistema de ecuaciones algebraico-diferenciales no lineales (10.55) con $\dot{x} = 0$. Es decir,

$$f(x_{0-}, \mathcal{U}_{0-}) = 0 \quad (10.63)$$

$$(\mathcal{Y}_{0-})(\mathcal{U}_{0-}) - \mathcal{I}(x_{0-}, \mathcal{U}_{0-}) = 0 \quad (10.64)$$

Supóngase que en el instante t_{0+} se produce una falta en la red. Las variables de estado no pueden cambiar instantáneamente por lo que $x_{0-} = x_{0+} = x_0$. Por el contrario, las variables de la red sí lo hacen. Entonces, el sistema de ecuaciones no lineales que describe la red a resolver es:

$$(\mathcal{Y}_{0+})(\mathcal{U}_{0+}) = \mathcal{I}(x_0, \mathcal{U}_{0+}) \quad (10.65)$$

El cálculo de las tensiones \mathcal{U}_{0+} se realiza de forma iterativa. Se comienza suponiendo que el valor de las corrientes es $\mathcal{I}(x_0, \mathcal{U}_{0-})$ y se resuelve el sistema de ecuaciones lineales. Los nuevos valores de las tensiones se utilizan para actualizar los valores de las corrientes. La secuencia anterior se repite hasta que la diferencia entre las tensiones calculadas en dos iteraciones consecutivas es menor que la tolerancia especificada. Una vez calculadas las citadas tensiones, se pueden determinar las variables de estado en el paso $k = 1$ a partir de las variables de estado y de las derivadas de las variables de estado en el paso precedente (x_0, \dot{x}_0) por medio del algoritmo de integración explícito seleccionado:

$$x_1 = x_0 + \Gamma [\dot{x}_0] = x_0 + \Gamma [f(x_0, \mathcal{U}_{0+})] \quad (10.66)$$

La solución simultánea con un algoritmo de integración implícito calcula al mismo tiempo las variables de estado y las tensiones en cada paso. El procedimiento consiste en convertir el sistema de ecuaciones diferenciales no lineales en un sistema de ecuaciones algebraicas no lineales por aplicación del algoritmo de integración implícito. El sistema de ecuaciones algebraicas no lineal resultante se resuelve por el método de Newton. Considérese que el algoritmo implícito seleccionado es la regla trapezoidal. La aplicación de la regla trapezoidal para el cálculo de las variables de estado en el paso $k + 1$ resulta ser:

$$x_{k+1} = x_k + [f(x_k, \mathcal{U}_k) + f(x_{k+1}, \mathcal{U}_{k+1})] \frac{\Delta t}{2} \quad (10.67)$$

que es un sistema de ecuaciones algebraicas no lineales de la forma:

$$h(x_{k+1}, \mathcal{U}_{k+1}) = x_{k+1} - x_k - [f(x_k, \mathcal{U}_k) + f(x_{k+1}, \mathcal{U}_{k+1})] \frac{\Delta t}{2} = 0 \quad (10.68)$$

Teniendo presente que el sistema de ecuaciones algebraicas no lineales de la red en el paso $k + 1$ es:

$$g(x_{k+1}, \mathcal{U}_{k+1}) = \mathcal{Y}_{k+1}\mathcal{U}_{k+1} - \mathcal{I}(x_{k+1}, \mathcal{U}_{k+1}) = 0 \quad (10.69)$$

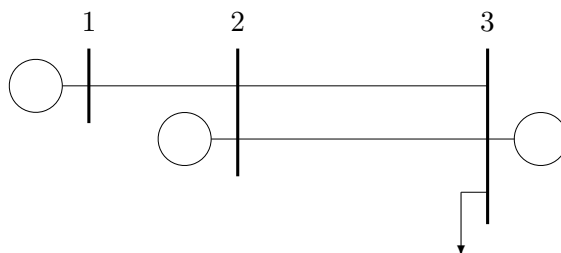


Figura 10.13. Diagrama unifilar de un sistema multimáquina de tres nudos.

entonces el sistema de ecuaciones algebraicas no lineales completo a resolver es:

$$h(x_{k+1}, \mathcal{U}_{k+1}) = 0 \quad (10.70)$$

$$g(x_{k+1}, \mathcal{U}_{k+1}) = 0 \quad (10.71)$$

La solución del sistema de ecuaciones algebraicas no lineales (10.70)-(10.71) se realiza por aplicación del método de Newton. Los valores de las variables de estado y de las tensiones en la iteración $\ell + 1$ se calculan de acuerdo con:

$$\begin{bmatrix} x_{k+1}^{\ell+1} \\ \mathcal{U}_{k+1}^{\ell+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_{k+1}^{\ell} \\ \mathcal{U}_{k+1}^{\ell} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \Delta x_{k+1}^{\ell} \\ \Delta \mathcal{U}_{k+1}^{\ell} \end{bmatrix} \quad (10.72)$$

donde

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial h}{\partial x} & \frac{\partial h}{\partial \mathcal{U}} \\ \frac{\partial g}{\partial x} & \frac{\partial g}{\partial \mathcal{U}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta x_{k+1}^{\ell} \\ \Delta \mathcal{U}_{k+1}^{\ell} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -h(x_{k+1}^{\ell}, \mathcal{U}_{k+1}^{\ell}) \\ -g(x_{k+1}^{\ell}, \mathcal{U}_{k+1}^{\ell}) \end{bmatrix} \quad (10.73)$$

Es preciso señalar que las matrices $\partial h/\partial x$, $\partial h/\partial \mathcal{U}$, $\partial g/\partial x$ son matrices diagonales por bloques mientras que la matriz $\partial g/\partial \mathcal{U}$ es la matriz de admitancias nodales. Estas propiedades se utilizan para resolver el sistema de ecuaciones (10.73) por pasos y así disminuir el tamaño del sistema de ecuaciones lineales a resolver en cada paso.

Ejemplo 10.6:

Considerar el sistema eléctrico de la Figura 10.13. Los datos de los nudos y las ramas están contenidos en las Tablas 10.1 y 10.2. Los parámetros de los generadores expresados en las bases correspondientes son idénticos e iguales a $H = 3$ s, $D = 2$ pu y $X' = 0,45$ pu. La reactancia transitoria del generador incluye la reactancia del transformador elevador. La carga se supondrá de admitancia constante. Determinar el tiempo crítico de despeje de una falta trifásica que ocurre al comienzo de una de las líneas que unen los nudos 2 y 3 y que se despeja por apertura del citado circuito.

El cálculo del tiempo crítico de despeje de una falta se realiza por integración numérica del sistema de ecuaciones diferenciales (10.61) para diferentes valores del tiempo de despeje de la misma hasta encontrar el valor crítico.

Antes de proceder a la construcción del sistema de ecuaciones diferenciales (10.61) es preciso realizar varios cálculos. En primer lugar, se expresan los parámetros de los generadores en la base

Cuadro 10.1. Datos de los nudos del sistema multimáquina de la Figura 10.7.

Número de nudo	$S_{G\text{base}}$ (MVA)	P_g (MW)	Q_g (Mvar)	P_c (MW)	Q_c (Mvar)	U (pu)
1	100	80	0.64	0	0	$1,0\angle 7,81^\circ$
2	100	80	10.27	0	0	$1,0\angle 6,89^\circ$
3	800	640	269.63	800	260	$1,0\angle 0^\circ$

Cuadro 10.2. Datos de las ramas del sistema multimáquina de la Figura 10.7.

Número de nudo inicial	Número de nudo final	Circuito	X (pu)
1	2	1	0.02
2	3	1	0.15
2	3	2	0.15

común. Como la potencia base de los generadores de los nudos 1 y 2 es igual a la base común del sistema 100 MVA, entonces sólo es preciso transformar los parámetros del generador del nudo 3.

$$\begin{aligned}
 H &= 3 \times \frac{800}{100} = 24\text{s} \\
 D &= 2 \times \frac{800}{100} = 16\text{pu} \\
 X' &= 0,45 \times \frac{100}{800} = 0,0563\text{pu}
 \end{aligned}$$

A continuación, se determinan las corrientes suministradas por los generadores y la tensión detrás de la reactancia transitoria de los mismos como:

$$\begin{aligned}
 \mathcal{I}_{g1} &= \left(\frac{P_{g1} + jQ_{g1}}{U_1} \right)^* = \left(\frac{0,8000 + j0,0064}{1,0\angle 7,81^\circ} \right)^* = 0,8000\angle 7,35^\circ \\
 \mathcal{I}_{g2} &= \left(\frac{P_{g2} + jQ_{g2}}{U_2} \right)^* = \left(\frac{0,8000 + j0,1027}{1,0\angle 6,89^\circ} \right)^* = 0,8066\angle -0,43^\circ \\
 \mathcal{I}_{g3} &= \left(\frac{P_{g3} + jQ_{g3}}{U_3} \right)^* = \left(\frac{6,4000 + j2,6963}{1,0\angle 0^\circ} \right)^* = 6,9448\angle -22,85^\circ
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \mathcal{E}'_1 &= \frac{\mathcal{I}_{g1}}{jX'_1} = \frac{0,8000\angle 7,35^\circ}{j0,45} = 1,0655\angle 27,56^\circ \\
 \mathcal{E}'_2 &= \frac{\mathcal{I}_{g2}}{jX'_2} = \frac{0,8066\angle -0,43^\circ}{j0,45} = 1,1064\angle 25,88^\circ \\
 \mathcal{E}'_3 &= \frac{\mathcal{I}_{g3}}{jX'_3} = \frac{6,9448\angle -22,85^\circ}{j0,0563} = 1,2066\angle 17,36^\circ
 \end{aligned}$$

Después se calcula la admitancia equivalente de la carga existente:

$$\mathcal{Y}_{c3} = \frac{P_{c3} - jQ_{c3}}{U_{c3}^2} = \frac{8,0 - j2,6}{1^2} = 8,0 - j2,6$$

Finalmente, se determinan las matrices de admitancias nodales reducidas a los nudos internos de los generadores en los periodos de prefalta, falta y de posfalta. Para ello se construyen primero las matrices de admitancias nodales expandidas a los nudos internos de los generadores en las citadas condiciones. La matriz de admitancias nodales expandida a los nudos internos de los generadores en condiciones de prefalta es:

$$Y^{\text{pref}} = \begin{bmatrix} -j2,2222 & 0 & 0 & +j2,2222 & 0 & 0 \\ 0 & -j2,2222 & 0 & 0 & +j2,2222 & 0 \\ 0 & 0 & -j17,7778 & 0 & 0 & +j17,7778 \\ +j2,2222 & 0 & 0 & -j52,2222 & +j50,0000 & 0 \\ 0 & +j2,2222 & 0 & +j50,0000 & -j65,5556 & +j13,3333 \\ 0 & 0 & +j17,7778 & 0 & +j13,3333 & 8,0000 - j33,7111 \end{bmatrix}$$

La matriz expandida en condiciones de falta se obtiene simplemente sumando al término propio del nudo en el que se produce la falta una impedancia de valor muy pequeño. Por ejemplo $Z_f = j10^{-9}$. Con lo que dicha matriz resulta ser:

$$Y^f = \begin{bmatrix} -j2,2222 & 0 & 0 & +j2,2222 & 0 & 0 \\ 0 & -j2,2222 & 0 & 0 & +j2,2222 & 0 \\ 0 & 0 & -j17,7778 & 0 & 0 & +j17,7778 \\ +j2,2222 & 0 & 0 & -j52,2222 & +j50,0000 & 0 \\ 0 & +j2,2222 & 0 & +j50,0000 & -j10^9 & +j13,3333 \\ 0 & 0 & +j17,7778 & 0 & +j13,3333 & 8,0000 - j33,7111 \end{bmatrix}$$

La matriz expandida en condiciones de posfalta se obtiene simplemente modificando la matriz expandida en condiciones de prefalta eliminando la contribución de una de las líneas que unen los nudos 2 y 3. Por tanto, dicha matriz es:

$$Y^{\text{posf}} = \begin{bmatrix} -j2,2222 & 0 & 0 & +j2,2222 & 0 & 0 \\ 0 & -j2,2222 & 0 & 0 & +j2,2222 & 0 \\ 0 & 0 & -j17,7778 & 0 & 0 & +j17,7778 \\ +j2,2222 & 0 & 0 & -j52,2222 & +j50,0000 & 0 \\ 0 & +j2,2222 & 0 & +j50,0000 & -j58,8889 & +j6,6667 \\ 0 & 0 & +j17,7778 & 0 & +j6,6667 & 8,0000 - j27,0444 \end{bmatrix}$$

Las matrices de admitancias nodales reducidas a los nudos internos de los generadores en los periodos de prefalta, falta y posfalta son respectivamente:

$$Y_R^{\text{pref}} = \begin{bmatrix} 0,0330 - j1,7740 & 0,0345 + j0,3693 & 0,3658 + j1,0818 \\ 0,0345 + j0,3693 & 0,0360 - j1,8365 & 0,3821 + j1,1299 \\ 0,3658 + j1,0818 & 0,3821 + j1,1299 & 4,0540 - j5,7894 \end{bmatrix}$$

$$Y_R^f = \begin{bmatrix} 0,0000 - j2,1277 & 0,0000 + j0,0000 & 0,0000 + j0,0000 \\ 0,0000 + j0,0000 & 0,0000 - j2,2222 & 0,0000 + j0,0000 \\ 0,0000 + j0,0000 & 0,0000 + j0,0000 & 2,1062 - j8,9024 \end{bmatrix}$$

$$Y_R^{\text{posf}} = \begin{bmatrix} 0,0223 - j1,6525 & 0,0233 + j0,4963 & 0,3086 + j0,8875 \\ 0,0233 + j0,4963 & 0,0244 - j1,7038 & 0,3223 + j0,9269 \\ 0,3086 + j0,8875 & 0,3223 + j0,9269 & 4,2604 - j5,5238 \end{bmatrix}$$

Una vez que se ha calculado el módulo de la tensión detrás de la reactancia transitoria de los generadores y las matrices de admitancias nodales reducidas a los nudos internos de los generadores

se puede proceder a la integración numérica del sistema de ecuaciones diferenciales no lineales (10.61) teniendo presente que las condiciones iniciales de las variables de estado son:

$$\begin{aligned} x_0 &= \left[\delta_{G1,0} \quad \delta_{G2,0} \quad \delta_{G3,0} \quad \omega_{G1,0} \quad \omega_{G2,0} \quad \omega_{G3,0} \right] \\ &= \left[27,56 \quad 25,88 \quad 17,36 \quad 2 \times \pi \times 50 \quad 2 \times \pi \times 50 \quad 2 \times \pi \times 50 \right] \end{aligned}$$

Mientras que no está aplicada la falta se ha de considerar la matriz de admitancias nodales reducida en condiciones de prefalta $\mathcal{Y}_R^{\text{pref}}$. Cuando la falta está aplicada se considerará la matriz de admitancias nodales reducida en condiciones de falta \mathcal{Y}_R^f . Finalmente, cuando la falta se elimine por desconexión de uno de los circuitos que unen los nudos 2 y 3 se considerará la matriz de admitancias nodales en condiciones de posfalta $\mathcal{Y}_R^{\text{posf}}$.

Para determinar el tiempo crítico de despeje de la falta se simula repetidamente la perturbación con diferentes tiempos de despeje hasta encontrar aquel tiempo de despeje que si se incrementa en 1 milisegundo resulta en la pérdida de sincronismo de algún generador.

La Figura 10.14 compara la evolución en el tiempo de las diferencias angulares de los generadores cuando el tiempo de despeje de la falta es de 372 ms (línea continua) y cuando el tiempo de despeje de la falta es de 373 ms (línea discontinua). Las respuestas se han obtenido utilizando el método de Euler predictor-corrector. Se representan las diferencias de los ángulos de los generadores 1 y 2 con relación al ángulo del generador 3. Las simulaciones se realizan considerando que la perturbación se aplica cuando $t = 1$ s para apreciar el régimen permanente en el periodo de prefalta.

Debe observarse que en el sistema de la Figura 10.14 se pueden identificar dos áreas, una exportadora de potencia, a la que pertenecen los nudos 1 y 2, y otra importadora de potencia, a la que pertenece el nudo 3. Una falta en la línea que une las áreas exportadora e importadora, limita la transferencia de potencia desde la primera a la segunda, y por tanto, se traduce en una aceleración de los generadores del área exportadora y una deceleración del generador del área importadora. Por ello las diferencias angulares propuestas son variables más informativas que los ángulos de los propios generadores al poner de manifiesto de forma clara el mantenimiento o la pérdida de sincronismo de los generadores.

10.5. Estabilidad de pequeña perturbación con modelos simplificados

El análisis de la estabilidad de pequeña perturbación con modelos simplificados se aborda en dos etapas. La primera etapa obtiene las ecuaciones linealizadas alrededor de un punto de funcionamiento de un generador conectado a un nudo de potencia infinita. Presenta, además, los conceptos de par sincronizante y par amortiguador y obtiene las expresiones de la frecuencia natural y amortiguamiento de la oscilación natural de un generador. El segundo paso obtiene las ecuaciones linealizadas alrededor de un punto de funcionamiento de un sistema multimáquina. Detalla, también, la aplicación de los autovalores y autovectores de la matriz de estados a la solución del sistema de ecuaciones diferenciales lineales anteriormente mencionado.

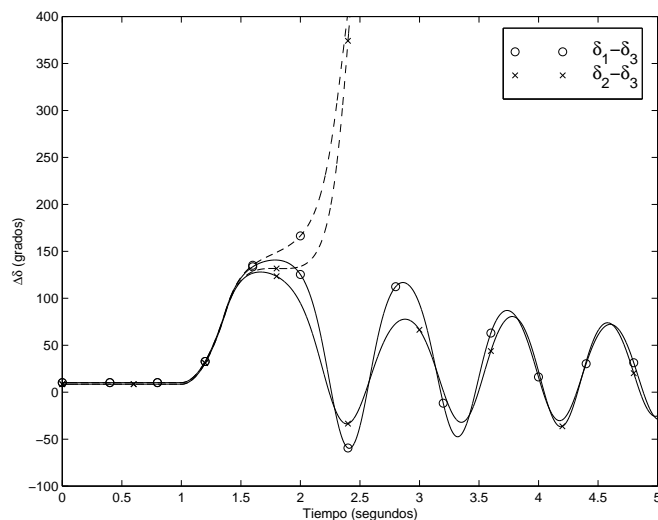


Figura 10.14. Simulación en el tiempo de la respuesta de un sistema multimáquina tras una falta trifásica.

10.5.1. Generador conectado a un nudo infinito

El análisis de estabilidad de pequeña perturbación de un generador conectado a un nudo de potencia infinita consiste en determinar si tras la ocurrencia de una pequeña perturbación (por ejemplo, una variación de la potencia mecánica aplicada por la turbina) el generador vuelve al punto de funcionamiento inicial o alcanza un nuevo punto de funcionamiento estable. Cuando se considera la aplicación de una pequeña perturbación, las ecuaciones diferenciales no lineales que describen el comportamiento dinámico del generador (10.42)-(10.43) se pueden linealizar alrededor del punto de funcionamiento para estudiar su respuesta. En este caso se obtienen las ecuaciones:

$$\frac{d\Delta\delta}{dt} = \Delta\omega \quad (10.74)$$

$$\begin{aligned} \frac{d\Delta\omega}{dt} &= \frac{\omega_0}{2H} \left(\Delta P_m - \frac{E'U_\infty}{X_e} \cos \delta_0 \Delta\delta - \frac{D}{\omega_0} \Delta\omega \right) \\ &= \frac{\omega_0}{2H} \left(\Delta P_m - K \Delta\delta - \frac{D}{\omega_0} \Delta\omega \right) \end{aligned} \quad (10.75)$$

El análisis de la ecuación (10.75) indica que además del par mecánico, el rotor del generador tiene aplicados el *par sincronizante* (proporcional al ángulo del rotor) y el *par amortiguador* (proporcional a la velocidad del rotor). El coeficiente K se denomina *coeficiente de par sincronizante*.

Si las ecuaciones (10.74) y (10.75) se escriben en forma matricial resulta:

$$\begin{bmatrix} \Delta\dot{\delta} \\ \Delta\dot{\omega} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \frac{-K\omega_0}{2H} & \frac{-D}{2H} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta\delta \\ \Delta\omega \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{\omega_0}{2H} \end{bmatrix} \Delta P_m \quad (10.76)$$

cuya forma compacta es:

$$\Delta \dot{x} = A\Delta x + b\Delta u \quad (10.77)$$

donde A es la matriz de estados y b el vector de entradas.

La estabilidad de pequeña perturbación del generador se puede analizar aplicando la transformada de Laplace al sistema de ecuaciones diferenciales lineales (10.77). En efecto, la transformada de Laplace de las variables de estado en función de la transformada de Laplace de la entrada resulta:

$$\Delta x(s) = (sI - A)^{-1} b\Delta u(s) \quad (10.78)$$

La estabilidad de pequeña perturbación del generador está determinada por las raíces de la ecuación característica:

$$\det(sI - A) = 0 \quad (10.79)$$

que operando resulta:

$$\det \begin{bmatrix} s & -1 \\ \frac{K\omega_0}{2H} & s + \frac{D}{2H} \end{bmatrix} = s^2 + \frac{D}{2H}s + \frac{K\omega_0}{2H} = 0 \quad (10.80)$$

Considérese, en primer término, el caso particular en que el factor de amortiguamiento D sea nulo. Entonces, las raíces de la ecuación característica resultan:

$$s_{1,2} = \pm \sqrt{\frac{-K\omega_0}{2H}} \quad (10.81)$$

Dependiendo de que el coeficiente de par sincronizante K sea positivo o negativo, se pueden presentar dos casos. En caso de que el coeficiente de par sincronizante sea positivo, resultan dos raíces complejas conjugadas puras y por tanto una respuesta oscilatoria pura. El coeficiente de par sincronizante es positivo si el ángulo del rotor δ_0 está comprendido entre 0° y 90° . Cuando el coeficiente de par sincronizante es negativo, resultan dos raíces reales, una positiva y otra negativa. Mientras que la raíz real negativa determina una respuesta exponencialmente decreciente, la raíz real positiva determina una respuesta exponencialmente creciente que termina prevaleciendo sobre la otra componente de la respuesta. El coeficiente de par sincronizante es negativo cuando el ángulo del rotor δ_0 está comprendido entre 90° y 180° .

En el caso general que el factor de amortiguamiento D no sea nulo, la comparación de la ecuación característica con la forma normalizada de la ecuación característica de un sistema de segundo orden:

$$s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2 = 0 \quad (10.82)$$

proporciona las expresiones de la pulsación natural ω_n y el amortiguamiento ζ de la oscilación natural del generador:

$$\omega_n = \sqrt{\frac{K\omega_0}{2H}} \quad (10.83)$$

$$\zeta = \frac{D}{2H} \frac{1}{2\omega_n} = D \sqrt{\frac{1}{8HK\omega_0}} \quad (10.84)$$

Es interesante resaltar que la pulsación natural es inversamente proporcional tanto a la raíz cuadrada de la inercia del generador H como a la raíz cuadrada de la reactancia equivalente que conecta el generador al nudo de potencia infinita X_e . Por otra parte, el amortiguamiento es directamente proporcional al factor de amortiguamiento D .

Ejemplo 10.7:

Considerar el generador del Ejemplo 10.4. Calcular las raíces de la ecuación característica. Determinar la pulsación natural, la frecuencia natural y el amortiguamiento de la oscilación del generador si el factor de amortiguamiento en la base del generador es $D = 2$ pu. Determinar los valores finales de la variación del ángulo y de la variación de velocidad cuando se produce un escalón de bajada del 5% de la potencia mecánica aplicada por la turbina. Obtener, también, la evolución en el tiempo del ángulo del rotor en este caso.

A partir de las condiciones de funcionamiento del generador, se determina el coeficiente de par sincronizante como:

$$K = \frac{E'U_\infty}{X_e} \cos \delta_0 = 1,7364$$

La raíces de la ecuación característica se calculan de acuerdo con:

$$s_{1,2} = \frac{\frac{-D}{2H} \pm j\sqrt{4\frac{K\omega_0}{2H} - \left(\frac{D}{2H}\right)^2}}{2} = -0,1667 \pm j9,5335$$

y la pulsación y frecuencia naturales y el amortiguamiento se calculan de acuerdo con las expresiones (10.83) y (10.84):

$$\begin{aligned} \omega_n &= 9,5350 \text{ rad/s} \\ f_n &= \frac{\omega_n}{2\pi} = 1,5175 \text{ Hz} \\ \zeta &= 0,0175 \text{ pu} = 1,75 \% \end{aligned}$$

Es digno de resaltar que la frecuencia de las oscilaciones naturales de los generadores síncronos se encuentra en el margen comprendido entre 0.1 y 2 Hz. Además, el amortiguamiento de estas oscilaciones es bajo comparado con las dinámicas de otros sistemas de control. En este caso es muy bajo y no sería admisible. Por el contrario, un amortiguamiento del 10% sería un valor admisible.

Operando la ecuación (10.78) resultan las funciones de transferencia entre la variación de potencia mecánica de la turbina y la variación del ángulo, por un lado, y la variación de velocidad, por otro lado:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \Delta\delta(s) \\ \Delta\omega(s) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} s & -1 \\ \frac{K\omega_0}{2H} & s + \frac{D}{2H} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{\omega_0}{2H} \end{bmatrix} \Delta P_m(s) \\ &= \frac{1}{s^2 + \frac{D}{2H}s + \frac{K\omega_0}{2H}} \begin{bmatrix} s + \frac{D}{2H} & 1 \\ -\frac{K\omega_0}{2H} & s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{\omega_0}{2H} \end{bmatrix} \Delta P_m(s) \\ &= \frac{1}{s^2 + \frac{D}{2H}s + \frac{K\omega_0}{2H}} \begin{bmatrix} \frac{\omega_0}{2H} \\ s \frac{\omega_0}{2H} \end{bmatrix} \Delta P_m(s) \end{aligned}$$

Dado que el sistema es estable, los valores finales de la variación del ángulo del rotor y de la variación de velocidad se obtiene por aplicación del teorema del valor final a las transformadas de

Laplace de la variación del ángulo y de la variación de velocidad, teniendo presente que $\Delta P_m(s) = \Delta P_m/s$, siendo $\Delta P_m = -0,05 \times 0,8 \text{ pu} = -0,04 \text{ pu}$.

$$\begin{aligned}\Delta\delta(\infty) &= \lim_{s \rightarrow 0} \Delta\delta(s) s = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{\omega_0}{2H} \frac{1}{s^2 + \frac{D}{2H}s + \frac{K\omega_0}{2H}} \frac{\Delta P_m}{s} s = \frac{\Delta P_m}{K} \\ &= \frac{-0,04}{1,7364} = -0,0230 \text{ rad} = -1,32^\circ \\ \Delta\omega(\infty) &= \lim_{s \rightarrow 0} \Delta\omega(s) s = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{\omega_0}{2H} \frac{s}{s^2 + \frac{D}{2H}s + \frac{K\omega_0}{2H}} \frac{\Delta P_m}{s} s = 0\end{aligned}$$

Nótese que la variación final del ángulo es proporcional a la magnitud del escalón de potencia mecánica. En realidad, dicha variación es una estimación debido a la linealización de las ecuaciones diferenciales no lineales. Así, el ángulo final alcanzado considerando el modelo lineal es $23,4172^\circ$ mientras que el alcanzado considerando el modelo no lineal es $23,4240^\circ$. Por otro lado, la variación final de velocidad es nula indicando que el generador permanece en sincronismo. La evolución en el tiempo de la variación del ángulo del rotor ante un escalón de potencia mecánica se obtiene calculando la antitransformada de la variación del ángulo del rotor $\Delta\delta(s)$:

$$\begin{aligned}\Delta\delta(t) &= \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{\omega_0}{2H} \frac{1}{s^2 + \frac{D}{2H}s + \frac{K\omega_0}{2H}} \frac{\Delta P_m}{s} \right\} \\ &= \frac{\Delta P_m}{K} \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{\omega_n^2}{s(s^2 + 2\zeta\omega_n + \omega_n^2)} \right\} \\ &= \frac{\Delta P_m}{K} \left[1 - \frac{1}{\sqrt{1-\zeta^2}} e^{-\zeta\omega_n t} \sin(\omega_n \sqrt{1-\zeta^2} t + \phi) \right]\end{aligned}$$

donde

$$\phi = \arctan \frac{\sqrt{1-\zeta^2}}{\zeta} = 1,5533$$

La Figura 10.15 muestra la evolución en el tiempo de la variación del ángulo del rotor cuando se produce un escalón de bajada del 5% de la potencia mecánica suministrada por la turbina. La simulación se realiza considerando que la perturbación se aplica cuando $t = 1 \text{ s}$ para apreciar el régimen permanente en el periodo anterior a la perturbación.

10.5.2. Sistema multimáquina

El modelo de un sistema multimáquina para el análisis de estabilidad de pequeña perturbación se obtiene linealizando las ecuaciones diferenciales de los generadores alrededor del punto de funcionamiento. En el caso en el que las cargas son de admitancia constante la linealización de las ecuaciones (10.61) y (10.62) proporciona las ecuaciones:

$$\frac{d\Delta\delta_i}{dt} = \Delta\omega_i \quad (10.85)$$

$$\frac{d\Delta\omega_i}{dt} = \frac{\omega_0}{2H_i} \left(\Delta P_{mi} - \sum_{j=1}^n \frac{\partial P_{ei}}{\partial \delta_j} \Delta\delta_j - \frac{D_i}{\omega_0} \Delta\omega_i \right) \quad (10.86)$$

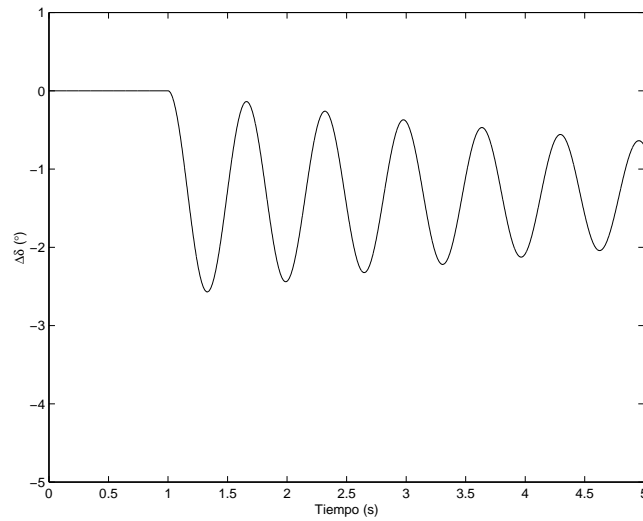


Figura 10.15. Variación del ángulo del rotor ante un escalón de bajada del 5% de la potencia mecánica aplicada por la turbina.

donde

$$\frac{\partial P_{ei}}{\partial \delta_j} = E'_i E'_j [G_{Rij} \sin(\delta_i - \delta_j) - B_{Rij} \cos(\delta_i - \delta_j)] = K_{ij} \quad (10.87)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial P_{ei}}{\partial \delta_i} &= \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n E'_i E'_j [-G_{Rij} \sin(\delta_i - \delta_j) + B_{Rij} \cos(\delta_i - \delta_j)] \\ &= - \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n K_{ij} \end{aligned} \quad (10.88)$$

En el caso de un sistema multimáquina aparece una matriz de coeficientes de par sincronizante K_{ij} . Si las ecuaciones de todos los generadores se escriben en forma conjunta

resulta:

$$\begin{aligned}
 \begin{bmatrix} \Delta \dot{\delta}_1 \\ \vdots \\ \Delta \dot{\delta}_n \\ \Delta \dot{\omega}_1 \\ \vdots \\ \Delta \dot{\omega}_n \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 & | & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & | & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & | & 0 & \cdots & 1 \\ \hline -\frac{\omega_0}{2H_1} K_{11} & \cdots & -\frac{\omega_0}{2H_1} K_{1n} & | & \frac{-D_1}{2H_1} & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & | & \vdots & \ddots & \vdots \\ -\frac{\omega_0}{2H_n} K_{n1} & \cdots & -\frac{\omega_0}{2H_n} K_{nn} & | & 0 & \cdots & \frac{-D_n}{2H_n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta \delta_1 \\ \vdots \\ \Delta \delta_n \\ \Delta \omega_1 \\ \vdots \\ \Delta \omega_n \end{bmatrix} \\
 &+ \begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 \\ \hline \frac{\omega_0}{2H_1} & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \frac{\omega_0}{2H_n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta P_{m1} \\ \vdots \\ \Delta P_{mn} \end{bmatrix} \quad (10.89)
 \end{aligned}$$

que en forma compacta tienen la forma ya conocida:

$$\Delta \dot{x} = A \Delta x + B \Delta u \quad (10.90)$$

donde B es ahora una matriz de entradas.

El estudio de la estabilidad de pequeña perturbación de sistemas multimáquina por medio del cálculo de las raíces de la ecuación característica se complica por la dificultad de calcular el determinante de una matriz que puede ser de gran dimensión cuando el número de generadores del sistema multimáquina sea elevado. Una forma alternativa es considerando la solución del sistema de ecuaciones diferenciales lineales en términos de la matriz exponencial de la matriz de estados A . La solución del sistema tiene dos componentes: la solución homogénea (a condiciones iniciales no-nulas y entradas nulas) y la particular (a condiciones iniciales nulas y entradas no-nulas):

$$\Delta x = \Delta x_h + \Delta x_p = e^{At} \Delta x(0) + \int_0^t e^{A(t-\tau)} B \Delta u(\tau) d\tau \quad (10.91)$$

donde la exponencial la matriz A se puede calcular por medio del desarrollo en serie de Taylor como:

$$e^{At} = I + \frac{1}{1!} At + \frac{1}{2!} A^2 t^2 + \frac{1}{3!} A^3 t^3 \cdots \quad (10.92)$$

Una alternativa de cálculo de la exponencial de la matriz de estados A llena de sentido físico está basada en los autovalores y autovectores de la citada matriz. Los autovalores λ_i y los autovectores derecho v_i e izquierdo w_i de una matriz A se definen de acuerdo con las expresiones:

$$A v_i = v_i \lambda_i \quad (10.93)$$

$$w_i^T A = \lambda_i w_i^T \quad (10.94)$$

Tanto los autovectores derechos como los autovectores izquierdos están afectados por un factor arbitrario. Para eliminar este factor, es usual introducir la normalización:

$$w_i^T v_i = 1 \quad (10.95)$$

En el caso de que los N autovalores de la matriz A sean distintos, las ecuaciones (10.93)-(10.95) se pueden escribir de forma conjunta como:

$$\begin{aligned} AV &= V\Lambda \\ WA &= \Lambda W \\ WV &= I \end{aligned} \quad (10.96)$$

donde

$$V = [v_1 \ \cdots \ v_N], \quad W = \begin{bmatrix} w_1^T \\ \vdots \\ w_N^T \end{bmatrix}, \quad \Lambda = \begin{bmatrix} \lambda_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \lambda_N \end{bmatrix}$$

Si en la ecuación (10.92) se sustituye I por el producto VW y A por el producto $V\Lambda W$, resulta:

$$e^{At} = VW + \frac{1}{1!}V\Lambda Wt + \frac{1}{2!}V\Lambda^2 Wt^2 + \frac{1}{3!}V\Lambda^3 Wt^3 + \cdots \quad (10.97)$$

$$= V \left(I + \frac{1}{1!}\Lambda t + \frac{1}{2!}\Lambda^2 t^2 + \frac{1}{3!}\Lambda^3 t^3 + \cdots \right) W = Ve^{\Lambda t}W \quad (10.98)$$

En consecuencia, la solución del sistema de ecuaciones diferenciales (10.91) pueden expresarse en la forma:

$$\Delta x = Ve^{\Lambda t}W\Delta x(0) + \int_0^t Ve^{\Lambda(t-\tau)}WB\Delta u(\tau) d\tau \quad (10.99)$$

La estabilidad del sistema, independientemente de la perturbación aplicada, está determinada por la solución homogénea del sistema de ecuaciones diferenciales lineales, que se puede expresar, además, como:

$$\Delta x = \sum_{i=1}^N v_i e^{\lambda_i t} [w_i^T \Delta x(0)] \quad (10.100)$$

El análisis de la ecuación (10.100) pone de manifiesto:

- El sistema evoluciona según N modos definidos por sus autovalores y autovectores derechos e izquierdos.
- Un autovalor real positivo (negativo) indica un comportamiento exponencialmente creciente (decreciente).
- Un autovalor complejo de parte real positiva (negativa) indica un comportamiento oscilatoriamente creciente (decreciente).

- Los autovalores complejos aparecen en parejas conjugadas ya que la matriz de estados del sistema es real.
- Las componentes del autovector derecho miden la actividad de cada una de las variables cuando sólo se excita un modo:

$$\Delta x_j = v_{ji} \alpha_i e^{\lambda_i t}$$

- El autovector izquierdo pesa las condiciones iniciales en la construcción del modo:

$$\alpha_i = [w_i^T \Delta x(0)]$$

Los autovectores derechos no son estrictamente válidos para medir la participación de una variable en un modo ya que no son adimensionales. Una medida adimensional de la participación de la variable j -ésima en el modo i -ésimo es la componente j -ésima del autovector derecho del modo i -ésimo pesada con la componente j -ésima del autovector izquierdo también del modo i -ésimo y que se denomina *factor de participación* [12]:

$$p_{ji} = w_{ji} v_{ji} \tag{10.101}$$

Ejemplo 10.8:

Considerar el sistema descrito en el Ejemplo 10.6. Determinar los autovalores, los autovectores derechos y los factores de participación.

Las matrices de coeficientes de par sincronizantes y de estados son respectivamente:

$$K = \begin{bmatrix} 1,7198 & -0,4341 & -1,2857 \\ -0,4364 & 1,8527 & -1,4163 \\ -1,4522 & -1,5674 & 3,0197 \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1,0000 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1,0000 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1,0000 \\ -90,0465 & 22,7276 & 67,3188 & -0,3333 & 0 & 0 \\ 22,8521 & -97,0081 & 74,1560 & 0 & -0,3333 & 0 \\ 9,5048 & 10,2589 & -19,7637 & 0 & 0 & -0,3333 \end{bmatrix}$$

El autoanálisis de la matriz A proporciona los siguientes autovalores:

$\lambda_{1,2}$	$\lambda_{3,4}$	λ_5	λ_6
$-0,1667 \pm 10,8096$	$-0,1667 \pm 9,4824$	$-0,3333$	$0,0000$

La matriz de estados del sistema tiene seis autovalores distintos. Dos parejas de autovalores complejos conjugados y dos autovalores reales. El número de parejas de autovalores complejos conjugados es igual al número de generadores menos 1 cuando no hay nudos de potencia infinita en el sistema. Si hay nudos de potencia infinita el número de parejas de autovalores complejos conjugados es igual al número de generadores. El autovalor nulo es consecuencia de la existencia de una ecuación linealmente dependiente de las restantes. Se trata de la variación del ángulo del rotor de uno

cualquiera de los generadores. Una justificación detallada de estas explicaciones puede encontrarse en [13].

El autoanálisis de la matriz A también proporciona los autovectores derechos asociados a los autovalores. Cada autovector derecho se ha normalizado dividiendo todas sus componentes por aquella de módulo mayor. Las componentes correspondientes a la variación de velocidad de los generadores (tres últimas componentes) proporcionan la forma de la oscilación. La pareja de autovalores $\lambda_{1,2}$ corresponde a una oscilación de frecuencia natural 1,7204 Hz del generador 2 contra los generadores 1 y 3. La pareja de autovalores $\lambda_{3,4}$ corresponde a una oscilación de frecuencia natural 1,5092 Hz los generadores 1 y 2 contra el generador 3. El autovalor λ_5 corresponde a una respuesta al unísono de los tres generadores exponencialmente decreciente de constante de tiempo 3 s.

$v_{1,2}$	$v_{3,4}$	v_5
$+0,0000 \pm 0,0714$	$-0,0019 \mp 0,1054$	$+1,00000$
$-0,0014 \mp 0,0925$	$-0,0013 \mp 0,0754$	$+1,00000$
$+0,0000 \pm 0,0028$	$+0,0004 \pm 0,0253$	$+1,00000$
$-0,7716 \pm 0,0000$	$+1,0000$	$-0,33333$
$+1,0000$	$+0,7154 \mp 0,0000$	$-0,33333$
$-0,0301 \mp 0,0000$	$-0,2400 \pm 0,0000$	$-0,33333$

El cálculo de los factores de participación precisa el cálculo de los autovectores izquierdos. La matriz de autovectores izquierdos se calcula simplemente invirtiendo la matriz de autovectores derechos. Los factores de participación correspondientes a la variación del ángulo de los generadores resultan ser iguales a los factores de participación correspondientes a la variación de la velocidad de los generadores. La oscilación caracterizada por la pareja de autovalores $\lambda_{1,2}$ está dominada por los generadores 1 y 2. La oscilación caracterizada por la pareja de autovalores $\lambda_{3,4}$ está también dominada por los generadores 1 y 2. Sin embargo, el generador 3 tiene mayor participación que en la anterior oscilación. El autovalor λ_5 está dominado por el generador 3.

$p_{1,2}$	$p_{3,4}$	p_5
$0,1856 \mp 0,0029$	$0,2594 \mp 0,0046$	$0,0000$
$0,3122 \mp 0,0048$	$0,1336 \mp 0,0023$	$0,0000$
$0,0022 \mp 0,0000$	$0,1071 \mp 0,0019$	$0,0000$
$0,1856 \pm 0,0029$	$0,2594 \pm 0,0046$	$0,1100$
$0,3122 \pm 0,0048$	$0,1336 \pm 0,0023$	$0,1084$
$0,0022 \pm 0,0000$	$0,1071 \pm 0,0019$	$0,7816$

El análisis combinado de los autovectores derechos y de los factores de participación indica que los autovalores $\lambda_{1,2}$ caracterizan una oscilación local de los generadores del área exportadora. Por el contrario, los autovalores $\lambda_{3,4}$ caracterizan una oscilación inter-área de los generadores del área exportadora frente al área importadora.

10.6. Modelo detallado del generador

Hasta ahora se ha considerado un modelo muy sencillo del generador. Aunque el referido modelo es útil para comprender la naturaleza del problema de estabilidad de ángulo, no representa dinámicas que pueden afectarlo significativamente. Las dinámicas relevantes son, por una parte, las dinámicas del devanado de campo y de los devanados amortiguadores

de la máquina síncrona, y por otra parte, las de los sistemas de regulación primarios del generador. Esta sección presenta los modelos detallados del generador síncrono, del sistema de excitación y del sistema de regulación de carga-velocidad y de la turbina utilizados en estudios de estabilidad.

10.6.1. Modelo detallado de la máquina síncrona

El modelo simplificado del generador presentado en la Sección 10.3 consideraba una representación detallada del modelo mecánico y una representación simplificada de modelo eléctrico del generador síncrono. Dicha representación simplificada se caracteriza por ser estática. En este apartado se presentan diversas alternativas del modelo dinámico de la máquina síncrona utilizado en estudios de estabilidad. Los desarrollos que conducen al citado modelo se omiten por quedar fuera del alcance de este libro. Sin embargo, se presentan las ideas fundamentales de los citados desarrollos y el significado de las mismas.

Desde el punto de vista de la teoría de circuitos, la máquina síncrona puede verse como un conjunto de circuitos magnéticamente acoplados. Unos fijos y otros giratorios. Si se considera una máquina síncrona en la que el inducido está en el estátor y el inductor en el rotor, el estátor tiene un devanado trifásico de corriente alterna y el rotor tiene el devanado de excitación en el eje del campo alimentado en corriente continua y un devanado amortiguador en cortocircuito. Además, el rotor presenta distinta reluctancia magnética en el eje del campo y en un eje transversal al eje del campo. Aunque esta circunstancia es especialmente acusada en las máquinas de polos salientes, también se presenta en las máquinas de rotor liso.

Los circuitos de la máquina síncrona presentan dos dinámicas en escalas de tiempo separadas. Mientras que las dinámicas de los circuitos del estátor son de frecuencia próxima a la frecuencia fundamental, las dinámicas de los circuitos del rotor (excitación y amortiguadores) son de baja frecuencia. Dado que el margen de frecuencias de los estudios de estabilidad está entre 0.1 y 2 Hz, el modelo de la máquina síncrona utilizado en estos estudios desprecia las dinámicas de los circuitos del estátor y únicamente representa la dinámica de los circuitos del rotor (devanados de excitación y amortiguadores).

En la literatura y en las normas se encuentran diversas alternativas del modelo dinámico de la máquina síncrona para estudios de estabilidad [14]. La más sencilla representa únicamente la dinámica del devanado de excitación. La citada representación se puede ir complicando para representar de forma cada vez más precisa el efecto de los devanados amortiguadores.

Cuando sólo se representa la dinámica del devanado de campo, la ecuación diferencial que describe el modelo dinámico de la máquina síncrona es [5]:

$$\frac{dE'_q}{dt} = \frac{1}{T'_{d0}} [-E'_q - (X_d - X'_d) I_d + E_{fd}] \quad (10.102)$$

y las ecuaciones algebraicas que describen el estátor son:

$$U_q = E'_q - X'_d I_d - R_a I_q \quad (10.103)$$

$$U_d = -R_a I_d + X'_q I_q \quad (10.104)$$

donde

E'_q es una tensión proporcional al flujo del devanado de excitación,

E_{fd} es la tensión de excitación suministrada por el sistema de excitación,

U_q y U_d son las componentes de la tensión en bornes de la máquina en ejes directo y transversal,

I_q y I_d son las componentes de la corriente suministrada por la máquina en ejes directo y transversal,

X_d , X_q son las reactancias síncronas de la máquina en ejes directo y transversal,

X'_d es la reactancia transitoria de la máquina en eje directo,

R_a es la resistencia del estátor de la máquina y

T'_{d0} es la constante de tiempo a circuito abierto de eje directo de la máquina síncrona.

Debe observarse que las ecuaciones algebraicas que describen el estátor se pueden representar en forma de diagrama vectorial tal y como se hace en la Figura 9.3 en el Capítulo 9.

Por otra parte, si la máquina se encuentra en vacío. Es decir, cuando las componentes de la corriente suministrada por la máquina son nulas y la tensión en bornes de la máquina sólo tiene componente en eje transversal y es igual a la tensión en bornes $U_q = U_t$, entonces las ecuaciones de la máquina se reducen a la ecuación:

$$\frac{dU_t}{dt} = \frac{1}{T'_{d0}} (-U_t + E_{fd}) \quad (10.105)$$

Si se obtiene la función de transferencia entre la tensión de excitación y la tensión en bornes, resulta la función considerada en el Capítulo 5:

$$\frac{\Delta U_t(s)}{\Delta E_{fd}(s)} = \frac{1}{1 + sT'_{d0}} \quad (10.106)$$

Una representación un poco más compleja de la máquina síncrona incluye una primera representación del devanado amortiguador. Dicha representación considera que el flujo en el devanado amortiguador se encuentra en el eje transversal. Según esta representación, las ecuaciones diferenciales que describen la dinámica de los devanados del rotor son:

$$\frac{dE'_q}{dt} = \frac{1}{T'_{d0}} [-E'_q - (X_d - X'_d) I_d + E_{fd}] \quad (10.107)$$

$$\frac{dE'_d}{dt} = \frac{1}{T'_{q0}} [-E'_d + (X_q - X'_q) I_q] \quad (10.108)$$

y las ecuaciones algebraicas que describen el estátor son:

$$U_q = E'_q - X'_d I_d - R_a I_q \quad (10.109)$$

$$U_d = E'_d - R_a I_d + X'_q I_q \quad (10.110)$$

donde

E'_d es una tensión proporcional al flujo del devanado amortiguador,

X'_d es la reactancia transitoria de la máquina en eje transverso y

T'_{q0} es la constante de tiempo a circuito abierto de eje transverso de la máquina síncrona.

Son posibles otras representaciones de los devanados amortiguadores. La representación usual de las máquinas de polos salientes cuyo devanado amortiguador está formado por una jaula de ardilla física (con barras y anillos) se realiza en términos del flujo del devanado amortiguador descompuesto en ejes directo y transverso. En este caso el modelo dinámico de la máquina es de tercer orden. Sin embargo, en el caso de máquinas de rotor liso cuyo devanado amortiguador es la propia masa del rotor, el flujo del devanado amortiguador tiene una componente en eje directo y dos en eje transverso con lo que el modelo dinámico es de cuarto orden.

10.6.2. Modelo detallado del sistema de excitación

La misión del sistema excitación de un generador síncrono es proporcionar corriente continua al devanado de campo del mismo. El sistema de excitación realiza además varias funciones de control y protección no sólo del propio generador sino también del sistema eléctrico. Las funciones básicas de control son la regulación de tensión y la contribución a la mejora de la estabilidad del sistema eléctrico. Las funciones de protección aseguran que el generador funciona dentro de los límites del funcionamiento.

El papel del sistema de excitación en la regulación de tensión ha sido discutido en el Capítulo 5. Este apartado completa la presentación de la estructura y funciones de los sistemas de excitación y detalla los modelos de los sistemas de excitación utilizados en estudios de estabilidad.

La Figura 10.16 muestra un diagrama funcional de un sistema de excitación. Dicha figura permite identificar los elementos de un sistema de excitación:

- Excitatriz. La excitatriz es el dispositivo de potencia que suministra corriente continua al devanado de campo del generador.
- Regulador de tensión. El regulador de tensión procesa las señales proporcionadas por el transductor y la compensación de carga, el estabilizador del sistema de potencia y los limitadores y genera la señal de mando a la excitatriz. El regulador incluye la compensación requerida para que la respuesta dinámica del lazo de regulación de tensión sea la deseada.
- Transductor y compensación de carga. El transductor proporciona una tensión continua, de nivel apropiado, proporcional a la tensión en bornes del generador. La compensación de carga estima la tensión en un punto remoto cuya regulación de tensión se desea utilizando la medida de la corriente suministrada por el generador.
- Estabilizador del sistema de potencia. El estabilizador del sistema de potencia varía la consigna del regulador de tensión con el propósito de amortiguar las oscilaciones del rotor del generador.

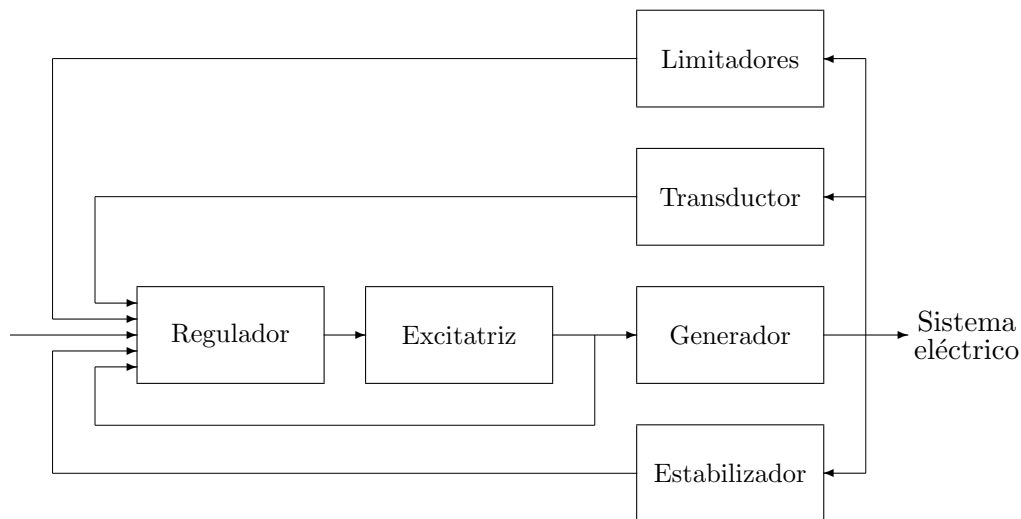


Figura 10.16. Diagrama funcional de un sistema de excitación.

- Limitadores de mínima corriente de excitación, de máxima corriente de excitación y de V/Hz. El limitador de mínima corriente de excitación previene la inestabilidad de pequeña perturbación y el excesivo calentamiento de cabezas de bobina del devanado del estátor. El limitador de máxima corriente de excitación impide el calentamiento excesivo del devanado del estátor. El limitador de V/Hz limita el flujo en el generador ya sea por tensión elevada o por baja frecuencia.

Los sistemas de excitación se clasifican atendiendo al dispositivo utilizado como excitatriz en tres grandes categorías: corriente continua, corriente alterna y estáticos. Así, la excitatriz de los sistemas en corriente continua es un generador de corriente continua, la excitatriz de los sistemas de corriente alterna es un generador síncrono y la excitatriz de los sistemas estáticos es un puente de tiristores.

Los sistemas de excitación han ido evolucionando con el desarrollo tecnológico. Primero se desarrollaron los sistemas en corriente continua, luego los sistemas en corriente alterna y finalmente los sistemas estáticos. Los sistemas en corriente continua están siendo sustituidos en la mayoría de los casos debido a las dificultades que entraña su mantenimiento. La mayoría de los nuevos equipos son sistemas estáticos debido a sus menores costes de mantenimiento (no tienen elementos rotativos) y a sus superiores prestaciones dinámicas. Por todo ello, a lo largo de esta sección se considerará el modelado y efectos sobre la estabilidad del modelado de un sistema de excitación estático. Los modelos normalizados de los diferentes tipos de sistemas de excitación pueden encontrarse en [15].

La Figura 10.17 muestra el diagrama funcional de un sistema de excitación estático. Un transformador conectado en bornes del generador denominado de excitación alimenta un rectificador controlado que a su vez suministra la corriente continua al devanado de campo del generador. El regulador controla el rectificador controlado a partir de las medidas de la tensión en bornes del generador y de la corriente suministrada por éste.

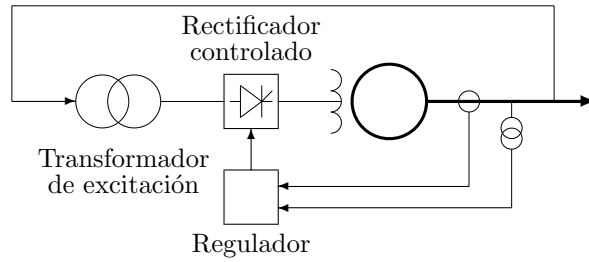


Figura 10.17. Diagrama funcional de un sistema de excitación estático.

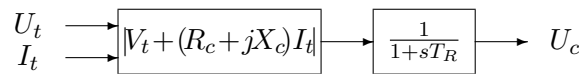


Figura 10.18. Modelo de la compensación de carga y del transductor.

La Figura 10.18 presenta el modelo de la compensación de carga y del transductor. La compensación de carga estima la tensión del punto cuya tensión se desea regular. Si se desea regular la tensión en el lado de alta tensión del transformador elevador R_c y X_c serían negativas y su valor sería la resistencia y reactancia del citado transformador. El transductor se representa por medio un sistema de primer orden de constante de tiempo T_R cuyo valor típico es 10 ms.

El modelo de un sistema de excitación estática está detallado en la Figura 10.19. Este modelo incluye la representación del regulador de tensión y de la excitatriz (puente de tiristores). El puente de tiristores se representa por medio de un sistema de primer orden de constante de tiempo T_A , cuyo valor típico es 3.33 ms. La ganancia del regulador y del puente de tiristores se combinan en un único valor K_A , cuyo valor típico es 200 pu. La compensación del lazo de regulación de tensión se realiza por medio del retraso de fase de función de transferencia $(1 + sT_C) / (1 + sT_B)$. Dadas las constantes de tiempo del transductor y del puente de tiristores, la necesidad de compensación puede ser discutible (ver, por ejemplo, [16] y [17]).

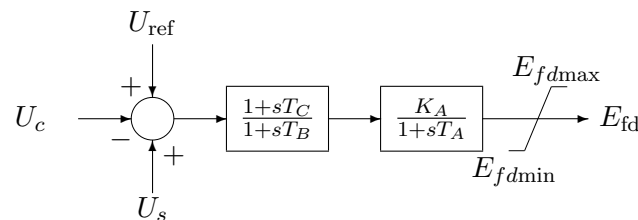


Figura 10.19. Modelo de un sistema de excitación estática.

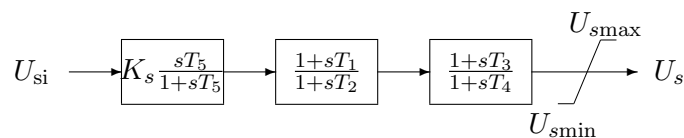


Figura 10.20. Modelo de un estabilizador del sistema de potencia

Como su propio nombre indica, el estabilizador del sistema de potencia es un control suplementario del sistema de excitación cuya misión específica es la mejora de la estabilidad del generador gracias a su capacidad de amortiguar las oscilaciones del rotor del generador. La Figura 10.20 muestra el modelo de un estabilizador del sistema de potencia con una entrada. Los componentes fundamentales del estabilizador son una compensación en adelanto o retraso con dos etapas $(1 + sT_1) / (1 + sT_2) \times (1 + sT_3) / (1 + sT_4)$, la ganancia K_S y un filtro paso alto o *washout* $(sT_5) / (1 + sT_5)$. El estabilizador puede utilizar como variables de entrada la velocidad del rotor del generador, la frecuencia de la tensión en bornes o la potencia eléctrica suministrada por el generador o una combinación de las anteriores.

10.6.3. Modelo detallado de la turbina

El motor primario convierte la energía de una fuente primaria en energía mecánica. Las turbinas de vapor, de gas o los motores diesel convierten la energía térmica obtenida en un proceso termodinámico en energía mecánica, mientras que las turbinas hidráulicas convierten la energía potencial de una masa de agua en energía mecánica.

El papel de la turbina y el regulador asociado en la regulación de frecuencia-potencia ha sido discutido en el Capítulo 5. Este apartado completa la presentación de los modelos de turbinas de vapor y del regulador asociado para estudios de estabilidad [18]. Por supuesto, la representación de las turbinas hidráulicas y de gas y de los motores diesel merece tanta atención como la representación de las turbinas de vapor [19]. Sin embargo, limitaciones de espacio determinan la presentación de solo un tipo de turbinas.

La Figura 10.21 muestra el diagrama funcional de una turbina de vapor con un solo eje y con simple recalentamiento. Hay turbinas de vapor con dos ejes y con doble recalentamiento. Se ha considerado una turbina con cuerpos de alta, media y baja presión (AP, MP y BP). La etapa de recalentamiento se encuentra entre el cuerpo de alta y el cuerpo de media presión. La salida de los cuerpos de media presión y la entrada al cuerpo de baja presión se realiza en el denominado *crossover*. La regulación de la carga de la turbina se realiza a través de las válvulas de control (VC). Las válvulas de interceptación (VI), situadas a la entrada de la turbina de media presión, pueden cerrarse temporalmente (uno o dos segundos) para limitar la potencia mecánica suministrada por la turbina en caso que el generador experimente una aceleración anormal debida a una falta. El regulador de la turbina a través de medidas eléctricas determina la velocidad del grupo y la potencia activa suministrada.

La Figura 10.22 detalla el modelo de la turbina de vapor cuyo diagrama funcional se presenta en la Figura 10.21. La potencia mecánica desarrollada por la turbina es proporcional al producto del caudal de vapor, que es directamente proporcional a la apertura de las

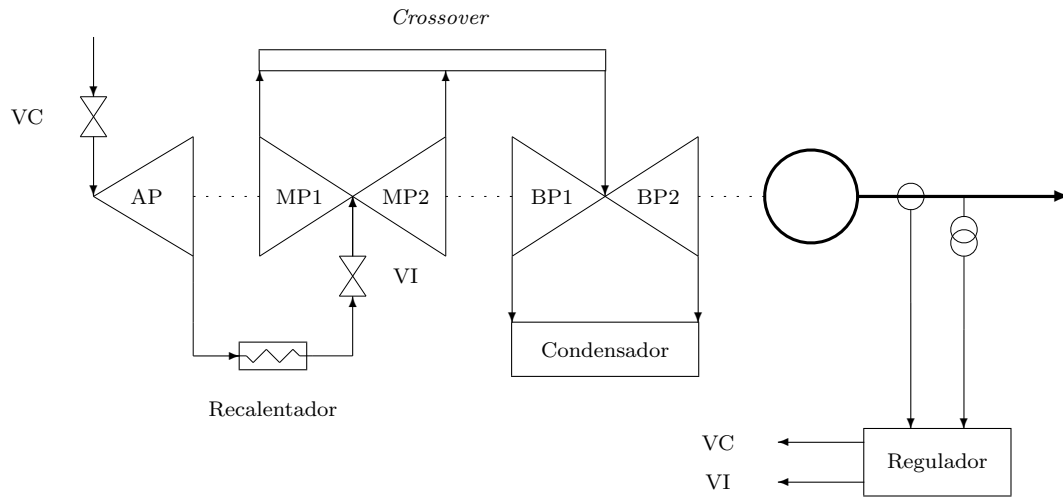


Figura 10.21. Diagrama funcional de una turbina de vapor.

válvulas de control y a la presión del vapor P_s . La presión del vapor está controlada por el control conjunto de la caldera y de la turbina. En estudios de estabilidad que contemplan simulaciones de 10 o 20 segundos es común considerar que la presión de vapor se mantiene constante. En calderas con calderín ello es normalmente cierto. En calderas de un solo paso depende de las prestaciones del control caldera-turbina.

Se representa, a continuación, la pérdida de carga en la cámara de válvulas mediante un sistema de primer orden cuya constante de tiempo es T_4 y que es del orden de décimas de segundo. Si no se considera la actuación de las válvulas de interceptación, la pérdida de carga en el recalentador se representa también como un sistema de primer orden cuya constante de tiempo es T_5 y que es del orden de segundos. La pérdida de carga en el crossover también se representa como un sistema de primer orden de constante de tiempo T_6 y que es del orden de décimas de segundo. La contribución de las turbinas de alta, media y baja presión determina la potencia mecánica total desarrollada por la turbina. De lo señalado anteriormente, se pone de manifiesto que la constante de tiempo más importante del modelo de una turbina de vapor es la de la etapa de recalentamiento.

Las válvulas de control y de interceptación son gobernadas por el regulador de turbina. La actuación de las válvulas de interceptación responde más a una lógica que a un sistema de regulación. Por el contrario la maniobra de las válvulas de control se realiza según los principios de la regulación frecuencia-potencia presentados en el Capítulo 5. La Figura 10.23 muestra el diagrama de bloques de un regulador de turbina de vapor. El estatismo permanente del regulador es el inverso de la ganancia K . El regulador tiene una etapa de compensación de función de transferencia $(1 + sT_1)(1 + sT_2)$ por si fuera necesario. El regulador manda un servomotor hidráulico de constante de tiempo T_3 que es del orden de décimas de segundo. Tanto la apertura de las válvulas de control VC como la velocidad de apertura \dot{VC} está limitada.

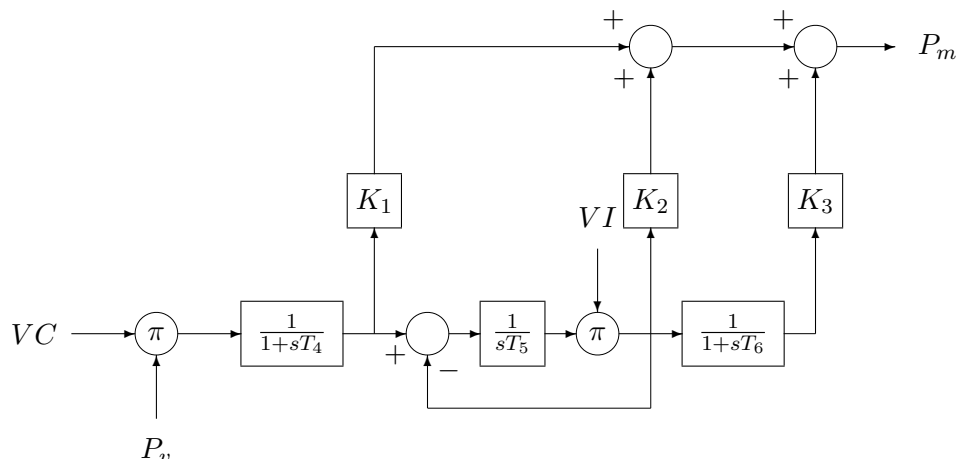


Figura 10.22. Modelo de una turbina de vapor.

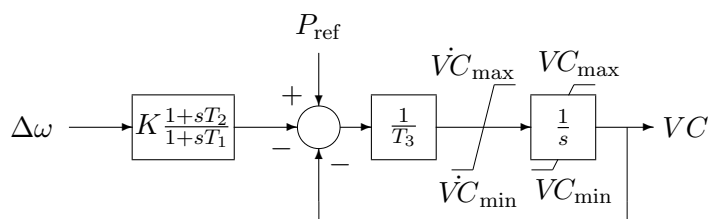


Figura 10.23. Modelo del regulador de una turbina de vapor.

10.7. Efectos del modelado en la estabilidad de ángulo

Esta sección estudia el efecto del modelado detallado del generador síncrono en la estabilidad de ángulo. De forma más precisa, el estudio de los efectos del modelado detallado de la máquina síncrona y sus controles primarios en la estabilidad se realiza considerando diversas alternativas de modelado en un sistema sencillo. De hecho se considera el sistema más sencillo posible: el de un generador conectado a un nudo de potencia infinita a través de un transformador elevador y una línea del Ejemplo 10.4. El grado de detalle del modelo se incrementa con la relevancia decreciente del componente. Así, en primer término, se considera un modelo eléctrico detallado de la máquina síncrona que incluye la representación del devanado de campo y de los devanados amortiguadores. Después, se incorpora al modelo anterior un modelo detallado de un sistema de excitación estático. Finalmente, se añade a este último un modelo detallado de turbina de vapor y sistema de regulación de carga-velocidad asociado.

Los parámetros del modelo del generador, el sistema de excitación y la turbina están detallados en la Tabla 10.3.

Cuadro 10.3. Datos de los modelos de la máquina síncrona, la excitación y la turbina.

T'_{d0}	T''_{d0}	T'_{q0}	T''_{q0}	X_d	X_q	X'_d	X''_d	X'_q	X''_q	R_a
8,0	0,03	0,4	0,05	1,8	1,7	0,3	0,55	0,25	0,25	0

K_A	T_A	T_B	T_C	T_R	R_C	X_C	E_{fdmin}	E_{fdmax}
200	0	0	0	0,01	0	0	-6	6

K	T_1	T_2	T_3	T_4	T_5	T_6	K_1	K_2	K_3	P_{min}	P_{max}
20	0	0	0,2	0,3	7	0,6	0,3	0,3	0,4	0	0,85

Cuadro 10.4. Tiempos críticos de despeje con diferentes hipótesis de modelado.

Modelo	t_{cri} (ms)
Simplificado ($D = 2pu$)	236
Detallado (máquina)	309
Detallado (máquina+excitación)	323
Detallado (máquina+excitación+turbina)	331

10.7.1. Efecto en la estabilidad de gran perturbación

El efecto del modelado en la estabilidad de gran perturbación se mide por su impacto en el tiempo crítico de despeje de una falta trifásica que tiene lugar al comienzo de la línea que une el generador al nudo de potencia infinita. La Tabla 10.4 compara los tiempos críticos de despeje de la falta en las tres hipótesis de modelado consideradas. Se incluye también el tiempo crítico de despeje obtenido cuando se considera el modelo simplificado. El aumento del grado del detalle del modelo se traduce en el aumento del tiempo crítico de despeje de la falta. En otras palabras, la consideración de modelos simplificados produce estimaciones pesimistas del tiempo crítico de despeje.

La consideración de un factor de amortiguamiento no nulo en el modelo simplificado intenta aproximar el efecto de las dinámicas del devanado de campo y de los devanados amortiguadores. Sin embargo, la representación detallada de dichas dinámicas pone de manifiesto la imprecisión de la representación simplificada.

Los tiempos críticos calculados ilustran la contribución a la estabilidad de un sistema de excitación estático y del sistema de regulación de carga-velocidad y la turbina. La contribución del sistema de excitación estático resulta ser superior a la de la turbina.

La Figura 10.24 compara las respuestas del generador (el ángulo del rotor) en caso de despeje de la falta en el tiempo crítico cuando se contemplan las tres alternativas del modelado señaladas. La falta es aplicada en el instante $t = 1$ s desde el comienzo de la

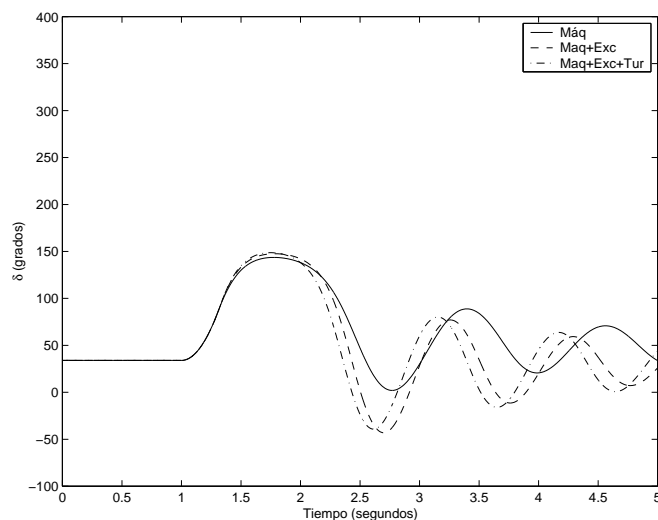


Figura 10.24. Comparación de la respuesta del generador bajo diferentes hipótesis de modelado cuando la falta se despeja en el tiempo crítico de despeje.

simulación. La comparación de las respuestas pone de manifiesto que la contribución de los sistemas de regulación al aumento del tiempo crítico de despeje se traduce tanto en un ligero aumento de la amplitud de la primera oscilación como en un aumento de la frecuencia de la oscilación.

La Figura 10.25 muestra la evolución de la tensión de excitación y de la potencia mecánica suministrada por la turbina cuando se contempla el modelo detallado del generador incluyendo la excitación y la turbina. Se aprecia, por una parte, la rapidez de actuación del sistema de excitación: de forma práctica instantánea alcanza su valor de techo 6 pu. Se comprueba, por otra parte, que la turbina y su sistema de regulación de carga-velocidad son componentes mucho más lentos.

10.7.2. Efecto en la estabilidad de pequeña perturbación

El efecto del modelado en la estabilidad de pequeña perturbación se valora por su impacto en el autovalor mecánico del modelo linealizado alrededor del punto de funcionamiento. El autovalor mecánico del modelo linealizado de un generador conectado a un nudo de potencia infinita es aquel autovalor complejo, que está dominado por la dinámica del rotor del generador, cuya frecuencia está alrededor de 1 Hz y que presenta un amortiguamiento bajo comparado con otros autovalores. Cuando se considera el modelo simplificado el autovalor mecánico es el único que aparece. Sin embargo, cuando se aumenta el grado de detalle del modelo, aparecen otros autovalores. Los factores de participación son herramientas muy útiles para identificar el autovalor asociado a la dinámica del rotor del generador.

La Tabla 10.5 compara los autovalores mecánicos en las tres hipótesis de modelado contempladas. Se incluye también el autovalor mecánico obtenido cuando se considera el modelo simplificado. Un primer análisis de la citada tabla pone de manifiesto que la frecuencia del

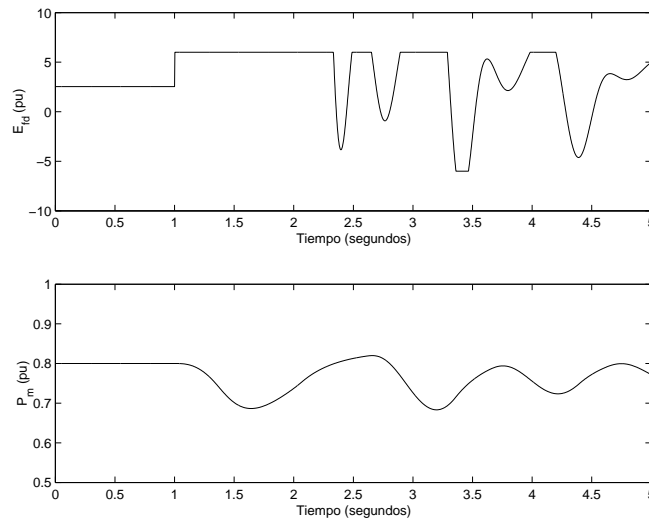


Figura 10.25. Evolución de la tensión de excitación y de la potencia mecánica.

autovalor mecánico no varía significativamente con el grado de detalle del modelo. Por el contrario, el efecto sobre el amortiguamiento merece una discusión más detallada.

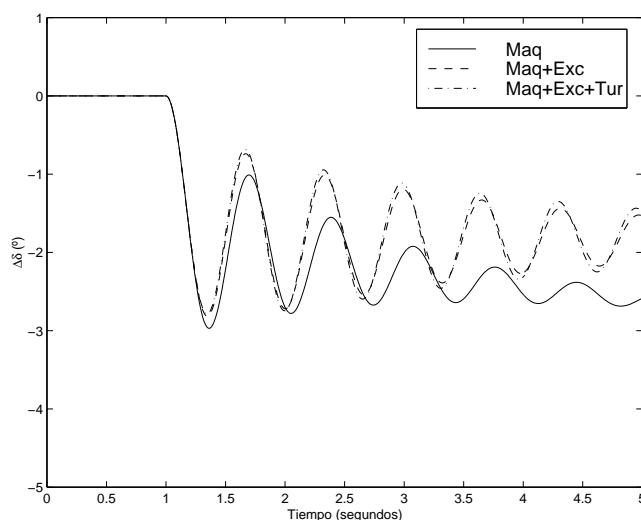
En efecto, si se compara el caso en que se contempla el modelo detallado incluyendo sólo el modelo de máquina con el caso que considera el modelo simplificado se observa que el amortiguamiento aumenta. Ello pone de manifiesto la contribución de las dinámicas de los devanados de campo y amortiguadores al amortiguamiento de la oscilación. Cuando se incluye la representación de la excitación, el amortiguamiento del autovalor mecánico se reduce de forma apreciable desde un valor bajo pero admisible 7,45 % hasta uno inadmisibles 3,85 %. Merece la pena destacar que este efecto adverso de la excitación en el amortiguamiento de la oscilación mecánica es debido a las características del sistema de excitación estático contemplado: baja constante de tiempo 10 ms y elevada ganancia 200 pu. Si se incluye la representación de la turbina el amortiguamiento del autovalor mecánico apenas se ve afectado. En resumen, los devanados de campo y amortiguadores y la excitación afectan significativamente el amortiguamiento de la oscilación del rotor del generador. La Figura 10.26 compara las respuestas del generador (la variación del ángulo del rotor) cuando se aplica un escalón de bajada del 5 % de potencia mecánica aplicada al eje del rotor cuando se contemplan las tres alternativas del modelado señaladas. La perturbación se aplica en el instante $t = 1$ s desde el comienzo de la simulación. La comparación de las respuestas ilustra las magnitudes de la Tabla 10.5.

10.8. Métodos de mejora de la estabilidad de ángulo

Esta sección detalla métodos de mejora de la estabilidad de ángulo, tanto de gran como de pequeña perturbación.

Cuadro 10.5. Autovalor mecánico con diferentes hipótesis de modelado.

Modelo	λ	ζ (%)	f_n (Hz)
Simplificado ($D = 2pu$)	$-0,1667 \pm j9,5335$	1,75	1,5175
Detallado (máquina)	$-0,6806 \pm j9,1097$	7,45	1,4498
Detallado (máquina+excitación)	$-0,3672 \pm j9,5225$	3,85	1,5156
Detallado (máquina+excitación+turbina)	$-0,3065 \pm j9,5710$	3,20	1,5233

**Figura 10.26.** Comparación de la respuesta del generador bajo diferentes hipótesis de modelado cuando se aplica un escalón de bajada del 5% de la potencia mecánica.

10.8.1. Métodos de mejora de la estabilidad de gran perturbación

La mejora de estabilidad de gran perturbación se puede lograr por dos vías: disminuyendo los tiempos de despeje de las faltas o aumentando los tiempos críticos de despeje de las mismas.

La disminución del tiempo de despeje de una falta precisa de protecciones, interruptores y circuitos de disparo de los mismos rápidos.

El aumento de los tiempos críticos de despeje de una falta se puede lograr por varios métodos: aumentando rápidamente la tensión de excitación tras la falta gracias a sistemas de excitación estáticos rápidos y de elevadas ganancias o disminuyendo la reactancia vista por el generador por utilización de transformadores de baja reactancia o condensadores serie [21].

También la reducción de la aceleración experimentada por el rotor del generador tras la falta aumenta los tiempos críticos de despeje. Dicha reducción se puede lograr reduciendo a su vez la potencia mecánica suministrada por la turbina por medio del cierre rápido de las válvulas de interceptación de las turbinas de vapor. De esta forma, durante un pequeño

intervalo de tiempo (del orden de uno o dos segundos) se anula la potencia suministrada por los cuerpos de media y baja presión de la turbina. Otra forma de reducir la aceleración experimentada por el rotor consiste en conectar al generador una carga artificial denominada resistencia de frenado.

Los métodos anteriormente citados no llevan asociada ni la pérdida de generación ni de carga. En sistemas donde el transporte de energía de un área a otra está limitado por el mantenimiento de la estabilidad del sistema en caso de una falta, una alternativa a la reducción del volumen de potencia transportada es la desconexión de generadores en el área exportadora cuando se produce la falta para evitar la pérdida de sincronismo. La caída de frecuencia debida a la pérdida de generación dará lugar al deslastre de carga. El deslastre de carga puede realizarse por protecciones de subfrecuencia o incluso de derivada de frecuencia [22].

10.8.2. Métodos de mejora de la estabilidad de pequeña perturbación

La mejora de la estabilidad de pequeña perturbación consiste en el aumento del amortiguamiento de las oscilaciones poco amortiguadas o incluso inestables de los rotores de los generadores. El aumento del amortiguamiento de las oscilaciones del rotor se lograría si se aplicara un par de frenado en los rotores de los generadores proporcional a la variación de la velocidad de los mismos. Sin embargo, la aplicación directa de un par de frenado al rotor de un generador no es posible. Existen varios dispositivos que de forma indirecta pueden lograr aplicar dicho par de frenado. Son los estabilizadores del sistema de potencia, los dispositivos FACTS y las estaciones convertidoras de los enlaces en corriente continua.

Los dispositivos más eficaces para mejora de la estabilidad de pequeña perturbación son los estabilizadores del sistema de potencia (denominados *Power System Stabilizers* en la literatura técnica en inglés) ya que actúan directamente sobre los generadores. Los estabilizadores del sistema de potencia son controles suplementarios de los sistemas de excitación. Modulan la tensión de consigna del regulador de tensión, y así modulan la tensión de excitación, y por tanto, la potencia eléctrica suministrada por el generador. El estabilizador tiene redes de compensación que logran modular la potencia eléctrica en fase a la variación de velocidad.

El diseño de estabilizadores del sistema de potencia ha sido un tema que ha atraído la atención de numerosos grupos e individuos en los ámbitos industrial y académico (véase por ejemplo [5], [13] y [23]). La Figura 10.27 compara la respuesta original del generador conectado a un nudo de potencia infinita considerado en la Sección 10.7 tras un escalón del 10 % en la consigna del regulador de tensión con la respuesta estando equipado con un estabilizador del sistema de potencia diseñado usando las sensibilidades del autovalor mecánico con relación a los parámetros del estabilizador [24]. Los parámetros del estabilizador son respectivamente $K_S = 1,99$ pu, $T_{S1} = T_{S3} = 0,17$ s, $T_{S2} = T_{S4} = 0,06$ s y $T_{S5} = 5$ s.

Los dispositivos FACTS son dispositivos electrónicos de potencia que han sido diseñados para hacer más flexible la operación de los sistemas de transporte en corriente alterna [25]. Toman su nombre del acrónimo de la expresión inglesa *Flexible AC Transmission Systems*. Los dispositivos FACTS se clasifican en tres grandes grupos: dispositivos paralelo, dispositivos serie y dispositivos mixtos. Entre los dispositivos paralelo se encuentran los compen-

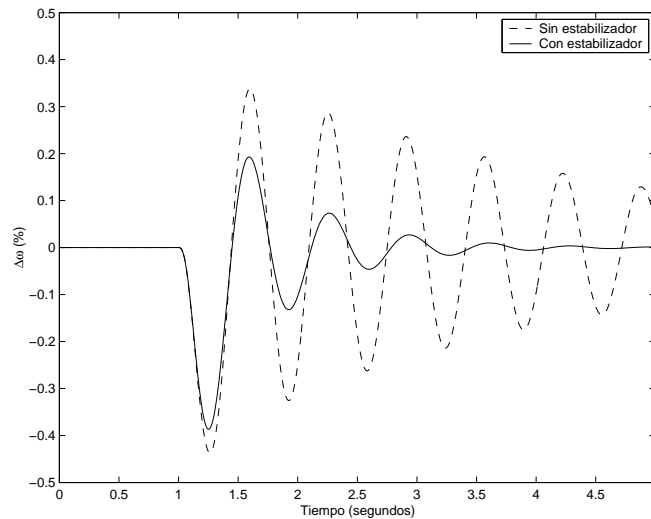


Figura 10.27. Variación de velocidad tras un escalón en la consigna del regulador de tensión.

sadores estáticos de potencia reactiva y los condensadores estáticos. Su misión es controlar la tensión en un nudo gracias al control de la susceptancia paralelo o de la corriente reactiva inyectada o absorbida. Ejemplos de dispositivos serie son el condensador serie controlado por tiristores y la fuente estática. El controlador unificado del flujo de potencia es un dispositivo mixto que incluye un condensador estático y una fuente serie estática acoplados.

Los dispositivos FACTS pueden contribuir al aumento del amortiguamiento de las oscilaciones modulando su variable de control y utilizando como variable de entrada alguna magnitud de sistema eléctrico que refleje las oscilaciones de los rotores de los generadores. Por ejemplo, un condensador estático podría contribuir al aumento del amortiguamiento de las oscilaciones modulando la corriente reactiva inyectada o absorbida y utilizando como variable de entrada la frecuencia del nudo o la potencia activa por una línea adyacente.

Las estaciones convertidoras de los enlaces en corriente continua pueden modular la potencia activa inyectada o absorbida y la potencia reactiva absorbida en los nudos terminales como medio para amortiguar las oscilaciones de los rotores.

10.9. Estabilidad de tensiones

Los grandes sistemas de transmisión fueron inicialmente diseñados y construidos con una capacidad significativamente superior a la que realmente se necesitaba al ponerlos en operación, con la intención de darles una larga vida útil, en vista de los altos costos de construcción de estos sistemas. Sin embargo, el gran crecimiento de la demanda de energía eléctrica, asociado a la muy limitada construcción de nuevos sistemas de transmisión, debido a los altos costos del terreno y leyes para la protección del medio ambiente, llevó hacia finales de los setenta, principios de los ochenta, a observar problemas de estabilidad serios y nunca antes vistos en varias redes eléctricas alrededor del mundo [26]. La mayoría de

estos problemas se han caracterizado por una caída de varios minutos de duración en las magnitudes de las tensiones en toda la red, que en muchos casos han resultado en colapsos completos del sistema. Debido a las características de este fenómeno, en un inicio se le dio el nombre de inestabilidad de tensión, aunque en realidad es un problema de estabilidad como cualquier otro, que no sólo envuelve tensiones y flujos de potencia reactiva, sino también ángulos y flujos de potencia activa, como se explica más adelante.

Debido a la novedad e importancia de este problema particular de estabilidad, un gran número de investigadores en todo el mundo han dedicado mucho esfuerzo y trabajo al estudio de este fenómeno en las últimas dos décadas. Es así que se pueden encontrar un sinnúmero de artículos en conferencias y revistas específicamente dedicados a la explicación y al estudio de este problema, así como también al desarrollo de herramientas de análisis para su aplicación en la planificación y la operación de redes de potencia. Varias conferencias importantes han estado específicamente dedicadas a la discusión de este problema de estabilidad [27, 28, 29]. Compendios de los resultados de muchos de estos estudios se pueden encontrar en varios informes técnicos de CIGRE y del IEEE [26, 30, 31, 32, 33]. Los libros [3, 4], escritos por autores conocidos en el área de análisis de estabilidad de sistemas de potencia, han sido dedicados exclusivamente a este tema, así como también capítulos en libros importantes de estabilidad como [5]. El IEEE ha preparado un informe completo en el que han participado los expertos más reconocidos del mundo en esta área particular de análisis de estabilidad, que presenta una visión global desde el punto de vista teórico y práctico del problema de estabilidad de tensión en sistemas de potencia [34].

En la actualidad, el análisis de estabilidad de tensiones ha alcanzado el nivel de madurez adecuado para incluirlo como una parte fundamental del estudio de estabilidad de sistemas de energía eléctrica. Esta sección está dedicada a la explicación detallada de este fenómeno, comenzando con definiciones básicas y las bases teóricas necesarias para poder entender y analizar el problema. La segunda parte se concentra en los aspectos prácticos del uso de estas teorías básicas para el análisis de estabilidad sistemas reales, y su aplicación en la planificación y operación de sistemas de energía eléctrica.

10.9.1. Definiciones básicas

Esta sección presenta las definiciones básicas que describen el significado de estabilidad de tensión en sistemas de energía eléctrica, desde el punto de vista de colapso de tensiones y considerando que el modelo de la red es un sistema no lineal. Todos estos conceptos fundamentales se ilustran usando varios ejemplos que pueden ser fácilmente reproducidos por el lector.

Estabilidad de tensión

En la literatura se pueden encontrar varias definiciones de lo que significa estabilidad, o inestabilidad como algunos autores prefieren llamarla, de tensión, por lo que se puede decir que actualmente no existe una definición “universalmente” aceptada. Un comité internacional de CIGRE y del IEEE trabaja actualmente sobre la actualización, unificación y clasificación de una serie de conceptos relacionados a la estabilidad de sistemas de energía eléctrica, incluyendo la estabilidad de tensión, para proponer definiciones que sean más

coherentes con aquellas usadas en las áreas de control y sistemas no lineales. Basado en estas discusiones y definiciones previas, estabilidad de tensión se la define en este libro como:

La capacidad de un sistema de alcanzar niveles de tensión fijos, mayores que cero, en todos sus nudos después de haber sufrido cualquier perturbación.

Se puede observar que sistemas con niveles permanentes de tensiones “bajos”, aunque no sean “adecuados” según el operador, son catalogados como estables de acuerdo a esta definición, lo cual está de acuerdo con definiciones de estabilidad en sistemas no lineales, donde un sistema se considera estable si alcanza un punto de equilibrio, o punto de operación fijo, después de haber sido perturbado; en la práctica se han observado sistemas eléctricos estables con niveles “inadecuadamente” bajos de tensión [26]. Sin embargo, sistemas eléctricos con niveles permanentes de tensión bajos, aunque sean estables, no son necesariamente convenientes, debido a los problemas que las tensiones bajas pueden causar especialmente en cargas, como es el caso de sobrecorrientes en motores de inducción. Obsérvese también que en esta definición las perturbaciones pueden ser de cualquier tipo: “grandes”, como en el caso de pérdidas de líneas de transporte, o “pequeñas”, como en el caso de incrementos graduales de carga. Inestabilidades de tensión resultan en un *colapso* de las tensiones en la red, lo que lleva a una pérdida parcial o total del sistema, dependiendo de las acciones de los dispositivos de protección del sistema y también del operador.

Sistemas que presentan problemas de estabilidad de ángulos, es decir, una pérdida de sincronismo entre los diversos generadores de la red, como se explica en la primera parte de este capítulo, también resultan eventualmente en problemas de estabilidad de tensión y, viceversa, sistemas que presentan un colapso de tensión llevan eventualmente a una separación angular de sus generadores. En el caso de problemas de estabilidad de tensión, el colapso de tensión ocurre “antes” que la separación de ángulos, y lo opuesto sucede en el caso de problemas de estabilidad de ángulos. Las razones para estos dos problemas de estabilidad son completamente distintas, ya que inestabilidades de tensión se deben principalmente a la ausencia total de un punto de equilibrio después de la perturbación, como se explica más adelante, mientras que inestabilidades de ángulo se deben fundamentalmente a la ausencia de un par de sincronismo entre diversos generadores, como se ha explicado previamente en este capítulo.

El concepto de estabilidad de tensión fue inicialmente usado en el diseño y análisis de sistemas de control para generadores y sistemas de transmisión en corriente continua (*High Voltage Direct Current*, HVDC). En estos casos la idea es estudiar el efecto de variaciones relativamente rápidas de tensión en el control y en la estabilidad del sistema. Por ejemplo, en [35] se analizan los problemas de control y estabilidad en un sistema HVDC cuando se efectúa la conexión de los mismos a redes eléctricas con escasez de potencia reactiva. De forma más precisa, se refieren los problemas que pueden aparecer en los sistemas HVDC, sobre todo cuando funcionan como inversores, ante variaciones de tensión que dan lugar a fallos de conmutación en los tiristores y por tanto a la suspensión temporal (de menos de un ciclo) de transmisión de potencia. En el caso de reguladores de tensión de generadores, los estudios de estabilidad de tensión se concentran en analizar la efectividad de estos controles para mantener las variaciones de tensión en los terminales del generador a un “mínimo”

y en el efecto que estos reguladores tienen en la estabilidad del sistema, considerando la capacidad de corriente de campo y de estátor del generador, o sea, la capacidad de generar potencia reactiva del generador, como se describen en detalle en [5].

El problema de estabilidad de tensión en la actualidad es fundamentalmente distinto de como se lo veía anteriormente. Las diferencias básicas están en que la estabilidad de tensión se la analiza ahora desde el punto de vista de estabilidad global del sistema, en vez de un elemento en particular, como es el caso del regulador de tensión en un generador o los controles de un sistema de transmisión HVDC, y también en las escalas de tiempo usadas para el análisis, ya que no es de interés si los transitorios de tensión son grandes o pequeños, sino si las tensiones llegan a un punto estable de operación después de diversas perturbaciones. Es por esto que el problema de estabilidad de tensión se estudia fundamentalmente a través del estudio de estabilidad de los puntos de equilibrio de la red después de las perturbaciones, como se explica con más detalle en la siguiente sección.

Sistemas de energía eléctrica como sistemas no lineales

Como se explica en el Capítulo 2 y en la primera parte de este capítulo, los sistemas de energía eléctrica se estudian típicamente en el dominio de la frecuencia usando modelos quasi estacionarios. Así, para estudios de estabilidad, el sistema completo se representa con un sistema de ecuaciones diferenciales-algebraicas:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= f(x, y, p, \lambda) \\ 0 &= g(x, y, p, \lambda)\end{aligned}\tag{10.111}$$

donde

- $x \in \mathcal{X} \subseteq \mathbb{R}^n$ corresponde a las variables de estado de los modelos de los diversos elementos del sistema, como es el ángulo interno y la velocidad angular del generador o las variables de control del sistema, y que se encuentran asociadas a las ecuaciones diferenciales representadas por la función no lineal $f : \mathcal{X} \times \mathcal{Y} \times \mathcal{P} \times \Lambda \mapsto \mathcal{X}$.
- $y \in \mathcal{Y} \subseteq \mathbb{R}^m$ representa las variable algebraicas, como las tensiones y ángulos en la mayoría de nudos de carga, asociadas a las ecuaciones no lineales $g : \mathcal{X} \times \mathcal{Y} \times \mathcal{P} \times \Lambda \mapsto \mathcal{Y}$ que resultan típicamente de la omisión de las características dinámicas de ciertas variables en los modelos de carga.
- $p \in \mathcal{P} \subseteq \mathbb{R}^k$ corresponde a los parámetros de control del sistema sobre los que operadores pueden actuar directamente, como son los niveles de referencia de la tensión en los reguladores de los generadores.
- $\lambda \in \Lambda \subseteq \mathbb{R}^\ell$ representa parámetros en el sistema usados para modelar cambios en la red sobre los que no se tiene control directo, como por ejemplo las variaciones de carga durante el día.

El modelo no lineal (10.111) sólo tiene soluciones de carácter físico en el caso de que las ecuaciones algebraicas puedan ser “invertidas” a lo largo de las trayectorias generadas por las ecuaciones diferenciales correspondientes [36]; esto requiere que se pueda invertir

el jacobiano $D_y g(\cdot) = \partial g / \partial y(\cdot)$ evaluado a lo largo de estas trayectorias. En este caso, el sistema (10.111) puede ser reducido a un sistema no lineal de ecuaciones ordinarias diferenciales usando el teorema de funciones implícitas:

$$\begin{aligned} y = G(x, p, \lambda) &\Rightarrow \dot{x} = f(x, G(x, p, \lambda), p, \lambda) \\ &\dot{x} = s(x, p, \lambda) \end{aligned} \quad (10.112)$$

El sistema (10.112) es fundamentalmente un sistema no lineal autónomo, con soluciones únicas asociadas a las condiciones iniciales y valores de los parámetros p y λ (esto último se puede garantizar si el jacobiano $D_x s(\cdot) = \partial s / \partial x(\cdot)$ existe y es continuo [37], que es el caso general en los modelos típicamente usados para representar sistemas eléctricos).

En el Ejemplo 10.9 se introduce un modelo dinámico simple de un generador y una carga compensada conectados por medio de una línea de transporte, que es usado a lo largo de este capítulo para ilustrar las diferencias entre la representación no lineal del sistema usando ecuaciones puramente diferenciales o cuando se incluyen las ecuaciones algebraicas. En este ejemplo también se introduce un modelo simple del regulador de tensión del generador para ilustrar el efecto que los límites de este controlador tienen en el sistema.

Ejemplo 10.9:

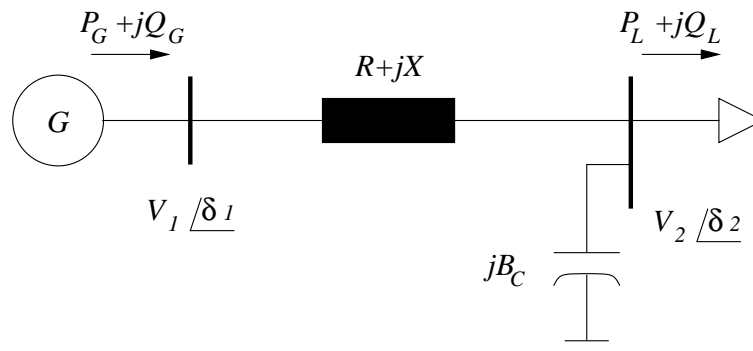


Figura 10.28. Sistema de prueba generador-carga.

El sistema de la Figura 10.28 se puede representar usando las ecuaciones cuasi estacionarias por unidad (p.u.) correspondientes a un modelo de segundo orden del generador síncrono y a una carga dinámica con dependencia en la frecuencia y la tensión en bornes. Estas ecuaciones producen el modelo no lineal de ecuaciones diferenciales ordinarias:

$$\begin{aligned} \dot{\omega} &= \frac{1}{M} [P_m - P_G(\delta, V_1, V_2) - D_G \omega] \\ \dot{\delta} &= \omega - \frac{1}{D_L} [P_L(\delta, V_1, V_2) - P_d] \\ \dot{V}_2 &= \frac{1}{\tau} [Q_L(\delta, V_1, V_2) - Q_d] \end{aligned} \quad (10.113)$$

donde

$$\begin{aligned}\delta &= \delta_1 - \delta_2 \\ P_G(\delta, V_1, V_2) &= V_1^2 G - V_1 V_2 (G \cos \delta - B \sin \delta) \\ P_L(\delta, V_1, V_2) &= -V_2^2 G + V_1 V_2 (G \cos \delta + B \sin \delta) \\ Q_L(\delta, V_1, V_2) &= -V_2^2 (B - B_C) - V_1 V_2 (G \sin \delta - B \cos \delta) \\ G &= \frac{R}{R^2 + X^2} \\ B &= \frac{X}{R^2 + X^2}\end{aligned}$$

Se considera la expresión de la potencia reactiva generada:

$$Q_G = V_1^2 B - V_1 V_2 (G \sin \delta + B \cos \delta)$$

para introducir los límites de potencia reactiva en el control de la tensión del generador, de tal forma que si $Q^{\min} \leq Q_G \leq Q^{\max}$, la tensión de barra del generador V_1 se considera constante de valor V_1^{esp} para simular la presencia de un regulador de tensión en el generador (se ignora la caída de tensión en estado estable del regulador en este ejemplo). Cuando se alcanza el límite máximo o mínimo de Q_G , V_1 es libre de variar mientras que Q_G se mantiene a su valor límite, modelando así la pérdida de control de tensión del regulador cuando se alcanzan los límites de potencia reactiva del generador. La recuperación del control de tensión se modela asumiendo que apenas V_1 retorna a su valor V_1^{esp} , la tensión es regulada nuevamente, dejando variar Q_G . Este modelo corresponde a un regulador “instantáneo” con límites dinámicos. Obsérvese que en este modelo se ignora las constantes de tiempo del regulador para reducir el número de ecuaciones diferenciales, sin embargo esta aproximación no introduce mayor error si se considera que estas constantes son significativamente menores que las del resto del sistema.

En las ecuaciones (10.113), las variables M y D_G corresponden a la inercia y al factor de amortiguamiento del generador, mientras que D_L y τ representan las constantes de tiempo del modelo dinámico de frecuencia y tensión de la carga, respectivamente. La demanda en estado estable de la carga se la representa por medio de los parámetros P_d y Q_d ; para representar una carga de factor de potencia constante, se puede asumir que $Q_d = kP_d$, donde k es una constante definida por el valor de factor de potencia escogido. La susceptancia B_C representa el nivel de compensación capacitiva shunt en la carga.

Este modelo puede ser representado en términos de las ecuaciones (10.111) considerando que:

$$x = \begin{bmatrix} \omega \\ \delta \\ V_2 \end{bmatrix} \quad y = \begin{cases} Q_G & \text{si } Q^{\min} \leq Q_G \leq Q^{\max} \\ V_1 & \text{si } V_1 \neq V_1^{\text{esp}} \end{cases} \quad p = \begin{bmatrix} V_1^{\text{esp}} \\ B_C \end{bmatrix} \quad \lambda = \begin{bmatrix} P_d \\ Q_d \end{bmatrix}$$

lo que resulta en:

$$f(x, y, p, \lambda) = \begin{bmatrix} \frac{1}{M} [P_m - V_1^2 G - V_1 V_2 (G \cos \delta - B \sin \delta) - D_G \omega] \\ \omega - \frac{1}{D_L} [-V_2^2 G + V_1 V_2 (G \cos \delta + B \sin \delta) - P_d] \\ \frac{1}{\tau} [-V_2^2 (B - B_C) - V_1 V_2 (G \sin \delta - B \cos \delta) - Q_d] \end{bmatrix}$$

$$g(x, y, p, \lambda) = Q_G - V_1^2 B + V_1 V_2 (G \sin \delta + B \cos \delta)$$

En este caso, la variable algebraica y asociada a la ecuación algebraica $g(\cdot)$ se la puede fácilmente representar en función del resto de variables y parámetros del sistema. Así, si $y = Q_G$, se tiene que:

$$y = G(x, p, \lambda) = V_1^{\text{esp}2} B + V_1^{\text{esp}} V_2 (G \sin \delta + B \cos \delta)$$

mientras que si $y = V_1$, se tiene que:

$$y = G(x, p, \lambda) = \frac{V_2(G \cos \delta + B \sin \delta)}{2B} + \sqrt{\frac{V_2^2(G \cos \delta + B \sin \delta)^2}{4B^2} + \frac{Q^{\max/\min}}{B}}$$

Esto claramente garantiza que este sistema de ecuaciones diferenciales-algebraicas se pueden transformar sin problema a un sistema no lineal de ecuaciones diferenciales ordinarias.

Si se asume que el valor de la constante de tiempo τ , asociado a la tensión en la carga V_2 , es pequeño ($\tau \approx 0$), como suele ser el caso, la tercera ecuación diferencial se transforma en una ecuación algebraica. En este caso se tiene que:

$$x = \begin{bmatrix} \omega \\ \delta \end{bmatrix} \quad y = \begin{cases} [V_2 \ Q_G]^T \\ [V_2 \ V_1]^T \end{cases}$$

Lo que corresponde a:

$$f(x, y, p, \lambda) = \begin{bmatrix} \frac{1}{M}[P_m - V_1^2 G - V_1 V_2(G \cos \delta - B \sin \delta) - D_G \omega] \\ \omega - \frac{1}{D_L}[-V_2^2 G + V_1 V_2(G \cos \delta + B \sin \delta) - P_d] \end{bmatrix} \quad (10.114)$$

$$g(x, y, p, \lambda) = \begin{bmatrix} Q_d + V_2^2(B - B_C) + V_1 V_2(G \cos \delta - B \sin \delta) \\ Q_G - V_1^2 B + V_1 V_2(G \cos \delta + B \sin \delta) \end{bmatrix}$$

En este caso se debe garantizar que el jacobiano:

$$D_y g(x, y, p, \lambda) = \begin{bmatrix} 2V_2(B - B_C) + V_1(G \cos \delta - B \sin \delta) & \begin{cases} 0 \\ V_2(G \cos \delta - B \sin \delta) \end{cases} \\ V_1(G \cos \delta + B \sin \delta) & \begin{cases} 1 \\ -2V_1 B + V_2(G \cos \delta + B \sin \delta) \end{cases} \end{bmatrix}$$

se pueda invertir para poder estudiar la estabilidad del sistema. En este ejemplo simple es factible demostrar, basados en las definiciones correspondientes a $g(x, y, p, \lambda) = 0$, que el determinante de esta matriz es cero para los siguientes valores de la tensión V_2 :

$$\det \{D_y g(x, y, p, \lambda)\} = 0 \quad \Rightarrow \quad V_2 = \begin{cases} \sqrt{\frac{Q_d}{B - B_C}} & \text{para } y = [V_2 \ Q_G]^T \\ \sqrt{\frac{V_1^2 B Q_d}{(B - B_C)(Q^{\max/\min} - V_1^2 B)}} & \text{para } y = [V_2 \ V_1]^T \end{cases}$$

Obsérvese que en el caso de que el generador opere dentro de sus límites de potencia reactiva, solamente existe un valor de tensión en la carga donde el modelo del sistema no está bien definido; sin embargo, cuando se pierde el control de la tensión a los terminales del generador, estos puntos son múltiples y dependen del resto de las tensiones del sistema, lo cual es el caso típico en la práctica.

Los puntos de equilibrio (x_o, y_o) del sistema (10.111) corresponden a las soluciones de las ecuaciones diferenciales-algebraicas con $\dot{x} = 0$. Así, dados los valores de los parámetros p y λ , (x_o, y_o) están definidos por las soluciones de las ecuaciones no lineales:

$$\begin{aligned} f(x_o, y_o, p, \lambda) &= 0 \\ g(x_o, y_o, p, \lambda) &= 0 \end{aligned} \quad (10.115)$$

El análisis de la estabilidad de estos puntos de equilibrios es importante en el estudio de la estabilidad de tensión, en particular interesa el efecto que variaciones de los parámetros p , y especialmente λ , tienen en la estabilidad de estos puntos. La estabilidad del sistema en el equilibrio está definida por la linealización de las ecuaciones (10.111) alrededor del punto de equilibrio (x_o, y_o) , que fundamentalmente se reduce al análisis de los autovalores de la matriz de estado del sistema (10.112) [36], como se explica en detalle en la Sección 10.5:

$$\begin{aligned} A &= D_x s|_o \\ &= D_x f|_o - D_y f|_o D_y g|_o^{-1} D_x g|_o \end{aligned} \quad (10.116)$$

donde $D_x s|_o = D_x s(x_o, y_o, p, \lambda)$, y lo mismo para los otros jacobianos. (Aquí se asume que el jacobiano $D_y g|_o^{-1}$ no es singular, como ya se había explicado con anterioridad, y por tanto es invertible.)

Es importante mencionar que los puntos de equilibrio del sistema (10.111) son múltiples, ya que las ecuaciones (10.115) son no lineales y por tanto presentan múltiples soluciones. Dependiendo de los autovalores asociados con los puntos de equilibrio, estos puntos pueden ser estables o inestables; sin embargo, desde el punto de vista de operación, uno sólo está interesado en un único punto de equilibrio estable. Bajo ciertas condiciones, estos puntos corresponden a las soluciones de los flujos de potencia [38]. Todo esto se puede ver claramente en el Ejemplo 10.10.

Ejemplo 10.10:

Para el sistema descrito en el Ejemplo 10.9, los puntos de equilibrio están definidos por las ecuaciones

$$\begin{aligned} P_d &= -V_{2o}^2 G + V_{1o} V_{2o} (G \cos \delta_o + B \sin \delta_o) \\ Q_d &= -V_{2o}^2 (B - B_C) - V_{1o} V_{2o} (G \sin \delta_o - B \cos \delta_o) \\ P_m &= V_{1o}^2 G - V_{1o} V_{2o} (G \cos \delta_o - B \sin \delta_o) \\ Q_{Go} &= V_{1o}^2 B - V_{1o} V_{2o} (G \sin \delta_o + B \cos \delta_o) \end{aligned} \quad (10.117)$$

independientemente del modelo de carga que se use, ya que estas ecuaciones fundamentalmente generan las ecuaciones de equilibrio (10.115) para ambos modelos. Estas ecuaciones son básicamente las ecuaciones de flujo de cargas, donde las dos primeras corresponden a la carga definida por las potencias P_d y Q_d , y determinan los valores al punto de equilibrio V_{2o} y δ_o . Las dos últimas ecuaciones corresponden al generador y sus correspondientes variables de potencia P_m y Q_G , y definen respectivamente los valores de las pérdidas, o sea, P_m , y el valor de Q_{Go} , si $Q^{\min} < Q_{Go} < Q^{\max}$ ($V_1 = V_1^{\text{esp}}$), o el valor de V_{1o} para $Q_{Go} = Q^{\min/\max}$.

Se puede observar que estas ecuaciones son básicamente cuadráticas, ya que

$$\begin{aligned} V_{2r} &= V_{2o} \cos \delta_o \\ V_{2i} &= V_{2o} \sin \delta_o \end{aligned}$$

Por tanto, para un valor dado de P_d y Q_d , se pueden encontrar dos valores de V_{2o} y δ_o , si se conoce el valor de V_{1o} . Lo mismo se puede decir de P_m y Q_{Go} , o V_{1o} , si es que el regulador de tensión del generador está o no dentro de sus límites.

Por ejemplo, para valores p.u. “típicos”: $G = 0$, $B = 10$ ($X = 0,1$), $B_C = 0$, $P_m = P_d = 1$ y $Q_d = 0,5$ (factor de potencia 0.9), y $V_{1o} = V_1^{\text{esp}} = 1$, se tiene que:

$$\begin{aligned} 1 &= 10 V_{2i} \Rightarrow V_{2i} = 0,1 \\ 0,5 &= -10 (V_{2r}^2 + V_{2i}^2) + 10V_{2r} \Rightarrow V_{2r} = \begin{cases} 0,936 \\ 0,064 \end{cases} \end{aligned}$$

Lo cual corresponde a

$$V_{2o} = \begin{cases} 0,941 \\ 0,119 \end{cases} \quad \delta_o = \begin{cases} 6,10^\circ \\ 57,38^\circ \end{cases} \quad Q_{Go} = \begin{cases} 0,64 \\ 9,36 \end{cases}$$

Si se asume que el límite máximo del regulador es $Q^{\text{max}} = 1$, el segundo punto de equilibrio cambia, ya que $Q_{Go_2} = 9,36 > Q^{\text{max}}$ (el primer punto de equilibrio no se ve afectado). En este caso, para $Q_{Go_2} = Q^{\text{max}} = 1$, las ecuaciones y correspondiente soluciones que definen el segundo punto de equilibrio son:

$$\left. \begin{aligned} 1 &= 10 V_{2i} \\ 0,5 &= -10 (V_{2r_2}^2 + V_{2i}^2) + 10 V_{1o_2} V_{2r_2} \\ 1 &= 10 V_{1o_2}^2 - 10 V_{1o_2} V_{2r_2} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \begin{cases} V_{1o_2} = 0,5 \\ V_{2o_2} = 0,316 \\ \delta_{o_2} = 18,43^\circ \end{cases}$$

Nótese que para todos estos puntos de equilibrio $\omega_o = 0$. Para estudiar la estabilidad de estos puntos de equilibrio, se requiere de los jacobianos y la matriz de estado del sistema, que para $\tau = 0$ en las ecuaciones (10.114) (se ignora la respuesta dinámica de V_2) corresponden a:

$$\begin{aligned} D_x f|_o &= \begin{bmatrix} -\frac{D_G}{M} & -\frac{1}{M}(V_{1o}V_{2o}(G \sin \delta_o + B \cos \delta_o)) \\ 1 & -\frac{1}{D_L}V_{1o}V_{2o}(-G \sin \delta_o + B \cos \delta_o) \end{bmatrix} & (10.118) \\ D_y f|_o &= \begin{bmatrix} \frac{1}{M}V_{1o}(G \cos \delta_o - B \sin \delta_o) & \begin{cases} 0 \\ -\frac{1}{M}[2GV_{1o} - V_{2o}(G \cos \delta_o - B \sin \delta_o)] \end{cases} \\ -\frac{1}{D_L}[-2GV_{2o} + V_{1o}(G \cos \delta_o + B \sin \delta_o)] & \begin{cases} 0 \\ -V_{2o}/D_L(G \cos \delta_o + B \sin \delta_o) \end{cases} \end{bmatrix} \\ D_x g|_o &= \begin{bmatrix} 0 & V_{1o}V_{2o}(G \cos \delta + B \sin \delta) \\ 0 & V_{1o}V_{2o}(G \cos \delta - B \sin \delta) \end{bmatrix} \\ D_y g|_o &= \begin{bmatrix} 2V_{2o}(B - B_C) + V_{1o}(G \sin \delta - B \cos \delta) & \begin{cases} 0 \\ V_{2o}(G \sin \delta - B \cos \delta) \end{cases} \\ V_{1o}(G \sin \delta + B \cos \delta) & \begin{cases} 1 \\ -2V_{1o}B + V_{2o}(G \sin \delta + B \cos \delta) \end{cases} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Para valores “típicos” de la inercia y de los factores de amortiguamiento $M_G = D_L = 0,1$ y $D_G = 0,01$, los autovalores μ de las matrices de estado correspondientes a los distintos puntos de equilibrio previamente obtenidos son:

$$\left. \begin{aligned} x_{o_1} &= \begin{bmatrix} \omega_{o_1} \\ \delta_{o_1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 6,10^\circ \end{bmatrix} \\ y_{o_1} &= \begin{bmatrix} V_{2o_1} \\ Q_{Go_1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,941 \\ 0,64 \end{bmatrix} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \mu(A_1) = \begin{bmatrix} -1,1122 \\ -91,3807 \end{bmatrix} \Rightarrow \text{estable}$$

$$\begin{aligned}
 x_{o_2} = \begin{bmatrix} \omega_{o_2} \\ \delta_{o_2} \end{bmatrix} &= \left\{ \begin{array}{l} \begin{bmatrix} 0 \\ 57,34^\circ \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} 0 \\ 18,43^\circ \end{bmatrix} \end{array} \right\} \\
 y_{o_2} = \begin{cases} \begin{bmatrix} V_{2o_2} \\ Q_{Go_2} \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} V_{2o_2} \\ V_{1o_2} \end{bmatrix} \end{cases} &= \begin{cases} \begin{bmatrix} 0,119 \\ 9,36 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} 0,5 \\ 0,632 \end{bmatrix} \end{cases}
 \end{aligned} \Rightarrow \mu(A_2) = \begin{cases} \begin{bmatrix} -1,1342 \\ -33,2441 \end{bmatrix} \Rightarrow \text{estable} \\ \begin{bmatrix} -1,0892 \\ 100,9254 \end{bmatrix} \Rightarrow \text{inestable} \end{cases}$$

Nótese que el primer punto de equilibrio, que corresponde al punto “clásico” de operación del sistema, es estable, como se esperaba. Sin embargo, el segundo punto de equilibrio, que se esperaría fuera inestable con o sin límites, es estable en el caso sin límites. Esto último se debe a que el modelo presenta una singularidad de $D_y g(\cdot)$ para ciertos valores de tensión, como se comentaba en el Ejemplo 10.9. El significado de esta singularidad se discute con más detalle en la siguiente sección.

Si se escoge un valor de la constante de tiempo τ distinto de cero, como por ejemplo $\tau = 0,001$ (esto implica una respuesta dinámica “rápida” de la tensión en la carga), se obtiene los siguientes autovalores para los mismos puntos de equilibrio, ya que estos no cambian:

$$\begin{aligned}
 x_{o_1} = \begin{bmatrix} \omega_{o_1} \\ \delta_{o_1} \\ V_{2o_1} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 \\ 6,10^\circ \\ 0,941 \end{bmatrix} \\
 y_{o_1} &= Q_{Go_1} = 0,64
 \end{aligned} \Rightarrow \mu(A_1) = \begin{bmatrix} -1,1122 \\ -91,3683 \\ -8882,20 \end{bmatrix} \Rightarrow \text{estable}$$

$$\begin{aligned}
 x_{o_2} = \begin{bmatrix} \omega_{o_2} \\ \delta_{o_2} \\ V_{2o_2} \end{bmatrix} &= \left\{ \begin{array}{l} \begin{bmatrix} 0 \\ 57,34^\circ \\ 0,119 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} 0 \\ 18,43^\circ \\ 0,5 \end{bmatrix} \end{array} \right\} \\
 y_{o_2} = \begin{cases} Q_{Go_2} = 9,36 \\ V_{1o_2} = 0,632 \end{cases}
 \end{aligned} \Rightarrow \mu(A_2) = \begin{cases} \begin{bmatrix} -1,1342 \\ -32,9432 \\ 3048,5 \end{bmatrix} \Rightarrow \text{inestable} \\ \begin{bmatrix} -1,0893 \\ -506,9739 \\ 79,6841 \end{bmatrix} \Rightarrow \text{inestable} \end{cases}$$

Estos resultados son más consistentes con el comportamiento que se esperaría de un sistema no lineal como el de este ejemplo, ya que un punto de equilibrio es estable y el otro es inestable.

Para el modelo usado en este ejemplo se puede observar que:

- Para $G \neq 0$, sólo en el punto de equilibrio estable se tiene que $\omega_o = 0$. Otros puntos de equilibrio presentan valores de $\omega_o \neq 0$, al menos que se asuma que la potencia mecánica P_m varíe para suplir las pérdidas en el sistema (como en el caso de un gobernador de frecuencia).
- Variando los valores de los parámetros $P_d, Q_d, G, B, B_C, V_1^{\text{esp}}$ y $Q^{\text{max/min}}$ varían los puntos de equilibrio y sus características de estabilidad. El estudio de la estabilidad de los puntos de equilibrio con respecto a variaciones de diversos parámetros en un sistema no lineal y el efecto que esto tiene en la estabilidad global del sistema es fundamentalmente lo que se conoce como análisis de bifurcación.

- El modelo que considera variaciones dinámicas de tensión en la carga es más “apropiado” desde el punto de vista de sistemas no lineales para modelar el sistema.

10.9.2. Bifurcaciones en sistemas de energía eléctrica

Sistemas de potencia, que como se indicaba con anterioridad, se modelan por medio de ecuaciones diferenciales-algebraicas, presentan cambios de estabilidad cuando ciertos parámetros del sistema varían, como cualquier otro sistema no lineal. Por ejemplo, se ha observado que a medida que la carga (parámetro) aumenta a lo largo del día, el sistema tiende a ser más vulnerable a pequeñas contingencias, como por ejemplo la apertura de una línea de reparto, llegando en ciertos casos al colapso o a la aparición de oscilaciones.

El estudio de los cambios en la estabilidad con respecto a la variación de uno o varios parámetros del sistema se hace a través de la teoría de bifurcación [39, 40]. Una parte de esta teoría se concentra en el estudio de los cambios de estabilidad en los puntos de equilibrio cuando ciertos parámetros, los cuales los llamaremos aquí parámetros de bifurcación, varían “lentamente”. Así, a los puntos de equilibrio donde la estabilidad de estos equilibrios cambia significativamente, por ejemplo de estable a inestable, se conocen como puntos de “bifurcación”. Esto es importante desde el punto de vista práctico en sistemas de energía eléctrica, ya que se ha observado que ciertos problemas de estabilidad se pueden analizar a través del estudio de los puntos de bifurcación del sistema con respecto a variaciones de algunos parámetros en el sistema, en particular la carga [34]. Por ejemplo, el problema de colapso de tensión se puede asociar directamente con bifurcaciones silla y límite [34]; oscilaciones de tensión y potencia se puede asociar con bifurcaciones Hopf [41, 42].

En esta sección se presentan las definiciones y principales características de ciertas bifurcaciones que son relevantes en el análisis de estabilidad de tensión en sistemas de energía eléctrica. También se discuten en detalle algunos ejemplos para ilustrar claramente los diversos conceptos y demostrar el efecto de ciertas bifurcaciones en la estabilidad del sistema.

Bifurcaciones silla

Las características de estas bifurcaciones son las siguientes [39, 40]:

- Son de “co-dimensión” 1, lo que quiere decir que se las observa en sistemas no lineales en los que al menos un parámetro varía.
- Son genéricas, lo que significa que son “muy probables” de ocurrir en sistemas lineales. En otras palabras, el sistema no necesita de cierta “simetría” para que ocurran.
- Son puntos de equilibrio del sistema. Esto es, para el modelo diferencial-algebraico del sistema, el punto de bifurcación (x_o, y_o, p, λ_o) , para ciertos valores de los parámetros de bifurcación $\lambda = \lambda_o$, y dados los valores de los parámetros de control p , cumple con

$$[f(x_o, y_o, p, \lambda_o) \ g(x_o, y_o, p, \lambda_o)]^T = F(z_o, p, \lambda_o) = 0$$

donde $F(\cdot) = [f(\cdot) \ g(\cdot)]^T$, y $z = [x \ y]^T$.

- En el punto de bifurcación, la matriz de estado A del sistema presenta un autovalor único igual a cero con autovectores, derecho v e izquierdo w , únicos. En términos matemáticos, esto quiere decir que $A v = A^T w = 0$, lo que es equivalente, si $D_y g|_o$ no es singular, a [38]:

$$\begin{bmatrix} D_x f|_o & D_y f|_o \\ D_x g|_o & D_y g|_o \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_f \\ v_g \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} D_x f|_o & D_y f|_o \\ D_x g|_o & D_y g|_o \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} w_f \\ w_g \end{bmatrix} = 0 \quad (10.119)$$

$$\Leftrightarrow D_z F|_o \hat{v} = D_z^T F|_o \hat{w} = 0$$

- Al punto de bifurcación, el sistema cumple con ciertas condiciones de “transversalidad”, que en términos prácticos básicamente se traducen en dos puntos de equilibrio del sistema que convergen en forma cuadrática hacia un solo punto de bifurcación silla, donde el jacobiano de las ecuaciones de equilibrio es singular, para después desaparecer localmente a medida de que los parámetros de bifurcación λ cambian lentamente. Este fenómeno se ilustra en la Figura 10.29.

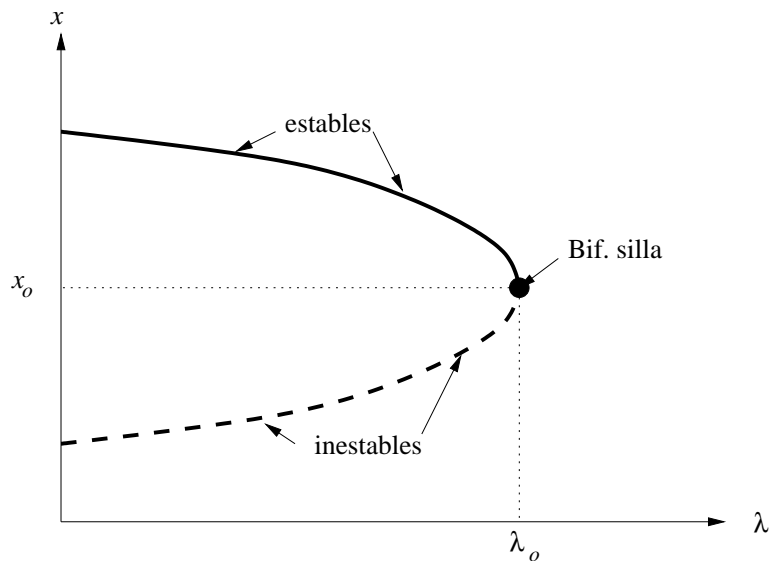


Figura 10.29. Diagrama de puntos de equilibrio para una bifurcación silla típica.

La definición de “lentamente” corresponde a cambios en λ suficientemente lentos como para permitir que el sistema se mueva de un equilibrio a otro a medida que estos parámetros cambian; durante este proceso, los parámetros de control p permanecen fijos. Esto permite estudiar estas bifurcaciones simplemente analizando los cambios en los equilibrios del sistema con respecto a cambios en λ .

La desaparición local de los puntos de equilibrio resulta en cambios globales de estabilidad de sistema. En particular, si el punto de equilibrio estable en el que el sistema se encuentra desaparece, el sistema se “colapsa”, que es el caso típico de colapso de tensión en sistemas de potencia. El siguiente ejemplo ilustra claramente todos estos conceptos.

Ejemplo 10.11:

Para el sistema generador-carga de los Ejemplos 10.9 y 10.10, ignorando los límites de potencia reactiva en el generador, las ecuaciones diferenciales del sistema para los valores p.u. “típicos” $R = 0$, $M = D_L = 0,1$, $D_G = 0,01$, $\tau = 0,001$, $P_d = P_m = 1 + \Delta P_d$ y factor de potencia en la carga constante de 0.9 ($Q_d = 0,5P_d$) son:

$$\begin{aligned}\dot{\omega} &= 10(1 + \Delta P_d - BV_1V_2 \sin \delta - 0,01\omega) \\ \dot{\delta} &= \omega - 10(BV_1V_2 \sin \delta - 1 - \Delta P_d) \\ \dot{V}_2 &= 1000[-(B - B_C)V_2^2 + BV_1V_2 \cos \delta - 0,5 - 0,5\Delta P_d]\end{aligned}\tag{10.120}$$

Se escogen dos valores p.u. de $B = 1/X$: $B = 10$ y $B = 5$, para representar en este ejemplo el efecto de una contingencia en el sistema de transmisión, ya que mientras más pequeño es este valor (mayor el valor de X), menor es la capacidad de transmisión del sistema. En este caso se tiene que:

$$x = \begin{bmatrix} \omega \\ \delta \\ V_2 \end{bmatrix} \quad p = \begin{bmatrix} V_1 \\ B_C \end{bmatrix} \quad \lambda = \Delta P_d$$

Las ecuaciones que definen los puntos de equilibrio de (10.120) para un valor dado de los parámetros de control $p = [V_1 \ B_C]^T = [1 \ 0]^T$ (sin compensación shunt) son:

$$\begin{aligned}1 + \Delta P_d - BV_2 \sin \delta &= 0 \\ -BV_2^2 + BV_2 \cos \delta - 0,5 - 0,5\Delta P_d &= 0\end{aligned}$$

Estas ecuaciones son fundamentalmente cuadráticas, como se demuestra en el Ejemplo 10.10, por lo que generan dos soluciones para cada valor dado de ΔP_d . Todas las posibles soluciones de estas ecuaciones con respecto a variaciones en el valor de ΔP_d , para los dos valores escogidos de B , se las puede observar en los diagramas de bifurcación de la Figura 10.30. Nótese que existe un valor “máximo” de carga P_{do} para ambos valores de B :

$$\begin{aligned}B = 1/0,1 = 10 &\quad \Rightarrow \quad P_{do} = 3,09 \\ B = 1/0,2 = 5 &\quad \Rightarrow \quad P_{do} = 1,55\end{aligned}$$

Estos puntos se conocen como puntos de máxima “cargabilidad” del sistema, y en este caso corresponden a una bifurcación silla, ya que la matriz de estado de las ecuaciones (10.120) es singular; todas las otras condiciones de transversalidad de una bifurcación de silla también se cumplen en este caso. Las ecuaciones del flujo de cargas para este ejemplo presentan un jacobiano singular en los puntos de bifurcación, lo cual no es siempre el caso, debido a las diferencias entre las ecuaciones dinámicas y estáticas de los modelos típicamente usados en la práctica.

Si el punto de operación del sistema corresponde al nivel de carga $P_d = 1,6$, como se indica en la Figura 10.30, se puede observar que en el caso de la contingencia descrita, el sistema no presenta un punto de equilibrio y, por tanto, pierde estabilidad a través de un colapso de tensión. Este fenómeno se ilustra en los diagramas de tiempo representados en la Figura 10.31, donde la contingencia ocurre a $t = 0,5$ s; nótese como la frecuencia del sistema se incrementa y el sistema pierde estabilidad como resultado del colapso de la tensión.

Si se introduce una compensación shunt $B_C = 1,0$ p.u. ($Q_C = 100$ Mvar) para el sistema bajo contingencia, se obtienen los diagramas de bifurcación de la Figura 10.32. Se puede observar que aunque el nivel de máxima cargabilidad del sistema es todavía bajo ($P_{do} = 1,93$), existe un punto

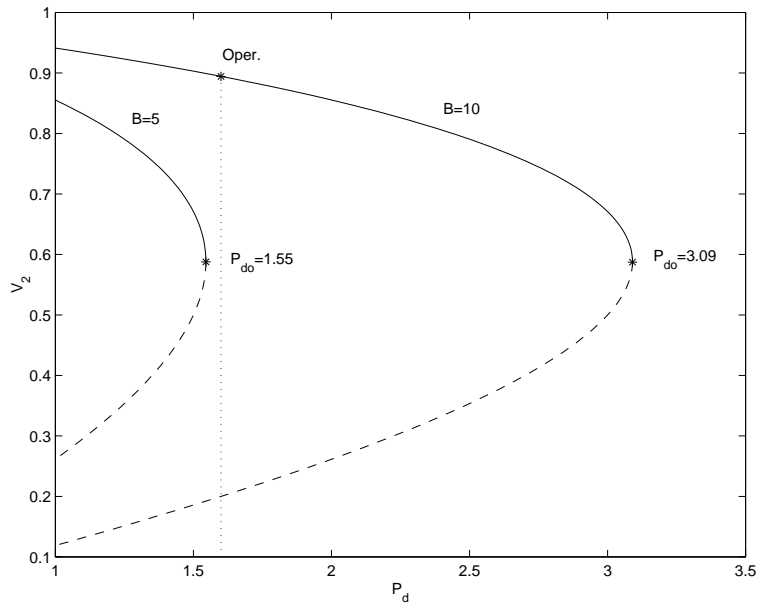


Figura 10.30. Diagramas de bifurcación considerando una contingencia para el sistema generador-carga sin límites. Las líneas continuas representan puntos de equilibrio estable y las cortadas corresponden a puntos inestables.

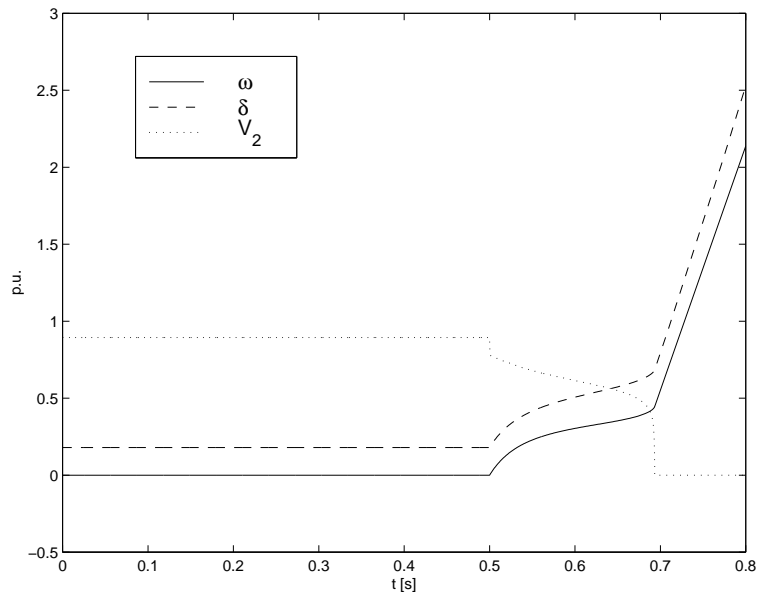


Figura 10.31. Colapso del sistema generador-carga sin límites debido a una contingencia a $t = 0,5$ s.

de equilibrio postfalta que le permite recuperarse, como se ve en la Figura 10.33. Es interesante mencionar que existe un “tiempo crítico” de conexión de la compensación shunt para poder recuperar el sistema después de la contingencia, como se explica en detalle en [44]; para este ejemplo, este valor es 0.19 s después de la falta.

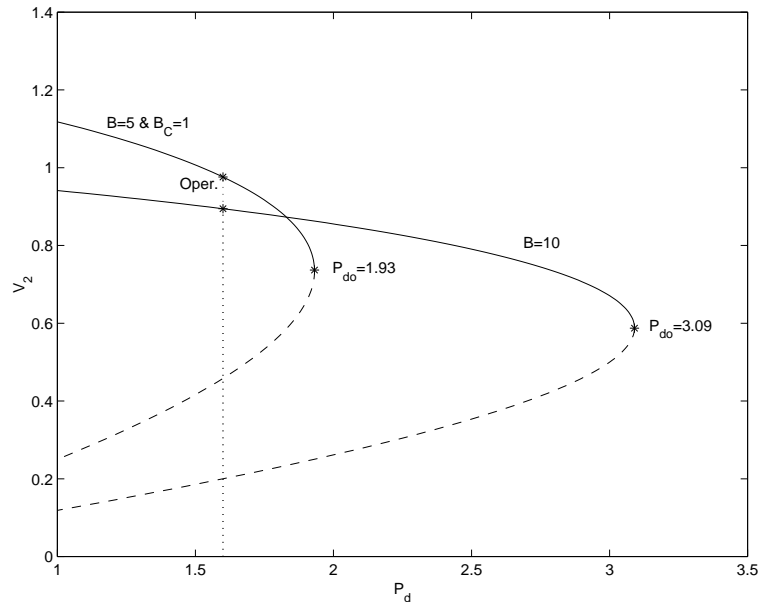


Figura 10.32. Diagramas de bifurcación considerando una contingencia y compensación shunt para el sistema generador-carga sin límites.

Bifurcaciones límite

Éstas son bifurcaciones particulares de sistemas no lineales en los que se representan los límites asociados con los diversos controladores del sistema, lo cual es típico en sistemas de energía eléctrica donde estas bifurcaciones fueron inicialmente observadas y analizadas [43]. Sus características principales son:

- Se ha observado que este tipo de bifurcaciones son también genéricas y de co-dimensión 1, ya que ocurren con “regularidad” cuando se varía al menos un parámetro en el sistema.
- Los autovalores de la matriz de estado A del sistema sufren un cambio inmediato cuando se alcanza el límite; en otras palabras, los autovalores “saltan” de un valor a otro en el punto de bifurcación asociado con un límite particular del sistema. Es importante mencionar que la matriz A no es singular como en el caso de la bifurcación silla.
- En ciertos casos, que son los de mayor interés, el punto de equilibrio desaparece localmente, debido a la operación del sistema de control asociado con el límite, el

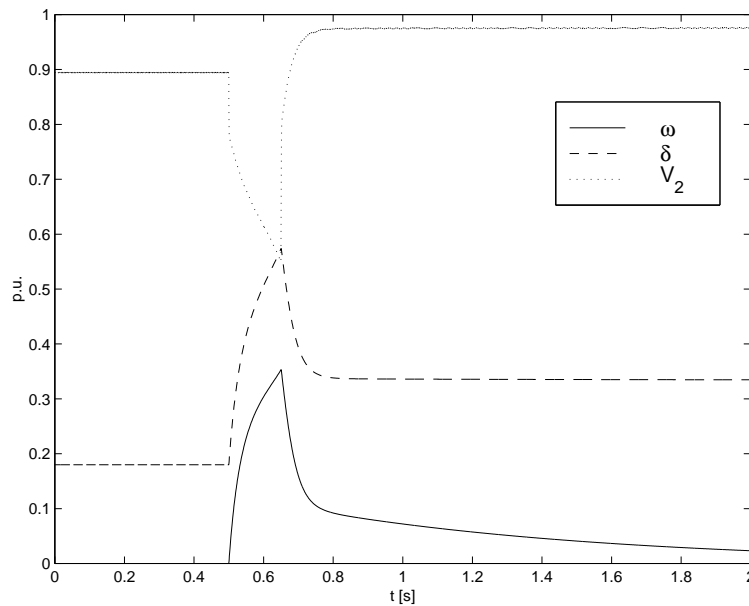


Figura 10.33. Recuperación de una contingencia del sistema generador-carga sin límites con la conexión de compensación shunt a $t = 0,6$ s.

cual trata de recuperar el control pero se ve forzado nuevamente a su condición límite debido a las condiciones del sistema.

Este fenómeno se puede ver claramente en los diagramas de bifurcación de las Figuras 10.34 y 10.35, que corresponden a dos posibles eventos asociados con los límites de potencia reactiva del regulador de tensión de un generador. En estas dos figuras se ilustran todas las posibles soluciones a las ecuaciones de equilibrio para un sistema con $Q_G = Q^{\max}$ en uno de sus generadores (se ignoran los límites en el resto de generadores), lo cual genera la curva “con límites”; la curva “sin límites” se obtiene ignorando los límites en todos los generadores. En el caso de la Figura 10.34 el sistema no pierde equilibrio después de la bifurcación límite, ya que la tensión del sistema sigue decreciendo después de llegar a este punto, por lo que el regulador se mantiene en su condición límite y el sistema continúa en el diagrama de bifurcación “con límites” a medida que se incrementa λ . La Figura 10.35, en cambio, demuestra el caso en el que no existe localmente un equilibrio después de la bifurcación, ya que la tensión del sistema se incrementaría después de alcanzar el límite (el sistema sigue la curva “con límites”), pero el regulador en ese caso trataría de recuperar el control (el sistema regresaría a la curva “sin límites”), lo que forzaría la tensión a decaer nuevamente, forzando de nuevo al regulador a su condición límite; el resultado en este caso es que no existe una condición de equilibrio pasada la bifurcación límite.

Como en el caso de las bifurcaciones silla, las bifurcaciones límite que resultan en la desaparición local de los puntos de equilibrio producen cambios globales de estabilidad en el sistema que llevan a su colapso, como se ilustra en el siguiente ejemplo.

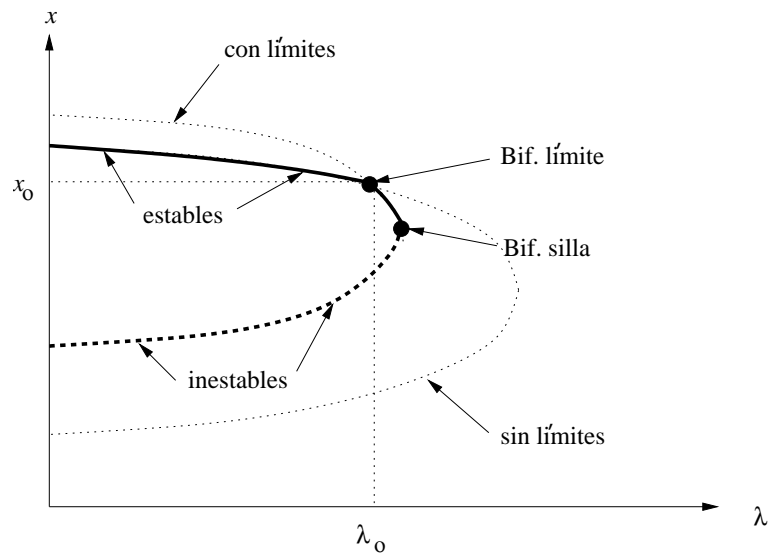


Figura 10.34. Puntos de equilibrio para una bifurcación límite “estable”.

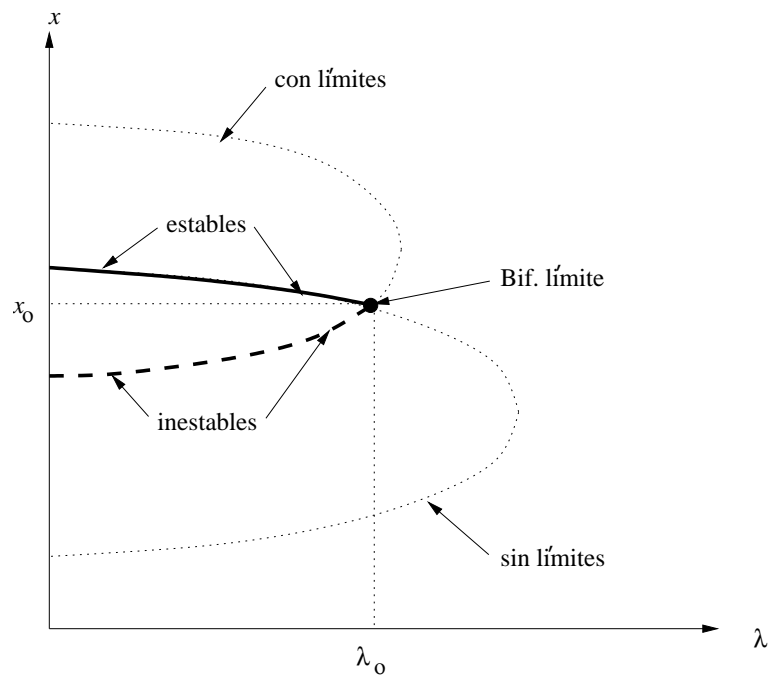


Figura 10.35. Puntos de equilibrio para una bifurcación límite “inestable”.

Ejemplo 10.12:

Para el sistema generador-carga del Ejemplo 10.11, asumiendo que los límites del generador son $Q^{\max} = -Q^{\min} = 1,0$ p.u., las ecuaciones diferenciales-algebraicas que representan el sistema son:

$$\begin{aligned}\dot{\omega} &= 10(1 + \Delta P_d - BV_1 V_2 \sin \delta - 0,01\omega) \\ \dot{\delta} &= \omega - 10(BV_1 V_2 \sin \delta - 1 - \Delta P_d) \\ \dot{V}_2 &= 1000[-(B - B_C)V_2^2 + BV_1 V_2 \cos \delta - 0,5 - 0,5\Delta P_d] \\ 0 &= Q_G - BV_1^2 + BV_1 V_2 \cos \delta\end{aligned}\quad (10.121)$$

Como en el ejemplo anterior, se escogen los valores p.u. de $B = 10$ y $B = 5$ para representar el efecto de una contingencia en el sistema de transmisión. En este caso se tiene que:

$$x = \begin{bmatrix} \omega \\ \delta \\ V_2 \end{bmatrix} \quad y = \begin{cases} Q_G & \text{si } -1 \leq Q_G \leq 1 \\ V_1 & \text{si } V_1 \neq V_1^{\text{esp}} \end{cases} \quad p = \begin{bmatrix} V_1^{\text{esp}} \\ B_C \end{bmatrix} \quad \lambda = \Delta P_d$$

Resolviendo las ecuaciones de equilibrio cuadráticas correspondientes a (10.121) para $V_1^{\text{esp}} = 1$, se obtienen los diagramas de bifurcación de las Figuras 10.36 y 10.37 para los sistemas pre-falta y post-falta con valores de compensación shunt $B_C = 0$ y $B_C = 1,0$, respectivamente. Los valores de máxima carga en este caso son:

$$\begin{aligned}B = 10 \text{ y } B_C = 0 &\Rightarrow P_{do} = 1,41 \\ B = 5 \text{ y } B_C = 0 &\Rightarrow P_{do} = 1,11 \\ B = 5 \text{ y } B_C = 1 &\Rightarrow P_{do} = 1,82\end{aligned}$$

Obsérvese que para un nivel de carga $P_d = 1,3$, el sistemas post-falla no presenta un punto de equilibrio debido a la existencia de una bifurcación límite, al menos que se introduzca compensación shunt, lo cual lleva a un colapso de tensión similar a lo que sucede con una bifurcación silla, como se puede observar en la Figura 10.38. El tiempo crítico de conexión de la compensación en este caso es 0.02 s después de la falta.

De estos resultados se puede concluir que este sistema es mucho más sensible a perturbaciones, lo cual se esperaba, ya que los límites de potencia reactiva en el generador reducen significativamente la cargabilidad del sistema, así como también los tiempos críticos para evitar la pérdida de estabilidad.

Otras bifurcaciones

Además de las bifurcaciones silla y límite, existen varios otros tipos de bifurcaciones que no han sido típicamente asociadas con problemas de estabilidad de tensión [41]. Así se tienen las bifurcaciones *transcrítica* y *tridente*, que aunque también corresponden a una singularidad de la matriz de estado, no son típicas en sistemas de potencia porque requieren de ciertas simetrías en el sistema. También existen bifurcaciones *Hopf*, que corresponden a un cruce del eje imaginario de un par complejo y conjugado de autovalores de la matriz de estado con respecto a la variación de los parámetros de bifurcación λ (en el punto de bifurcación, estos dos valores son puramente imaginarios). Estas últimas son típicas en sistemas de potencia

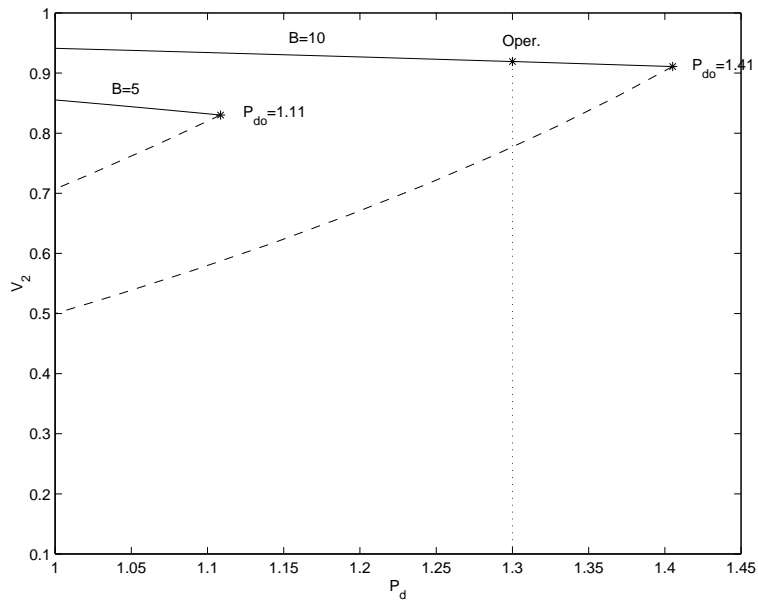


Figura 10.36. Diagramas de bifurcación considerando contingencias para el sistema generador-carga con límites.

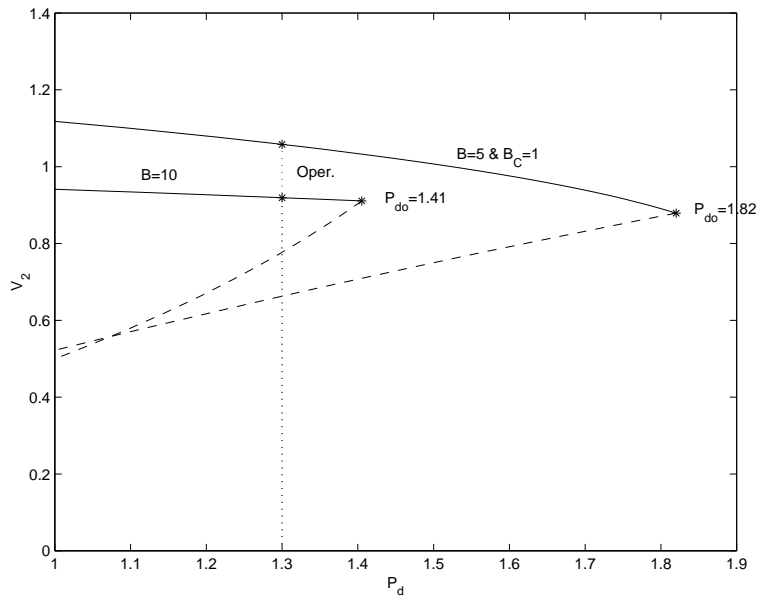


Figura 10.37. Diagramas de bifurcación considerando contingencias y compensación shunt para el sistema generador-carga con límites.

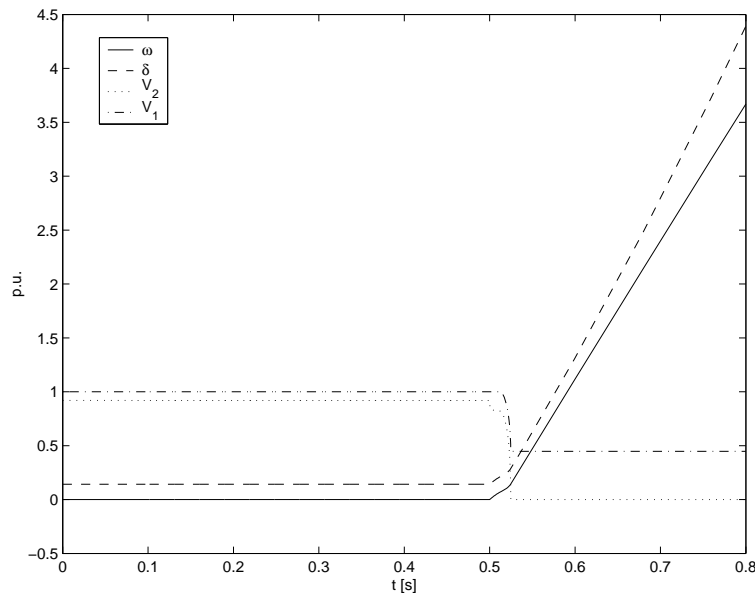


Figura 10.38. Colapso del sistema generador-carga con límites debido a una contingencia a $t = 0,5$ s.

y se las ha asociado a varios tipos de fenómenos oscilatorios, como por ejemplo oscilaciones electromecánicas [45].

Un tipo de bifurcación particular a los sistemas diferenciales-algebraicos son las bifurcaciones de singularidad [43], que corresponden a los puntos donde el jacobiano de las ecuaciones algebraicas $D_y g|_o$ es singular con respecto a variaciones de los parámetros de bifurcación λ . Estas bifurcaciones se caracterizan por un cambio de $-\infty$ a $+\infty$, o viceversa, de los autovalores de la matriz de estado A , y producen problemas de simulación, ya que en los puntos de singularidad del jacobiano $D_y g(\cdot)$, el sistema diferencial-algebraico no tiene solución. Esto último es la razón por lo que típicamente es preferible cambiar el modelo de las cargas para eliminar estas bifurcaciones. El siguiente ejemplo ilustra este tipo de bifurcaciones.

Ejemplo 10.13:

Si en el sistema generador-carga del Ejemplo 10.12, en el cual se ignoran los límites de potencia reactiva del generador, se elimina la respuesta dinámica de la tensión de carga V_2 con $\tau = 0$, se obtiene el diagrama de bifurcación de la Figura 10.39, que no son más que todos los puntos de equilibrio correspondientes a las soluciones de las ecuaciones (10.117) en el Ejemplo 10.10 para $P_d \geq 1$ ($Q_d = 0,25P_d$), como se explica en el Ejemplo 10.11. La estabilidad de estos puntos de equilibrio se define obteniendo los correspondientes autovalores μ de la matriz de estado A que se obtiene de los jacobianos (10.118). Obsérvese la bifurcación de singularidad para el valor de $\lambda = P_d = 2,524$, lo que explica porqué en el Ejemplo 10.10 se obtuvieron dos equilibrios estables para $P_d = 1$ en este sistema. Para el ejemplo con límites en el generador, no se observa este tipo de bifurcaciones; sin embargo, este no es siempre el caso.

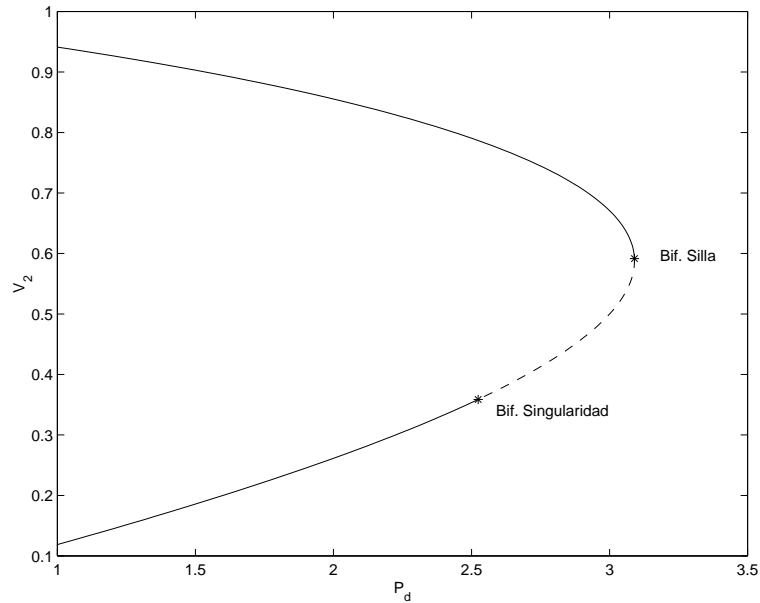


Figura 10.39. Diagrama de bifurcación para el sistema generador-carga sin límites e ignorando la respuesta dinámica de la tensión en la carga.

10.9.3. Técnicas de análisis

Debido a que la estabilidad de tensión es fundamentalmente un problema dinámico, las herramientas y técnicas más adecuadas para analizar este tipo de problemas son básicamente las mismas que se usan para estudiar la estabilidad de ángulo, esto es, simulación en el dominio del tiempo y cálculos y análisis de los autovalores y autovectores asociados con la matriz de estado correspondiente a los puntos de operación del sistema, como se explica en las Secciones 10.4 y 10.5. Esto se ilustra claramente en los ejemplos presentados previamente.

Una particularidad del estudio de estabilidad de tensión, sin embargo, es la necesidad de detectar los diversos puntos de bifurcación, en especial bifurcaciones silla y límite. Esto se hace por medio de una serie de técnicas especialmente diseñadas para este propósito. Este apartado se concentra en describir brevemente estas técnicas, presentando sus ventajas y desventajas; para una descripción más detallada, el lector puede consultar la referencia [34].

Métodos de continuación

Estos métodos están diseñados para determinar eficientemente los diagramas de bifurcación y son básicamente técnicas desarrolladas para el cálculo de los puntos de equilibrio del sistema con respecto a variaciones de los parámetros de bifurcación λ (ver por ejemplo

el diagrama de la Figura 10.39). La forma más simple de hacer esto es calcular los valores de z que resuelven las ecuaciones de equilibrio (10.115):

$$F(z, p, \lambda) = 0 \quad (10.122)$$

a medida que λ cambia y para valores dados de los parámetros p . En sistemas eléctricos esta técnica funciona relativamente bien para determinar los puntos de equilibrio asociados con puntos típicos de operación, o sea, soluciones con tensiones cercanas a 1 p.u. y ángulos “pequeños”; algunos programas de análisis de estabilidad de tensión que se usan en la actualidad están diseñados de esta manera. El problema con este método es que cuando no se encuentra una solución, no se puede estar seguro de si es que esto se debe a problemas de convergencia de las técnicas numéricas usadas o a la falta real de una solución debido a la desaparición local de puntos de equilibrio asociada con una bifurcación silla o límite. La otra desventaja es que este método no permite calcular fácilmente el diagrama completo de bifurcación, que aunque desde el punto de vista práctico no es un problema, ya que no se necesita de los puntos de equilibrio en la parte “baja” de la curva para determinar la máxima cargabilidad del sistema, en ciertos casos estos puntos son útiles para análisis adicionales de estabilidad (por ejemplo en métodos de análisis directos basados en funciones de energía).

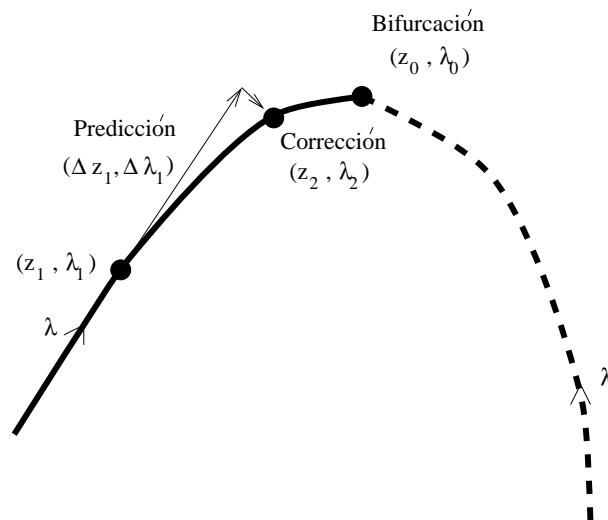


Figura 10.40. Método de predicción-corrección para determinar diagramas de bifurcación.

Técnicas de predicción y corrección, que se basan en el método ilustrado en la Figura 10.40, permiten trazar todo el diagrama de bifurcación con respecto a la variación de uno de los parámetros λ , facilitando así la detección de los puntos de bifurcación. De las múltiples técnicas de predicción y corrección existentes, las más eficientes y numéricamente más robustas son las siguientes:

1. *Predicción tangente:* La predicción de los valores de z y λ , o en otras palabras, el cálculo de los incrementos Δz y $\Delta \lambda$, se hace por medio de la tangente $dz/d\lambda$ al

diagrama de bifurcación en un punto de equilibrio dado. Así, basados en la notación de la Figura 10.40, se tiene para (10.122) que:

$$\begin{aligned} D_z F|_1 dz + D_\lambda F|_1 d\lambda &= 0 \\ \Rightarrow \left. \frac{dz}{d\lambda} \right|_1 &\approx \frac{\Delta z_1}{\Delta \lambda_1} \\ t_1 &= -D_z F|_1^{-1} D_\lambda F|_1 \end{aligned} \quad (10.123)$$

De (10.123), se define:

$$\begin{aligned} \Delta \lambda_1 &= \frac{k}{\|t_1\|} t_1 \\ \Delta z_1 &= \Delta \lambda_1 t_1 \end{aligned} \quad (10.124)$$

La constante k se escoge de tal forma que se pueda controlar la “velocidad” con la que se calcula el diagrama de bifurcación; mientras más grande es el valor de esta constante, menor es el número de puntos de equilibrio que se calculan en el diagrama de bifurcación, trazándolo así más rápidamente.

2. *Corrección perpendicular:* Una vez que se conoce el valor aproximado de

$$(z_2, \lambda_2) \approx (z_1 + \Delta z_1, \lambda_1 + \Delta \lambda_1) \quad (10.125)$$

se puede calcular el valor exacto de estas variables en el diagrama de bifurcación resolviendo el siguiente problema no lineal, que está basado en la perpendicular al vector tangente, usando como valor inicial (10.125):

$$\begin{aligned} F(z, p, \lambda) &= 0 \\ \Delta z|_1^T (z_1 + \Delta z_1 - z) + \Delta \lambda_1 (\lambda_1 + \Delta \lambda_1 - \lambda) &= 0 \end{aligned} \quad (10.126)$$

A medida que uno se acerca más a una bifurcación silla o límite, se encuentran problemas de convergencia en la resolución de (10.126), ya que la perpendicular tiende a no interceptar el diagrama de bifurcación definido por $F(z, p, \lambda) = 0$ cuando el diagrama “curva” en el punto de bifurcación. Este problema se resuelve sencillamente en la práctica reduciendo sucesivamente el paso (10.124) en mitades hasta que se logre la convergencia.

En este proceso de predicción y corrección se debe tener en cuenta que el parámetro λ cambia de dirección cuando se llega a un punto de bifurcación silla o límite, por lo que pasado este punto se debe cambiar el signo de $\Delta \lambda$ para poder trazar el diagrama completo.

Métodos directos

Estos métodos están diseñados para calcular directamente los valores de (z_o, λ_o) correspondientes a una bifurcación silla o límite.

En el caso de una bifurcación silla, la idea es simplemente resolver el problema no lineal asociado con las características de singularidad de esta bifurcación, que en su forma

numéricamente más robusta para sistemas eléctricos de potencia corresponde a resolver las siguientes ecuaciones con respecto a z , λ y el autovector w , dados los valores de p :

$$\begin{aligned} F(z, p, \lambda) &= 0 \rightarrow \text{equilibrio} \\ w^T D_z F(z, p, \lambda) &= 0 \rightarrow \text{singularidad} \\ \|w\|_\infty &= 1 \rightarrow w \neq 0 \end{aligned} \quad (10.127)$$

Estas ecuaciones no se las puede usar para calcular bifurcaciones límites, ya que en este caso no se tienen singularidades. Sin embargo, si el problema se lo analiza como el siguiente problema de optimización:

$$\begin{aligned} \text{Min.} \quad & -\|\lambda\| \\ \text{s.t.} \quad & F(z, p, \lambda) = 0 \\ & z_{\min} \leq z \leq z_{\max} \end{aligned} \quad (10.128)$$

se pueden usar técnicas de optimización, similares a las que se usan para resolver eficientemente problemas de operación en el caso de sistemas eléctricos de potencia, para determinar directamente bifurcaciones silla o límite. Obsérvese que si se ignoran los límites en (10.128), se pueden obtener ecuaciones muy similares a (10.127) en la minimización del correspondiente lagrangiano. Es interesante mencionar que el método de continuación descrito con anterioridad es básicamente equivalente a usar la técnica de gradientes reducidos generalizados para la solución del problema (10.128).

Los métodos directos presentan la ventaja con respecto a los métodos de continuación de generar el punto exacto de bifurcación, pero tienen la desventaja de no producir diagramas de bifurcación, que contienen información adicional que puede ser de gran utilidad en la operación del sistema y para otros estudios de estabilidad. Los métodos directos, además, presentan problemas de convergencia debido a la alta no-linealidad del problema. Sin embargo, cuando se usan técnicas de optimización, estos métodos pueden ser utilizados en distintas formas para mejorar la operación del sistema, como por ejemplo determinar valores de los parámetros de control p que maximicen la distancia al colapso [46].

Índices

Existe una gran variedad de índices que se han propuesto para determinar la proximidad de un sistema eléctrico a bifurcaciones silla y límite. La idea general de estos índices es el generar un valor numérico que le permita al operador determinar en tiempo real si el sistema se encuentra cercano a un punto de colapso debido a bifurcaciones silla o límite, de tal forma que se puedan tomar medidas preventivas para evitar problemas de estabilidad. Por ejemplo, para detectar la proximidad de un sistema a una bifurcación silla, se puede usar el autovalor real más pequeño de la matriz de estado o su valor singular, los cuales se pueden calcular con relativa facilidad; este índice, sin embargo, no es adecuado para detectar bifurcaciones límite, como se ilustra en el Ejemplo 10.14.

El problema con la mayoría de los índices existentes es que sus valores varían en forma altamente no lineal y discreta, debido a las características no lineales de sistema y a sus límites. Aunque existen técnicas que en cierta forma resuelven el problema de no-linealidad,

el problema de cambios discretos asociados con límites en el sistema no se lo ha podido resolver.

De entre los índices que se han propuesto en la literatura, uno de los que no presenta problemas de no-linealidad y saltos discretos en su valor es el margen de cargabilidad, que no es más que la distancia, en términos de los parámetros de bifurcación λ , del punto de operación al punto de bifurcación, esto es:

$$\|\lambda_o - \lambda\| \quad (10.129)$$

El problema principal con este índice es su costo de cálculo, que es mucho mayor comparado con otros índices, ya que requiere el conocimiento de antemano del punto de bifurcación; sin embargo, con la gran mejora en los últimos años de la velocidad de las computadoras típicamente usadas para este tipo de cálculos, este problema ha ido desapareciendo gradualmente.

Ejemplo 10.14:

Para el sistema generador-carga del Ejemplo 10.12 se puede evaluar el índice de valor singular asociado con los diagramas de bifurcación ilustrados en las Figuras 10.36 y 10.39 para $B = 10$ ($X = 0,1$), que no es más que el mínimo de los autovalores $\sqrt{\mu(A^T A)}$ asociados con la matriz de estado A definida por los jacobianos de las ecuaciones (10.121), correspondientes solamente a los puntos de equilibrio estables “típicos” del sistema con y sin límites, respectivamente. Esto resulta en los diagramas de la Figura 10.41, que demuestran la alta no-linealidad de este tipo de índice, además de mostrar que no tiene mucho significado en el caso de bifurcaciones límite, como se ve en la Figura 10.41-a.

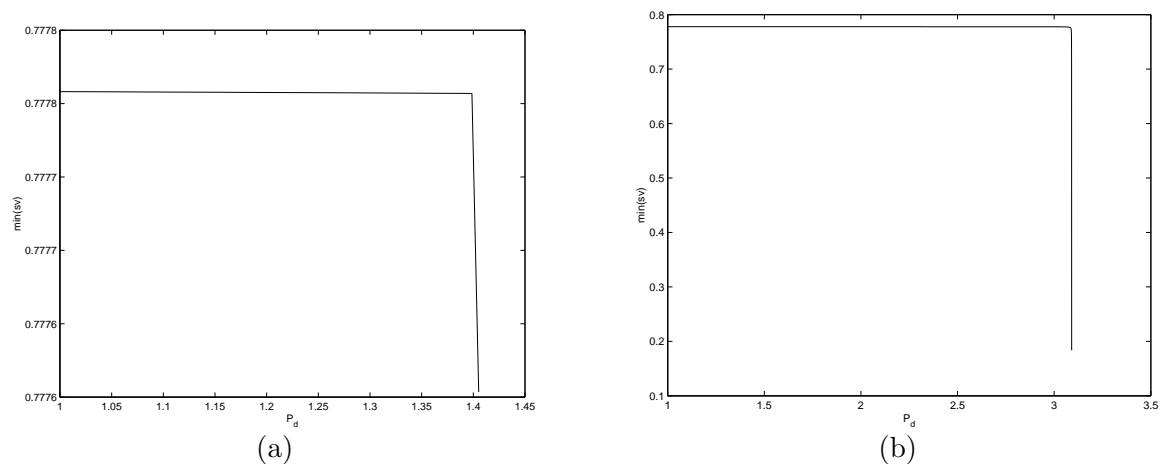


Figura 10.41. Índice de valor singular para el sistema generador-carga (a) con y (b) sin límites.

En la Figura 10.42 se muestra el índice de cargabilidad para el mismo sistema, o sea, los valores de (10.129) para los puntos de equilibrio de los diagramas de las Figuras 10.36 y 10.39, respectivamente, observándose que éste no presenta los problemas del índice de valor singular.

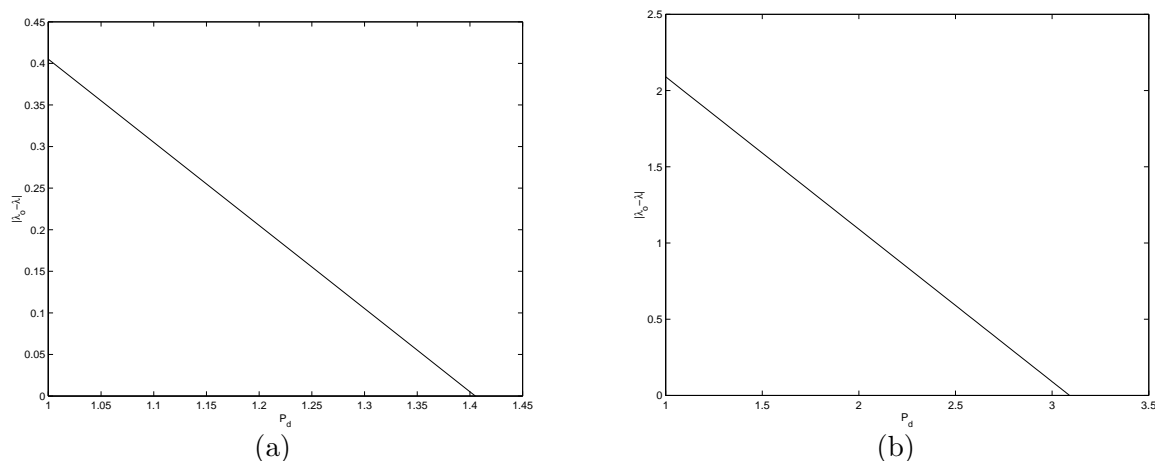


Figura 10.42. Índice de distancia al colapso para el sistema generador-carga (a) con y (b) sin límites.

10.9.4. Aplicaciones prácticas

Todos los fenómenos y sus correspondientes técnicas de análisis descritos en esta sección se pueden aplicar directamente a sistemas eléctricos reales, en la misma forma como en los ejemplos utilizados con anterioridad para ilustrar los conceptos principales. La diferencia principal está en el tamaño del sistema bajo estudio, lo cual limita en muchos casos el tipo de análisis que se puede realizar, especialmente para aplicaciones en tiempo real. Por esta razón, y un poco por razones históricas relacionadas al tipo de herramientas y modelos usados en centros de control para el análisis en tiempo real del sistema, los estudios de estabilidad de tensión se tiende a realizar en modelos de flujos de carga, que no necesariamente representan las ecuaciones de estado estable del sistema. En este caso se tiene que tener presente lo siguiente para poder interpretar los resultados que se obtienen de manera adecuada:

- En general, los límites de cargabilidad del sistema calculados con modelos de flujo de cargas son sólo aproximaciones de los límites dinámicos reales, ya que en estos modelos no se pueden detectar ciertos problemas dinámicos, como por ejemplo oscilaciones electromecánicas (bifurcaciones Hopf).
- Los modelos de controladores usados en los flujos de carga deben ser modificados para representar adecuadamente su operación en la realidad, en particular en lo que corresponde a la representación de sus límites [47]. Por ejemplo, nudos PV usados para representar generadores y sus reguladores de tensión deben ser modelados de tal forma que los límites del regulador y su capacidad de recuperarse de sus límites sean representados correctamente, caso contrario las bifurcaciones límite no pueden ser detectadas correctamente.
- Singularidades del jacobiano de las ecuaciones de flujo de cargas no siempre corresponden a singularidades de la matriz de estado para los modelos dinámicos típicamente usados en la práctica, por lo que bifurcaciones silla no son necesariamente detectadas

a través de modelos de flujo de carga [38, 48]. Sin embargo, singularidades asociadas a estas ecuaciones, aunque no necesariamente representen un problema dinámico, son de importancia desde el punto de vista práctico, ya que muchos análisis y herramientas usadas en la operación del sistema se basan en este tipo de modelos.

Bibliografía

- [1] E. W. Kimbark, *Power System Stability*, John Wiley and Sons, 1951.
- [2] R. T. Byerly y E. W. Kimbark (editores), *Stability of Large Scale Electric Power Systems*, IEEE Press, 1974.
- [3] C. W. Taylor, *Power System Voltage Stability*, McGraw-Hill, 1994.
- [4] T. Van Cutsem y C. Vournas, *Voltage Stability of Electric Power Systems*, Kluwer Academic Publishers, 1998.
- [5] P. Kundur, *Power System Stability and Control*, McGraw-Hill, 1994.
- [6] D. G. Luenberger, *Introduction to Dynamic Systems: Theory, Models, and Applications*, John Wiley and Sons, 1979.
- [7] J. P. Barret, P. Bonard y B. Meyer, *Power System Simulation*, Chapman and Hall, 1997.
- [8] P. M. Anderson, B. L. Agrawal y J. E. Van Ness, *Subsynchronous Resonance in Power Systems*, IEEE Press, 1989.
- [9] A. A. Fouad y V. Vittal, *Power System Transient Stability Using the Transient Energy Function Method*, Prentice Hall, 1992.
- [10] M. Pavella y P. G. Murthy, *Transient Stability of Power Systems*, John Wiley and Sons, 1994.
- [11] G. Strang, *Introduction to Applied Mathematics*, Wellesley-Cambridge Press, 1986.
- [12] I. J. Pérez-Arriaga, G. C. Verghese y F. C. Schweppe, "Selective Modal Analysis with Applications to Electric Power Systems. Part I: Heuristic Introduction. Part II: The Dynamic Stability Problem". *IEEE Transactions on Power Apparatus and Systems*, vol. PAS-101(9), septiembre 1982, pp. 3117-3134.
- [13] G. Rogers, *Power System Oscillations*, Kluwer Academic Publishers, 2000.
- [14] IEEE Power Engineering Society, *IEEE Guide for Synchronous Generator Modeling Practices in Stability Studies*, IEEE Std. 1110-1991, 1991.
- [15] IEEE Power Engineering Society, *IEEE Recommended Practice for Excitation System Models for Power System Stability Studies*, IEEE Std. 421.5-1992, 1992.
- [16] IEEE Power Engineering Society, *IEEE Guide for Identification, Testing, and Evaluation of the Dynamic Performance of Excitation Control Systems*, IEEE Std. 421A-1978, 1978.
- [17] R. J. Koessler, "Techniques for Tuning Excitation System Parameters". *IEEE Transactions on Energy Conversion*, vol. EC-3(4), diciembre, 1988, pp. 785-791.
- [18] Working Group on Prime Mover and Energy Supply Model for System Dynamic Performance Studies, "Dynamic Models of Fossil Fueled Steam Units in Power System Studies". *IEEE Transactions on Power Systems*, vol. PWRS-6(2), mayo 1991, pp. 753-761.
- [19] Working Group on Prime Mover and Energy Supply Model for System Dynamic Performance Studies, "Hydraulic Turbine and Turbine Control Models for System Dynamic Studies". *IEEE Transactions on Power Systems*, vol. PWRS-7(1), febrero 1992, pp. 167-179.
- [20] EPRI, *Power System Dynamic Analysis, Phase I*, EPRI Report EL-484, julio, 1977.
- [21] P. M. Anderson y R. G. Farmer, *Series Compensation of Power Systems*, PBLSH!, 1996.

- [22] W.A. Elmore (editor), *Protective Relaying: Theory and Applications*, Marcel Dekker, 1994.
- [23] F. L. Pagola, I. J. Pérez-Arriaga y G. C. Verghese, “On Sensitivities, Residues and Participations”. *IEEE Transactions on Power Systems*, vol. PWRS-4(1), febrero 1989, pp. 278-285.
- [24] L. Rouco, “Eigenvalue-based Methods for Analysis and Control of Small-Signal Stability of Power Systems”. *IEE Colloquium on Power System Dynamics Stabilisation*, University of Warwick, Coventry, England, 23-24 febrero, 1998.
- [25] N.G. Hingorani y L. Gyugyi, *Understanding FACTS*, IEEE Press, 2000.
- [26] C. Taylor, editor, *Modeling of Voltage Collapse Including Dynamic Phenomena*, CIGRE TF 38.02.10, 1993.
- [27] L. H. Fink, editor, *Proceedings: Bulk Power System Voltage Phenomena—Voltage Stability and Security*, EPRI EL-6183, Potosi, Missouri, enero 1989.
- [28] L. H. Fink, editor, *Proceedings: Bulk Power System Voltage Phenomena—Voltage Stability and Control*, ECC/NSF workshop, ECC Inc., Deep Creek Lake, Maryland, agosto 1991,
- [29] L. H. Fink, editor, *Proceedings: Bulk Power System Voltage Phenomena—Voltage Stability, Security and Control*, ECC/NSF workshop, Davos, Switzerland, agosto 1994.
- [30] N. D. Hatziargyriou y T. Van Cutsem, editores, *Indices predicting voltage collapse including dynamic phenomena*, CIGRE TF 38.02.11, 1994.
- [31] C. Taylor, editor, *Criteria and Countermeasures for Voltage Collapse*, CIGRE TF 38.02.12, 1995.
- [32] Y. Mansour, editor, *Voltage Stability of Power Systems: Concepts, Analytical Tools, and Industry Experience*, IEEE-PES 90TH0358-2PWR, 1993.
- [33] Y. Mansour, editor, *Suggested Techniques for Voltage Stability Analysis*, IEEE-PES 93TH0620-5PWR, 1993.
- [34] C. A. Cañizares, editor, *Voltage Stability Assessment, Procedures and Guides*, IEEE-PES, borrador disponible en www.power.uwaterloo.ca, 2001.
- [35] A. E. Hammad y W. Kuhn, “A Computation Algorithm for Assessing Voltage Stability at AC/DC Interconnections”. *IEEE Transactions on Power Systems*, vol. PWRS-1(1), 1986, pp. 209-216.
- [36] D. J. Hill y I. M. Y. Mareels, “Stability Theory for Differential/Algebraic Systems with Application to Power Systems”. *IEEE Transactions on Circuits and Systems*, vol. CAS-37(11), 1990, pp. 1416-1423.
- [37] N. Vidyasagar, *Nonlinear Systems Analysis*, segunda edición, Prentice Hall, 1993.
- [38] C.A. Cañizares, “Conditions for Saddle-node Bifurcations in AC/DC Power Systems”, *Int. Journal Electrical Energy & Power Systems*, vol. 17(1), 1995, pp. 61-68.
- [39] R. Seydel, *Practical Bifurcation and Stability Analysis—From Equilibrium to Chaos*, segunda edición, Springer-Verlag, New York, 1994.
- [40] J. Guckenheimer y P. Holmes, *Nonlinear Oscillations, Dynamical Systems and Bifurcations of Vector Fields*, Springer-Verlag, New York, 1986.
- [41] C. A. Cañizares y S. Hranilovic, “Transcritical and Hopf bifurcations in ac/dc systems”, pp. 105-114 en [29].
- [42] N. Mithulananthan, C. A. Cañizares y J. Reeve, “Hopf Bifurcation Control in Power Systems Using Power System Stabilizers and Static Var Compensators”, *Proceedings of the North American Power Symposium (NAPS)*, San Luis Obispo, California, 1999, pp. 155-162.
- [43] V. Venkatasubramanian, H. Schättler, J. Zaborsky, “Dynamics of large constrained nonlinear systems—A taxonomy theory”, *Proceedings of the IEEE*, vol. 83(11), 1995, pp. 1530-1561.

- [44] L.S. Vargas y C.A. Cañizares, “Time Dependence of Controls to Avoid Voltage Collapse”, *IEEE Transactions on Power Systems*, vol. PWR5-15(4), 2000, pp. 1367-1375.
- [45] N. Mithulananthan, C. A. Cañizares, J. Reeve y G.J. Rogers, “Comparison of PSS, SVC and STATCOM Controllers for Damping Power System Oscillations”, a publicarse en *IEEE Transactions on Power Systems*, 2002.
- [46] W. Rosehart, C. A. Cañizares y V. Quintana, “Multi-objective Optimal Power Flows to Evaluate Voltage Security Costs”, a publicarse en *IEEE Transactions on Power Systems*, 2002.
- [47] P. A. Löf, G. Andersson, D. J. Hill, “Voltage Dependent Reactive Power Limits for Voltage Stability Studies”. *IEEE Transactions on Power Systems*, vol. 10(1), 1995, pp. 220-228.
- [48] A. A. P. Lerm, C. A. Cañizares, F. A. B. Lemos y A. S. Silva, “Multi-parameter Bifurcation Analysis of Power Systems”, *Proceedings of the North American Power Symposium (NAPS)*, Cleveland, Ohio, 1998, pp. 76-82.

Capítulo 11

Flujo de cargas con armónicos

JULIO GARCÍA MAYORDOMO Y JULIO USAOLA GARCÍA

11.1. Introducción

En el Capítulo 3 se justificó la necesidad de disponer de un flujo de cargas para poder obtener las condiciones de operación en régimen permanente de un sistema de potencia. Esta herramienta de cálculo supone que todos los componentes de la red son lineales. En estas condiciones, el flujo de cargas convencional proporciona tensiones, intensidades y potencias a frecuencia fundamental (50 Hz) en cualquier punto de la red.

Sin embargo, el desarrollo creciente de la electrónica de potencia ha hecho posible la aparición en las redes de una serie de cargas que presentan un comportamiento no lineal en su modo normal de funcionamiento. En muchas ocasiones, este comportamiento puede asimilarse bastante bien a un funcionamiento en régimen permanente no sinusoidal del sistema completo. Es decir, la conexión de estas cargas distorsiona las formas de onda de las tensiones y corrientes de la red. Interesa por tanto cuantificar en cada elemento del sistema el nivel de distorsión, lo que se traduce en determinar las distintas componentes armónicas correspondientes al desarrollo en serie de Fourier de ondas periódicas cuya frecuencia fundamental es 50 Hz.

Los armónicos se consideran como un tipo de perturbación que afecta a la calidad de la onda de tensión suministrada por las compañías eléctricas. Como la mayoría de los equipos conectados a red están diseñados para trabajar con tensiones sinusoidales, la existencia de armónicos puede dar lugar a problemas de funcionamiento. Por este motivo, se han elaborado normas internacionales que por una parte limitan las emisiones armónicas de las cargas no lineales, y por otra establecen niveles de referencia para que las compañías eléctricas puedan vigilar el nivel de distorsión en sus redes.

Con estos antecedentes surge la necesidad de disponer de herramientas de análisis de armónicos que de alguna manera se asemejen conceptualmente a los flujos de cargas convencionales. La herramienta de análisis de armónicos más sofisticada se denomina flujo de cargas con armónicos (*Harmonic Power Flow* en la literatura sajona), el cual puede entenderse como una extensión de los flujos de cargas convencionales (expuestos en el Capítulo 3)

a una situación más general en la que las tensiones y las intensidades se encuentran distorsionadas como consecuencia de la conexión a red de cargas no lineales. En este caso, el objetivo consiste en obtener los armónicos de tensión en todos los nudos de la red cuando se especifica la potencia de las cargas lineales y no lineales, así como el modelo en frecuencia de las cargas no lineales.

De todas las formulaciones realizadas para el flujo de cargas con armónicos, en este capítulo se presenta la expuesta en [23], debido a sus características de modularidad para combinar elementos convencionales de software y a su flexibilidad para adaptar distintos modelos de cargas no lineales [11]. Como cargas no lineales más frecuentes conectadas a las redes de transporte se han considerado los rectificadores, los hornos de arco y los compensadores estáticos de potencia reactiva. La formulación de los modelos empleados para estas cargas sigue lo expuesto en [8], [7] y [9]. Asimismo, y por razones didácticas, se supone que el sistema completo se encuentra en condiciones equilibradas.

En este capítulo se explican primeramente los modelos lineales de la red. A continuación, se describen en detalle los modelos de las cargas no lineales haciendo especial hincapié en el ajuste del punto de funcionamiento en términos de potencia. Seguidamente se tratan los módulos principales del flujo de cargas con armónicos: flujo de cargas convencional (ya explicado en el Capítulo 3), programa de penetración de armónicos y programa de interacción armónica. Después se explica la interdependencia entre estos módulos con vistas a conformar el flujo de cargas con armónicos, adjuntándose un ejemplo de aplicación. Por último, se hace una breve referencia a cuestiones de normativa.

11.1.1. Consideraciones previas

En muchas ocasiones se asume que el suministro de energía eléctrica está en funcionamiento cuasi estacionario (es decir, que las variaciones de las distintas magnitudes son lentas en comparación con las constantes de tiempo eléctricas), y que la alimentación es perfectamente sinusoidal y, en el caso de sistemas trifásicos, perfectamente equilibrada. Esto sólo se produce, sin embargo, cuando todos los elementos son lineales y estructuralmente equilibrados.

Sin embargo, son cada vez más frecuentes los elementos no lineales, o los que no presentan un comportamiento constante en el tiempo. También se producen transitorios y otros fenómenos físicos que desvían las características de la alimentación de las condiciones ideales inherentes a una onda sinusoidal y estable. Todos estos fenómenos que afectan a la calidad de la onda de tensión se conocen como *perturbaciones electromagnéticas*, y se pueden clasificar según la lista siguiente:

- Perturbaciones conducidas de baja frecuencia, que pueden ser armónicos, interarmónicos, fluctuaciones de tensión, caídas de tensión e interrupciones breves de suministro, desequilibrios, variaciones de frecuencia y presencia de componentes de continua.
- Fenómenos de alta frecuencia conducidos, como transitorios de tensión, tensiones de ondas portadoras o descargas electrostáticas.
- Fenómenos radiados de alta y baja frecuencia, campos eléctricos, campos magnéticos, o campos electromagnéticos radiados.

Los armónicos, que son los que nos ocupan en este capítulo, se definen como *tensiones o corrientes sinusoidales con frecuencias múltiplos enteros de la frecuencia de suministro*. Se trata de un fenómeno de *distorsión* de la forma de onda de la tensión y de la corriente en régimen permanente. Las ondas de tensión y corriente son, por tanto, periódicas, y pueden expresarse como una serie de Fourier, cuya expresión, para una onda de tensión, viene dada por:

$$u(t) = V_o + \sqrt{2} \sum_{k=1}^{\infty} V_k \text{sen}(k\omega_1 t + \theta_k) \quad ; \quad \omega_1 = 2\pi f_1 \quad (11.1)$$

donde ω_1 es la pulsación de la frecuencia de red ($f_1 = 50$ Hz en España) que se denominará *frecuencia fundamental* f_1 , V_o es la componente de continua, V_k es el valor eficaz del armónico k de tensión, y θ_k es el argumento del armónico de tensión.

Puesto que cada armónico tiene asociados un valor eficaz y un argumento, pueden agruparse en un fasor $\mathcal{U}_k = V_k \angle \theta_k$. Lo mismo se puede decir de un armónico de intensidad, $\mathcal{I}_k = I_k \angle \theta_{ik}$.

Sin embargo, parecería que, al constar el sumatorio de un número infinito de términos, el problema pudiera ser inabordable. En las redes reales, sin embargo, sólo es necesario considerar un número limitado de armónicos h . En primer lugar, como se demostrará posteriormente, la magnitud de los armónicos suele decrecer cuanto mayor es su orden, de forma que la normativa considera como armónicos de baja frecuencia aquellos de orden inferior a 50, y en muchas ocasiones sólo se llega hasta el 25.

Se denomina *tasa de un armónico* k , d_k al cociente entre el valor eficaz del armónico y el valor eficaz del fundamental, es decir, en el caso de una onda de tensión:

$$d_k = \frac{V_k}{V_1} \quad (11.2)$$

y se denomina *distorsión armónica total* a la siguiente magnitud:

$$D = \sqrt{\sum_{k=2}^h d_k^2} = \frac{\sqrt{\sum_{k=2}^h V_k^2}}{V_1} \quad (11.3)$$

La razón para el estudio de estos sistemas, que requiere herramientas y algoritmos complejos, estriba en los efectos negativos que produce la distorsión de la forma de onda. Estos efectos son de tres tipos:

- Deterioro del aislamiento, por efectos de las tensiones armónicas, especialmente en los condensadores.
- Efectos térmicos, debido a la circulación de corrientes armónicas. Estas corrientes armónicas producen pérdidas en el cobre de los circuitos eléctricos, o en el hierro de los circuitos magnéticos.
- Disrupción de la carga, que se puede definir como una *operación anormal, o fallo, debido a la distorsión de tensión*. Estos efectos se manifiestan en un mal funcionamiento de los relés, o de los aparatos electrónicos conectados en las redes.

11.1.2. Armónicos característicos y no característicos

En los sistemas eléctricos no se presentan todos los armónicos en la misma proporción. En la mayor parte de las situaciones se produce lo que se denomina *simetría de semionda*, que se puede expresar como la propiedad de que se cumpla que $u(t) = -u(t + \pi/\omega_1)$, esto es, que la forma de onda en el semiciclo negativo a la frecuencia fundamental es exactamente opuesta a la forma de onda en el semiciclo positivo. Puesto que los armónicos pares no cumplen esa propiedad con respecto a la frecuencia fundamental, esto provoca que no se encuentren armónicos pares en la mayor parte de las ocasiones (en la práctica, esto significa que su valor es muy bajo).

Además, en los *sistemas equilibrados con secuencia directa de fases en la alimentación*, las ondas de tensión y de corriente están desfasadas $2\pi/3$ radianes entre sí, por lo que se cumple que:

$$u_b(t) = u_a(t - 2\pi/3\omega_1) \quad ; \quad u_c(t) = u_a(t + 2\pi/3\omega_1) \quad (11.4)$$

siendo:

$$u_a(t) = \sqrt{2} \sum_{k=1}^{\infty} V_k \operatorname{sen}(k\omega_1 t + \theta_k) \quad (11.5)$$

Si se particularizan las ecuaciones (11.4) y (11.5) para los distintos valores de k se obtiene la Tabla 11.1.

Cuadro 11.1. Secuencias en los armónicos en redes equilibradas.

k	fase a	fase b	fase c	secuencia
	θ_k	$\theta_k - k2\pi/3$	$\theta_k + k2\pi/3$	
1	θ_1	$\theta_1 - 2\pi/3$	$\theta_1 + 2\pi/3$	directa
2	θ_2	$\theta_2 + 2\pi/3$	$\theta_2 - 2\pi/3$	inversa
3	θ_3	θ_3	θ_3	homopolar
4	θ_4	$\theta_2 - 2\pi/3$	$\theta_4 + 2\pi/3$	directa
5	θ_5	$\theta_5 + 2\pi/3$	$\theta_5 - 2\pi/3$	inversa
6	θ_6	θ_6	θ_6	homopolar
7	θ_7	$\theta_7 - 2\pi/3$	$\theta_7 + 2\pi/3$	directa

Como se puede observar en la Tabla 11.1, la secuencia de fases de los distintos armónicos se va repitiendo cíclicamente. Pues bien, en sistemas trifásicos con tres hilos (es decir, sin neutro) no puede haber corrientes homopolares, por lo que no se encuentran corrientes de armónicos múltiplos de tres. Además, la mayor parte de los perturbadores trifásicos sólo tienen tres hilos conectados a la red, es decir, que no pueden producir corrientes homopolares.

Las dos consideraciones previas permiten afirmar que *en los sistemas trifásicos equilibrados sin conductor de neutro y con simetría de semionda* sólo existen los armónicos cuyo orden k cumpla la condición $k = 6p \pm 1$, $p = 1, 2, \dots$, es decir, $k = 5, 7, 11, 13, 17, \dots$. Estos armónicos se denominan *armónicos característicos*, y son los que normalmente presentan un valor más alto en las redes reales. El resto de los armónicos se denominan *armónicos no característicos*.

11.2. Modelos de elementos de la red lineal

Los elementos de los sistemas eléctricos pueden clasificarse en elementos lineales y no lineales. En el dominio de la frecuencia, el comportamiento de los elementos lineales se describe mediante relaciones algebraicas lineales. Esto significa que ante una tensión armónica de orden k el elemento lineal responde con una intensidad armónica de la misma frecuencia. Este comportamiento se representa mediante una impedancia, cuyo valor es variable con la frecuencia del armónico considerado. Los elementos no lineales se describen mediante un conjunto de ecuaciones no lineales que ligan todas las tensiones e intensidades armónicas consideradas y que por tanto no son asimilables a una representación por impedancias.

En las redes eléctricas predominan los elementos lineales, que son generadores, transformadores, líneas de transporte, filtros y cargas convencionales. Si bien algunos de estos elementos incluye elementos no lineales (como los circuitos magnéticos en los generadores y transformadores), su diseño se ha realizado para que la incidencia de estas no linealidades sea muy pequeña, y en este capítulo se considerarán, por tanto, como elementos lineales. Desde el punto de vista del estudio de la distorsión armónica, los sistemas eléctricos se pue-

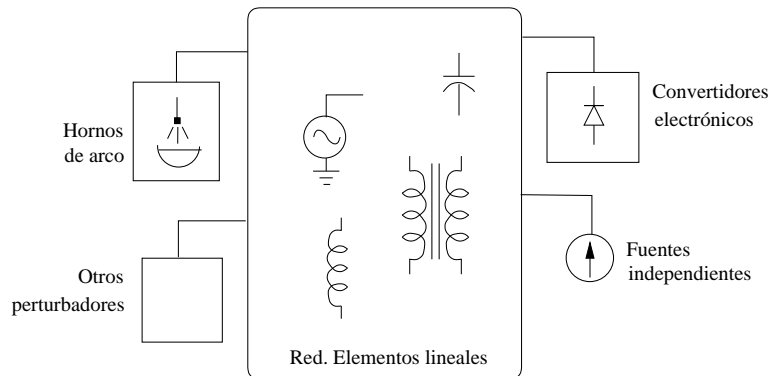


Figura 11.1. Esquema de una red eléctrica con perturbadores.

den representar como se indica en la Figura 11.1, esto es, como un número relativamente pequeño de cargas no lineales o perturbadores, que inyectan corrientes distorsionadas en una red formada exclusivamente por elementos lineales. El comportamiento de la red lineal, para cada frecuencia, será el de un conjunto de impedancias, con las que se puede formar una matriz de admitancias nodales para su análisis por nudos.

En este apartado se presentan los modelos de los elementos más comunes en las redes eléctricas. Estos modelos describen la variación de la impedancia de dichos elementos con la frecuencia. A partir de las impedancias a las distintas frecuencias, se obtendrá una matriz de admitancias nodales que se empleará en los distintos métodos de análisis armónico que se describen en este capítulo.

11.2.1. Líneas de transporte

Una línea eléctrica es un elemento de parámetros distribuidos, que, a frecuencia de red, y para longitudes cortas (hasta 240 km aproximadamente [12]), se puede aproximar por un

elemento de parámetros concentrados. Sin embargo, en el análisis a frecuencias superiores a la fundamental, esta distancia límite se reduce, por lo que en muchas ocasiones es necesario su modelado como un elemento de parámetros distribuidos. En cualquiera de los dos casos, se representa mediante un equivalente en π , tal como se muestra en la Figura 11.2.

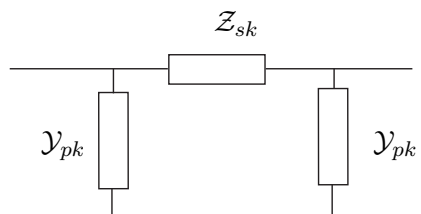


Figura 11.2. Equivalente en π de una línea eléctrica.

En esta ecuación, Z_{sk} e Y_{pk} son respectivamente la impedancia serie y admitancia paralelo para el armónico k . Si el modelo considerado es el de línea de parámetros distribuidos estos valores son:

$$Z_{sk} = Z_{ok} \sinh \gamma_k l ; Y_{pk} = \frac{1}{Z_{ok}} \tanh \frac{\gamma_k l}{2} \quad (11.6)$$

donde, como es sabido,

$$Z_{ok} = \sqrt{\frac{R' + jk\omega_1 L'}{G' + jk\omega_1 C'}} ; \gamma_k = \sqrt{(R' + jk\omega_1 L')(G' + jk\omega_1 C')} \quad (11.7)$$

Estas ecuaciones se aproximan, para distancias cortas, a las de una línea de parámetros concentrados:

$$Z_{sk} = R' \cdot l + jk\omega_1 L' \cdot l ; Y_{pk} = jk\omega_1 C' l / 2 \quad (11.8)$$

siendo R' , L' la resistencia e inductancia serie por unidad de longitud, G' , C' la conductancia y capacidad por unidad de longitud, y l la longitud del conductor.

Al estudiar estos parámetros para frecuencias más altas que la fundamental (hasta 2 500 Hz), se tiene que tener en cuenta el efecto pelicular. Este efecto se define como el aumento de la resistencia con la frecuencia debido a la distribución heterogénea de la densidad de corriente en un conductor, con la consiguiente disminución de la sección aparente. La variación de la resistencia toma el valor aproximado [14] dado por la siguiente expresión:

$$R_k = R_{cc} \left(1 + \frac{0,646k^2}{192 + 0,518k^2} \right) \quad (11.9)$$

11.2.2. Generadores

En el análisis nodal que se va a efectuar, los generadores se representan, tal como se puede observar en la Figura 11.3, a la frecuencia fundamental, como una fuente de corriente en paralelo con una impedancia, de valor:

$$Z_g = R_g + jX_g \quad (11.10)$$

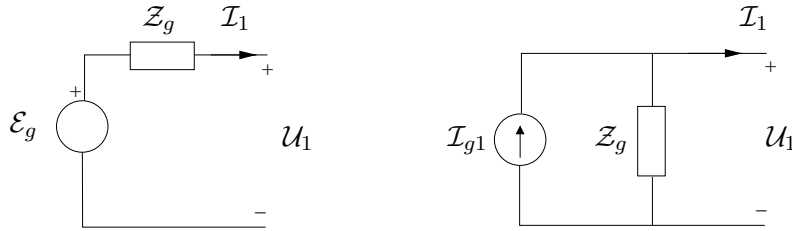


Figura 11.3. Circuitos equivalentes de un generador a frecuencia fundamental.

en donde R_g es el valor de la resistencia en alterna de los devanados. En cuanto al valor de X_g , en algunas referencias ([18] y [17]) éste aparece como la reactancia de secuencia inversa de los generadores, que tiene el valor siguiente:

$$X_g = \frac{X_d'' + X_q''}{2} \quad (11.11)$$

donde X_d'' y X_q'' son las reactancias subtransitorias de eje directo y eje transversal de la máquina síncrona, a frecuencia fundamental. Otros autores, como [1], consideran que debe ser únicamente la reactancia subtransitoria de eje directo, X_d'' . Esta diferencia sólo se manifiesta en las máquinas de polos salientes.

La fuente de corriente se calcula a partir de la fuente de tensión equivalente para la impedancia de la máquina a frecuencia fundamental. El valor de esta fuente de tensión depende de la potencia activa y reactiva generada por la máquina y de la tensión en el nudo de conexión de la misma. Partiendo de estos datos, que pueden haber sido obtenidos de un flujo de cargas, la expresión de la fuente de tensión del modelo de generador a frecuencia fundamental será:

$$\mathcal{E}_g = \mathcal{U}_1 + \mathcal{Z}_g \left(\frac{P_1 + jQ_1}{3\mathcal{U}_1} \right)^* \quad (11.12)$$

El valor de la fuente de corriente en paralelo con la impedancia, equivalente a la fuente de tensión en serie con la misma (véase la Figura 11.3), es:

$$\mathcal{I}_{g1} = \frac{\mathcal{E}_g}{\mathcal{Z}_g} \quad (11.13)$$

A las frecuencias armónicas, el generador sólo se representa (puesto que la generación a estas frecuencias es despreciable) mediante una impedancia de valor:

$$\mathcal{Z}_{gk} = R_{gk} + jX_{gk} = R_g\sqrt{k} + jkX_g \quad (11.14)$$

En esta expresión se tiene en cuenta el efecto pelicular, que aumenta el valor de la resistencia conforme aumenta la frecuencia considerada.

11.2.3. Transformadores

Los transformadores se modelan a partir de su impedancia serie (de cortocircuito). En general, no se suele considerar la impedancia magnetizante [1]. La expresión de esta

impedancia, a las frecuencias de los distintos armónicos, teniendo en cuenta la influencia del efecto pelicular, es [2]:

$$\mathcal{Z}_{tk} = R_{tk} + jX_{tk} = R_t\sqrt{k} + jkX_t \quad (11.15)$$

donde R_t y X_t son la resistencia y reactancia de cortocircuito del transformador. Existen otros modelos de evolución con la frecuencia de esta impedancia, que se pueden consultar en [1].

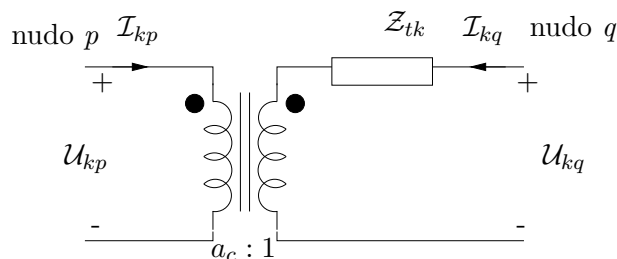


Figura 11.4. Circuito monofásico equivalente de un transformador trifásico.

El circuito equivalente monofásico de un transformador trifásico es un cuadripolo, como el representado en la Figura 11.4, en el que se tiene que tener en cuenta el desfase introducido por el grupo de conexión del transformador. Este fenómeno se representa mediante una relación de transformación compleja $a_c : 1$, siendo a_c :

$$a_c = a \cdot e^{j\alpha_t \delta_k} \quad (11.16)$$

donde a es la relación entre tensiones primaria y secundaria, α_t es el desfase introducido por el grupo de conexión, y δ_k vale $+1$ o -1 según la secuencia del armónico considerado sea positiva o negativa, respectivamente.

La matriz de admitancias del cuadripolo de un transformador viene dada por:

$$\begin{bmatrix} \mathcal{I}_{kp} \\ \mathcal{I}_{kq} \end{bmatrix} = \frac{1}{\mathcal{Z}_{tk}} \begin{bmatrix} 1/a^2 & -1/a_c^* \\ -1/a_c & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \mathcal{U}_{kp} \\ \mathcal{U}_{kq} \end{bmatrix} \quad (11.17)$$

Los términos de esta matriz de admitancias se incorporan a los respectivos términos propios y mutuos de la matriz de admitancias del sistema en los nudos p y q .

11.2.4. Carga convencional

Debido a su carácter indefinido, es difícil conocer el comportamiento de la carga convencional cuando la frecuencia varía, al tratarse de una agregación de distintos elementos con comportamientos diferentes, y se han propuesto distintos modelos, sin que ninguno se pueda considerar definitivo [1]. El efecto de la carga es, por lo general, el de *amortiguar*, esto es, reducir las tensiones armónicas presentes en la red.

De entre los modelos existentes, se pueden señalar los dos mostrados en la Figura 11.5, que consisten en representar una impedancia en serie y en paralelo. Los parámetros de estas impedancias, a frecuencia fundamental, son:

$$R_{cp} = \frac{3V_1^2}{P_1} ; X_{cp} = \frac{3V_1^2}{Q_1} ; R_{cs} = \frac{3P_1V_1^2}{P_1^2 + Q_1^2} ; X_{cs} = \frac{3Q_1V_1^2}{P_1^2 + Q_1^2} \quad (11.18)$$

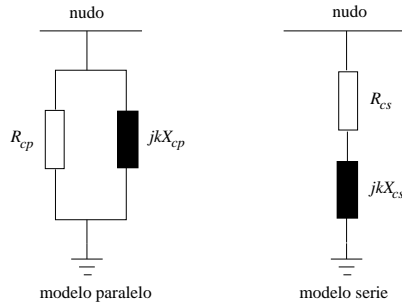


Figura 11.5. Modelos serie y paralelo de carga.

En donde R_{cp} , X_{cp} , R_{cs} y X_{cs} son las resistencias y reactancias de los modelos paralelo y serie, P_1 y Q_1 son las potencias trifásicas consumidas, activa y reactiva, del armónico fundamental, y V_1 es el primer armónico de la tensión simple en el nudo considerado.

La impedancia a los distintos armónicos tomará los valores siguientes en cada caso:

$$Z_{cpk} = \frac{R_{cp}(kX_{cp})^2}{R_{cp}^2 + (kX_{cp})^2} + j \frac{kX_{cp}R_{cp}^2}{R_{cp}^2 + (kX_{cp})^2} \quad ; \quad Z_{csk} = R_{cs} + jkX_{cs} \quad (11.19)$$

Como se puede comprobar perfectamente en las expresiones, a medida que aumenta la frecuencia, el modelo paralelo tiende a tomar el valor $Z_{cpk} \rightarrow R_{cp}$ en tanto que en el modelo serie la impedancia Z_{cpk} tiende a infinito. En este último caso, la amortiguación desaparece. Por esta razón, la carga paralelo tiene un efecto más amortiguador. Se puede realizar cualquier combinación de ambos tipos de carga para representar distintos grados de amortiguación de la carga.

11.2.5. Filtros y baterías de condensadores

Con el fin de reducir las sobretensiones armónicas producidas por resonancias o por otros motivos, se suelen colocar filtros, dispuestos en paralelo, como caminos de baja impedancia a las frecuencias armónicas, o al menos a aquellas en las que se suponga que puede producirse un valor alto de la tensión armónica. Estos filtros se suelen colocar en paralelo con los perturbadores. Aunque existen distintos tipos de filtros, los más corrientes son los filtros sintonizados a una frecuencia y los filtros paso bajo, que limitan las inyecciones de corriente a frecuencias altas. Los filtros suelen ser, además, compensadores, esto es, a la frecuencia fundamental se comportan como condensadores, que suministran parte de la potencia reactiva demandada por el perturbador conectado.

Las impedancias de los filtros para el armónico k serán:

$$Z_{fs,k} = R_{fs} + j \left(kX_{fs} - \frac{1}{kB_{fs}} \right) \quad ; \quad Z_{fp,k} = \frac{jkX_{fp}R_{fp}}{R_{fp} + jkX_{fp}} - j \frac{1}{kB_{fp}} \quad (11.20)$$

donde $Z_{fs,k}$ es la impedancia al armónico k del filtro sintonizado, $Z_{fp,k}$ es la impedancia al armónico k del filtro paso bajo, y R_{fs} , X_{fs} , B_{fs} , R_{fp} , X_{fp} y B_{fp} los parámetros a frecuencia fundamental de ambos tipos de filtros, tal como aparecen en la Figura 11.6. Estos

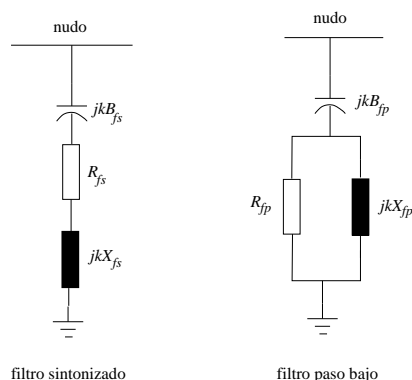


Figura 11.6. Filtros sintonizado y paso bajo.

filtros se harán puramente resistivos a su pulsación de sintonía, que será, respectivamente, $\omega_{os} = k_{os}\omega_1$ para el filtro sintonizado, y $\omega_{op} = k_{op}\omega_1$ para el filtro paso bajo. Los valores de k_{os} y k_{op} tienen la expresión siguiente:

$$k_{os} = \frac{1}{\sqrt{X_{fs}B_{fs}}} ; k_{op} = \frac{1}{\sqrt{B_{fp}X_{fp} - X_{fp}^2/R_{fp}^2}} \quad (11.21)$$

Estos filtros se emplean conjuntamente. Los filtros sintonizados se sintonizan a los armónicos característicos, principalmente $k = 5, 7, 11, 13$. Los filtros paso bajo se sintonizan a frecuencias superiores a las del armónico 13.

A frecuencia fundamental, estos filtros se comportan como condensadores, que suministran, aproximadamente, la potencia reactiva siguiente:

$$Q_{s1} \simeq 3 \frac{k_{os}^2}{k_{os}^2 - 1} B_{fs} V_1^2 ; Q_{p1} \simeq 3 B_{fp} V_1^2 \quad (11.22)$$

donde Q_{s1} y Q_{p1} son las potencias reactivas al fundamental que suministran el filtro sintonizado y el paso bajo, respectivamente.

Por último, conviene señalar que las baterías de condensadores se pueden considerar como un caso particular de filtro sintonizado en donde $R_{fs} = X_{fs} = 0$.

11.3. Modelos de cargas no lineales

Existen numerosos tipos de cargas no lineales que se conectan a la red eléctrica en sus distintos niveles de tensión. En baja tensión cabe hacer referencia a las lámparas fluorescentes y a los rectificadores no controlados con filtrado capacitivo empleados en las fuentes de diversos equipos electrónicos y en la alimentación a los accionamientos de motores eléctricos [10]. En media tensión destacan los rectificadores trifásicos no controlados con filtrado inductivo utilizados en las subestaciones de tracción para alimentar a la catenaria. En la red de transporte las cargas no lineales a ella conectadas manejan grandes potencias, dando lugar a mayores niveles unitarios de inyección armónica. Entre ellas es importante señalar

el efecto debido a los hornos de arco en corriente alterna [7], los compensadores estáticos de potencia reactiva [19], [26] y los rectificadores controlados con filtrado inductivo [13] empleados en hornos de arco de corriente continua [8] y en los enlaces de corriente continua en alta tensión [20]. Este tipo de cargas presenta una estructura a tres hilos como indica la Figura 11.7.

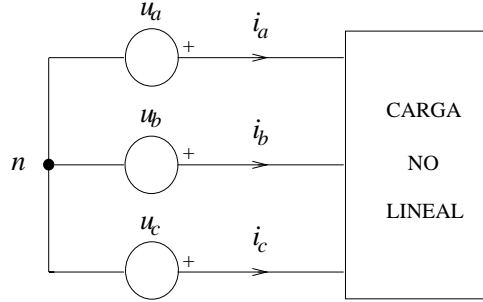


Figura 11.7. Esquema básico de carga no lineal.

Conocidas las tensiones de alimentación u_a , u_b y u_c y el modelo de carga no lineal, es posible determinar las corrientes i_a , i_b e i_c con su contenido armónico. Por una mayor sencillez de exposición, se supondrá que el sistema indicado en la Figura 11.7 presenta un comportamiento equilibrado. En estas condiciones, basta con analizar las magnitudes de la fase “a” dadas por:

$$u_a(t) = \sqrt{2} \sum_{k=1}^h V_k \operatorname{sen}(k\omega_1 t + \theta_k) \quad \text{con } k = 1, 5, 7, 11, \dots \quad (11.23)$$

$$i_a(t) = \sqrt{2} \sum_{k=1}^h I_k \operatorname{sen}(k\omega_1 t + \theta_{ik}) \quad \text{con } k = 1, 5, 7, 11, \dots \quad (11.24)$$

en donde h es el número considerado de armónicos característicos. En el análisis siguiente se van a manejar los fasores armónicos \mathcal{U}_k e \mathcal{I}_k asociados a los valores eficaces, y cuyas expresiones en forma módulo argumental y binómica son:

$$\mathcal{U}_k = V_k \angle \theta_k = V_{rk} + jV_{xk} \quad ; \quad \mathcal{I}_k = I_k \angle \theta_{ik} = I_{rk} + jI_{xk} \quad (11.25)$$

Por otra parte, las tensiones restantes u_b y u_c pueden obtenerse por medio de las expresiones siguientes:

$$u_b(t) = \sqrt{2} \sum_{k=1}^h V_k \operatorname{sen}\left(k\omega_1 t + \theta_k - \frac{2\pi}{3}\delta_k\right) \quad (11.26)$$

$$u_c(t) = \sqrt{2} \sum_{k=1}^h V_k \operatorname{sen}\left(k\omega_1 t + \theta_k + \frac{2\pi}{3}\delta_k\right) \quad (11.27)$$

$$\delta_k = 1 \quad \text{para } k = 1, 7, 13, \dots \quad ; \quad \delta_k = -1 \quad \text{para } k = 5, 11, 17, \dots \quad (11.28)$$

Por tanto, las tensiones de línea y otras tensiones internas de los elementos no lineales podrán expresarse a partir de los términos V_k , θ_k y δ_k .

Por último, conviene recordar que el objetivo de esta sección consiste en obtener expresiones analíticas de las corrientes armónicas \mathcal{I}_k en función de las tensiones armónicas \mathcal{U}_k y de una serie de parámetros de cada elemento no lineal. Para simplificar la notación se adoptará una pulsación ω_1 igual a 1 rad/s en las ecuaciones (11.23), (11.24), (11.26) y (11.27). De esta manera, tanto los instantes de tiempo como los ángulos se expresarán en radianes o en grados, y las reactancias a frecuencia fundamental de las bobinas coincidirán con su inductancia.

11.3.1. Modelo de rectificador

La configuración trifásica más utilizada en la práctica corresponde al rectificador de seis pulsos representado en la Figura 11.8, el cual está formado por seis válvulas controladas y numeradas según el orden de disparo. En este esquema se incluyen los parámetros X , X_F y V_d correspondientes respectivamente a la reactancia de conmutación, a la reactancia de alisado y a la tensión de continua en la carga representada por una fuente de tensión ideal.

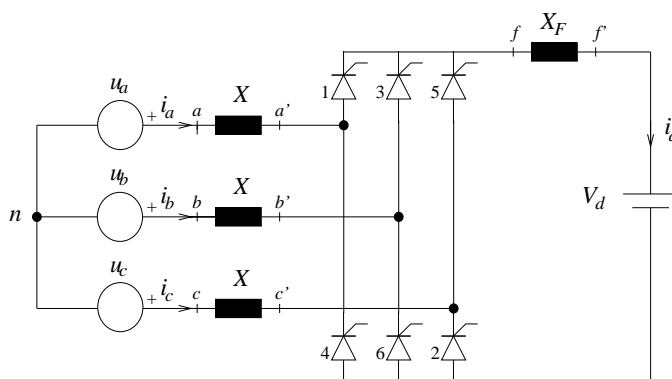


Figura 11.8. Esquema para modelo de rectificador.

El modo de funcionamiento normal de este rectificador ha sido ampliamente tratado en los cursos de electrónica de potencia. Por consiguiente, aquí sólo se recordarán los aspectos más relevantes para entender las ecuaciones del modelo. Se sabe que la corriente i_a es una magnitud alterna y distorsionada que presenta simetría de semionda. En consecuencia, sólo es necesario analizar su semionda positiva, tal y como se indica en la Tabla 11.2, en donde:

α es el instante de disparo de la válvula 1,

δ es el instante final de la conmutación entre las válvulas 1 y 5,

$\mu = \delta - \alpha$ es el ángulo de conmutación,

$f = \frac{X_F}{X}$ es un factor adimensional que representa el nivel de filtrado inductivo.

Este último factor está comprendido entre el valor mínimo ($f = 0$) y el máximo ($f = \infty$). Para $f = 0$ se tiene máximo nivel de rizado en la corriente i_d y para $f = \infty$ se obtiene rizado nulo (alisado perfecto).

Cuadro 11.2. Construcción de la semionda positiva de $u_{aa'}(t)$.

	Intervalo	Válvulas en conducción	$u_{aa'}$	$u_{ff'}$
1	(α, δ)	1,5,6	$\frac{1}{2}(u_{ac} + \frac{1}{f}u_{ff'})$	$\frac{-f}{3+2f}(3u_b + 2V_d)$
2	$(\delta, \alpha + \frac{\pi}{3})$	1,6	$\frac{1}{f}u_{ff'}$	$\frac{f}{2+f}(u_{ab} - V_d)$
3	$(\alpha + \frac{\pi}{3}, \delta + \frac{\pi}{3})$	1,2,6	$\frac{1}{f}u_{ff'}$	$\frac{f}{3+2f}(3u_a - 2V_d)$
4	$(\delta + \frac{\pi}{3}, \alpha + \frac{2\pi}{3})$	1,2	$\frac{1}{f}u_{ff'}$	$\frac{f}{2+f}(u_{ac} - V_d)$
5	$(\alpha + \frac{2\pi}{3}, \delta + \frac{2\pi}{3})$	1,2,3	$\frac{1}{2}(u_{ab} + \frac{1}{f}u_{ff'})$	$\frac{-f}{3+2f}(3u_c + 2V_d)$
6	$(\delta + \frac{2\pi}{3}, \alpha + \pi)$	1,3	0	$\frac{f}{2+f}(u_{bc} - V_d)$

En la Tabla 11.2 se observa que las válvulas 1, 2 y 3 se disparan consecutivamente con un espaciado de 60 grados ($\pi/3$ radianes). Además, los intervalos de conmutación 2, 4 y 6 presentan la misma duración μ . Por otra parte, y suponiendo que los tiristores son ideales, las tensiones $u_{aa'}$ y $u_{ff'}$ pueden obtenerse a partir de las tensiones u_a, u_b, u_c, V_d y el factor f realizando el análisis del circuito de la Figura 11.8 en las seis topologías de conducción indicadas en la Tabla 11.2. Resta por tanto calcular los ángulos α y δ para que la tensión $u_{aa'}$ quede completamente definida. En resumen, el modelo toma como datos las magnitudes $u_a(t), V_d, X,$ y X_F y realiza las operaciones siguientes [8]:

- Determinación de los ángulos α y δ .
- Cálculo de los armónicos de $u_{aa'}$ e i_a .

En los rectificadores controlados, el instante de disparo α se obtiene añadiendo al paso por cero t_o de la tensión de línea un ángulo de control α_o o ángulo de disparo, de modo que:

$$\alpha = t_o + \alpha_o \tag{11.29}$$

Una vez especificado el ángulo α_o , el instante de disparo α de la válvula 1 se determina a partir del paso por cero de la tensión de línea u_{ac} . Teniendo en cuenta las ecuaciones (11.23) y (11.27), la tensión u_{ac} en el instante t_o tiene por expresión:

$$u_{ac}(t_o) = 0 = \sqrt{6} \sum_{k=1}^h V_k \operatorname{sen}(kt_o + \theta_k - \frac{\pi}{6}\delta_k) \quad (11.30)$$

Esta ecuación es no lineal con respecto a t_o . Por consiguiente, su resolución requiere de un algoritmo iterativo tal como el de Newton-Raphson. En algunos casos, la tensión u_{ac} es filtrada para obtener el paso por cero. En estas condiciones, y suponiendo un filtrado perfecto, el paso por cero de la componente fundamental coincide con: $t_o = \pi/6 - \theta_1$. Una vez determinado t_o , el ángulo α se obtiene directamente de la ecuación (11.29). En los rectificadores no controlados a base de diodos, el instante de disparo α de la válvula 1 tiene lugar cuando, estando conduciendo las válvulas 5 y 6, la tensión ánodo-cátodo $u_{a'f}$ pasa por cero. Tras un simple análisis del circuito de la Figura 11.8, esta condición equivale a:

$$u_{a'f}(t_o) = 0 = u_{ac}(t_o) - \frac{u_{bc}(t_o) + V_d}{2 + f} \quad (11.31)$$

Teniendo en cuenta las relaciones (11.23), (11.26) y (11.27), la ecuación (11.31) puede expresarse mediante:

$$\sqrt{2} \sum_{k=1}^h V_k [3 \operatorname{sen}(kt_o + \theta_k) + \sqrt{3} f \operatorname{sen}(kt_o + \theta_k - \frac{\pi}{6}\delta_k)] = V_d \quad (11.32)$$

La solución mediante el algoritmo de Newton de esta ecuación no lineal en t_o proporciona directamente el instante de disparo α de un puente de diodos.

El ángulo δ puede determinarse observando las magnitudes de continua en la reactancia de alisado. En efecto, la corriente en X_F presenta una componente de continua I_d . Sin embargo, la tensión $u_{ff'}$ no tiene componente de continua. Dado que i_d y $u_{ff'}$ son magnitudes periódicas de período $\pi/3$, esta condición puede expresarse mediante:

$$\int_{\alpha}^{\alpha+\pi/3} u_{ff'}(t) dt = 0 \quad (11.33)$$

Teniendo en cuenta las equivalencias de $u_{ff'}$ en los seis intervalos de la Tabla 11.2, y tras una serie de desarrollos, la ecuación (11.33) puede expresarse en términos de tensiones armónicas por medio de:

$$\begin{aligned} & \frac{3\sqrt{2}}{3+2f} \sum_{k=1}^h \frac{V_k}{k} \delta_k \left[\operatorname{sen}(k\delta + \theta_k - \frac{\pi}{6}\delta_k) - \operatorname{sen}(k\alpha + \theta_k - \frac{\pi}{6}\delta_k) \right] + \\ & + \sqrt{6} \sum_{k=1}^h \frac{V_k}{k} \left[\cos(k\alpha + \theta_k - \frac{\pi}{6}\delta_k) + \cos(k\delta + \theta_k - \frac{\pi}{6}\delta_k) \right] = 2V_d \left(\frac{\pi}{3} + \frac{\delta - \alpha}{3+2f} \right) \end{aligned} \quad (11.34)$$

En esta relación, el ángulo α se conoce ya que se ha calculado previamente mediante la aplicación de las ecuaciones (11.29), (11.30) y (11.31). Por consiguiente, la expresión (11.34) es una ecuación no lineal respecto del ángulo δ que se resuelve por medio del método de Newton, tomando como valor inicial para δ el valor final obtenido para α .

Una vez obtenidos los ángulos α y δ , es posible determinar los armónicos de la intensidad i_a a partir de los armónicos de la tensión $u_{aa'}$ en la reactancia de conmutación. Es decir, se tiene que:

$$\mathcal{I}_k = \frac{\mathcal{U}_{aa'k}}{jkX} = \frac{1}{jkX} \left[j \frac{\sqrt{2}}{\pi} \int_{\alpha}^{\alpha+\pi} u_{aa'}(t) \epsilon^{-jkt} dt \right] \quad (11.35)$$

En esta ecuación se observa que la expresión encerrada entre paréntesis corresponde al armónico de orden k de la tensión $u_{aa'}$. En el denominador se tiene la reactancia de conmutación a la frecuencia de dicho armónico. En consecuencia, la ecuación (11.35) proporciona el armónico de orden k de la intensidad $i_a(t)$. Teniendo en cuenta las expresiones (11.23), (11.25), (11.26), (11.27) y (11.28), y las equivalencias dadas en la Tabla 11.2 para la tensión $u_{aa'}$, la ecuación (11.35) puede transformarse, después de extensos desarrollos, en la forma siguiente:

$$\mathcal{I}_k = \mathcal{Y}_{kk1} \mathcal{U}_k + \sum_{m=1, m \neq k}^h \mathcal{Y}_{km1} \mathcal{U}_m + \sum_{m=1}^h \mathcal{Y}_{km2} \mathcal{U}_m^* + \mathcal{Y}_{kDC} V_d \quad (11.36)$$

en donde k y m son enteros correspondientes al orden del armónico y el símbolo * indica magnitud compleja conjugada. Las admitancias \mathcal{Y} que aparecen en la ecuación (11.36) son función de los ángulos α y δ y vienen dadas por:

$$\mathcal{Y}_{kk1} = \frac{3}{2\pi kX} \left[-j(\delta - \alpha) \left(1 + \frac{3}{3+2f} - \frac{2}{2+f} \right) - j \frac{\pi}{3} \frac{2}{2+f} \right] \quad (11.37)$$

$$\mathcal{Y}_{km1} = \frac{3}{2\pi kX} \left[A_1 \frac{\epsilon^{-j(k-m)\delta}}{k-m} - B_1 \frac{\epsilon^{-j(k-m)\alpha}}{k-m} \right] \quad (11.38)$$

$$\mathcal{Y}_{km2} = \frac{-3}{2\pi kX} \left[A_2 \frac{\epsilon^{-j(k+m)\delta}}{k+m} - B_2 \frac{\epsilon^{-j(k+m)\alpha}}{k+m} \right] \quad (11.39)$$

$$\mathcal{Y}_{kDC} = -j \frac{\sqrt{2}}{\pi kX} \left[A \frac{\epsilon^{-jk\delta}}{k} - B \frac{\epsilon^{-jk\alpha}}{k} \right] \quad (11.40)$$

en donde

$$A_1 = \epsilon^{j\frac{\pi}{6}(\delta_k - \delta_m)} + \frac{3}{3+2f} \epsilon^{-j\frac{\pi}{3}(\delta_k - \delta_m)} - \frac{2}{2+f} \epsilon^{-j\frac{\pi}{6}(\delta_k - \delta_m)} \quad (11.41)$$

$$B_1 = \epsilon^{j\frac{\pi}{6}(\delta_k - \delta_m)} + \frac{3}{3+2f} \epsilon^{-j\frac{\pi}{3}(\delta_k - \delta_m)} - \frac{2}{2+f} \epsilon^{-j\frac{\pi}{2}(\delta_k - \delta_m)} \quad (11.42)$$

$$A_2 = \epsilon^{j\frac{\pi}{6}(\delta_k + \delta_m)} + \frac{3}{3+2f} \epsilon^{-j\frac{\pi}{3}(\delta_k + \delta_m)} - \frac{2}{2+f} \epsilon^{-j\frac{\pi}{6}(\delta_k + \delta_m)} \quad (11.43)$$

$$B_2 = \epsilon^{j\frac{\pi}{6}(\delta_k + \delta_m)} + \frac{3}{3+2f} \epsilon^{-j\frac{\pi}{3}(\delta_k + \delta_m)} - \frac{2}{2+f} \epsilon^{-j\frac{\pi}{2}(\delta_k + \delta_m)} \quad (11.44)$$

$$A = \frac{3}{3+2f} \epsilon^{-j\frac{\pi}{3}\delta_k} - \frac{\sqrt{3}}{2+f} \epsilon^{-j\frac{\pi}{6}\delta_k} \quad (11.45)$$

$$B = \frac{3}{3+2f} \epsilon^{-j\frac{\pi}{3}\delta_k} - \frac{\sqrt{3}}{2+f} \epsilon^{-j\frac{\pi}{2}\delta_k} \quad (11.46)$$

Se observa en la relación (11.36) que en la intensidad armónica de orden k no sólo interviene la tensión armónica de orden k sino otras tensiones armónicas de orden m , dando lugar al fenómeno denominado como interacción armónica entre frecuencias distintas y cuyas principales manifestaciones se ponen de relieve en las admitancias de acoplamiento \mathcal{Y}_{km1} e \mathcal{Y}_{km2} .

En resumen, el modelo de rectificador toma como datos de entrada las tensiones armónicas de $u_a(t)$, las reactancias X y X_F y los parámetros α_o y V_d , y determina los ángulos α y δ resolviendo las ecuaciones mencionadas anteriormente. A continuación, se calculan los armónicos de intensidad empleando la ecuación (11.36). Esta expresión, cuya forma parece ser bastante compleja, presenta una formulación muy compacta y fácil de programar por ordenador, teniendo la ventaja sustancial de considerar el caso más general en el que la tensión de alimentación está distorsionada y en el que existe rizado en la corriente rectificadora $i_d(t)$. En el caso de que no se considere rizado ($f \rightarrow \infty$), las admitancias anteriores se simplifican notablemente.

Otra simplificación importante consiste en suponer que la tensión $u_a(t)$ es puramente sinusoidal. En estas condiciones, la ecuación (11.36) se transforma en

$$\mathcal{I}_k = \mathcal{Y}_{k11}\mathcal{U}_1 + \mathcal{Y}_{k12}\mathcal{U}_1^* + \mathcal{Y}_{kDC}V_d \quad (11.47)$$

Se observa por tanto que sólo interviene la componente fundamental de la tensión en el cálculo de los armónicos de intensidad. Si además se supone que no existe rizado, las admitancias de la ecuación (11.47) se simplifican notablemente, obteniéndose las expresiones propuestas por Kimbark [15]. Esta formulación de corrientes armónicas a tensión sinusoidal puede ser muy útil para obtener un modelo simplificado de emisión armónica a emplear en programas de simulación que combinen flujos de cargas convencionales y programas de penetración de armónicos. Por último, puede plantearse una simplificación aún mayor consistente en suponer nula la reactancia de conmutación X , bajo la hipótesis de rizado nulo. En estas condiciones, hay que especificar la componente de continua I_d de la corriente en lugar de la tensión V_d , con lo que las corrientes armónicas de la ecuación (11.47) se transforman en

$$\mathcal{I}_k = \sqrt{6} \frac{I_d}{\pi k} (-1)^p \epsilon^{-jk(\alpha_o - \theta_1)} \quad ; \quad k = 6p \pm 1 \quad (11.48)$$

en donde p es un entero que toma los valores 0, 1, 2, etc. Esta relación permite deducir la conocida ley de emisión armónica de rectificadores ideales dada por

$$I_k = \frac{I_1}{k} \quad (11.49)$$

Esta ley se utiliza frecuentemente en la práctica como una aproximación muy rudimentaria para la evaluación de corrientes armónicas en función de la componente fundamental, y contrasta fuertemente con la predicción mucho más exacta indicada en la expresión (11.36).

11.3.2. Modelo de horno de arco

Los hornos de arco son equipos eléctricos que se utilizan en la industria para la fusión de chatarra. La fusión se produce al aplicar calor procedente del arco eléctrico que se establece entre la punta de los electrodos y la chatarra situada en la cuba del horno. El arco presenta un comportamiento no lineal, dando lugar a la aparición de armónicos, desequilibrios e interarmónicos. Estos últimos provocan el denominado efecto flicker que se manifiesta en el parpadeo de las lámparas incandescentes. Prescindiendo inicialmente de los desequilibrios y de los interarmónicos antes mencionados, se puede modelar el horno atendiendo únicamente al comportamiento no lineal del arco en régimen no sinusoidal y equilibrado. El arco eléctrico puede representarse por medio de una resistencia no lineal cuya característica u-i se muestra en la Figura 11.9. Esta representación, relativamente sencilla, proporciona resultados razonablemente aceptables. En este modelo se supone que el arco presenta una tensión constante e igual a $+V_{\text{arc}}$ en la semionda positiva de la corriente y $-V_{\text{arc}}$ en la semionda negativa. El valor del parámetro V_{arc} está directamente relacionado con la posición de los electrodos respecto de la chatarra, es decir, la longitud del arco. La instalación dispone de un sistema de regulación del punto de funcionamiento del horno que se basa en la actuación sobre la posición de los electrodos. En el modelo, esta actuación se manifiesta en el valor de V_{arc} .

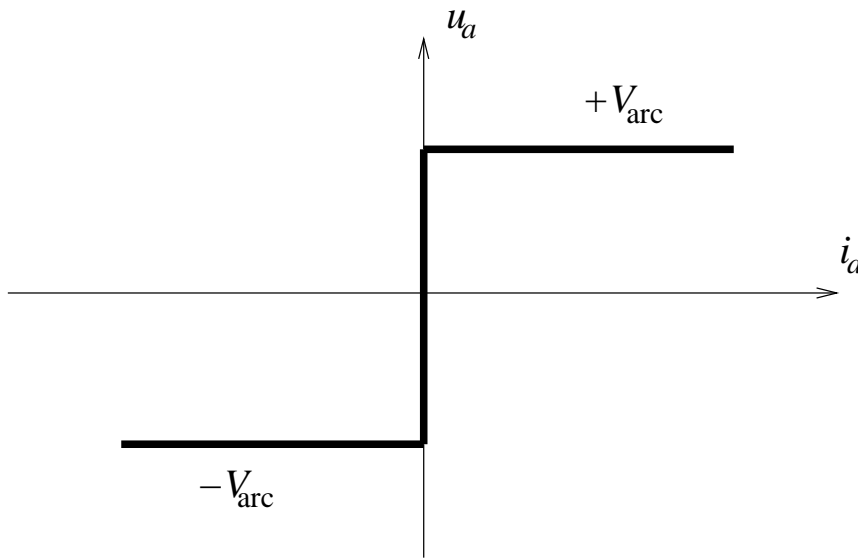


Figura 11.9. Característica u-i del arco eléctrico en la fase a.

La característica u-i de la Figura 11.9 se puede obtener combinando diodos y fuentes de tensión V_{arc} , tal y como indica la Figura 11.10. En este esquema, la reactancia X incluye la reactancia del transformador del horno y la reactancia de los cables que unen la salida de este transformador con los electrodos. Esta reactancia X se calcula en el lado de baja del transformador del horno. A continuación, se procede a analizar el comportamiento del horno en modo continuo y discontinuo. El modo continuo de funcionamiento se tiene cuando la corriente i_a se anula solamente en los instantes de paso por cero. En el modo discontinuo

existen intervalos de tiempo en los que la corriente es nula.

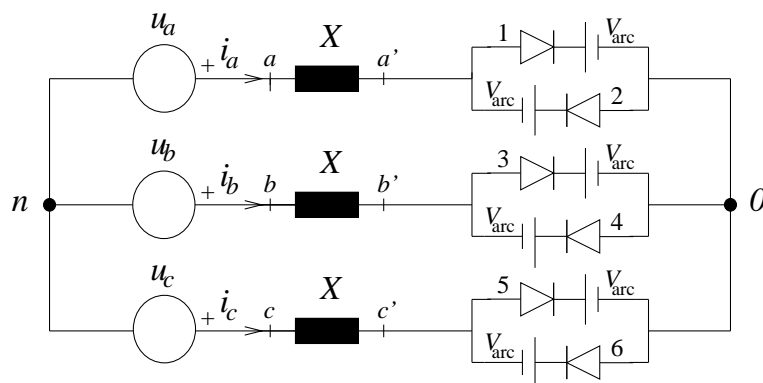


Figura 11.10. Esquema para modelo de horno de arco.

Mediante una observación detenida del esquema de la Figura 11.10 se comprueba que existe una equivalencia con el circuito de la Figura 11.11 correspondiente a un puente de diodos de seis pulsos [10].

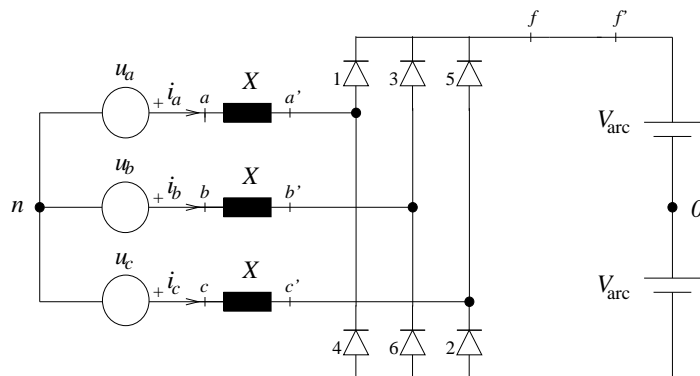


Figura 11.11. Esquema equivalente de horno de arco.

Si ahora se comparan los esquemas de las Figuras 11.11 y 11.8 se observa que un horno de arco en régimen equilibrado puede representarse por medio de un rectificador no controlado con reactancia de alisado nula y tensión de continua $V_d = 2V_{\text{arc}}$. Por consiguiente, puede decirse que este análisis ya ha sido realizado en el apartado anterior en un caso más general en el que la reactancia de alisado X_F es distinta de cero. Esta afirmación es correcta siempre y cuando la corriente $i_a(t)$ presente una evolución discontinua, tal y como se indica en la Figura 11.12. Este es el comportamiento normal de un rectificador no controlado en el que conducen dos o tres diodos. Concretamente, en el intervalo 0 la corriente i_a es nula.

Sin embargo, el comportamiento normal de un horno presenta una evolución continua para la corriente i_a , según indica la Figura 11.13. En estas condiciones, el estado de conducción de los diodos puede clasificarse en tres intervalos en los que, según muestra la Tabla 11.3, en cada uno de ellos conducen tres diodos.

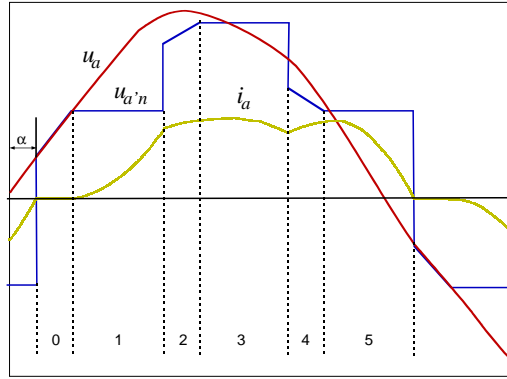


Figura 11.12. Evolución discontinua de la corriente de arco i_a .

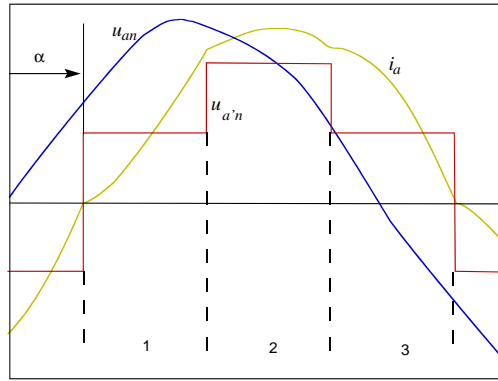


Figura 11.13. Evolución continua de la corriente de arco i_a .

En esta tabla se observa que la tensión u_{on} , que se establece entre el plasma y el neutro, es distinta de cero y periódica de periodo $2\pi/3$. Este resultado se desprende del hecho de que, en modo continuo, la tensión fase-plasma $u_{a'o}$ de la Figura 11.10 tiene forma rectangular en cada semionda [6], cumpliéndose que:

$$u_{a'o}(t) = V_{\text{arc}} \quad (\alpha \leq t \leq \alpha + \pi) \quad ; \quad u_{a'o}(t) = -V_{\text{arc}} \quad (\alpha + \pi \leq t \leq \alpha + 2\pi) \quad (11.50)$$

en donde los pasos por cero de la tensión $u_{a'o}$ y de la corriente i_a coinciden. Además, las restantes tensiones $u_{b'o}$ y $u_{c'o}$ satisfacen las condiciones de simetría dadas por

$$u_{b'o}(t) = u_{a'o}(t - \frac{2\pi}{3}) \quad ; \quad u_{c'o}(t) = u_{a'o}(t + \frac{2\pi}{3}) \quad (11.51)$$

La aplicación del teorema de Millman al circuito de la Figura 11.10 da como resultado que

$$u_{on} = -\frac{1}{3}(u_{a'o} + u_{b'o} + u_{c'o}) \quad (11.52)$$

Con ello, la tensión fase-neutro $u_{a'n}$ puede obtenerse mediante

$$u_{a'n} = u_{a'o} + u_{on} = \frac{1}{3}(2u_{a'o} - u_{b'o} - u_{c'o}) \quad (11.53)$$

Cuadro 11.3. Estado de conducción en el modo de funcionamiento continuo.

	Intervalo	Diodos en conducción	$u_{a'n}$	u_{on}
1	$(\alpha, \alpha + \frac{\pi}{3})$	1, 4, 5	$\frac{2}{3}V_{\text{arc}}$	$-\frac{1}{3}V_{\text{arc}}$
3	$(\alpha + \frac{\pi}{3}, \alpha + \frac{2\pi}{3})$	1, 4, 6	$\frac{4}{3}V_{\text{arc}}$	$\frac{1}{3}V_{\text{arc}}$
5	$(\alpha + \frac{2\pi}{3}, \alpha + \pi)$	1, 3, 6	$\frac{2}{3}V_{\text{arc}}$	$-\frac{1}{3}V_{\text{arc}}$

Teniendo en cuenta las ecuaciones (11.50), (11.51), (11.52) y (11.53) se determinan los valores de la Tabla 11.3 para las tensiones $u_{a'n}$ y u_{on} en los intervalos 1, 3 y 5.

El ángulo α , correspondiente al paso por cero de la corriente, se puede calcular aplicando la condición: $i_a(\alpha) = i_a(\alpha + \pi) = 0$. Esto equivale a decir que la integral de la tensión $u_{aa'}(t)$ entre α y $\alpha + \pi$ debe ser nula. Sabiendo que $u_{aa'} = u_a - u_{a'n}$; que u_a viene expresada por la relación (11.23); y que $u_{a'n}$ está perfectamente definida en la Tabla 11.3, la condición mencionada anteriormente se transforma, tras una serie de desarrollos, en:

$$\sum_{k=1}^h \frac{V_k}{k} \cos(k\alpha + \theta_k) = \frac{2\sqrt{2}\pi}{9} V_{\text{arc}} \quad (11.54)$$

La aplicación del algoritmo de Newton a la ecuación (11.54) permite obtener el ángulo α . A continuación, y al igual que se hizo para rectificadores, se procede a calcular los armónicos de la intensidad i_a a partir de los armónicos de las tensiones u_a y $u_{a'n}$ aplicadas a la reactancia X . La expresión final toma la forma de

$$\mathcal{I}_k = \mathcal{Y}_{kk}\mathcal{U}_k + \mathcal{Y}_{kDC}V_{\text{arc}} \quad (11.55)$$

con

$$\mathcal{Y}_{kk} = -\frac{j}{kX} \quad ; \quad \mathcal{Y}_{kDC} = j \frac{2\sqrt{2}}{\pi kX} \frac{\epsilon^{-jk\alpha}}{k} \quad (11.56)$$

Puede comprobarse que el primer sumando de la ecuación (11.55) corresponde a la contribución de los armónicos de la tensión u_a mientras que el segundo sumando se debe a la contribución de los armónicos de la tensión $u_{a'n}$, la cual presenta una forma en escalera como la que muestra la Figura 11.13. La forma de onda de $u_{a'n}$ permanece inalterada con independencia de la distorsión presente en u_a . La distorsión de u_a afecta solamente al ángulo α que se calcula en la relación (11.54). Por tanto, en modo de funcionamiento continuo, puede decirse que un horno de arco se comporta como una fuente ideal de tensión armónica asociada a la distorsión existente en $u_{a'n}$. En valor eficaz, los fasores armónicos de esta tensión vienen dados por

$$\mathcal{U}_{a'nk} = \frac{2\sqrt{2}V_{\text{arc}}}{\pi k} \epsilon^{-jk\alpha} \quad (11.57)$$

Resulta de ello una ley de emisión armónica muy sencilla y semejante a la indicada en la ecuación (11.49) para rectificadores con conmutación instantánea ($X = 0$) y alisado perfecto ($X_F = \infty$). De acuerdo con la relación (11.57), esta ley puede expresarse como

$$V_{a'nk} = \frac{V_{a'n1}}{k} \quad (11.58)$$

Por otra parte, es importante señalar que, de acuerdo con la Figura 11.13, en modo continuo se cumple que $u_a(\alpha) > u_{a'n}(\alpha)$. Existe un caso particular, denominado situación crítica, en el que $u_a(\alpha_c) = u_{a'n}(\alpha_c)$, tal y como se indica en la Figura 11.14.

El punto de funcionamiento crítico se alcanza cuando la tensión de arco especificada toma un valor crítico ($V_{\text{arc}} = V_{\text{crit}}$), obteniéndose para esta condición un ángulo crítico α_c . Teniendo en cuenta la ecuación (11.23) y los valores de $u_{a'n}$ dados en la Tabla 11.3, la condición crítica $u_a(\alpha_c) = u_{a'n}(\alpha_c)$ equivale a

$$\sqrt{2} \sum_{k=1}^h V_k \text{sen}(k\alpha + \theta_k) = \frac{2}{3} V_{\text{crit}} \tag{11.59}$$

Sustituyendo en la ecuación (11.54) α por α_c y V_{arc} por V_{crit} y eliminando V_{crit} entre las ecuaciones (11.54) y (11.59) se obtiene que

$$\sum_{k=1}^h \frac{V_k}{k} \cos(k\alpha_c + \theta_k) = \frac{2\pi}{3} \sum_{k=1}^h V_k \text{sen}(k\alpha_c + \theta_k) \tag{11.60}$$

La resolución de esta ecuación por medio del algoritmo de Newton proporciona el ángulo crítico α_c . Con el ángulo crítico así calculado se determina la tensión crítica V_{crit} entrando en la ecuación (11.59). Con ello se dispone de un mecanismo para discriminar entre modos de funcionamiento continuo y discontinuo. En efecto, si la tensión de arco especificada V_{arc} es mayor que V_{crit} , se aplica el modelo en funcionamiento discontinuo correspondiente al modo de funcionamiento normal de un rectificador no controlado con $X_F = 0$, tal como se describió en el apartado anterior. Por el contrario, cuando la tensión V_{arc} es menor que V_{crit} se aplica el modelo de horno de arco en funcionamiento continuo. Con ello se dispone de una amplia representación del funcionamiento del horno, desde el cortocircuito ($V_{\text{arc}} = 0$) hasta el circuito abierto, con tensiones de arco superiores a la tensión crítica.

En resumen, tomando como datos las tensiones armónicas de $u_a(t)$, la reactancia X y la tensión de arco V_{arc} , el modelo de horno en modo de funcionamiento continuo [7] requiere primeramente determinar el ángulo α a partir de la ecuación (11.54). A continuación, se calculan los armónicos de la intensidad $i_a(t)$ empleando la expresión (11.55).

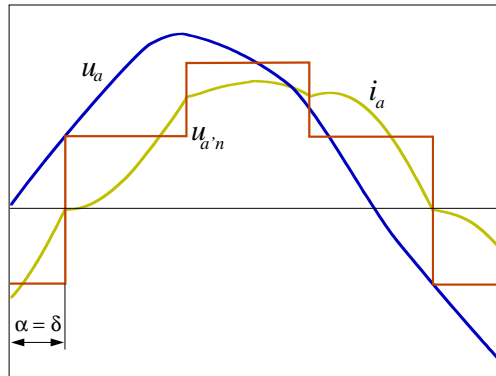


Figura 11.14. Formas de onda en el punto de funcionamiento crítico.

En el caso particular de que la tensión $u_a(t)$ sea puramente sinusoidal, el ángulo α se obtiene directamente de la ecuación (11.54) de forma muy sencilla, teniendo en cuenta solamente la componente fundamental de la tensión $u_a(t)$. De esta manera, la ecuación (11.55) se transforma en

$$\mathcal{I}_1 = \mathcal{Y}_{11}\mathcal{U}_1 + \mathcal{Y}_{1DC}V_{\text{arc}} \quad \text{para } k = 1 \quad (11.61)$$

$$\mathcal{I}_k = \mathcal{Y}_{kDC}V_{\text{arc}} = j \frac{2\sqrt{2}}{\pi k^2 X} V_{\text{arc}} \epsilon^{-jk\alpha} \quad \text{para } k \neq 1 \quad (11.62)$$

Esta última expresión indica que los armónicos de intensidad producidos por un horno de arco disminuyen cuadráticamente con el orden del armónico. Esto explica el que sólo sea relevante determinar los armónicos de menor orden. Si se comparan las relaciones (11.48) y (11.62), se deduce que, en general, los hornos de arco son cargas menos distorsionantes que los rectificadores de potencia nominal semejante.

11.3.3. Modelo de compensador

En las redes eléctricas, la configuración electrónica más extendida para compensar potencia reactiva consta de una bobina controlada por dos tiristores en antiparalelo, tal y como se muestra en la Figura 11.15. En la literatura anglosajona, este dispositivo se conoce como TCR (*Thyristor Controlled Reactor*).

En los sistemas trifásicos, es práctica usual conectar en triángulo tres ramas TCR. Mediante la actuación sobre el disparo de los tiristores se obtiene un efecto semejante al de disponer de una bobina de reactancia variable, con un ajuste continuo entre los valores $X_{\min} = 0$ y $X_{\max} = X_{\Delta} = 3X_Y$.

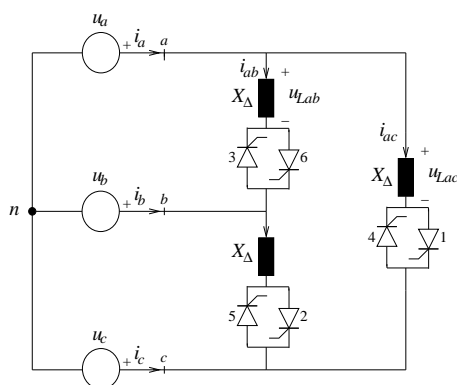


Figura 11.15. Esquema para modelo de compensador TCR.

Este compensador no lineal y ajustable suele conectarse en paralelo con una batería fija de condensadores o filtros. Con ello se tiene un conjunto compensador capaz de ceder o absorber potencia reactiva con regulación continua de la misma. A continuación, se procede a analizar el dispositivo TCR.

Tomando como datos del análisis la tensión terminal $u_a(t)$, la reactancia X_{Δ} y el ángulo de disparo α_o , la corriente $i_a(t)$ se calcula a partir de las intensidades i_{ab} e i_{ac} . Teniendo en

cuenta el orden de disparo de los tiristores de la Figura 11.15, las semiondas positivas de i_{ac} e i_{ab} están asociadas respectivamente a los intervalos de conducción de los tiristores 1 y 6. Se observa que el disparo de tiristores consecutivos tiene un espaciado temporal de $\pi/3$ radianes. Por consiguiente, se tiene que

$$i_{ac}(t) > 0 \Rightarrow u_{Lac}(t) = u_{ac}(t) \text{ para } \alpha \leq t \leq \delta \tag{11.63}$$

$$i_{ab}(t) > 0 \Rightarrow u_{Lab}(t) = u_{ab}(t) \text{ para } \alpha - \frac{\pi}{3} \leq t \leq \delta - \frac{\pi}{3} \tag{11.64}$$

en donde, según la Figura 11.16, los ángulos α y δ son respectivamente los instantes inicial y final de conducción del tiristor 1.

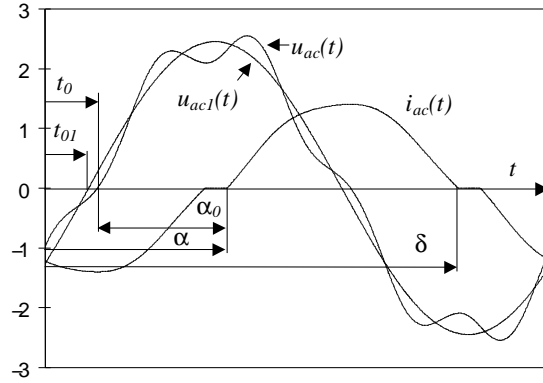


Figura 11.16. Formas de onda de tensión y corriente en la fase ac del TCR.

Como se estableció para los rectificadores controlados, el instante de disparo α se determina a partir del paso por cero de la tensión $u_{ac}(t)$ y del ángulo de control α_o . Es decir, son directamente aplicables las ecuaciones (11.29) y (11.30) para el cálculo del ángulo α . De la misma manera, si se toma filtrada la tensión, el paso por cero de la componente fundamental de $u_{ac}(t)$ vendrá dado por: $t_{o1} = \pi/6 - \theta_1$.

Sabiendo que $i_{ac}(\alpha) = 0$, el ángulo δ puede determinarse de la condición:

$$i_{ac}(\delta) = 0 = \frac{1}{X_{\Delta}} \int_{\alpha}^{\delta} u_{ac}(t) dt \tag{11.65}$$

Teniendo en cuenta la expresión de $u_{ac}(t)$ en función de las tensiones armónicas, la ecuación (11.65) se transforma en

$$\sum_{k=1}^h \frac{V_k}{k} [\cos(k\alpha + \theta_k - \frac{\pi}{6}\delta_k) - \cos(k\delta + \theta_k - \frac{\pi}{6}\delta_k)] = 0 \tag{11.66}$$

La aplicación del algoritmo de Newton a esta ecuación permite obtener el ángulo δ . A continuación, se procede a calcular los armónicos de la corriente $i_a(t)$ a partir de los armónicos \mathcal{U}_{Labk} y \mathcal{U}_{Lack} de las tensiones u_{Lab} y u_{Lac} que se establecen en las reactancias X_{Δ} de la Figura 11.15. Se cumple por tanto que

$$\mathcal{I}_k = \frac{\mathcal{U}_{Lack} + \mathcal{U}_{Labk}}{jkX_{\Delta}} \tag{11.67}$$

Dado que existe simetría de semionda, y considerando las relaciones (11.63) y (11.64), los armónicos \mathcal{U}_{Lack} y \mathcal{U}_{Labk} se determinan de

$$\mathcal{U}_{Lack} = j \frac{\sqrt{2}}{\pi} \int_{\alpha}^{\delta} u_{ac}(t) \epsilon^{-jkt} dt \quad ; \quad \mathcal{U}_{Labk} = j \frac{\sqrt{2}}{\pi} \int_{\alpha - \frac{\pi}{3}}^{\delta - \frac{\pi}{3}} u_{ab}(t) \epsilon^{-jkt} dt \quad (11.68)$$

Usando las relaciones (11.23), (11.26) y (11.27), y tras una serie de desarrollos, las ecuaciones (11.67) y (11.68) se pueden expresar de forma compacta mediante

$$\mathcal{I}_k = \mathcal{Y}_{kk1} \mathcal{U}_k + \sum_{m=1, m \neq k}^h \mathcal{Y}_{km1} \mathcal{U}_m + \sum_{m=1}^h \mathcal{Y}_{km2} \mathcal{U}_m^* \quad (11.69)$$

siendo las admitancias anteriores función de los ángulos α y δ :

$$\mathcal{Y}_{kk1} = \frac{-j(\delta - \alpha)}{\pi k X_Y} \quad ; \quad \mathcal{Y}_{km1} = \frac{1}{\pi k X_Y} \epsilon^{j \frac{\pi}{6} (\delta_k - \delta_m)} \frac{\epsilon^{-j(k-m)\delta} - \epsilon^{-j(k-m)\alpha}}{k - m} \quad (11.70)$$

$$\mathcal{Y}_{km2} = \frac{-1}{\pi k X_Y} \epsilon^{j \frac{\pi}{6} (\delta_k + \delta_m)} \frac{\epsilon^{-j(k+m)\delta} - \epsilon^{-j(k+m)\alpha}}{k + m} \quad (11.71)$$

En resumen, tomando como datos las tensiones armónicas de $u_a(t)$, la reactancia X_{Δ} , y el ángulo de disparo α_o , el modelo de compensador TCR [9] procede a determinar primeramente los ángulos α y δ utilizando las expresiones (11.29), (11.30) y (11.66). Seguidamente se calculan los armónicos de la intensidad $i_a(t)$ empleando la ecuación (11.69).

En el caso particular de que la tensión $u_a(t)$ sea puramente sinusoidal, la ecuación (11.66) se transforma en

$$\cos \left(\alpha + \theta_1 - \frac{\pi}{6} \right) = \cos \left(\delta + \theta_1 - \frac{\pi}{6} \right) \quad (11.72)$$

y en consecuencia, el ángulo δ se obtiene directamente de

$$\delta = 2\pi - \alpha - 2\theta_1 + \frac{\pi}{3} \quad (11.73)$$

Considerando este resultado, así como la relación (11.29) y el paso por cero de la tensión sinusoidal ($t_o = \pi/6 - \theta_1$), el ángulo de conducción $\delta - \alpha$ queda directamente relacionado con el ángulo de disparo α_o por medio de

$$\delta - \alpha = 2(\pi - \alpha_o) \quad (11.74)$$

Se observa que el intervalo de conducción puede variar entre un máximo $\delta - \alpha = \pi$ para $\alpha_o = \pi/2$ y un mínimo $\delta - \alpha = 0$ para $\alpha_o = \pi$. Por otra parte, la expresión (11.69) que proporciona los armónicos de intensidad se simplifica notablemente, dando lugar a

$$\mathcal{I}_k = \mathcal{Y}_{k11} \mathcal{U}_1 + \mathcal{Y}_{k12} \mathcal{U}_1^* \quad (11.75)$$

Empleando la relación (11.74) es posible expresar las admitancias \mathcal{Y}_{k11} y \mathcal{Y}_{k12} en función del ángulo de disparo α_o , de modo que, tras una serie de desarrollos, se llega a

$$\mathcal{I}_1 = -j \frac{2(\pi - \alpha_o) + \text{sen } 2\alpha_o}{\pi X_Y} V_1 \epsilon^{j\theta_1} \quad \text{para } k = 1 \quad (11.76)$$

$$\mathcal{I}_k = j \frac{2(-1)^p}{\pi k X_Y} \left[\frac{\sin(k-1)\alpha_o}{k-1} + \frac{\sin(k+1)\alpha_o}{k+1} \right] V_1 e^{jk\theta_1} \quad \text{para } k \neq 1 \quad (11.77)$$

donde p es un entero con el mismo significado que en la expresión (11.48). Por otra parte, identificando la impedancia en la relación tensión-intensidad de la ecuación (11.76), se obtiene la reactancia equivalente X_{eq} del TCR, tal que

$$X_{eq}(\alpha_o) = \frac{\pi X_Y}{2(\pi - \alpha_o) + \sin 2\alpha_o} \quad (11.78)$$

Como comentario final, y a la vista de las ecuaciones que definen el modelo de compensador, se puede decir que el elemento TCR produce armónicos que son fuertemente dependientes del ángulo de disparo. En efecto, si se expresan los valores eficaces I_k de los armónicos de intensidad en función de la componente fundamental máxima $I_{1\max}$ (asociada a la máxima conducción), se obtiene, mediante la ecuación (11.77), un máximo de quinto armónico en torno al 5% para un $\alpha_o \simeq 108^\circ$ y un máximo de séptimo armónico en torno a 2.6% para un $\alpha_o \simeq 103^\circ$. En cualquier caso, y al igual que ocurría en los hornos de arco, se tiene una emisión armónica sensiblemente inferior a la que se alcanza con un rectificador de potencia nominal semejante.

11.3.4. Ajuste del punto de funcionamiento

En los apartados anteriores se ha definido el punto de funcionamiento de rectificadores y compensadores TCR suponiendo un ángulo de disparo α_o conocido. Sin embargo, esto no tiene mucho sentido práctico ya que el ángulo de disparo no se especifica *a priori* sino que es una consecuencia de la actuación del sistema de control [8]. Para los rectificadores controlados suele emplearse un esquema de control que ajusta la componente de continua I_d de la corriente rectificadora $i_d(t)$ a un valor consigna. Para los elementos TCR se puede considerar un control de la potencia reactiva Q_1 a frecuencia fundamental. En ambos casos, el ángulo de disparo α_o debe tratarse como una variable de control que se va modificando hasta alcanzar los valores consigna I_d y Q_1 respectivamente.

En un rectificador, la potencia total en la carga viene dada por $P = V_d I_d$. En consecuencia, si se especifican simultáneamente los parámetros V_d e I_d en un rectificador es como si se especificara la potencia P . Este tipo de especificación se denominará especificación PI_d y precisa para su implementación una función de error ΔP dada por

$$\Delta P = P - P_{\text{esp}} \quad (11.79)$$

en donde P es función de las tensiones e intensidades armónicas:

$$P = 3 \sum_{k=1}^h V_k I_k \cos(\theta_k - \theta_{ik}) \quad (11.80)$$

El ajuste del punto de funcionamiento en términos PI_d se obtiene forzando a cero la función ΔP . Para ello se aplica el algoritmo de Newton según el proceso siguiente:

1. Establecer un valor inicial para α_o .

2. Calcular ΔP y su derivada $\Delta P'$ con respecto a α_o por el método de las diferencias finitas.
3. Si ΔP es menor que la tolerancia de cierre ir al paso 5. En caso contrario continuar.
4. Actualizar el ángulo α_o por el método de Newton e ir al paso 2.
5. Con el ángulo α_o resultante se calculan primeramente los ángulos α y δ , y a continuación los armónicos de intensidad correspondientes utilizando la expresión (11.36).

Los detalles del paso 2 pueden desglosarse de la manera siguiente:

- Calcular α y δ a partir de las relaciones (11.29), (11.30) y (11.34).
- Determinar las corrientes armónicas con la ecuación (11.36). A continuación, se estima la potencia P por medio de la relación (11.80).
- Establecer un incremento $\Delta\alpha_o$ para α_o y calcular un nuevo valor $\Delta P(\alpha_o + \Delta\alpha_o)$. Entonces, la derivada $\Delta P'$ se obtiene de

$$\Delta P' = \frac{\Delta P(\alpha_o + \Delta\alpha_o) - \Delta P(\alpha_o)}{\Delta\alpha_o} \quad (11.81)$$

De forma semejante se procede al ajuste del punto de funcionamiento de un compensador TCR. En este caso, la función de error ΔQ_1 se refiere a la potencia reactiva a frecuencia fundamental dada por:

$$Q_1 = 3V_1 I_1 \sin(\theta_1 - \theta_{i1}) \quad (11.82)$$

También en este caso se trata el ángulo α_o como variable de control para forzar a cero la función ΔQ_1 .

Si ahora se considera el caso particular de un rectificador no controlado, el ángulo de disparo es nulo, y por tanto no es regulable. Por consiguiente, si se quiere definir el punto de funcionamiento a partir de la potencia P consumida por el rectificador, se hace necesario tomar la tensión V_d como variable de control. En estas condiciones se utiliza la función de error ΔP y su derivada $\Delta P'$ con respecto a la variable V_d . El proceso a seguir es análogo al descrito anteriormente, sin más que sustituir α_o por V_d .

En cuanto a los hornos de arco, es práctica usual definir su punto de funcionamiento en términos de la potencia P consumida o de la corriente fundamental I_1 que circula por los electrodos. Para ello se precisan establecer las funciones de error ΔP y ΔI_1 . La función ΔP coincide formalmente con lo indicado en las ecuaciones (11.79) y (11.80) para rectificadores. En cuanto a la función ΔI basta con recordar que

$$\Delta I_1 = I_1 - I_{1\text{esp}} \quad ; \quad I_1^2 = I_{r1}^2 + I_{x1}^2 \quad (11.83)$$

En ambos casos se toma la tensión de arco V_{arc} como variable de control y se procede de forma análoga a lo expuesto para rectificadores.

Finalmente, conviene hacer una última consideración sobre los rectificadores controlados. Como es bien sabido, en un flujo de cargas es práctica usual definir las cargas en términos de potencia activa y reactiva. En este sentido, cabe señalar que un rectificador controlado puede

definirse como una carga P_1Q_1 . La expresión de la potencia reactiva Q_1 ya se ha establecido en la ecuación (11.82). La potencia activa P_1 a frecuencia fundamental vendrá dada por

$$P_1 = 3V_1I_1 \cos(\theta_1 - \theta_{i1}) \tag{11.84}$$

Por consiguiente, la especificación P_1Q_1 de un rectificador precisa definir dos funciones de error ΔP_1 y ΔQ_1 tales que

$$\Delta P_1 = P_1 - P_{1\text{esp}} \quad ; \quad \Delta Q_1 = Q_1 - Q_{1\text{esp}} \tag{11.85}$$

Para ajustar a cero ambas funciones es necesario tratar simultáneamente los parámetros α_o y V_d como variables de control. El proceso de ajuste es muy similar al ya explicado para la especificación PI_d , por lo que se omite aquí su descripción [8]. Es importante, sin embargo, destacar que la especificación P_1Q_1 constituye un procedimiento muy cómodo de ajuste que no precisa conocer previamente cuál es la consigna I_d del regulador de corriente.

11.3.5. Consideraciones sobre transformadores de rectificadores y hornos

En los rectificadores, la conexión a red se realiza mediante un transformador de aislamiento que se representará, según indica la Figura 11.17, por medio de un transformador ideal T_i y una reactancia.

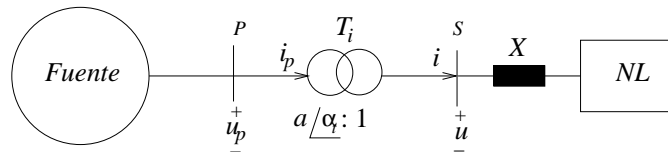


Figura 11.17. Inclusión de transformador en rectificadores y hornos.

La reactancia X coincide con la reactancia de dispersión del transformador, mientras que el bloque NL se asigna al esquema formado por puente rectificador, reactancia X_F y tensión V_d de la Figura 11.8. En los hornos existe un trafo con tomas MT/BT que permite aplicar baja tensión a los electrodos. En este caso, la reactancia X engloba a la reactancia de dispersión del transformador y a la de los cables flexibles que unen el secundario con los electrodos. El bloque NL se refiere a la no linealidad propiamente dicha del arco eléctrico, que en la Figura 11.10 se representa por medio de diodos y fuentes de tensión. La relación de transformación compleja permite considerar el efecto de las tomas “ a ” y el desfase “ α_t ” introducido por el tipo de conexión del transformador.

Es importante señalar aquí que las tensiones de alimentación indicadas en los esquemas de las Figuras 11.8 y 11.11 se refieren al terminal “s” de la Figura 11.17. Sin embargo, el objetivo principal del análisis de armónicos en sistemas con trafo de aislamiento consiste en calcular los armónicos de las magnitudes primarias u_p e i_p en el nudo “p”. Las relaciones entre magnitudes primarias y secundarias al armónico de orden k vienen dadas por

$$\frac{U_{pk}}{U_k} = a\epsilon^{j\alpha_t\delta_k} \quad ; \quad \frac{I_{pk}}{I_k} = \frac{1}{a}\epsilon^{j\alpha_t\delta_k} \tag{11.86}$$

De esta manera, el cálculo de las corrientes \mathcal{I}_{pk} a partir de las tensiones \mathcal{U}_{pk} se realiza del modo siguiente:

1. Determinación de la tensión secundaria \mathcal{U}_k a partir de la relación (11.86).
2. Cálculo de las corrientes secundarias \mathcal{I}_k aplicando las ecuaciones (11.36) y (11.55).
3. Obtención de la corriente primaria \mathcal{I}_{pk} a partir de la expresión (11.86).

11.3.6. Sensibilidades de las corrientes a las tensiones armónicas

Las ecuaciones (11.36), (11.55) y (11.69) describen la dependencia de las corrientes armónicas con respecto a las tensiones armónicas aplicadas a las cargas no lineales correspondientes respectivamente a rectificadores, hornos de arco y compensadores TCR. En estas expresiones aparecen una serie de admitancias \mathcal{Y}_{kk1} , \mathcal{Y}_{km1} e \mathcal{Y}_{km2} que cuantifican este grado de dependencia. Estos términos dependen en general de los ángulos α y δ , es decir, son variables con el punto de funcionamiento seleccionado. Por consiguiente, y teniendo en cuenta las relaciones (11.25), las sensibilidades de las corrientes respecto de las tensiones armónicas pueden expresarse en función de estas admitancias, de modo que

$$\frac{\partial \mathcal{I}_k}{\partial V_{rm}} = \frac{\partial I_{rk}}{\partial V_{rm}} + j \frac{\partial I_{xk}}{\partial V_{rm}} = \mathcal{Y}_{km1} + \mathcal{Y}_{km2} \quad (11.87)$$

$$\frac{\partial \mathcal{I}_k}{\partial V_{xm}} = \frac{\partial I_{xk}}{\partial V_{xm}} + j \frac{\partial I_{xk}}{\partial V_{xm}} = j(\mathcal{Y}_{km1} - \mathcal{Y}_{km2}) \quad (11.88)$$

$$\mathcal{Y}_{km1} = G_{km1} + jB_{km1} \quad ; \quad \mathcal{Y}_{km2} = G_{km2} + jB_{km2} \quad (11.89)$$

Igualando partes real e imaginaria se tiene

$$\frac{\partial I_{rk}}{\partial V_{rm}} = G_{km1} + G_{km2} \quad ; \quad \frac{\partial I_{xk}}{\partial V_{rm}} = B_{km1} + B_{km2} \quad (11.90)$$

$$\frac{\partial I_{rk}}{\partial V_{xm}} = B_{km2} - B_{km1} \quad ; \quad \frac{\partial I_{xk}}{\partial V_{xm}} = G_{km1} - G_{km2} \quad (11.91)$$

En el caso de rectificadores y hornos conviene calcular estas sensibilidades en el primario del transformador de aislamiento. Teniendo en cuenta la relación (11.86), la ecuación (11.36) se transforma en

$$\mathcal{I}_{pk} = \mathcal{Y}'_{kk1} \mathcal{U}_{pk} + \sum_{m=1, m \neq k}^h \mathcal{Y}'_{km1} \mathcal{U}_{pm} + \sum_{m=1}^h \mathcal{Y}'_{km2} \mathcal{U}_{pm}^* + \mathcal{Y}'_{kDC} V_d \quad (11.92)$$

en donde

$$\mathcal{Y}'_{kk1} = \frac{1}{a^2} \mathcal{Y}_{kk1} \quad ; \quad \mathcal{Y}'_{km1} = \frac{1}{a^2} \mathcal{Y}_{km1} e^{j\alpha_t(\delta_k - \delta_m)} \quad ; \quad \mathcal{Y}'_{km2} = \frac{1}{a^2} \mathcal{Y}_{km2} e^{j\alpha_t(\delta_m - \delta_k)} \quad (11.93)$$

De esta manera, las partes real e imaginaria de las admitancias \mathcal{Y}'_{km1} y \mathcal{Y}'_{km2} proporcionan las sensibilidades de las corrientes armónicas primarias respecto de las tensiones armónicas primarias sin más que emplear las relaciones (11.90) y (11.91). Las sensibilidades así calculadas se emplearán en la Sección 11.5 en donde se describe el algoritmo de interacción armónica.

11.4. Penetración de armónicos

Se denomina algoritmo de penetración (o propagación) de armónicos a la herramienta matemática que formula y resuelve el análisis de armónicos en la red lineal cuando son conocidas las intensidades armónicas producidas por las cargas no lineales. Las leyes de Kirchhoff y los modelos para componentes de la red lineal se condensan en las ecuaciones nodales, que en forma matricial y compleja se escriben como

$$[\mathcal{Y}_k][\mathcal{U}_k] = [\mathcal{I}_{gk}] - [\mathcal{I}_k] \quad (11.94)$$

$$\sum_{q=1}^n \mathcal{Y}_{kpq} \mathcal{U}_{kq} = \mathcal{I}_{gkp} - \mathcal{I}_{kp} \quad ; \quad p = 1, 2, \dots, n \quad (11.95)$$

donde k es el orden del armónico, $[\mathcal{U}_k]$ el vector de tensiones armónicas nodales, $[\mathcal{Y}_k]$ la matriz $n \times n$ de admitancias armónicas de nudo, $[\mathcal{I}_{gk}]$ el vector de intensidades armónicas independientes inyectadas en los nudos e $[\mathcal{I}_k]$ el vector de intensidades armónicas salientes de los nudos y cuyo valor es dependiente del modelo de carga no lineal empleado. En este punto conviene hacer las aclaraciones siguientes:

- A diferencia de la formulación nodal empleada en los flujos de cargas convencionales, la matriz de admitancias $[\mathcal{Y}_k]$ incluye las admitancias de las cargas convencionales y de los generadores.
- El vector $[\mathcal{I}_{gk}]$ contiene aquellas intensidades armónicas cuyo valor se conoce *a priori* como consecuencia de una estimación previa o de una medida. A frecuencia fundamental, este vector incluye además las fuentes equivalentes de los generadores.
- El vector $[\mathcal{I}_k]$ contiene aquellas intensidades armónicas cuyo valor no se conoce *a priori* sino que es el resultado de aplicar los modelos no lineales descritos en la Sección 11.3 dentro del contexto de dos algoritmos iterativos de cálculo. El primer algoritmo es un flujo de cargas convencional modificado para incluir cargas no lineales. En este caso se supone tensión sinusoidal en bornes de la carga no lineal. El segundo algoritmo es un programa de interacción armónica cuya formulación se describirá en la Sección 11.5. En este caso se supone tensión distorsionada en bornes de la carga no lineal. Una vez alcanzada la convergencia en el flujo de cargas convencional o en el programa de interacción armónica, se obtienen las corrientes armónicas de las cargas no lineales. En consecuencia, a partir de este momento, los términos del vector $[\mathcal{I}_k]$ son conocidos y por tanto queda perfectamente definida la ecuación (11.94).

Por consiguiente, la penetración o propagación de armónicos consiste en obtener, mediante la ecuación (11.94), las tensiones armónicas $[\mathcal{U}_k]$ en todos los nudos de la red para las h componentes consideradas. Se tienen por tanto h sistemas de ecuaciones, de n ecuaciones cada uno, que obedecen a la formulación indicada en la expresión (11.94). La aplicación de métodos de análisis que tengan en cuenta la gran dispersión [16] de la matriz $[\mathcal{Y}_k]$ permiten resolver de forma eficiente el sistema de ecuaciones (11.94).

11.4.1. Equivalentes de red

Normalmente, en una red de tamaño considerable, el número de nudos n_p con elementos no lineales es mucho menor que el número n de nudos totales. Esto significa que el vector $[\mathcal{I}_k]$ de la ecuación (11.94) presenta pocos elementos no nulos. En estas condiciones, es muy conveniente obtener un equivalente de la red lineal reducido a los n_p nudos con cargas no lineales. Este equivalente tiene una aplicación muy importante en el algoritmo de interacción armónica que se explicará en la Sección 11.5.

Para la determinación de este equivalente se considera la matriz $[\mathcal{Z}_k]$ de impedancias armónicas de nudo. Esta matriz es la inversa de la matriz de admitancias $[\mathcal{Y}_k]$, y a diferencia de ésta, es una matriz llena. Si en la ecuación (11.94) se multiplican ambos miembros por la matriz $[\mathcal{Z}_k]$ se obtiene que

$$[\mathcal{U}_k] = [\mathcal{Z}_k][\mathcal{I}_{gk}] - [\mathcal{Z}_k][\mathcal{I}_k] = [\mathcal{E}_k] - [\mathcal{Z}_k][\mathcal{I}_k] \quad (11.96)$$

en donde $[\mathcal{E}_k]$ es el vector de tensiones armónicas debidas solamente a las inyecciones independientes $[\mathcal{I}_{gk}]$. El vector $[\mathcal{E}_k]$ se denomina vector de tensiones a circuito abierto, es decir, aquellas tensiones armónicas que aparecen cuando no se considera el efecto de los modelos de cargas no lineales englobados en el vector $[\mathcal{I}_k]$. Si en la expresión (11.96) se seleccionan aquellas ecuaciones correspondientes a los n_p términos no nulos de $[\mathcal{I}_k]$, se llega a

$$[\mathcal{U}_k]_{eq} = [\mathcal{E}_k]_{eq} - [\mathcal{Z}_k]_{eq}[\mathcal{I}_k]_{eq} \quad (11.97)$$

es decir, el equivalente Thévenin generalizado de la red lineal reducido a los nudos con cargas no lineales. Conviene señalar que los vectores y la matriz de la expresión (11.97) son respectivamente subvectores y submatriz de los que aparecen en la ecuación (11.96), cuya obtención es inmediata.

La inversa de la matriz $[\mathcal{Z}_k]_{eq}$ es la matriz $[\mathcal{Y}_k]_{eq}$ de admitancias armónicas del equivalente Norton. Multiplicando ambos miembros de la expresión (11.97) por la matriz $[\mathcal{Y}_k]_{eq}$ y despejando $[\mathcal{I}_k]_{eq}$ se llega a

$$[\mathcal{I}_k]_{eq} = [\mathcal{Y}_k]_{eq}[\mathcal{E}_k]_{eq} - [\mathcal{Y}_k]_{eq}[\mathcal{U}_k]_{eq} = [\mathcal{I}_{gk}]_{eq} - [\mathcal{Y}_k]_{eq}[\mathcal{U}_k]_{eq} \quad (11.98)$$

Esta expresión describe las ecuaciones del equivalente Norton de la red lineal reducido a los n_p nudos con cargas no lineales.

Por último, es conveniente destacar una serie de consideraciones sobre el cálculo de la matriz $[\mathcal{Z}_k]$. En efecto, la determinación de la matriz $[\mathcal{Z}_k]$ de una red extensa no suele hacerse completamente por razones de memoria y tiempo de cálculo de ordenador. En este caso sólo interesa extraer de la matriz $[\mathcal{Z}_k]$ las n_p filas y columnas correspondientes a los nudos con cargas no lineales. Para un nudo genérico p , perteneciente a los n_p nudos considerados, este cálculo se realiza sustituyendo el segundo miembro de la ecuación (11.94) por un vector con un solo elemento de inyección unitaria en la fila p . La resolución de la expresión (11.94) proporciona, en los elementos del vector $[\mathcal{U}_k]$, los n términos de la columna p de la matriz $[\mathcal{Z}_k]$, de los que sólo se retienen los n_p términos de la matriz $[\mathcal{Z}_k]_{eq}$. Repitiendo estas inyecciones unitarias en los $n_p - 1$ nudos restantes se completa la matriz $[\mathcal{Z}_k]_{eq}$, sin necesidad de invertir la matriz $[\mathcal{Y}_k]$. Sin embargo, y dado que en la práctica $[\mathcal{Z}_k]_{eq}$ es una matriz de pocos términos, por ser reducido el número de nudos con cargas no lineales, el cálculo de $[\mathcal{Y}_k]_{eq}$ se realiza por inversión de $[\mathcal{Z}_k]_{eq}$.

11.4.2. Resonancia

El fenómeno conocido como resonancia paralelo consiste en que uno o varios términos de la matriz de impedancias nodales toma un valor muy alto a una determinada frecuencia. Esto puede ocasionar sobretensiones armónicas, si la frecuencia a la que se produce la resonancia (o *frecuencia de resonancia*) coincide con la de alguna corriente armónica inyectada en la red. Si son los términos de la diagonal de la matriz de impedancias los que adquieren un valor alto, la sobretensión armónica se producirá cuando la inyección de corriente armónica tiene lugar en ese nudo. Si es un término de fuera de la diagonal, es decir, si se trata de una impedancia de transferencia, Z_{pq,k_o} , la sobretensión se producirá en el nudo p cuando la inyección de corriente se dé en el nudo q , a la pulsación $k_o\omega_1$, de resonancia. Con el fin de ilustrar este proceso, y de dar una fórmula práctica en algunas situaciones, se realizará un análisis de un caso muy simple.

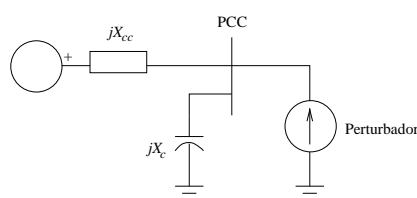


Figura 11.18. Sistema eléctrico elemental.

Sea el sistema representado en la Figura 11.18. En él se representa el equivalente Thevenin de una red puramente inductiva, de potencia de cortocircuito S_{cc} , con una batería de condensadores para corregir el factor de potencia, que suministra una potencia reactiva Q_c , y un perturbador conectado al Punto de Conexión Común (PCC).

La impedancia del paralelo red-condensador a una frecuencia distinta de la fundamental será

$$Z_{th,k} = j \frac{X_{cc}X_c}{k \cdot X_{cc} + \frac{X_c}{k}} \quad (11.99)$$

Cuando el denominador de esta expresión se anula, la impedancia Thevenin se hace infinito. Sea $k_o \cdot \omega_o$ la pulsación a la que esto ocurre. En tal caso se cumple que

$$k_o X_{cc} = -\frac{X_c}{k_o} \Rightarrow k_o^2 = -\frac{X_c}{X_{cc}} \quad (11.100)$$

y, puesto que

$$X_{cc} = \frac{V_n^2}{S_{cc}} \quad ; \quad X_c = -\frac{V_n^2}{Q_c}$$

se obtiene

$$k_o^2 = \frac{V_n^2/Q_c}{V_n^2/S_{cc}} \Rightarrow k_o = \sqrt{\frac{S_{cc}}{Q_c}} \quad (11.101)$$

Si esta frecuencia de resonancia coincide con una frecuencia armónica, el perturbador producirá sobretensiones armónicas en el nudo, que se manifestarán en primer lugar en los

condensadores conectados en el propio nudo: en efecto, son los condensadores, por lo general, los elementos más sensibles a estas sobretensiones por el hecho de estar conectados en paralelo.

Esta fórmula se ha obtenido sin tener en cuenta las resistencias existentes en el sistema. Éstas harán que la impedancia a la frecuencia de resonancia no sea infinita, es decir, introducen un *amortiguamiento* en el sistema que reduce las sobretensiones armónicas.

La fórmula dada es sólo una aproximación, aunque es suficientemente buena en la mayoría de los casos para estimar la frecuencia de resonancia.

11.5. Interacción armónica

En el apartado 11.3 de este capítulo se han presentado modelos de distintas cargas no lineales suponiendo que se conectaban a un sistema eléctrico de tensiones definidas como el de la Figura 11.7. Estas tensiones contienen h frecuencias armónicas. En estas condiciones, las cargas no lineales absorben corrientes que dependen de todas las componentes armónicas presentes en la tensión de alimentación. Este hecho se confirma por inspección directa de las relaciones (11.36), (11.55) y (11.69), y puede expresarse de forma general mediante

$$\mathcal{I}_k = \mathcal{I}_k(\mathcal{U}_1, \dots, \mathcal{U}_k, \dots, \mathcal{U}_h) \quad (11.102)$$

Es decir, en la corriente armónica de orden k no sólo interviene la tensión armónica de orden k sino también el resto de las componentes armónicas de tensión. Este acoplamiento entre frecuencias es consecuencia directa del carácter no lineal de estas cargas.

Por otra parte, la tensión de alimentación no está definida, sino que es una consecuencia de la interacción armónica que se produce entre la carga no lineal y la red. Este fenómeno se va a ilustrar con ayuda del esquema de la Figura 11.19. En él puede observarse un equivalente Thevenin monofásico de la red lineal formado por una tensión de fondo \mathcal{E}_k y una impedancia \mathcal{Z}_k al armónico de orden k .

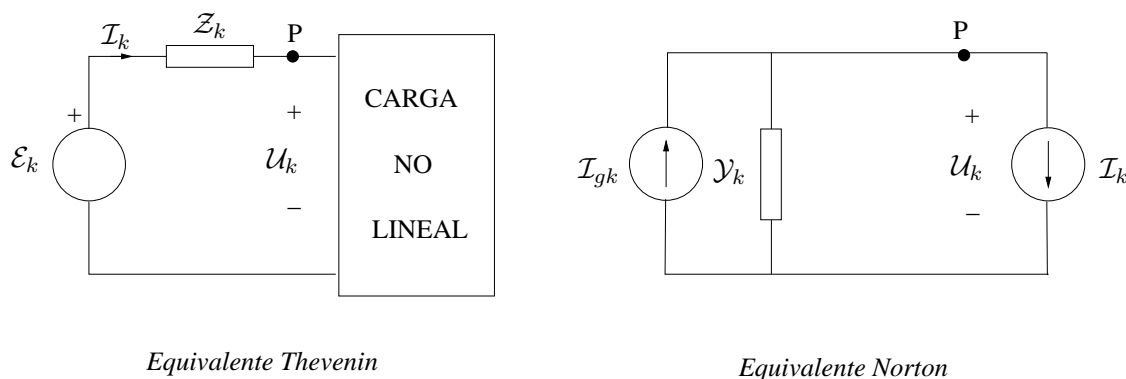


Figura 11.19. Esquema monofásico red-carga no lineal.

Como se describió en la Sección 11.4, la tensión de fondo es debida a la inyección a red de fuentes independientes de corrientes armónicas cuyo módulo y argumento se conocen a

priori. En estas condiciones, el mecanismo de interacción armónica red-carga puede explicarse de la manera siguiente: la carga absorbe una corriente armónica \mathcal{I}_k que inyectada a red provoca una caída de tensión en la impedancia \mathcal{Z}_k . Esto origina una variación de la tensión armónica \mathcal{U}_k que modifica a su vez, según se desprende de la ecuación (11.102), todas las componentes armónicas de corriente. Este fenómeno se conoce como mecanismo de interacción armónica y requiere para su solución la aplicación de algoritmos iterativos que sean capaces de resolver simultáneamente las h componentes armónicas que entran en juego [21]. Por tanto, se hace necesario plantear un conjunto de ecuaciones no lineales que contemplen la representación de la red y de la carga. Para ello se va a considerar el equivalente Norton de la Figura 11.19, para el que se cumple que

$$\mathcal{E}_k = \mathcal{Z}_k \mathcal{I}_{gk} \quad ; \quad \mathcal{Y}_k = \mathcal{Z}_k^{-1} \quad (11.103)$$

Teniendo en cuenta la ecuación (11.102), la aplicación de la primera ley de Kirchhoff al nudo p del esquema representado en la Figura 11.19 equivale a

$$\mathcal{I}_k(\mathcal{U}_1, \dots, \mathcal{U}_k, \dots, \mathcal{U}_h) - (\mathcal{I}_{gk} - \mathcal{Y}_k \mathcal{U}_k) = 0 \quad ; \quad k = 1, \dots, h \quad (11.104)$$

Es decir, en el nudo p se tienen h ecuaciones complejas no lineales denominadas ecuaciones balance de armónicos. Dado que son datos los términos \mathcal{I}_{gk} e \mathcal{Y}_k así como las funciones indicadas en la relación (11.102), las incógnitas serán las h tensiones armónicas que aparecen en la ecuación (11.104). Sin embargo, la condición (11.104) se cumple solamente con las tensiones armónicas solución que se obtienen al final de un proceso iterativo de cálculo. Al inicio, y en los pasos intermedios de este proceso (iteraciones), las tensiones armónicas en una iteración w no satisfacen la ecuación (11.104). Por consiguiente, se tendrán unas discrepancias o funciones de error dadas por

$$\Delta \mathcal{I}_k^{(w)} = \mathcal{I}_k^{(w)}(\mathcal{U}_1^{(w)}, \dots, \mathcal{U}_k^{(w)}, \dots, \mathcal{U}_h^{(w)}) - (\mathcal{I}_{gk} - \mathcal{Y}_k \mathcal{U}_k^{(w)}) \quad (11.105)$$

Si los fasores que intervienen en la relación (11.105) se expresan en parte real e imaginaria, y si se consideran h armónicos, se tendrán $2h$ funciones de error a las que deberán aplicarse unos algoritmos iterativos que sean capaces de ajustar a cero dichas discrepancias. En la práctica basta con alcanzar un valor de discrepancia lo suficientemente pequeño. Esto se consigue comprobando que las diferencias existentes entre tensiones armónicas de dos iteraciones consecutivas son menores que una tolerancia de cierre fijada previamente. Por otra parte, es importante realizar una buena estimación para los valores iniciales de estas tensiones. Un criterio aceptable puede consistir en asignar 1 pu para la tensión fundamental ($k = 1$) y un valor de 0,01 para las restantes tensiones armónicas ($k \neq 1$). En la solución se cumple que $\Delta \mathcal{I}_k = 0$. Es decir, existe un balance de corrientes armónicas entre la parte lineal y no lineal del sistema representado en la Figura 11.19.

11.5.1. Algoritmos de resolución en un sistema monopuerta

El esquema de la Figura 11.19 corresponde a una red en la que existe un solo nudo con cargas no lineales. Es decir, se tiene un sistema monopuerta representado por un simple equivalente Thevenin o Norton. El proceso iterativo más sencillo que puede aplicarse para

resolver la ecuación (11.105) se basa en el algoritmo de Gauss o de punto fijo. Para ello basta con despejar la tensión armónica \mathcal{U}_k de la ecuación (11.104), tal que

$$\mathcal{U}_k^{(w+1)} = \mathcal{U}_k^{(w)} - \mathcal{Z}_k \Delta \mathcal{I}_k^{(w)} = \mathcal{Z}_k (\mathcal{I}_{gk} - \mathcal{I}_k^{(w)}(\mathcal{U}_1^{(w)}, \dots, \mathcal{U}_k^{(w)}, \dots, \mathcal{U}_h^{(w)})) \quad (11.106)$$

Es decir, la tensión armónica \mathcal{U}_k en la iteración $w + 1$ se obtiene inyectando a la red de impedancia \mathcal{Z}_k la corriente armónica \mathcal{I}_k calculada en la iteración w .

El algoritmo de Gauss sólo es adecuado cuando se trata de resolver problemas de interacción armónica relativamente débiles. En situaciones de fuerte interacción armónica es preferible utilizar el algoritmo de Newton, cuya formulación equivale a plantear la ecuación siguiente:

$$[V]^{(w+1)} = [V]^{(w)} - [J^{-1}]^{(w)} [\Delta I]^{(w)} \quad (11.107)$$

en donde

$$[V] = [\dots, V_{rk}, V_{xk}, \dots]^T \quad ; \quad [\Delta I] = [\dots, \Delta I_{rk}, \Delta I_{xk}, \dots]^T \quad (11.108)$$

Se observa que el vector de incógnitas $[V]$ contiene $2h$ términos correspondientes a las partes real e imaginaria de las tensiones armónicas. El vector $[\Delta I]$ también contiene $2h$ términos correspondientes a las partes real e imaginaria de las funciones de error, cuyas expresiones, de acuerdo con la ecuación (11.105), vienen dadas por

$$\Delta I_{rk} = I_{rk} - I_{grk} + G_k V_{rk} - B_k V_{xk} \quad (11.109)$$

$$\Delta I_{xk} = I_{xk} - I_{gxk} + B_k V_{rk} + G_k V_{xk} \quad (11.110)$$

La matriz jacobiana está formada por las derivadas de las funciones de error ΔI_{rk} e ΔI_{xk} (del armónico de orden k) con respecto a las tensiones armónicas V_{rm} y V_{xm} (del armónico de orden m). En la Tabla 11.4 se muestran las equivalencias de estas derivadas en los casos 1 y 2. En el caso 1, las derivadas coinciden con las sensibilidades de las corrientes de las cargas no lineales. Estas sensibilidades se obtienen directamente de las ecuaciones (11.90) y (11.91) aplicando las expresiones específicas (11.36), (11.55) y (11.69) correspondientes respectivamente a rectificadores, hornos de arco y compensadores TCR. En el caso 2, hay que incluir además el efecto de la red representado por los términos G_k y B_k .

Cuadro 11.4. Términos del jacobiano en un sistema monopuerta.

Caso	$\frac{\partial \Delta I_{rk}}{\partial V_{rm}}$	$\frac{\partial \Delta I_{rk}}{\partial V_{xm}}$	$\frac{\partial \Delta I_{xk}}{\partial V_{rm}}$	$\frac{\partial \Delta I_{xk}}{\partial V_{xm}}$
Caso 1: $k \neq m$	$\frac{\partial I_{rk}}{\partial V_{rm}}$	$\frac{\partial I_{rk}}{\partial V_{xm}}$	$\frac{\partial I_{xk}}{\partial V_{rm}}$	$\frac{\partial I_{xk}}{\partial V_{xm}}$
Caso 2: $k = m$	$\frac{\partial I_{rk}}{\partial V_{rk}} + G_k$	$\frac{\partial I_{rk}}{\partial V_{xk}} - B_k$	$\frac{\partial I_{xk}}{\partial V_{rk}} + B_k$	$\frac{\partial I_{xk}}{\partial V_{xk}} + G_k$

11.5.2. Algoritmos de resolución en un sistema multipuerta

Cuando existen varias cargas no lineales conectadas en n_p nudos de una red, se tiene un sistema multipuerta de n_p puertas. En este caso, la red lineal se representa por medio de un equivalente Norton multiterminal con respecto a los n_p nudos considerados. En estas condiciones, las ecuaciones balance de armónicos de la relación (11.105) se transforman en

$$\Delta \mathcal{I}_{kp}^{(w)} = \mathcal{I}_{kp}^{(w)}(\mathcal{U}_{1p}^{(w)}, \dots, \mathcal{U}_{kp}^{(w)}, \dots, \mathcal{U}_{hp}^{(w)}) - \left(\mathcal{I}_{gkp} - \sum_{q=1}^{n_p} \mathcal{Y}_{kpq} \mathcal{U}_{kq}^{(w)} \right) \quad (11.111)$$

en donde p y q son índices que varían entre 1 y n_p , y sirven para designar el nudo considerado. De esta manera, la ecuación (11.106), correspondiente al algoritmo de Gauss, se transforma en

$$\mathcal{U}_{kp}^{(w+1)} = \mathcal{U}_{kp}^{(w)} - \sum_{q=1}^{n_p} \mathcal{Z}_{kpq} \Delta \mathcal{I}_{kq}^{(w)} = \sum_{q=1}^{n_p} \mathcal{Z}_{kpq} \left(\mathcal{I}_{gkq} - \mathcal{I}_{kq}^{(w)}(\mathcal{U}_{1p}^{(w)}, \dots, \mathcal{U}_{kp}^{(w)}, \dots, \mathcal{U}_{hp}^{(w)}) \right) \quad (11.112)$$

en donde \mathcal{Z}_{kpq} representa el término de acoplamiento entre los nudos p y q al armónico de orden k del equivalente Thevenin multiterminal.

Para el método de Newton se empleará la formulación indicada mediante la relación (11.107), con:

$$[V] = [\dots, V_{rkp}, V_{xkp}, \dots]^T \quad ; \quad [\Delta I] = [\dots, \Delta I_{rkp}, \Delta I_{xkp}, \dots]^T \quad (11.113)$$

Es decir, estos vectores contienen ahora $2hn_p$ términos (partes real e imaginaria de h componentes armónicas en n_p nudos). De acuerdo con la ecuación (11.111), los términos ΔI_{rkp} y ΔI_{xkp} tienen por expresión

$$\Delta I_{rkp} = I_{rkp} - I_{grkp} + \sum_{q=1}^{n_p} G_{kpq} V_{rkq} - B_{kpq} V_{xkq} \quad (11.114)$$

$$\Delta I_{xkp} = I_{xkp} - I_{gxkp} + \sum_{q=1}^{n_p} B_{kpq} V_{rkq} + G_{kpq} V_{xkq} \quad (11.115)$$

Por tanto, la matriz jacobiana estará formada por las derivadas de las funciones de error ΔI_{rkp} y ΔI_{xkp} al armónico de orden k en el nudo p con respecto al armónico de tensión de orden m en el nudo q . En la Tabla 11.5 se muestran las equivalencias de estas derivadas en cuatro casos distintos. El tamaño del jacobiano será cuadráticamente proporcional con el número de puertas n_p para un número h de armónicos considerados. Sin embargo, y tal como indica la Tabla 11.5, gran parte de los términos serán nulos (caso 1). Sólo los bloques diagonales del jacobiano, correspondientes a términos englobados en los casos 3 y 4, estarán densamente poblados. Por consiguiente, en general se puede decir que la matriz jacobiana es bastante dispersa en sistemas multipuerta. Por tanto pueden aplicarse técnicas de matrices dispersas para reducir memoria y tiempo de cálculo computacional. Lógicamente, en sistemas monopuerta solamente existen términos de los casos 3 y 4, que coinciden con los indicados en la Tabla 11.4. En esta situación particular, ningún elemento del jacobiano es nulo.

Cuadro 11.5. Términos del jacobiano en un sistema multipuerta.

Caso	$\frac{\partial \Delta I_{rkp}}{\partial V_{rmq}}$	$\frac{\partial \Delta I_{rkp}}{\partial V_{xmq}}$	$\frac{\partial \Delta I_{xkp}}{\partial V_{rmq}}$	$\frac{\partial \Delta I_{xkp}}{\partial V_{xmq}}$
1: $p \neq q ; k \neq m$	0	0	0	0
2: $p \neq q ; k = m$	G_{kpq}	$-B_{kpq}$	B_{kpq}	G_{kpq}
3: $p = q ; k \neq m$	$\frac{\partial I_{rkp}}{\partial V_{rmp}}$	$\frac{\partial I_{rkp}}{\partial V_{xmp}}$	$\frac{\partial I_{xkp}}{\partial V_{rmp}}$	$\frac{\partial I_{xkp}}{\partial V_{xmp}}$
4: $p = q ; k = m$	$\frac{\partial I_{rkp}}{\partial V_{rkp}} + G_{kpp}$	$\frac{\partial I_{rkp}}{\partial V_{xkp}} - B_{kpp}$	$\frac{\partial I_{xkp}}{\partial V_{rkp}} + B_{kpp}$	$\frac{\partial I_{xkp}}{\partial V_{xkp}} + G_{kpp}$

11.6. Flujo de cargas con armónicos

El problema conocido como flujo de cargas con armónicos (*Harmonic Power Flow* en la literatura sajona) consiste en obtener las condiciones de operación en régimen permanente no sinusoidal en un sistema de potencia. Conceptualmente puede entenderse como extensión de los flujos de cargas convencionales (expuestos en el Capítulo 3) a una situación más general en la que las tensiones y las intensidades se encuentran distorsionadas como consecuencia de la conexión a red de cargas no lineales. En este caso, el objetivo consiste en obtener las tensiones armónicas en todos los nudos cuando se consideran las siguientes condiciones de contorno:

- Tipo 1: Restricciones de potencia activa P_1 y reactiva Q_1 a frecuencia fundamental en las cargas convencionales (lineales).
- Tipo 2: Restricciones de potencia P_1 y tensión V_1 a frecuencia fundamental en los alternadores.
- Tipo 3: Restricciones de punto de funcionamiento de las cargas no lineales. Por ejemplo, la potencia activa total P (incluyendo todos los armónicos) demandada por un horno de arco.
- Tipo 4: Restricciones asociadas a las ecuaciones balance de intensidades armónicas en aquellos nudos que presentan cargas no lineales.

La consideración de este conjunto de restricciones da lugar a un sistema no lineal de ecuaciones complicado y extenso, que debe resolverse mediante un proceso iterativo. La primera formulación del flujo de cargas armónico fue propuesta por Xia y Heydt [24], empleando el método de Newton para el tratamiento simultáneo de todas las restricciones. El número de ecuaciones a resolver es elevado ya que en las restricciones tipo 4 se incluyen las ecuaciones balance de armónicos en todos los nudos de la red.

Una alternativa interesante a esta primera formulación se basa en utilizar métodos desacoplados [23], [25] consistentes en descomponer el proceso iterativo en dos bloques. El primero es un flujo de cargas convencional (FCC) destinado a tratar las restricciones tipo 1 y tipo 2, mientras que el segundo emplea un programa de interacción armónica (PIA) para las restricciones tipo 3 y tipo 4. En la referencia [25], el módulo PIA usa un algoritmo de

Gauss modificado mientras que en [23] se utiliza el método de Newton. Mediante una interfase adecuada entre los bloques FCC y PIA se consigue resolver el flujo de cargas armónico con buenas características de convergencia siempre y cuando se aplique el algoritmo de Newton en el módulo PIA [23].

Recientemente se ha propuesto una formulación completa del método de Newton aplicado al flujo de cargas armónico [22] que evita cualquier tipo de desacoplo. En este caso se tratan como incógnitas no sólo las tensiones armónicas sino también los instantes inicial de conducción α y final de conducción δ en los rectificadores. Lógicamente este procedimiento ofrece mejores características de convergencia pero a costa de una formulación muy compleja y de una falta importante de modularidad de software que hace difícil acomodar nuevos modelos de cargas no lineales [11] en paquetes informáticos de uso profesional. Por estas razones, en lo que sigue se presentará la formulación desacoplada del flujo de cargas armónico [23].

11.6.1. Partes constitutivas del flujo de cargas armónico

La formulación desacoplada del flujo de cargas armónico consta de tres módulos básicos: flujo de cargas convencional (FCC), programa de penetración de armónicos (PPA) y programa de interacción armónica (PIA). La interrelación entre estos bloques se muestra en la Figura 11.20, en donde aparecen además los bloques correspondientes a modelos de cargas no lineales (MCNL). El bloque MCNL-1 supone tensión sinusoidal en bornes de las cargas no lineales, e intercambia información con el módulo FCC. El bloque MCNL-2 considera tensión distorsionada en bornes, e intercambia información con el módulo PIA. El funcionamiento de los bloques MCNL fue expuesto en la Sección 11.3, mientras que los módulos FCC y PIA se formulan según lo explicado en el Capítulo 3 y en la Sección 11.5. En ambos módulos se emplea el algoritmo de Newton para resolver las ecuaciones no lineales correspondientes.

La parte central del flujo de cargas armónico la constituye el módulo PPA, el cual, según se comentó en la Sección 11.4, realiza dos tareas básicas. Por una parte proporciona el equivalente Norton multiterminal al módulo PIA. Por otra, calcula intensidades y tensiones armónicas en cualquier punto de la red ante una inyección dada de corrientes armónicas debidas a perturbadores. Tanto el módulo PPA como los bloques FCC y PIA emplean técnicas de matrices dispersas [16] con objeto de presentar prestaciones de cálculo profesionales. Por ejemplo, para simular convenientemente la red española, el programa completo debe ser capaz de tratar sistemas con 1 000 nudos, de los cuales 25 podrán tener cargas no lineales. La máxima frecuencia armónica deberá situarse en torno a 2.5 kHz.

En la Figura 11.20, junto a los bloques antes mencionados, se indica un conjunto de elementos de entrada, salida e intercambio que se describen a continuación:

- (1) Tensiones fundamentales en los n_p nudos con cargas no lineales en una determinada iteración “ w ” del módulo FCC.
- (2) Potencias activa y reactiva a frecuencia fundamental en las cargas no lineales calculadas con las tensiones (1). Estas potencias se tomarán como especificadas en el módulo FCC.

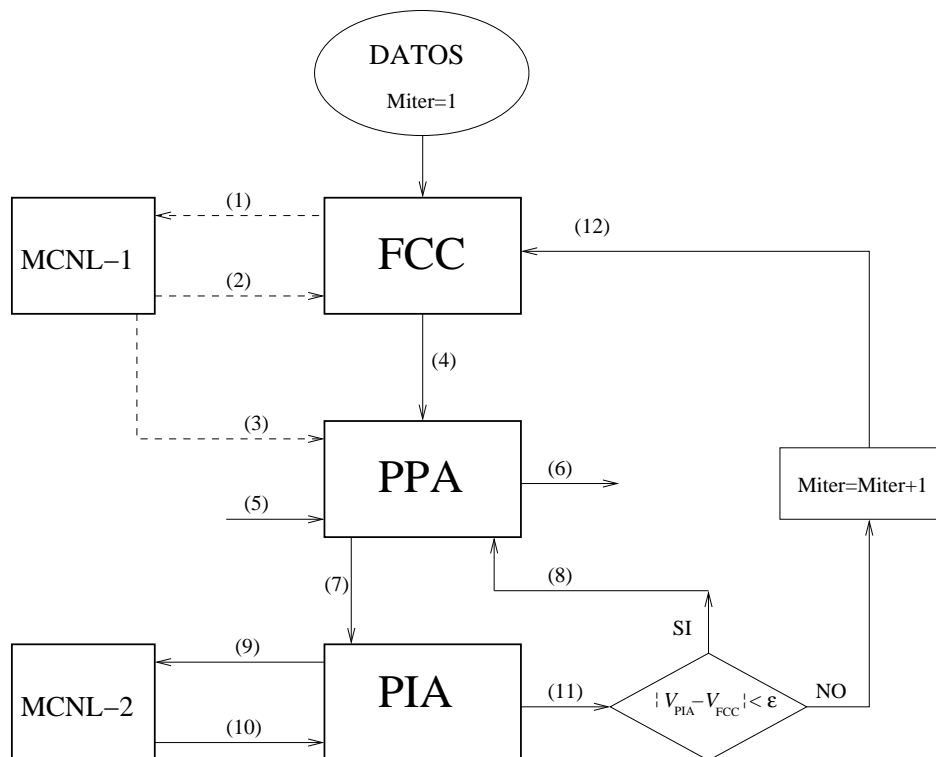


Figura 11.20. Esquema de flujo de cargas armónico.

- (3) Corrientes armónicas absorbidas por las cargas no lineales calculadas después de que ha convergido el módulo FCC.
- (4) Tensiones fundamentales en todos los nudos después de la convergencia del módulo FCC.
- (5) Corrientes armónicas independientes (estimadas o medidas) inyectadas al módulo PPA.
- (6) Salida de tensiones armónicas en todos los nudos de red.
- (7) Equivalente Norton multiterminal de la red lineal calculado respecto de los n_p nudos con cargas no lineales.
- (8) Corrientes armónicas absorbidas por las cargas no lineales calculadas después de que ha convergido el módulo PIA.
- (9) Tensiones armónicas en los n_p nudos con cargas no lineales en una determinada iteración “ w ” del módulo PIA.
- (10) Corrientes armónicas (y sus sensibilidades) de las cargas no lineales determinadas con las tensiones armónicas (9).
- (11) Tensiones fundamentales en los n_p nudos con cargas no lineales después de la convergencia del módulo PIA.

- (12) Potencias activa y reactiva a frecuencia fundamental en las cargas no lineales después de converger el módulo PIA.

Aprovechando esta estructura modular, se pueden abordar problemas de análisis de armónicos con distinto nivel de complejidad. El más sencillo consiste en utilizar solamente el módulo PPA con inyección de corrientes armónicas independientes (5). Este procedimiento ofrece como única ventaja su simplicidad. Prescindiendo inicialmente de la inexactitud de este método, conviene resaltar que su aplicación tiene sentido sólo cuando se trata la inyección de un único perturbador, ya que en el caso de inyecciones múltiples en distintos nudos se precisan sus desfases relativos, los cuales son difíciles de obtener por estimación o medida.

El segundo nivel de complejidad puede denominarse como “flujo de cargas armónico simplificado”. En este caso sólo se emplean los módulos FCC y PPA junto con el bloque MCNL-1. Es decir, el cálculo de las corrientes armónicas (3) de las cargas no lineales se realiza suponiendo tensiones sinusoidales procedentes del módulo FCC.

Cuando se prevén distorsiones significativas es imprescindible acudir al tercer nivel de complejidad denominado “flujo de cargas armónico” propiamente dicho. En este caso, según indica la Figura 11.20, se procede a ejecutar secuencialmente y de forma iterativa los módulos FCC, PPA y PIA. A la cadena de ejecuciones de bloques FCC-PPA-PIA se la denomina macroiteración, siendo Miter el contador de las mismas. Normalmente, basta con realizar 2 o 3 macroiteraciones para alcanzar la convergencia global en la mayoría de los casos. A continuación, se procede a explicar este proceso por medio de un ejemplo.

Supongamos una red en la que se conecta un rectificador con especificación de punto de funcionamiento PI_d . El inicio de la primera macroiteración (Miter=1) comienza ejecutando el módulo FCC junto con el bloque MCNL-1, tomando la potencia P como potencia a frecuencia fundamental. En cada iteración del módulo FCC se ajusta el punto de funcionamiento del rectificador según lo descrito en la Sección 11.3.4. Una vez realizado este proceso se calcula la corriente fundamental \mathcal{I}_1 a partir de la ecuación (11.47), y con la tensión \mathcal{U}_1 proporcionada por el módulo FCC se calculan las potencias P_1 y Q_1 que son enviadas como elemento (2) al módulo FCC en cada iteración del mismo. Después de alcanzar la convergencia, el módulo FCC suministra las tensiones fundamentales (4) al módulo PPA. Con estas tensiones el bloque PPA calcula tensiones en magnitud y fase detrás de la reactancia de los alternadores y sustituye las cargas convencionales por admitancias armónicas (en base a las tensiones proporcionadas por el módulo FCC) y forma la matriz de admitancias armónicas. A continuación, el bloque PPA determina el equivalente Norton de la red (elemento 7 del diagrama) respecto al nudo de conexión del rectificador (véase la Figura 11.19) y lo envía al módulo PIA. El módulo PIA utiliza esta información junto con la recibida del bloque MCNL-2 para formular y resolver las ecuaciones balance de armónicos en el nudo de conexión del rectificador según lo expuesto en la Sección 11.5. Debe destacarse que en cada iteración del módulo PIA, el bloque MCNL-2 realiza un control PI_d del punto de funcionamiento del rectificador. Al final del proceso iterativo del módulo PIA, el rectificador presenta unas potencias fundamentales P_1 y Q_1 que difieren de las que se emplearon en el módulo FCC. Ello es debido a que la distorsión de tensión sobre el rectificador con control PI_d hace que varíen ligeramente las potencias fundamentales respecto del caso en el que

se consideraba tensión puramente sinusoidal. Por tanto, si discrepan las potencias P_1 y Q_1 del rectificador en las salidas de los módulos FCC y PIA, también discreparán las tensiones fundamentales del rectificador en ambos módulos. Si esta discrepancia (véase la Figura 11.20) es mayor que una tolerancia dada ϵ (por ejemplo $\epsilon = 10^{-4}$) se procede a comenzar la segunda macroiteración. Es importante señalar aquí que, a partir de la segunda macroiteración, la carga no lineal, en este caso el rectificador, se trata en el módulo FCC como una carga P_1Q_1 , con las potencias P_1 y Q_1 obtenidas del módulo PIA en la macroiteración previa. Después se procede de forma análoga a lo expuesto para la primera macroiteración.

11.6.2. Aplicaciones

Como ejemplo de aplicación se adopta la red de transporte de la Figura 11.21 en la que se ha seleccionado una base de 100 kV y 100 MVA. En este esquema, los generadores regulan respectivamente las tensiones de los nudos 1 y 2 a los valores de 1.06 pu y 1.04 pu. El nudo 1 se toma como nudo oscilante mientras que el nudo 2 es de tipo PV con una potencia generada de 40 MW y una carga PQ convencional de 20 MW y 10 Mvar. El resto de los nudos son de tipo PQ, teniendo el nudo 4 una carga PQ convencional de 40 MW y 5 Mvar. Las cargas no lineales correspondientes a horno de arco, compensador TCR y rectificador se conectan respectivamente en los nudos 3, 4 y 5. Los parámetros de las líneas se indican en la Tabla 11.6 mientras que las reactancias subtransitorias de los generadores tienen un valor de 0.125 pu.

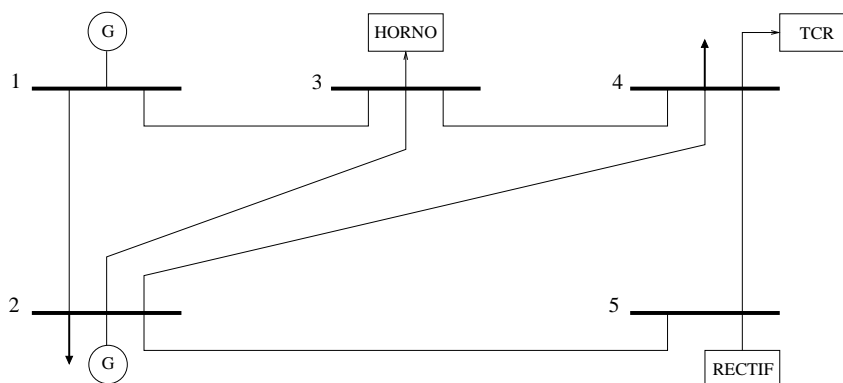


Figura 11.21. Red de transporte de cinco nudos.

Las cargas no lineales se definen de la manera siguiente:

- La instalación del horno de arco comprende un trafo 100 kV/700 V Dd0 con una reactancia $X = 80\%$ sobre la base de 100 MVA. Esta reactancia total incluye el efecto de los cables que unen el trafo a los electrodos. El punto de funcionamiento se ajusta tomando como consigna una corriente de 0.8 pu para la componente fundamental.
- El compensador TCR presenta una capacidad máxima de 100 Mvar a la tensión nominal de 100 kV. El punto de funcionamiento está definido mediante una potencia reactiva especificada de 47.3 Mvar.

- El rectificador tiene un trafo de aislamiento 100 kV/1kV Yy0. Las reactancias X y X_F toman los valores de 20 y 80 % respectivamente sobre la base de 100 MVA. El punto de funcionamiento se define especificando una potencia de 40 MW y una corriente continua I_d de 37.8 kA, lo cual es equivalente a establecer una tensión continua V_d de 1.0582 kV.

Cuadro 11.6. Parámetros de líneas.

línea	R(pu)	X(pu)	B(pu)	línea	R(pu)	X(pu)	B(pu)
1-2	0.02	0.06	0.06	2-5	0.04	0.12	0.03
1-3	0.08	0.24	0.05	3-4	0.01	0.03	0.02
2-3	0.06	0.18	0.04	4-5	0.08	0.24	0.05
2-4	0.06	0.18	0.04				

Con estos datos de entrada se procede a realizar un flujo armónico simplificado y un flujo armónico detallado. Como se vio en la Sección 11.6.1, el primero sólo contempla la aplicación de los módulos FCC y PPA de la Figura 11.20. El segundo tiene en cuenta el efecto de la interacción armónica al ejecutar secuencialmente los módulos FCC, PPA y PIA. Para la simulación se han considerado los primeros 17 armónicos característicos, es decir, hasta $k = 49$. Se ha empleado un error de cierre de 10^{-5} para el módulo PIA y otro de 10^{-4} para el proceso iterativo entre bloques designado mediante las macroiteraciones correspondientes. Es importante destacar en este ejemplo que las cargas convencionales se representan con estructura R-L serie. Además, la determinación de los pasos por cero del control de disparo en el rectificador y en el elemento TCR se realiza tomando la componente fundamental de tensión. En las Tablas 11.7 y 11.8 se pueden observar las corrientes armónicas generadas por las cargas no lineales y en las Tablas 11.9 y 11.10 las tensiones armónicas en todos los nudos de la red. Por comparación de estas tablas puede deducirse directamente que el efecto de la interacción armónica, contemplado en el flujo armónico detallado, modifica sensiblemente las corrientes armónicas generadas y por tanto las tensiones armónicas resultantes.

Cuadro 11.7. Corrientes armónicas absorbidas por las cargas no lineales en el flujo armónico simplificado.

Armónico	Horno		TCR		Rectificador	
	I_k (%)	θ_{ik} (°)	I_k (%)	θ_{ik} (°)	I_k (%)	θ_{ik} (°)
1	80.00	-51.04	49.24	-94.11	51.13	-41.43
5	3.29	-136.67	4.39	-110.56	12.05	-29.16
7	1.68	132.66	0.86	61.22	4.58	-101.67
11	0.68	-48.67	0.89	44.78	3.83	-93.37
13	0.49	-139.34	0.59	-143.45	2.48	-172.62
17	0.28	39.32	0.21	-159.89	1.82	-160.64
19	0.23	-51.35	0.31	11.89	1.44	119.04

Cuadro 11.8. Corrientes armónicas absorbidas por las cargas no lineales en el flujo armónico detallado.

Armónico	Horno		TCR		Rectificador	
	I_k (%)	θ_{ik} (°)	I_k (%)	θ_{ik} (°)	I_k (%)	θ_{ik} (°)
1	80.00	-50.93	49.26	-94.42	51.02	-39.61
5	2.80	-169.23	3.40	-121.12	11.10	-19.74
7	1.84	103.52	1.72	56.40	4.71	-90.26
11	1.10	-51.89	0.88	22.03	2.96	-71.01
13	0.72	-142.90	0.83	-143.56	2.10	-150.58
17	0.11	48.25	0.17	-164.83	0.57	-133.52
19	0.68	-17.58	0.57	-2.59	1.32	166.09

Cuadro 11.9. Tensiones armónicas en el flujo armónico simplificado.

k	Nudo 1		Nudo 2		Nudo 3		Nudo 4		Nudo 5	
	V_k (%)	θ_k (°)	V_k (%)	θ_k (°)	V_k (%)	θ_k (°)	V_k (%)	θ_k (°)	V_k (%)	θ_k (°)
1	106.00	0.00	104.00	-2.37	96.31	-3.94	96.00	-4.11	98.05	-4.36
5	6.77	-169.2	8.36	-167.5	11.31	-177.9	11.63	-177.6	14.26	-155.9
7	6.39	82.7	7.51	84.3	10.16	75.7	9.99	75.5	10.58	96.9
11	2.60	20.9	2.49	25.9	4.04	8.0	3.89	7.2	2.16	114.8
13	2.04	-69.6	1.73	-64.8	2.73	-81.4	2.41	-81.8	1.75	63.4
17	1.32	-44.1	1.41	62.7	7.86	-87.1	6.37	-89.2	14.38	92.9
19	7.72	-169.4	5.63	-159.5	6.56	42.8	6.43	35.6	6.21	-91.9

El punto de funcionamiento de las cargas no lineales viene definido por el valor final que alcanzan las variables de control indicadas en la Tabla 11.11. Se observa que la interacción armónica modifica apreciablemente el ángulo de disparo del rectificador y en menor medida el ángulo de disparo del compensador TCR y la tensión de arco del horno.

Por otra parte, existen leves discrepancias en los valores finales de las potencias fundamentales obtenidas en ambos flujos para el horno y el rectificador. Este hecho se pone de manifiesto en la Tabla 11.12, en donde se comprueba cómo influye la interacción armónica en los consumos PQ de las cargas no lineales. Por ejemplo, el consumo total del rectificador es de 40 MW, de los cuales 40.94 MW se absorben a frecuencia fundamental. Ello significa que al resto de frecuencias armónicas se produce una generación de 0.94 MW. Estas discrepancias entre valores PQ justifican la necesidad de realizar macroiteraciones entre los módulos FCC, PPA y PIA. En este caso se realizaron tres macroiteraciones.

Por último, conviene analizar los resultados de este ejemplo. Primeramente hay que destacar el elevado nivel de distorsión presente en todas las tensiones de la red, no sólo en los primeros armónicos sino también a la frecuencia del armónico 19, para la cual las capacidades de las líneas y las inductancias de la red ofrecen una situación próxima a la resonancia, dando lugar a tensiones armónicas que superan el 8% para dicha frecuencia. En estas condiciones se hace imprescindible acudir al flujo armónico detallado para obtener

Cuadro 11.10. Tensiones armónicas en el flujo armónico detallado.

k	Nudo 1		Nudo 2		Nudo 3		Nudo 4		Nudo 5	
	V_k (%)	θ_k (°)	V_k (%)	θ_k (°)	V_k (%)	θ_k (°)	V_k (%)	θ_k (°)	V_k (%)	θ_k (°)
1	106.00	0.00	104.00	-2.40	96.34	-3.97	96.03	-4.14	98.15	-4.45
5	4.47	-157.3	5.64	-154.8	7.09	-169.0	7.43	-168.2	10.65	-141.2
7	3.67	137.4	4.53	139.4	5.00	127.6	5.04	129.1	8.17	149.8
11	2.78	43.4	2.80	46.6	3.68	33.4	3.59	31.3	1.99	97.6
13	2.12	-54.0	1.89	-52.1	2.40	-59.7	2.13	-60.4	0.72	70.4
17	0.43	-30.1	0.34	95.9	2.38	-57.2	1.89	-58.4	4.34	122.9
19	5.63	-120.8	4.82	-109.2	7.66	87.2	7.12	82.5	8.19	-72.2

Cuadro 11.11. Valores finales de las variables de control.

	Flujo armónico simplificado	Flujo armónico detallado
Horno	$V_{\text{arc}} = 295.76 \text{ V}$	$V_{\text{arc}} = 296.57 \text{ V}$
Rectificador	$\alpha_o = 31.86^\circ$	$\alpha_o = 28.56^\circ$
TCR	$\alpha_o = 113.14^\circ$	$\alpha_o = 113.66^\circ$

resultados fiables. Desde un punto de vista técnico, una distorsión como la que indica la Tabla 11.10 es inadmisibles ya que supera los niveles de compatibilidad electromagnética establecidos en las normas. La razón de estos resultados estriba en la elevada potencia de los elementos no lineales en relación con la red considerada, ya que ésta puede decirse que es demasiado débil para soportar estos niveles de perturbación. Sin embargo, mediante este ejemplo se pone de manifiesto los aspectos más relevantes asociados al análisis en detalle de armónicos mediante flujos de cargas. En este sentido, sería de gran utilidad investigar la posible reducción de niveles de distorsión mediante la aplicación de filtros en bornes de las cargas no lineales. De esta manera, el flujo armónico resulta ser una herramienta muy útil, ya que una vez diseñado el filtro puede comprobarse su eficacia mediante la simulación correspondiente de la red completa.

11.7. Normativa

La exigencia de que las condiciones de suministro sean las ideales, es decir, ondas sinusoidales perfectamente equilibradas, no sería económicamente aceptable, por lo que en los sistemas eléctricos se tienen que establecer unas tolerancias que permitan una cierta

Cuadro 11.12. Potencias finales al fundamental.

	Flujo armónico simplificado		Flujo armónico detallado	
	P_1 (MW)	Q_1 (Mvar)	P_1 (MW)	Q_1 (Mvar)
Horno	52.45	56.44	52.60	56.33
Rectificador	40.00	30.22	40.94	28.83

desviación respecto de estas condiciones ideales, y que sean aceptables tanto para usuarios como para los propietarios de las redes. Esta normativa, por tanto, establecerá condiciones para la conexión de perturbadores, y límites de perturbación admisibles en las redes, que tienen que ser toleradas por todos los usuarios conectados.

Uno de los organismos que emiten estas normas es la Comisión Electrotécnica Internacional (CEI o IEC, en sus siglas inglesas), que incluye a la mayor parte de los países industrializados, entre ellos los pertenecientes a la Unión Europea. En España, el organismo que emite normas se denomina AENOR, y contribuye a la elaboración de normas internacionales por parte de la CEI. Dentro de las normas elaboradas por la CEI, las normas que se ocupan de la compatibilidad electromagnética se agrupan dentro de la serie 61000.

A continuación, se recogen algunas de las definiciones más importantes dentro del campo de la compatibilidad electromagnética.

- **Perturbación electromagnética:** Fenómeno electromagnético susceptible de crear problemas de funcionamiento de un dispositivo, un aparato o un sistema, o de afectar desfavorablemente a la materia viva o inerte.
- **Nivel de perturbación:** Valor de una perturbación electromagnética dada.
- **Nivel de inmunidad:** Máximo nivel de perturbaciones electromagnéticas que puede soportar un dispositivo sin que se altere su comportamiento.
- **Compatibilidad electromagnética:** Capacidad de un equipo o sistema de funcionar satisfactoriamente en su entorno electromagnético sin introducir perturbaciones electromagnéticas intolerables para dispositivos que se encuentren en ese entorno.
- **Nivel de emisión:** Nivel de una perturbación electromagnética dada, emitida desde un dispositivo particular, equipo o sistema, y medida de un modo especificado.
- **Límite de emisión:** Nivel de emisión máximo permisible.
- **Nivel de compatibilidad:** Máximo nivel especificado de perturbación electromagnética al que se puede esperar que sea sometido un dispositivo, aparato o sistema funcionando en condiciones particulares.
- **Límite de inmunidad:** Nivel de inmunidad mínimo requerido.

En la Figura 11.22 se ilustra la relación entre los distintos límites para que exista compatibilidad electromagnética. En el caso de un perturbador, el nivel de emisión tiene que ser inferior al límite que la normativa señala en las condiciones de funcionamiento del mismo. Este límite de emisión tiene que ser inferior al nivel de compatibilidad, para que las emisiones de los distintos perturbadores no produzcan un nivel de perturbación superior al nivel de compatibilidad. En lo que respecta a un *susceptor*, éste debe ser capaz de tolerar el nivel de compatibilidad, es decir, el nivel de inmunidad tendrá que ser superior al nivel de compatibilidad, y además, también superior al límite de inmunidad establecido para los equipos de su clase.

En la Tabla 11.13 se muestran los niveles de compatibilidad, en tanto por ciento, sobre la tensión nominal para los distintos armónicos. Estos niveles corresponden al 95 % de probabilidad de que no sean sobrepasados en cualquier lugar de la red.

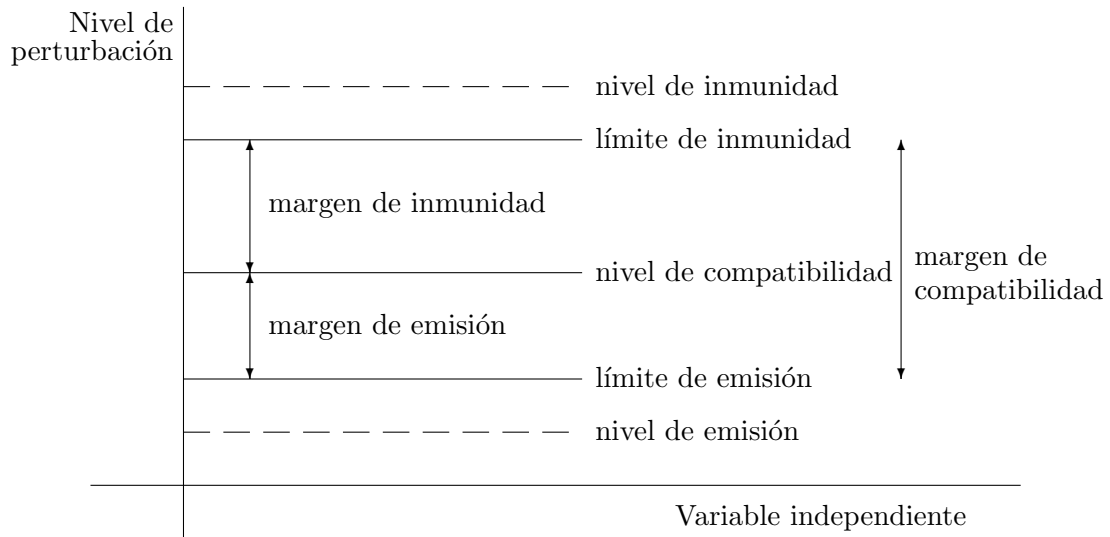


Figura 11.22. Ilustración de los distintos límites [3].

Cuadro 11.13. Niveles de compatibilidad en redes de media y baja tensión [4].

Armónicos impares no múltiplos de 3		Armónicos impares múltiplos de 3		Armónicos pares	
Orden k	Tensión armónica (%)	Orden k	Tensión armónica (%)	Orden k	Tensión armónica (%)
5	6	3	5	2	2
7	5	9	1.5	4	1
11	3.5	15	0.3	6	0.5
13	3	21	0.2	8	0.5
17	2	> 21	0.2	10	0.5
19	1.5			12	0.2
23	1.5			> 12	0.2
25	1.5				
> 25	0.2+ $1,3 \cdot (25/k)$				

Bibliografía

- [1] J. Arrillaga, D. Bradley y P. S. Bodger, *Power System Harmonics*, John Wiley & Sons, 1985.
- [2] J. Arrillaga, B. C. Smith, N. R. Watson y A. R. Wood, *Power System Harmonic Analysis*, John Wiley & Sons, Chichester, 1997.
- [3] Comisión Electrotécnica Internacional (CEI), “Electromagnetic Compatibility. Part 1: General. Section 1: Application and Interpretation of Fundamental Definitions and Terms”, *CEI 61000-1-1*, 1992.
- [4] Comisión Electrotécnica Internacional (CEI), “Electromagnetic Compatibility. Part 3: Limits. Section 6: Assessment of Emission Limits for Distorting Loads in MV and HV Power Systems—Basic EMC publication”, *CEI 61000-3-6*, 1996.
- [5] T. J. Densem, P. S. Bodger y J. Arrillaga, “Three Phase Transmission Systems for Harmonic Penetration Studies”, *IEEE Transactions on PAS*, vol. 103(2), febrero 1984, pp. 310-317.
- [6] J. García Mayordomo, R. Asensi, L. Fernández Beites, J. Bueno, L. Zabala y J. Amantegui, “A Frequency Domain Arc Furnace Model for Harmonic Power Flows Under Balanced Conditions”, VII IEEE International Conference on harmonics and Quality of Power, Las Vegas, octubre 1996, pp. 419-427.
- [7] J. García Mayordomo, L. Fernández Beites, R. Asensi, M. Izzeddine, L. Zabala y J. Amantegui, “A New Frequency Domain Arc Furnace Model for Iterative Harmonic Analysis”, *IEEE Transactions on Power Delivery*, vol. 12(4), octubre 1997, pp. 1771-1778.
- [8] J. García Mayordomo, L. Fernández Beites, R. Asensi, F. Orzáez, M. Izzeddine y L. Zabala, “A Contribution for Modeling Controlled and Uncontrolled AC/DC Converters in Harmonic Power Flows”, *IEEE Transactions on Power Delivery*, vol. 13(4), octubre 1998, pp. 1501-1508.
- [9] J. García Mayordomo, M. Izzeddine y L. Zabala, “A Contribution for Modeling Static Var Compensators in Iterative Harmonic Analysis”, VIII IEEE International Conference on harmonics and Quality of Power, Atenas, octubre 1998, pp. 285-291.
- [10] J. García Mayordomo, A. Hernández, R. Asensi, L. Fernández Beites y M. Izzeddine, “A Unified Theory of Uncontrolled Rectifiers, Discharge Lamps and Arc Furnaces. Part I: An Analytical Approach for Normalized Harmonic Emission Calculations”, VIII IEEE International Conference on harmonics and Quality of Power, Atenas, octubre 1998, pp. 740-748.
- [11] J. García Mayordomo, M. Izzeddine, A. Hernández, R. Asensi y L. Fernández Beites, Comentario al artículo: “Power Flow Constrained Harmonic Analysis in AC-DC Power Systems”, *IEEE Transactions on Power Systems*, vol. 14(4), noviembre 1999, pp. 1260-1261.
- [12] J. J. Grainger y W. D. Stevenson, *Power System Analysis*, McGraw-Hill, Nueva York, 1994.
- [13] M. Groetzbach y Ch. Ried, “Investigation of AC/DC Converter Harmonics by an Analytical Based Time-Discrete Approach”. *IEEE Transactions on Power Delivery*, vol. 12(2), abril 1997, pp. 874-880.
- [14] IEEE Power Engineering Society, *Tutorial on Harmonics Modeling and Simulation*, Publicación TP125-0, 1998.
- [15] E. W. Kimbark, *Direct Current Transmission*, vol. 1, Wiley-Interscience, New York, 1971.
- [16] K. S. Kundert y Sangiovanni-Vincentelli, *Sparse User's Guide. A Sparse Linear Equation Solver. Version 1.3a*, Universidad de California, Berkeley, abril 1988.
- [17] A. A. Mahmoud, (ed.), *IEEE Tutorial Course. Power System Harmonics*, Publicación 94-EH0221-2-PWR, 1984.
- [18] M. A. Pesonen, “Harmonics, Characteristics Parameters, Methods of Study, Estimates of Existing Values in the Network”, *Electra*, vol. 77, julio 1981, pp. 35-54.

- [19] J. J. Rico, E. Acha y T. J. E. Miller, "Harmonic Domain Modelling Of Three Phase Thyristor-Controlled Reactors by Means of Switching Vectors and Discrete Convolutions", *IEEE Transactions on Power Delivery*, vol. 11(3), julio 1996, pp. 1678-1684.
- [20] B. C. Smith, N. R. Watson, A. R. Wood y J. Arrillaga, "A Newton Solution for the Harmonic Phasor Analysis of AC/DC Converters", *IEEE Transactions on Power Delivery*, vol. 11(2), abril 1996, pp. 965-971.
- [21] B. C. Smith, J. Arrillaga, A. R. Wood y N. R. Watson, "A Review of Iterative Harmonic Analysis for AC/DC Power Systems", *IEEE Transactions on Power Delivery*, vol. 13(1), enero 1998, pp. 180-185.
- [22] B. C. Smith y J. Arrillaga, "Power Flow Constrained Harmonic Analysis in AC-DC Power Systems", *IEEE Transactions on Power Systems*, vol. 14(4), noviembre 1999, pp. 1251-1259.
- [23] M. Valcárcel y J. García Mayordomo, "Harmonic Power Flow for Unbalanced Systems", *IEEE Transactions on Power Delivery*, vol. 8(4), octubre 1993, pp. 2052-2059.
- [24] D. Xia y G.T. Heydt, "Harmonic Power Flow Studies. Parts I & II", *IEEE Transactions on PAS*, vol. 101(6), junio 1982, pp. 1257-1270.
- [25] W. Xu, J. R. Marti y H. W. Dommel, "A Multiphase Harmonic Load Flow Solution Technique", *IEEE Transactions on Power Systems*, vol. 6(1), febrero 1991, pp. 174-182.
- [26] W. Xu, J. R. Marti y H.W. Dommel, "Harmonic Analysis Systems with Static Compensators", *IEEE Transactions on Power Systems*, vol. 6(1), febrero 1991, pp. 183-190.

Capítulo 12

Flujo de cargas trifásico

JULIO GARCÍA MAYORDOMO Y ANTONIO GÓMEZ EXPÓSITO

12.1. Introducción

Las perturbaciones eléctricas de baja frecuencia que se producen en el funcionamiento normal de la red se pueden clasificar en armónicos, desequilibrios y flicker. Los desequilibrios se refieren a la frecuencia fundamental y se expresan principalmente en términos de tensión de secuencia inversa y homopolar en los diferentes nudos de la red. De esta manera, la existencia de reducidos contenidos de estas magnitudes equivale a un índice adecuado de calidad de servicio respecto a la perturbación asociada al desequilibrio.

Las principales fuentes de desequilibrio en la red de transporte son los consumos desequilibrados debidos a hornos de arco en corriente alterna y a la tracción eléctrica para alta velocidad. También, la configuración geométrica de la mayor parte de las líneas de transporte introduce cierto desequilibrio, si bien de un orden de magnitud inferior al mencionado para los consumos desequilibrados.

Por otra parte, el tipo de conexión de los transformadores y la configuración de los consumos desequilibrados hace que se propague con más facilidad la componente de secuencia inversa en comparación con la secuencia homopolar. Esto explica el que la mayoría de los estudios desarrollados se centren en la generación y propagación de secuencia inversa. La existencia de tensión inversa en la alimentación produce sobrecalentamientos en las máquinas eléctricas rotativas y desplazamientos en los pasos por cero de las tensiones de entrada en los convertidores estáticos de potencia, afectando por tanto al control de los mismos, y dando lugar a la generación de armónicos no característicos. Para evitar en la medida de lo posible el efecto de los desequilibrios sobre los equipos sensibles antes mencionados, la normativa existente [13] propone un 2% para el nivel de compatibilidad de tensión inversa en las redes de baja y media tensión y un 1% para las redes de alta tensión.

El flujo de cargas trifásico es la herramienta más adecuada para realizar estudios de desequilibrios. Puede considerarse como una extensión del flujo de cargas monofásico en donde hay que tener en cuenta un número considerable de aspectos que lo hagan suficientemente flexible para representar las distintas situaciones asociadas al desequilibrio. Además, el flujo

de cargas trifásico constituye el núcleo de partida del análisis de propagación de armónicos en redes desequilibradas (véase el Capítulo 11).

12.1.1. Estado del arte

A escala comercial existe una carencia importante de programas de flujos de cargas trifásicos para redes de transporte. En este sentido, se ha propuesto recientemente [12] combinar un reparto de cargas monofásico y un programa de análisis de cortocircuitos para contrarrestar este vacío. Sin embargo, un análisis más detallado precisa utilizar repartos de cargas trifásicos [1], [19], buena parte de los cuales han sido desarrollados para ser encapsulados en los denominados flujos de cargas con armónicos [14], [17], [18], en los que el proceso iterativo se resuelve aplicando el método de Newton.

En [14], [15] se resuelve el problema utilizando el método clásico consistente en plantear las funciones de error ΔP y ΔQ para cada nudo y cada fase. El principal inconveniente de este procedimiento estriba en la poca flexibilidad para representar cargas PQ desequilibradas. Es decir, sólo se consideran cargas PQ en configuración estrella con el neutro puesto a tierra. De este modo, no es posible reproducir las configuraciones de los principales consumos desequilibrados más frecuentes en las redes de transporte, como son los hornos de arco y la tracción eléctrica a alta velocidad. Los hornos de arco deben considerarse como una carga desequilibrada a tres hilos mientras que la tracción eléctrica a alta velocidad [6], [7] equivale a una carga monofásica entre dos conductores de línea.

En [17] se resuelve este problema considerando cargas PQ aisladas de tierra en configuraciones estrella y triángulo. Además se propone un algoritmo de resolución del flujo de cargas empleando ecuaciones balance de intensidades. Las incógnitas asociadas a las tensiones se formulan en coordenadas polares. La principal limitación de este método reside en el tratamiento de los nudos PV, ya que se definen especificando el módulo y el argumento de las tensiones detrás de la reactancia. Es decir, no se regula la tensión en el nudo ni tampoco la potencia del nudo PV.

Recientemente se ha propuesto en [4], [10] una formulación basada en las ecuaciones de balance de intensidad en los nudos. Estas ecuaciones se escriben en coordenadas rectangulares correspondientes a las magnitudes de fase, y se resuelven mediante el método de Newton aprovechando la estructura dispersa del jacobiano. Sin embargo, las principales limitaciones de esta formulación se refieren al tratamiento de los nudos PV y de las cargas PQ. En efecto, en este método se tratan cargas PQ en estrella con el neutro puesto a tierra. Por otra parte, los nudos PV se definen especificando de forma independiente la potencia y la tensión de cada fase. Este modo de proceder puede ser adecuado cuando se pretende representar redes de distribución. Sin embargo, para redes de transporte, la constitución interna de las máquinas síncronas (tensión interna de secuencia directa, e impedancias a las tres secuencias) hace que sólo sea lógico especificar una potencia y una tensión que pueden regularse actuando sobre el módulo y argumento de la tensión interna de secuencia directa.

Probablemente, la formulación descrita en [18] sea la propuesta más flexible para realizar el flujo de cargas trifásico. Con este método se superan las limitaciones anteriormente mencionadas para representar nudos PV y nudos PQ, pudiéndose plantear cualquier tipo de desequilibrio mediante el uso explícito de ecuaciones que modelan restricciones de ramas,

las cuales se añaden a las ecuaciones de nudos. Sin embargo, la aplicación del método de Newton a estas ecuaciones conduce a un jacobiano de gran dimensión, ya que además de las incógnitas habituales relativas a las tensiones de nudo aparecen también las intensidades de rama de las cargas PQ, las intensidades de rama de las máquinas síncronas y las tensiones internas de secuencia directa de las máquinas síncronas.

12.1.2. Formulación basada en residuos de intensidad

En este capítulo se va a describir una formulación del flujo de cargas trifásico tan compacta como la propuesta en [10] y tan flexible como la desarrollada en [18], siguiendo las ideas expuestas en [8] y [9]. Las características principales de esta formulación son:

1. Solución por el método de Newton de las ecuaciones de balance de intensidad.
2. Todas las magnitudes se expresan en coordenadas rectangulares y en términos de secuencias para explotar al máximo la estructura dispersa del jacobiano.
3. En cada nudo puede representarse cualquier combinación de cargas PQ, expresadas como fuentes de intensidad dependientes de la tensión y la potencia especificada.
4. Los nudos PV se tratan como se expone en [18] y [2], es decir, se especifica la potencia activa de secuencia directa y la tensión de secuencia directa en las barras del nudo.

Esta metodología aporta las ventajas siguientes:

- Como consecuencia de las características 3 y 4, sólo aparecen como incógnitas las tensiones de nudos. Es decir, se obtiene una gran reducción en el número de ecuaciones y de incógnitas con respecto al método propuesto en [18].
- Como se ha indicado, se trabaja con magnitudes de secuencia. Esto coincide con el formato usual utilizado en las bases de datos de flujos de cargas y estudios de cortocircuitos en las redes de transporte, en donde se supone que las tres redes de secuencia están desacopladas. En este sentido, la inclusión de una línea no transpuesta entre dos nudos p y q implica, como veremos más adelante, un acoplamiento entre secuencias para los términos situados fuera de la diagonal de la matriz de admitancias. Sin embargo, para cualquier otra pareja de nudos p y q que no contenga líneas desequilibradas, los términos p - q fuera de la diagonal no presentarían acoplamientos entre secuencias, pero sí entre fases. Consecuentemente, si se acepta la hipótesis de que sólo una parte de las líneas precisa una representación exacta (modelo de línea no transpuesta), los elementos situados fuera de la diagonal de la matriz de admitancias, y por tanto del jacobiano, ofrecerán una estructura más dispersa cuando el problema se formula en componentes simétricas. Esta propiedad reduce la carga computacional al resolver el sistema de ecuaciones resultante mediante librerías adecuadas [11].

La Figura 12.1 representa un nudo genérico p , tanto en el dominio de fases como en el dominio de secuencias, para visualizar mejor los conceptos que siguen a continuación relacionados con las ecuaciones de balance de intensidad. En la red lineal, que une el nudo p con los demás, se incluyen elementos que pueden modelarse como impedancia constante.

Esta red está desacoplada en secuencias, salvo por la presencia de líneas que no puedan suponerse estructuralmente equilibradas (las líneas a trazos sugieren este débil acoplamiento). La carga PQ es en general desequilibrada y, como se verá, puede producir acoplamiento tanto en fases como en secuencias, dependiendo de los casos. Finalmente, en algunos nudos puede haber máquinas síncronas con capacidad para regular la tensión. Estos dispositivos constructivamente equilibrados sólo suministran potencia activa a la secuencia directa, para lo cual adaptan convenientemente su fuerza electromotriz interna. Por tanto, parece obvia la ventaja de trabajar en componentes simétricas, al menos cuando se analizan redes de transporte, sin menoscabo de que determinadas operaciones intermedias, como el cálculo de ciertas sensibilidades, puedan hacerse en el dominio de las fases.

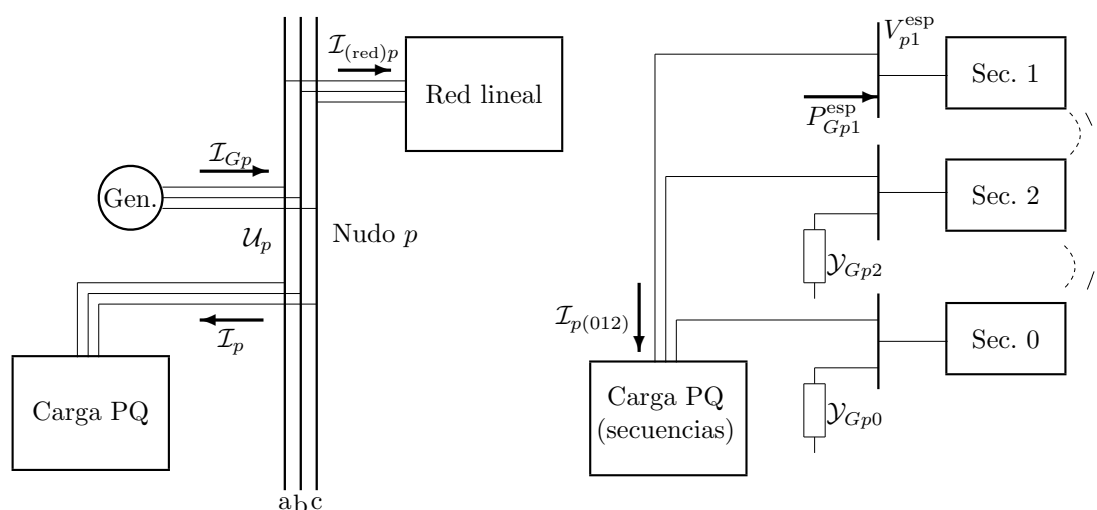


Figura 12.1. Nudo genérico en el dominio de fases y de secuencias.

12.2. Ecuaciones que definen el flujo de cargas

Sea una red trifásica de n nudos en donde se adopta la siguiente notación:

- i y j son índices de las magnitudes de secuencia 0, 1, 2.
- r y x son índices para señalar las partes real e imaginaria.
- p y q son índices de los nudos considerados. Se utiliza qep para referirse al conjunto de nudos q adyacentes a p , incluido el propio p .
- $U_{pj} = V_{r_{pj}} + jV_{x_{pj}}$ es la tensión en el nudo p a la secuencia j .
- $Y_{pqij} = G_{pqij} + jB_{pqij}$ es el elemento de acoplamiento entre las secuencias i y j y los nudos p y q de la matriz de admitancias de nudo.
- $I_{pi} = I_{r_{pi}} + jI_{x_{pi}}$ es la corriente de secuencia i que alimenta, desde el nudo p , a las cargas PQ en sus distintas configuraciones. Como se verá más adelante, esta corriente presenta una dependencia no lineal con las tensiones de secuencia del nudo p .

- $\mathcal{I}_{Gp1} = I_{rGp1} + jI_{xGp1}$ es la corriente de secuencia directa inyectada por un generador en el nudo p .

Como es habitual, en el problema del flujo de cargas se adoptarán como incógnitas las tensiones de los nudos. Es decir, 6 incógnitas por cada nudo correspondientes a las partes real e imaginaria de las tres tensiones de secuencia $\mathcal{U}_{p1}, \mathcal{U}_{p2}, \mathcal{U}_{p0}$ en el nudo genérico p . Al igual que en el flujo de cargas monofásico, el nudo oscilante constituye una excepción, pues su tensión está definida completamente. Por tanto, para los n nudos considerados, se tiene un cómputo total de $6n - 2$ incógnitas, que necesitan de otras tantas ecuaciones para su resolución. Análogamente a lo expuesto en el Capítulo 3, estas ecuaciones tienen distinto tratamiento según sea el nudo tipo PV o PQ. Si en la red se consideran n_G generadores, habrá que plantear $6n_G - 2$ ecuaciones para los nudos PV y $6(n - n_G)$ ecuaciones para los nudos PQ.

12.2.1. Ecuaciones asociadas a los nudos PQ

Las ecuaciones de este apartado son de aplicación cuando no existen generadores o reguladores de tensión en el nudo p . La corriente \mathcal{I}_{pi} , debida a las cargas PQ en sus distintas configuraciones, presenta una dependencia no lineal con las tensiones de secuencia del nudo p dada por

$$\mathcal{I}_{pi} = \mathcal{I}_{pi}(\mathcal{U}_{p1}, \mathcal{U}_{p2}, \mathcal{U}_{p0}, P_p^{\text{esp}}, Q_p^{\text{esp}}) \quad (12.1)$$

en donde los términos P_p^{esp} y Q_p^{esp} representan genéricamente las especificaciones de potencia. En secciones posteriores se detallará la forma concreta de la ecuación (12.1) según los distintos tipos de carga.

La aplicación de la primera ley de Kirchhoff a la secuencia i del nudo de consumo p requiere que el residuo de intensidades siguiente sea nulo:

$$\Delta \mathcal{I}_{pi} = \mathcal{I}_{pi} + \sum_{q \in p} \sum_{j=0}^2 \mathcal{Y}_{pqij} \mathcal{U}_{qj} \quad (12.2)$$

En realidad, esta expresión sólo se anula cuando se utilizan las tensiones correctas \mathcal{U}_{qj} de los nudos, es decir, cuando se haya resuelto el flujo de cargas. En esas condiciones, se dice que existe un “balance de corrientes” entre las intensidades \mathcal{I}_{pi} (debidas a cargas PQ) y las intensidades que se transmiten por la red a través de los elementos fijos que conforman la matriz de admitancias de nudos. El carácter no lineal de estas ecuaciones obliga a recurrir a un proceso iterativo. Éste comienza con unas tensiones estimadas que originan unos residuos $\Delta \mathcal{I}_{pi}$ no nulos, los cuales van disminuyendo progresivamente hasta que se consigue la convergencia. La ecuación (12.2) puede desglosarse en sus partes real e imaginaria mediante

$$\begin{bmatrix} \Delta I_{rpi} \\ \Delta I_{xpi} \end{bmatrix} = \sum_{q \in p} \sum_{j=0}^2 \begin{bmatrix} G_{pqij} & -B_{pqij} \\ B_{pqij} & G_{pqij} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_{rqj} \\ V_{xqj} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} I_{rpi} \\ I_{xpi} \end{bmatrix} \quad (12.3)$$

Es de destacar que, como sugiere la Figura 12.1, el sumatorio de secuencias se reduce a $j = i$ si todas las líneas incidentes en p son equilibradas.

Teniendo en cuenta las tres secuencias ($i = 0, 1, 2$) y los $n - n_G$ nudos PQ, se obtienen $6(n - n_G)$ ecuaciones igualando a cero la expresión (12.3).

12.2.2. Ecuaciones asociadas a los nudos PV

El comportamiento de los nudos PV está determinado por la presencia de las máquinas síncronas, que se representan por tres redes de secuencia desacopladas (véase la Figura 12.1). En los estudios de cortocircuitos, la red de secuencia positiva en el nudo p está formada por una tensión interna en serie con una admitancia. Sin embargo, en el flujo de cargas trifásico, la red de secuencia directa no se manipula explícitamente, sino que se sustituye por las especificaciones en bornes de módulo de tensión de secuencia positiva y potencia activa generada. Para la representación de las redes de secuencia inversa y homopolar se emplean unas admitancias constantes \mathcal{Y}_{Gp2} e \mathcal{Y}_{Gp0} que se incluyen en la matriz de admitancias nodales. Si la parte real de estas admitancias es nula, la potencia activa generada coincide con la potencia de secuencia directa, P_{Gp1} . Para el nudo oscilante se especifican las dos componentes de la tensión compleja de secuencia directa \mathcal{U}_{p1} , que por tanto dejan de ser incógnitas.

En definitiva, teniendo en cuenta la posible presencia de cargas locales en el nudo PV, se imponen las siguientes restricciones para este tipo de nudos:

- $4n_G$ ecuaciones para las corrientes de secuencia inversa ($i = 2$) y homopolar ($i = 0$). Estas ecuaciones se corresponden con la expresión (12.3), si se omiten las correspondientes a la secuencia positiva, ΔI_{rp1} y ΔI_{xp1} , que en los nudos PV se sustituyen por las restricciones de potencia y tensión del siguiente ítem. Si no hay cargas PQ en el nudo p , los términos I_{rpi} e I_{xpi} , para $i = 0, 2$, son nulos.
- $2n_G - 2$ ecuaciones mediante las cuales se especifica la potencia generada por la máquina síncrona, P_{Gp1} , y la tensión terminal del nudo, V_{p1} , a la secuencia directa. Los residuos de estas dos funciones no lineales vienen dados por

$$\Delta V_{p1}^2 = (V_{rp1}^2 + V_{xp1}^2) - (V_{p1}^{\text{esp}})^2 \quad (12.4)$$

$$\Delta P_{Gp1} = V_{rp1} I_{rGp1} + V_{xp1} I_{xGp1} - \frac{1}{3} P_{Gp1}^{\text{esp}} \quad (12.5)$$

donde la corriente de secuencia directa inyectada por la máquina debe satisfacer la demandada localmente por la carga más la que se inyecta a la red, lo que conduce a la expresión

$$\begin{bmatrix} I_{rGp1} \\ I_{xGp1} \end{bmatrix} = \sum_{q \in p} \sum_{j=0}^2 \begin{bmatrix} G_{pq1j} & -B_{pq1j} \\ B_{pq1j} & G_{pq1j} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_{rqj} \\ V_{xqj} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} I_{rp1} \\ I_{xp1} \end{bmatrix} \quad (12.6)$$

Como ocurre con la ecuación (12.3), el sumatorio de secuencias se reduce a $j = 1$ si todas las líneas incidentes en p son equilibradas.

Es importante señalar que la presencia de carga local en un nudo PV introduce una complejidad adicional en el flujo de cargas trifásico respecto al monofásico. Mientras que

en el caso monofásico esta carga se agrupa con la potencia generada, para dar lugar a la potencia neta inyectada en el nudo, en el caso trifásico el consumo de secuencia directa no se puede especificar *a priori*, sino que es función de las variables de estado.

12.3. Solución por el método de Newton-Raphson

Para lograr que todos los residuos definidos por las ecuaciones no lineales (12.3) a (12.5) sean nulos se emplea el método de Newton, que resuelve el sistema linealizado correspondiente en cada iteración. Veamos qué ecuaciones aporta cada tipo de nudo.

Nudos PQ

En este caso las dos filas del sistema de ecuaciones correspondientes al nudo p y secuencia i vienen dadas en la iteración k -ésima por

$$-\sum_{q \in p} \sum_{j=0}^2 \begin{bmatrix} H_{pqij} & N_{pqij} \\ J_{pqij} & L_{pqij} \end{bmatrix}^{(k)} \begin{bmatrix} \Delta V_{rqj} \\ \Delta V_{xqj} \end{bmatrix}^{(k)} = \begin{bmatrix} \Delta I_{rpi} \\ \Delta I_{xpi} \end{bmatrix}^{(k)} \quad (12.7)$$

donde los residuos de corriente se obtienen sustituyendo los valores más recientes de tensiones e intensidades en la ecuación (12.3).

Para $q \neq p$ los elementos del jacobiano se obtienen simplemente de las siguientes expresiones:

$$H_{pqij} = \frac{\partial \Delta I_{rpi}}{\partial V_{rqj}} = G_{pqij} \quad ; \quad N_{pqij} = \frac{\partial \Delta I_{rpi}}{\partial V_{xqj}} = -B_{pqij} \quad (12.8)$$

$$J_{pqij} = \frac{\partial \Delta I_{xpi}}{\partial V_{rqj}} = B_{pqij} \quad ; \quad L_{pqij} = \frac{\partial \Delta I_{xpi}}{\partial V_{xqj}} = G_{pqij} \quad (12.9)$$

Para cada posible pareja p y q los elementos anteriores forman un bloque de 6×6 (parte real e imaginaria de las tres secuencias) que acopla ambos nudos a cada una de las secuencias. No existen acoplamientos entre secuencias si el elemento de red p - q es equilibrado. Una de las ventajas de usar residuos de intensidades en lugar de potencias es que estos bloques no diagonales son constantes y coinciden con los términos de la matriz de admitancias de nudos, por lo que no hay que recalcularlos durante el proceso iterativo.

Para $p = q$, las derivadas anteriores deben completarse con el efecto de las cargas PQ locales, lo que conduce a

$$H_{ppij} = \frac{\partial \Delta I_{rpi}}{\partial V_{rpj}} = G_{ppij} + \frac{\partial I_{rpi}}{\partial V_{rpj}} \quad ; \quad N_{ppij} = \frac{\partial \Delta I_{rpi}}{\partial V_{xpj}} = -B_{ppij} + \frac{\partial I_{rpi}}{\partial V_{xpj}} \quad (12.10)$$

$$J_{ppij} = \frac{\partial \Delta I_{xpi}}{\partial V_{rpj}} = B_{ppij} + \frac{\partial I_{xpi}}{\partial V_{rpj}} \quad ; \quad L_{ppij} = \frac{\partial \Delta I_{xpi}}{\partial V_{xpj}} = G_{ppij} + \frac{\partial I_{xpi}}{\partial V_{xpj}} \quad (12.11)$$

Como puede apreciarse, estos bloques de la diagonal del jacobiano dependen de la tensión U_{pj} a través de los segundos sumandos, cuyos valores dependen de los tipos de cargas PQ.

Nudos PV

Por lo dicho anteriormente, las secuencias inversa y homopolar no se ven afectadas respecto al desarrollo ya realizado para nudos PQ, salvo por el hecho de que los elementos respectivos de la matriz de admitancias de nudos para ambas secuencias, \mathcal{Y}_{pp22} e \mathcal{Y}_{pp00} , deben incorporar la admitancia del generador.

Sin embargo, los residuos de corriente deben sustituirse, para $i = 1$, por las funciones de error ΔV_{p1}^2 y ΔP_{Gp1} . En la iteración k -ésima la linealización de estas funciones conduce a

$$-\sum_{q \in p} \sum_{j=0}^2 \begin{bmatrix} H_{pq1j} & N_{pq1j} \\ J_{pq1j} & L_{pq1j} \end{bmatrix}^{(k)} \begin{bmatrix} \Delta V_{rqj} \\ \Delta V_{xqj} \end{bmatrix}^{(k)} = \begin{bmatrix} \Delta V_{p1}^2 \\ \Delta P_{Gp1} \end{bmatrix}^{(k)} \quad (12.12)$$

A la vista de la relación (12.4), resulta evidente que en las submatrices H y N todos los elementos son nulos salvo H_{pp11} y N_{pp11} , cuyos valores son

$$H_{pp11} = \frac{\partial \Delta V_{p1}^2}{\partial V_{rp1}} = 2V_{rp1} \quad ; \quad N_{pp11} = \frac{\partial \Delta V_{p1}^2}{\partial V_{xp1}} = 2V_{xp1} \quad (12.13)$$

Los elementos de las submatrices J y L se deducen de la expresión (12.5) y valen

$$J_{pq1j} = \frac{\partial \Delta P_{Gp1}}{\partial V_{rqj}} = V_{rp1} \frac{\partial I_{rGp1}}{\partial V_{rqj}} + V_{xp1} \frac{\partial I_{xGp1}}{\partial V_{rqj}} + \delta_{pq} \delta_{1j} I_{rGp1} \quad (12.14)$$

$$L_{pq1j} = \frac{\partial \Delta P_{Gp1}}{\partial V_{xqj}} = V_{rp1} \frac{\partial I_{rGp1}}{\partial V_{xqj}} + V_{xp1} \frac{\partial I_{xGp1}}{\partial V_{xqj}} + \delta_{pq} \delta_{1j} I_{xGp1} \quad (12.15)$$

donde $\delta_{mn} = 1$ para $m = n$ y cero en caso contrario. De ese modo, el tercer término de cada ecuación sólo aparece cuando se deriva respecto a la tensión de secuencia directa ($j = 1$) del nudo en cuestión ($q = p$). En las dos ecuaciones anteriores, las derivadas de la corriente inyectada por el generador respecto a las tensiones de los nudos $q \in p$ se obtienen fácilmente de (12.6):

$$\frac{\partial I_{rGp1}}{\partial V_{rqj}} = G_{pq1j} + \delta_{pq} \frac{\partial I_{rp1}}{\partial V_{rpj}} \quad ; \quad \frac{\partial I_{rGp1}}{\partial V_{xqj}} = -B_{pq1j} + \delta_{pq} \frac{\partial I_{rp1}}{\partial V_{xpj}} \quad (12.16)$$

$$\frac{\partial I_{xGp1}}{\partial V_{rqj}} = B_{pq1j} + \delta_{pq} \frac{\partial I_{xp1}}{\partial V_{rpj}} \quad ; \quad \frac{\partial I_{xGp1}}{\partial V_{xqj}} = G_{pq1j} + \delta_{pq} \frac{\partial I_{xp1}}{\partial V_{xpj}} \quad (12.17)$$

Obsérvese de nuevo que las derivadas de la corriente demandada por la carga respecto a las tensiones sólo aparecen cuando $q = p$. Estos términos se obtienen en la Sección 12.5 para cada tipo de carga.

Supuesto que se dispone de la matriz de admitancias nodales, el procedimiento iterativo puede resumirse en los siguientes pasos:

1. Asignar valores iniciales a las tensiones nodales. Para la secuencia directa se utiliza el perfil plano descrito en el flujo de cargas monofásico, mientras que las secuencias inversa y homopolar se ponen a cero. Alternativamente, puede usarse la solución previa de un flujo de cargas monofásico para inicializar la secuencia directa.
2. Calcular los residuos en la iteración actual mediante las ecuaciones (12.3), (12.4) y (12.5). Si todos ellos son menores que un umbral, parar.

3. Construir el jacobiano combinando adecuadamente, según los casos, las expresiones deducidas en esta sección. Recuérdese que para nudos PQ sólo hay que actualizar los bloques diagonales.
4. Resolver el sistema resultante por descomposición LU del jacobiano. Actualizar las tensiones con los incrementos obtenidos, $\mathcal{U}_p^{(k+1)} = \mathcal{U}_p^{(k)} + \Delta\mathcal{U}_p^{(k)}$, y volver al paso 2.

Ejemplo 12.1:

Considérese la red de 3 nudos del Capítulo 3, cuyo unifilar se muestra de nuevo por conveniencia en la Figura 12.2. Con los datos suministrados en el Ejemplo 1 de dicho capítulo, la red está perfectamente definida para realizar un flujo de cargas monofásico. Se trata ahora de realizar un flujo trifásico. El desequilibrio se produce al desdoblar los 100 MW, 40 Mvar del nudo 2 en dos cargas: una de 50 MW, 20 Mvar (tipo 3) y otra monofásica de 50 MW, 20 Mvar (tipo 4) conectada entre los conductores de línea a y b. El resto de la red (líneas y generadores) se considera de estructura equilibrada, en donde los datos del sistema coinciden con los indicados en el Capítulo 3. La red de secuencia homopolar no interviene al estar la carga monofásica aislada de tierra. Es decir, se tiene un caso particular de flujo de cargas trifásico en donde sólo hay que trabajar con las magnitudes de secuencia directa e inversa.

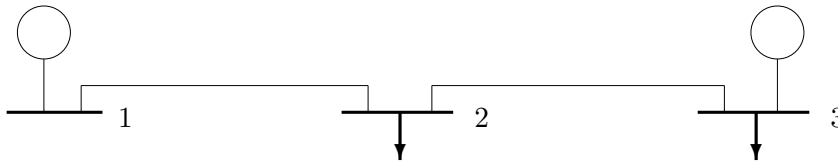


Figura 12.2. Red de 3 nudos para ilustrar los ejemplos.

Para realizar los cálculos posteriores es conveniente disponer de la matriz de admitancias de nudos. Para la secuencia directa, esta matriz coincide con la indicada en el Capítulo 3. Para la secuencia inversa es preciso añadir las reactancias de los generadores de los nudos 1 y 3. Si se adopta una reactancia de 0.2 pu para ambos, la matriz de admitancias de secuencia inversa se obtiene de la de secuencia directa sin más que añadir $-5j$ pu al primer y tercer término de la diagonal principal.

En este caso se tienen 10 incógnitas correspondientes a las partes real e imaginaria de las tensiones de secuencia directa $\mathcal{U}_{21}, \mathcal{U}_{31}$ e inversa $\mathcal{U}_{12}, \mathcal{U}_{22}, \mathcal{U}_{32}$. Nótese que se ha omitido la tensión de secuencia directa del nudo oscilante, al ser un dato del problema.

Las funciones no lineales que ligan los datos con las incógnitas son las siguientes:

- Nudo 1: oscilante (2 ecuaciones)

$$(0,33 - 8,3j)\mathcal{U}_{12} + (-0,33 + 3,3j)\mathcal{U}_{22} = 0$$

- Nudo 2: Tipo PQ (4 ecuaciones)

$$\mathcal{I}_{21} + (-0,33 + 3,3j)\mathcal{U}_{11} + (1,706 - 7,887j)\mathcal{U}_{21} + (-1,376 + 4,587j)\mathcal{U}_{31} = 0$$

$$\mathcal{I}_{22} + (-0,33 + 3,3j)\mathcal{U}_{12} + (1,706 - 7,887j)\mathcal{U}_{22} + (-1,376 + 4,587j)\mathcal{U}_{32} = 0$$

Las intensidades \mathcal{I}_{21} e \mathcal{I}_{22} son funciones no lineales de las tensiones \mathcal{U}_{21} y \mathcal{U}_{22} , y dependen de la combinación de carga seleccionada así como de las especificaciones de potencia de las mismas. Estas funciones se detallan en la Sección 12.5.

- Nudo 3: Tipo PV (4 ecuaciones)

$$V_{31}^2 - 1,05^2 = 0$$

$$\text{Re} \{ [(-1,376 + 4,587j) \mathcal{U}_{21}^* + (1,376 - 4,587j) \mathcal{U}_{31}^*] \mathcal{U}_{31} \} - 0,6 = 0$$

$$\mathcal{I}_{32} + (-1,376 + 4,587j) \mathcal{U}_{22} + (1,376 - 9,587j) \mathcal{U}_{32} = 0$$

La intensidad \mathcal{I}_{32} es una función no lineal de las tensiones \mathcal{U}_{31} y \mathcal{U}_{32} , de acuerdo con lo expuesto en la Sección 12.5 para la carga de estructura equilibrada de neutro aislado (carga tipo 3). En dicha función aparecen como parámetros las especificaciones de potencia correspondientes a la carga del nudo 3.

12.4. Elementos modelados como admitancia constante

En los flujos de cargas monofásicos se incluyen en la matriz de admitancias una serie de elementos que presentan impedancias o admitancias fijas. Estos elementos son: líneas, transformadores, baterías de condensadores, filtros y cargas de impedancia constante. Los generadores PV y las cargas PQ se tratan como inyecciones de potencia y no se incluyen en la matriz de admitancias. En los flujos de cargas trifásicos se procede de forma similar. Sin embargo, como ya ha quedado explicado, las impedancias de secuencia inversa y homopolar de las máquinas síncronas, consideradas constantes, deben incluirse en la matriz de admitancias. A continuación, se analiza el tratamiento de los restantes elementos de estructura fija:

- Condensadores, filtros y cargas de impedancia constante.
- Transformadores.
- Líneas.

12.4.1. Condensadores, filtros y cargas de impedancia constante

Cuando estos elementos son de estructura equilibrada pueden representarse mediante tres redes de secuencias desacopladas, tal como indica la Figura 12.3. De esta manera se podría simular el comportamiento de un motor asíncrono que presentara impedancias distintas a cada secuencia.

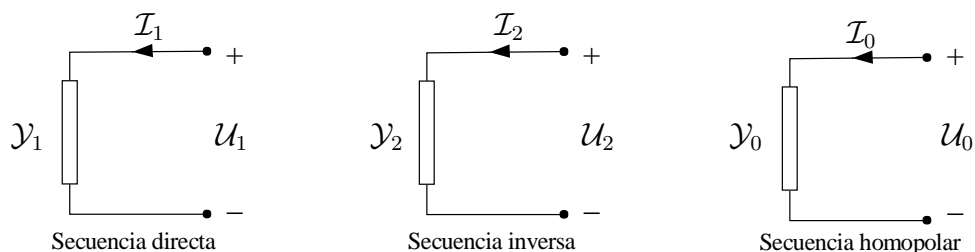


Figura 12.3. Redes de secuencia para elementos *shunt* estructuralmente equilibrados.

Sin embargo, en el contexto de un reparto de cargas trifásico es muy conveniente disponer de configuraciones *shunt* estructuralmente desequilibradas. Las tres estructuras básicas que se pueden plantear se indican en la Figura 12.4, en donde se supone que las admitancias de cada rama son distintas. Si se aplican las componentes simétricas a las estructuras con conexión a tierra se obtiene una relación intensidad-tensión dada por

$$\begin{bmatrix} \mathcal{I}_0 \\ \mathcal{I}_1 \\ \mathcal{I}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathcal{Y}_{00} & \mathcal{Y}_{01} & \mathcal{Y}_{02} \\ \mathcal{Y}_{10} & \mathcal{Y}_{11} & \mathcal{Y}_{12} \\ \mathcal{Y}_{20} & \mathcal{Y}_{21} & \mathcal{Y}_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathcal{U}_0 \\ \mathcal{U}_1 \\ \mathcal{U}_2 \end{bmatrix} \quad (12.18)$$

en donde los términos situados fuera de la diagonal son no nulos. Es decir, esta estructura introduce acoplamientos entre las redes de secuencia dando lugar a la generación de desequilibrios. De la misma manera, la relación intensidad-tensión en la estructura aislada de tierra viene dada por

$$\begin{bmatrix} \mathcal{I}_1 \\ \mathcal{I}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathcal{Y}_{11} & \mathcal{Y}_{12} \\ \mathcal{Y}_{21} & \mathcal{Y}_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathcal{U}_1 \\ \mathcal{U}_2 \end{bmatrix} \quad (12.19)$$

Es decir, no interviene en este esquema las magnitudes homopolares al tratarse de una carga a tres hilos. Esta estructura introduce acoplamiento entre las secuencias directa e inversa a través de las admitancias \mathcal{Y}_{12} e \mathcal{Y}_{21} .

12.4.2. Transformadores

Un transformador estructuralmente equilibrado puede representarse mediante las redes de secuencia indicadas en las Figuras 12.5 y 12.6, en donde el símbolo T_i se refiere a un transformador ideal de relación de transformación compleja $a_{\underline{\alpha}} : 1$ (véase el Capítulo 9).

La inclusión del transformador en la matriz de admitancias se realiza aplicando las ecuaciones de una bipuerta en donde las intensidades figuran de forma explícita, es decir,

$$\begin{bmatrix} \mathcal{I}_p \\ \mathcal{I}_q \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathcal{Y}_{pp} & \mathcal{Y}_{pq} \\ \mathcal{Y}_{qp} & \mathcal{Y}_{qq} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathcal{U}_p \\ \mathcal{U}_q \end{bmatrix} \quad (12.20)$$

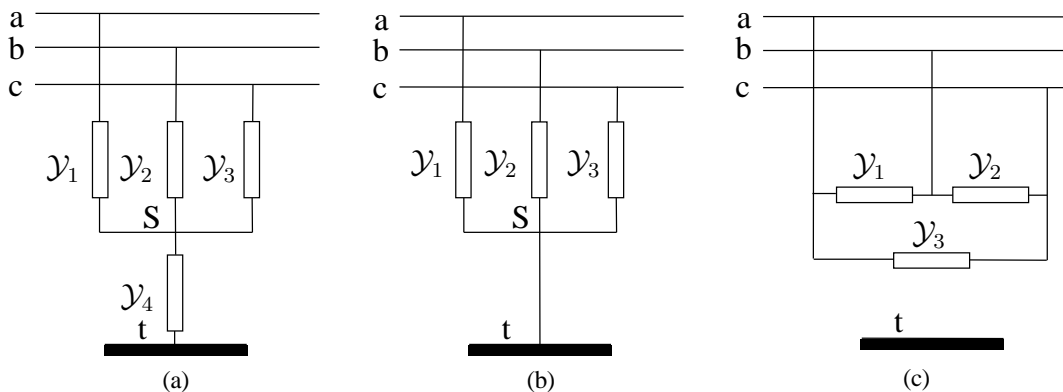


Figura 12.4. Configuración de elementos *shunt* estructuralmente desequilibrados.

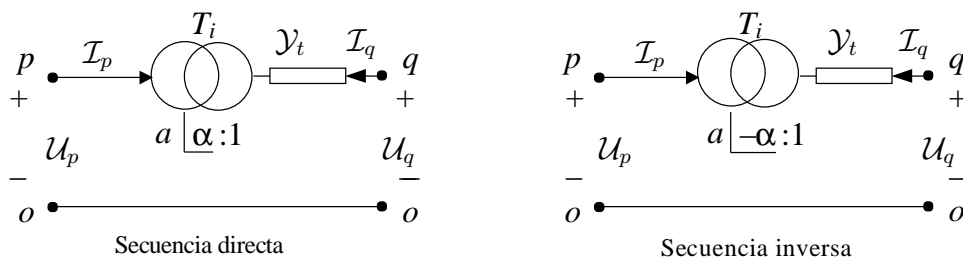


Figura 12.5. Redes de secuencia directa e inversa de un transformador.

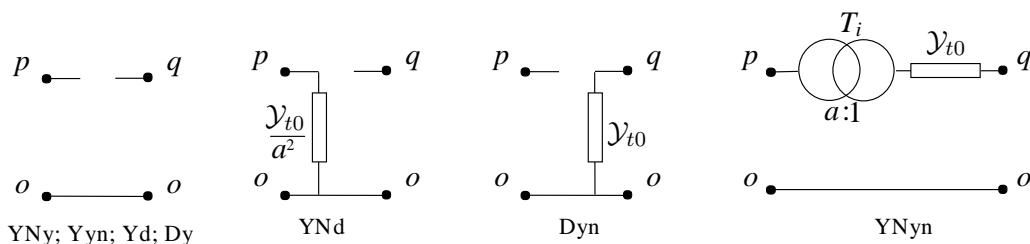


Figura 12.6. Redes de secuencia homopolar para los distintos tipos de conexión del transformador.

Las admitancias de la bipuerta se expresan en la Tabla 12.1 para las distintas secuencias y tipo de conexión del transformador. En este punto es importante señalar que en la red de secuencia homopolar hay situaciones en las que los términos \mathcal{Y}_{pp} o \mathcal{Y}_{qq} toman un valor nulo. Esto puede dar lugar a una singularidad en dichos nudos si no existe ningún elemento conectado a tierra. En este caso se introduce un valor de admitancia muy reducido (por ejemplo 10^{-6} pu) para evitar esta singularidad.

Cuadro 12.1. Admitancias de la bipuerta correspondiente al transformador.

	secuencia	secuencia	secuencia homopolar			
	directa	inversa	YNyn	YNd	Dyn	Otros
\mathcal{Y}_{pp}	$\frac{\mathcal{Y}_t}{a^2}$	$\frac{\mathcal{Y}_t}{a^2}$	$\frac{\mathcal{Y}_{t0}}{a^2}$	$\frac{\mathcal{Y}_{t0}}{a^2}$	0	0
\mathcal{Y}_{qq}	\mathcal{Y}_t	\mathcal{Y}_t	\mathcal{Y}_{t0}	0	\mathcal{Y}_{t0}	0
\mathcal{Y}_{pq}	$-\frac{\mathcal{Y}_t \angle \alpha}{a}$	$-\frac{\mathcal{Y}_t \angle -\alpha}{a}$	$-\frac{\mathcal{Y}_{t0}}{a}$	0	0	0
\mathcal{Y}_{qp}	$\frac{\mathcal{Y}_t \angle -\alpha}{a}$	$\frac{\mathcal{Y}_t \angle \alpha}{a}$	$\frac{\mathcal{Y}_{t0}}{a}$	0	0	0

12.4.3. Líneas

Las líneas perfectamente transpuestas pueden representarse mediante tres redes de secuencia desacopladas, tal como indica la Figura 12.7, en donde los valores de las admitancias \mathcal{Y}_{s1} , \mathcal{Y}_{p1} , \mathcal{Y}_{s0} e \mathcal{Y}_{p0} suelen especificarse en las bases de datos utilizadas en los estudios de

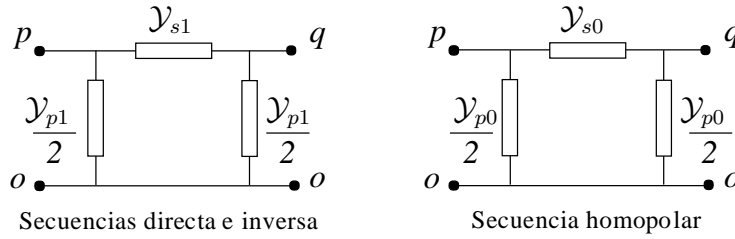


Figura 12.7. Redes de secuencia para líneas estructuralmente equilibradas.

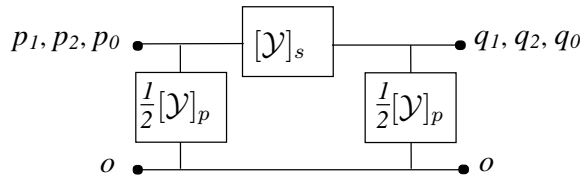


Figura 12.8. Equivalente en π de líneas estructuralmente desequilibradas.

cortocircuitos que realizan las compañías eléctricas.

Un análisis más elaborado precisa especificar en detalle los datos de las líneas correspondientes a: el efecto del terreno (resistividad del mismo), la configuración geométrica de los conductores en las torres (incluyendo la flecha en el punto medio de la línea) y las características de los conductores (radios interior y exterior, resistividad, permeabilidad relativa, coeficiente de variación de la resistencia con la temperatura).

Con estos datos es posible obtener un modelo detallado de la línea de parámetros distribuidos [5], [3] en donde se considera el efecto pelicular, el efecto del terreno mediante las ecuaciones de Carson y el desequilibrio estructural asociado a las asimetrías presentes en la configuración geométrica. De esta manera se obtiene un equivalente en π como el de la Figura 12.8, en donde las tres secuencias se encuentran acopladas en las matrices $[\mathcal{Y}]_s$ e $[\mathcal{Y}]_p$. Estas matrices tienen por expresión:

$$[Z]_s = [\mathcal{Y}]_s^{-1} = \begin{bmatrix} Z_{00s} & Z_{01s} & Z_{02s} \\ Z_{10s} & Z_{11s} & Z_{12s} \\ Z_{20s} & Z_{21s} & Z_{22s} \end{bmatrix} ; \quad [Y]_p = \begin{bmatrix} \mathcal{Y}_{00p} & \mathcal{Y}_{01p} & \mathcal{Y}_{02p} \\ \mathcal{Y}_{10p} & \mathcal{Y}_{11p} & \mathcal{Y}_{12p} \\ \mathcal{Y}_{20p} & \mathcal{Y}_{21p} & \mathcal{Y}_{22p} \end{bmatrix} \quad (12.21)$$

donde los elementos situados fuera de la diagonal son distintos de cero, dando lugar a generación de desequilibrio por acoplamiento entre secuencias. Entre todos estos términos de acoplamiento, el más significativo corresponde a la impedancia Z_{21s} . Este término representa la tensión de secuencia inversa que aparece entre los terminales p y q cuando circula una corriente directa de 1 pu entre estos terminales. En consecuencia, puede decirse que el nivel de tensión de secuencia inversa introducido por la línea es directamente proporcional al término Z_{21s} y al nivel de carga, es decir, al valor de corriente de secuencia directa que circula por la línea. Para dar una idea del orden de magnitud del término Z_{21s} , puede afirmarse que para líneas en capa de simple circuito se tiene que $Z_{21s} \simeq 0,10Z_{11s}$ y que en

líneas de doble circuito esta relación se reduce a $Z_{21s} \simeq 0,05Z_{11s}$.

12.5. Elementos con especificaciones de potencia constante

En el apartado anterior se ha hecho referencia a aquellos elementos tales como filtros, condensadores y cargas de impedancia constante. Estos elementos se incluyen en la matriz de admitancias. El resto de los elementos *shunt* quedan englobados en la intensidad \mathcal{I}_{pi} indicada en la ecuación (12.2) para el nudo genérico p . Esta intensidad puede ser debida a la acción simultánea de los seis elementos que se muestran en la Figura 12.9. De entre ellos, el elemento 6 es el más sencillo ya que corresponde a un conjunto de tres fuentes de intensidad. Estas fuentes pueden ser el resultado de una especificación correspondiente a una determinada inyección estimada o bien pueden proceder de la interfaz propuesta en [17] para combinar un flujo de cargas convencional y un análisis iterativo de armónicos.

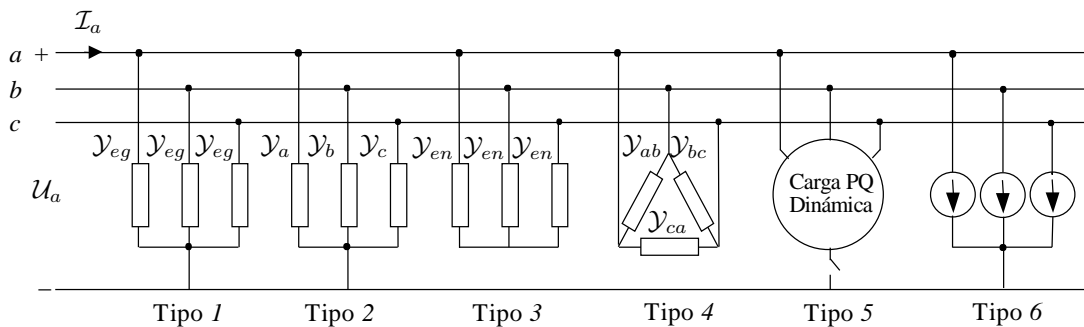


Figura 12.9. Demanda generalizada de corriente en el nudo p .

El objetivo de este apartado consiste en obtener expresiones analíticas que sirvan para modelar los cinco primeros elementos de la Figura 12.9, de modo que aparezcan las tensiones e intensidades en coordenadas rectangulares de las magnitudes de secuencia directa, inversa

y homopolar. Para ello se adoptan las componentes de secuencia de la tensión \mathcal{U}_a y de la intensidad \mathcal{I}_a , tal que:

$$\mathcal{U}_0 = V_{r0} + jV_{x0} \quad ; \quad \mathcal{U}_1 = V_{r1} + jV_{x1} \quad ; \quad \mathcal{U}_2 = V_{r2} + jV_{x2} \quad (12.22)$$

$$\mathcal{I}_0 = I_{r0} + jI_{x0} \quad ; \quad \mathcal{I}_1 = I_{r1} + jI_{x1} \quad ; \quad \mathcal{I}_2 = I_{r2} + jI_{x2} \quad (12.23)$$

De acuerdo con este esquema, las corrientes en las cargas tipo 1, 2, 3 y 4 pueden expresarse mediante

$$\mathcal{I}_i^{(1)} = f_1(\mathcal{U}_0, \mathcal{U}_1, \mathcal{U}_2, P_{t1}^{\text{esp}}, Q_{t1}^{\text{esp}}) \quad ; \quad i = 0, 1, 2 \quad (12.24)$$

$$\mathcal{I}_i^{(2)} = f_2(\mathcal{U}_0, \mathcal{U}_1, \mathcal{U}_2, P_a^{\text{esp}}, Q_a^{\text{esp}}, P_b^{\text{esp}}, Q_b^{\text{esp}}, P_c^{\text{esp}}, Q_c^{\text{esp}}) \quad ; \quad i = 0, 1, 2 \quad (12.25)$$

$$\mathcal{I}_i^{(3)} = f_3(\mathcal{U}_1, \mathcal{U}_2, P_{t3}^{\text{esp}}, Q_{t3}^{\text{esp}}) \quad ; \quad i = 1, 2 \quad (12.26)$$

$$\mathcal{I}_i^{(4)} = f_4(\mathcal{U}_1, \mathcal{U}_2, P_{ab}^{\text{esp}}, Q_{ab}^{\text{esp}}, P_{bc}^{\text{esp}}, Q_{bc}^{\text{esp}}, P_{ca}^{\text{esp}}, Q_{ca}^{\text{esp}}) \quad ; \quad i = 1, 2 \quad (12.27)$$

Puede observarse que se ha suprimido en estas ecuaciones el subíndice p con objeto de simplificar la notación. Por otra parte cabe hacer los comentarios siguientes:

- La carga tipo 1 es estructuralmente equilibrada y con el neutro conectado a tierra. Esta carga está formada por tres admitancias iguales en cada rama y de idéntico valor en cada secuencia. Por consiguiente, sólo cabe especificar la potencia activa P_{t1}^{esp} y reactiva Q_{t1}^{esp} del conjunto de la carga. De esta manera, la corriente $\mathcal{I}_i^{(1)}$ a la secuencia i depende de las tres tensiones de secuencia y de los parámetros P_{t1}^{esp} y Q_{t1}^{esp} , tal y como indica la ecuación (12.24).
- La carga tipo 3 es estructuralmente equilibrada y está aislada de tierra. Esta carga está formada por tres admitancias iguales en cada rama y de idéntico valor en las secuencias directa e inversa. Por consiguiente, sólo cabe especificar la potencia activa P_{t3}^{esp} y reactiva Q_{t3}^{esp} del conjunto de la carga. Por tanto, la corriente $\mathcal{I}_i^{(3)}$ a la secuencia i depende de las tensiones de secuencia directa e inversa y de los parámetros P_{t3}^{esp} y Q_{t3}^{esp} , tal y como indica la ecuación (12.26).
- La carga tipo 2 es estructuralmente desequilibrada y está conectada a tierra. Esta carga está formada por tres admitancias distintas. Por tanto, es necesario especificar la potencia activa y reactiva de cada fase. De esta manera, la corriente $\mathcal{I}_i^{(2)}$ a la secuencia i depende de las tres tensiones de secuencia y de los parámetros $P_a^{\text{esp}}, Q_a^{\text{esp}}, P_b^{\text{esp}}, Q_b^{\text{esp}}, P_c^{\text{esp}}, Q_c^{\text{esp}}$, tal y como indica la ecuación (12.25).
- La carga tipo 4 es estructuralmente desequilibrada y está aislada de tierra. Esta carga está formada por tres admitancias diferentes. Por consiguiente, es preciso especificar la potencia activa y reactiva de cada rama. De esta forma, la corriente $\mathcal{I}_i^{(4)}$ a la secuencia i depende de las tensiones de secuencia directa e inversa y de los parámetros $P_{ab}^{\text{esp}}, Q_{ab}^{\text{esp}}, P_{bc}^{\text{esp}}, Q_{bc}^{\text{esp}}, P_{ca}^{\text{esp}}, Q_{ca}^{\text{esp}}$, tal y como indica la ecuación (12.27).

Obsérvese que las admitancias mencionadas anteriormente son ficticias y dependientes de la tensión. Su valor será en cada caso el que, para una tensión dada, satisface las especificaciones de potencia en cada fase.

En este punto es importante considerar la hipótesis de una carga constituida por la combinación de las cargas tipo 1, 2, 3 y 4. Para definir esta carga combinada sería necesario especificar 16 parámetros en un nudo que tiene 6 variables (parte real e imaginaria de 3 tensiones). Este hecho puede interpretarse como una razón por la que la mayoría de los estudios eluden esta posibilidad, definiendo solamente cargas tipo 2 cuyas 6 especificaciones coinciden en número con el de incógnitas.

Por otra parte, la carga tipo 5 se ha definido con objeto de representar cargas dinámicas como son las máquinas síncronas (sin capacidad para regular tensión) y asíncronas. En este tipo de cargas, se supone que las admitancias de secuencia inversa \mathcal{Y}_2 y homopolar \mathcal{Y}_0 se conocen y pueden incluirse en la matriz de admitancias, con lo que

$$\mathcal{I}_2^{(5)} = \mathcal{Y}_2 \mathcal{U}_2 \quad ; \quad \mathcal{I}_0^{(5)} = \mathcal{Y}_0 \mathcal{U}_0 \quad (12.28)$$

Sin embargo, la secuencia directa queda definida a partir de unas especificaciones de potencia, que pueden referirse o bien a la secuencia directa $P_1^{\text{esp}}, Q_1^{\text{esp}}$, o bien a la potencia total $P^{\text{esp}}, Q^{\text{esp}}$, que incluye el efecto de las tres secuencias. De este modo, la corriente de secuencia directa se expresa mediante una de las dos funciones no lineales siguientes:

$$\mathcal{I}_1^{(5)} = f_5(\mathcal{U}_1, P_1^{\text{esp}}, Q_1^{\text{esp}}) \quad ; \quad \mathcal{I}_1^{(5)} = f_5(\mathcal{U}_1, P^{\text{esp}}, Q^{\text{esp}}) \quad (12.29)$$

Las ecuaciones (12.24), (12.25), (12.26), (12.27) y (12.29) forman un conjunto de funciones no lineales que describen el comportamiento de las cargas PQ en el caso más general. Por tanto, la corriente total \mathcal{I}_i de la ecuación (12.1) se puede expresar de la forma:

$$\mathcal{I}_i = \sum_{s=1}^6 \mathcal{I}_i^{(s)} \quad (12.30)$$

Las sensibilidades de las corrientes con respecto a las tensiones que aparecen en las ecuaciones (12.10)–(12.11) y (12.16)–(12.17) se pueden obtener sumando las contribuciones individuales de cada elemento. Es decir, se cumple que

$$\frac{\partial I_{ri}}{\partial V_{xj}} = \sum_{s=1}^6 \frac{\partial I_{ri}^{(s)}}{\partial V_{xj}} \quad (12.31)$$

12.5.1. Modelos de cargas estructuralmente equilibradas

Las admitancias \mathcal{Y}_{eg} e \mathcal{Y}_{en} de las cargas tipo 1 y tipo 3 indicadas en la Figura 12.9 se relacionan con las potencias y tensiones de fase mediante

$$P_{t1}^{\text{esp}} - jQ_{t1}^{\text{esp}} = \mathcal{Y}_{\text{eg}}(V_a^2 + V_b^2 + V_c^2) \quad ; \quad P_{t3}^{\text{esp}} - jQ_{t3}^{\text{esp}} = \mathcal{Y}_{\text{en}}(V_{\text{an}}^2 + V_{\text{bn}}^2 + V_{\text{cn}}^2) \quad (12.32)$$

Se puede demostrar que la suma de los cuadrados de las tensiones de fase presenta una relación muy simple con la suma de los cuadrados de las tensiones de secuencia. Esta relación viene dada por

$$V_{012}^2 = \frac{V_a^2 + V_b^2 + V_c^2}{3} = V_0^2 + V_1^2 + V_2^2 \quad ; \quad V_{12}^2 = \frac{V_{\text{an}}^2 + V_{\text{bn}}^2 + V_{\text{cn}}^2}{3} = V_1^2 + V_2^2 \quad (12.33)$$

dado que la componente homopolar de la tensión fase-neutro es nula para la carga tipo 3.

Empleando las ecuaciones (12.32) y (12.33), las corrientes de secuencia de ambas cargas se expresan en función de las tensiones de secuencia mediante:

$$\mathcal{I}_i^{(1)} = \mathcal{Y}_{eg}\mathcal{U}_i = \frac{P_{t1}^{\text{esp}} - jQ_{t1}^{\text{esp}}}{3V_{012}^2}\mathcal{U}_i \quad ; \quad \text{con } i = 0, 1, 2 \quad (12.34)$$

$$\mathcal{I}_i^{(3)} = \mathcal{Y}_{en}\mathcal{U}_i = \frac{P_{t3}^{\text{esp}} - jQ_{t3}^{\text{esp}}}{3V_{12}^2}\mathcal{U}_i \quad ; \quad \text{con } i = 1, 2 \quad (12.35)$$

Obsérvese que el denominador de las expresiones anteriores provoca un cierto acoplamiento entre las tres secuencias. Dicho acoplamiento sería aún mayor en el dominio de las fases, dado que en este caso las tres tensiones tienen un valor eficaz parecido.

Con estas relaciones es posible obtener las sensibilidades de las corrientes respecto a las tensiones. Para la carga tipo 1 se tiene un conjunto de 36 elementos correspondientes a las distintas derivadas, mientras que para la carga tipo 3 se obtienen solamente 16 términos. La Tabla 12.2 muestra, de forma compacta, los cuatro términos correspondientes a la sensibilidad de la corriente de secuencia i respecto a la tensión de secuencia j para la carga tipo 1. Como en secciones anteriores, el símbolo δ_{ij} en dicha tabla vale 1 cuando $i = j$ y cero en caso contrario, y los valores de la corriente deben obtenerse previamente de la expresión (12.34). Sustituyendo el par $P_{t1}^{\text{esp}}, Q_{t1}^{\text{esp}}$ por $P_{t3}^{\text{esp}}, Q_{t3}^{\text{esp}}$, y V_{012}^2 por V_{12}^2 , e ignorando la secuencia homopolar, se obtendrían las sensibilidades para la carga tipo 3. Alternativamente, puede eliminarse I_{ri}, I_{xi} mediante (12.34) o (12.35), según corresponda, para obtener expresiones que son únicamente función de la tensión. Por ejemplo, la derivada de la parte real de la corriente de secuencia directa $I_{r1}^{(3)}$ de la carga tipo 3 con respecto a la componente imaginaria de la tensión de secuencia inversa V_{x2} resulta:

$$\frac{\partial I_{r1}^{(3)}}{\partial V_{x2}} = \frac{-2V_{x2}(P_{t3}^{\text{esp}}V_{r1} + Q_{t3}^{\text{esp}}V_{x1})}{3V_{12}^4} \quad (12.36)$$

Cuadro 12.2. Sensibilidades para la carga tipo 1.

$\frac{\partial I_{ri}^{(1)}}{\partial V_{rj}}$	$\frac{1}{V_{012}^2} \left[\frac{\delta_{ij}}{3} P_{t1}^{\text{esp}} - 2V_{rj} I_{ri}^{(1)} \right]$
$\frac{\partial I_{ri}^{(1)}}{\partial V_{xj}}$	$\frac{1}{V_{012}^2} \left[\frac{\delta_{ij}}{3} Q_{t1}^{\text{esp}} - 2V_{xj} I_{ri}^{(1)} \right]$
$\frac{\partial I_{xi}^{(1)}}{\partial V_{rj}}$	$-\frac{1}{V_{012}^2} \left[\frac{\delta_{ij}}{3} Q_{t1}^{\text{esp}} + 2V_{rj} I_{xi}^{(1)} \right]$
$\frac{\partial I_{xi}^{(1)}}{\partial V_{xj}}$	$\frac{1}{V_{012}^2} \left[\frac{\delta_{ij}}{3} P_{t1}^{\text{esp}} - 2V_{xj} I_{xi}^{(1)} \right]$

Nótese que, a pesar de que las cargas son estructuralmente equilibradas, la potencia consumida por cada fase puede ser ligeramente diferente por la presencia de tensiones inversas y homopolares.

12.5.2. Modelo de carga desequilibrada con neutro

La carga tipo 2 de la Figura 12.9 presenta tres admitancias \mathcal{Y}_a , \mathcal{Y}_b e \mathcal{Y}_c diferentes en cada fase. Estas admitancias son función de las potencias especificadas y de las tensiones de fase. Consecuentemente, las corrientes de fase tienen por expresión:

$$\mathcal{I}_\nu = \mathcal{Y}_\nu \mathcal{U}_\nu = \frac{P_\nu^{\text{esp}} - jQ_\nu^{\text{esp}}}{V_\nu^2} \mathcal{U}_\nu \quad \text{con } \nu = a, b, c \quad (12.37)$$

La aplicación de la transformación en componentes simétricas a las corrientes \mathcal{I}_ν permite obtener las corrientes de secuencia $\mathcal{I}_i^{(2)}$ ($i = 0, 1, 2$) para la carga tipo 2. Sin embargo, a diferencia del desacoplamiento entre fases mostrado por (12.37), las corrientes de secuencia están acopladas. Por tanto, resulta en este caso menos laborioso obtener primeramente las sensibilidades en el dominio de las fases, y realizar después la transformación a componentes simétricas. Las sensibilidades en magnitudes de fase vienen dadas por

$$L_\nu = \frac{\partial I_{r\nu}}{\partial V_{r\nu}} = -\frac{\partial I_{x\nu}}{\partial V_{x\nu}} = \frac{P_\nu^{\text{esp}}(V_{x\nu}^2 - V_{r\nu}^2) - 2Q_\nu^{\text{esp}}V_{r\nu}V_{x\nu}}{3V_\nu^4} \quad (12.38)$$

$$N_\nu = \frac{\partial I_{r\nu}}{\partial V_{x\nu}} = \frac{\partial I_{x\nu}}{\partial V_{r\nu}} = \frac{Q_\nu^{\text{esp}}(V_{r\nu}^2 - V_{x\nu}^2) - 2P_\nu^{\text{esp}}V_{r\nu}V_{x\nu}}{3V_\nu^4} \quad (12.39)$$

Estas sensibilidades se pueden agrupar dentro de una matriz $[H_\nu]$ que relaciona los vectores formados por los incrementos de corrientes y tensiones, de modo que

$$[\Delta I_\nu] = [H_\nu][\Delta V_\nu] \quad (12.40)$$

$$[\Delta I_\nu] = [\Delta I_{ra}, \Delta I_{xa}, \Delta I_{rb}, \Delta I_{xb}, \Delta I_{rc}, \Delta I_{xc}]^T \quad (12.41)$$

$$[\Delta V_\nu] = [\Delta V_{ra}, \Delta V_{xa}, \Delta V_{rb}, \Delta V_{xb}, \Delta V_{rc}, \Delta V_{xc}]^T \quad (12.42)$$

Debido al mencionado desacoplamiento, la matriz $[H_\nu]$ es diagonal por bloques de 2×2 elementos, siendo cada uno de los cuales de la forma siguiente:

$$\begin{bmatrix} L_\nu & N_\nu \\ N_\nu & -L_\nu \end{bmatrix} \quad (12.43)$$

La aplicación de la transformación en componentes simétricas a la relación (12.40) conduce a

$$[\Delta I_{\nu s}] = [H_{\nu s}][\Delta V_{\nu s}] \quad ; \quad [H_{\nu s}] = [T]^{-1}[H_\nu][T] \quad (12.44)$$

$$[\Delta I_{\nu s}] = [\Delta I_{r0}, \Delta I_{x0}, \Delta I_{r1}, \Delta I_{x1}, \Delta I_{r2}, \Delta I_{x2}]^T \quad (12.45)$$

$$[\Delta V_{\nu s}] = [\Delta V_{r0}, \Delta V_{x0}, \Delta V_{r1}, \Delta V_{x1}, \Delta V_{r2}, \Delta V_{x2}]^T \quad (12.46)$$

con

$$[T] = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 2 & 0 & 2 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 2 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & -1 & \sqrt{3} & -1 & -\sqrt{3} \\ 0 & 2 & -\sqrt{3} & -1 & \sqrt{3} & -1 \\ 2 & 0 & -1 & -\sqrt{3} & -1 & \sqrt{3} \\ 0 & 2 & \sqrt{3} & -1 & -\sqrt{3} & -1 \end{bmatrix} \quad (12.47)$$

La matriz $[H_{\nu s}]$ contiene las sensibilidades de las corrientes de secuencia $I_{ri}^{(2)}$ e $I_{xi}^{(2)}$ con respecto a las tensiones de secuencia V_{rj} y V_{xj} en donde $i, j = 0, 1, 2$.

12.5.3. Modelo de carga desequilibrada sin neutro

La carga tipo 4 de la Figura 12.9 presenta tres admitancias \mathcal{Y}_{ab} , \mathcal{Y}_{bc} e \mathcal{Y}_{ca} diferentes en cada fase. Estas admitancias pueden expresarse en función de las potencias especificadas y de las tensiones de fase. De este modo, las corrientes de fase y de línea tienen por expresión:

$$\mathcal{I}_\mu = \mathcal{Y}_\mu \mathcal{U}_\mu = \frac{P_\mu^{\text{esp}} - jQ_\mu^{\text{esp}}}{V_\mu^2} \mathcal{U}_\mu \quad \text{con } \mu = ab, bc, ca \quad (12.48)$$

$$\mathcal{I}_a = \mathcal{I}_{ab} - \mathcal{I}_{ca} \quad ; \quad \mathcal{I}_b = \mathcal{I}_{bc} - \mathcal{I}_{ab} \quad ; \quad \mathcal{I}_c = \mathcal{I}_{ca} - \mathcal{I}_{bc} \quad (12.49)$$

Como ocurría con la carga tipo 2, el cálculo directo de las sensibilidades en magnitudes de secuencia resulta bastante laborioso. Por ello, es preferible hacerlo indirectamente a partir del dominio de las fases. En primer lugar, se obtienen las sensibilidades de las corrientes de rama $I_{r\mu}$ e $I_{x\mu}$ con respecto a las tensiones de línea $V_{r\mu}$ y $V_{x\mu}$ teniendo en cuenta la ecuación (12.48). Estas sensibilidades presentan expresiones análogas a las indicadas en las relaciones (12.38) y (12.39) sin más que sustituir ν por μ . Por tanto, podemos escribir en forma matricial:

$$[\Delta I_\mu] = [H_\mu][\Delta V_\mu] \quad (12.50)$$

$$[\Delta I_\mu] = [\Delta I_{rab}, \Delta I_{xab}, \Delta I_{rbc}, \Delta I_{xbc}, \Delta I_{rca}, \Delta I_{xca}]^T \quad (12.51)$$

$$[\Delta V_\mu] = [\Delta V_{rab}, \Delta V_{xab}, \Delta V_{rbc}, \Delta V_{xbc}, \Delta V_{rca}, \Delta V_{xca}]^T \quad (12.52)$$

La aplicación de la transformación en componentes simétricas a la ecuación (12.50) conduce a:

$$[\Delta I_{\mu s}] = [H_{\mu s}][\Delta V_{\mu s}] \quad ; \quad [H_{\mu s}] = [T]^{-1}[H_{\mu}][T] \quad (12.53)$$

$$[\Delta I_{\mu s}] = [\Delta I_{rab0}, \Delta I_{xab0}, \Delta I_{rab1}, \Delta I_{xab1}, \Delta I_{rab2}, \Delta I_{xab2}]^T \quad (12.54)$$

$$[\Delta V_{\mu s}] = [\Delta V_{rab0}, \Delta V_{xab0}, \Delta V_{rab1}, \Delta V_{xab1}, \Delta V_{rab2}, \Delta V_{xab2}]^T \quad (12.55)$$

Dado que las tensiones de línea carecen de componente homopolar, es decir, los términos ΔV_{rab0} y ΔV_{xab0} son nulos, la ecuación (12.53) puede reducirse a:

$$[\Delta I'_{\mu s}] = [H'_{\mu s}][\Delta V'_{\mu s}] \quad (12.56)$$

Los vectores $[\Delta I'_{\mu s}]$ y $[\Delta V'_{\mu s}]$ coinciden respectivamente con los vectores indicados en las relaciones (12.54) y (12.55) si en estos se omite su componente homopolar. A su vez, la matriz $[H'_{\mu s}]$ es una submatriz de la matriz $[H_{\mu s}]$ formada por el bloque inferior derecho de 4×4 elementos. Por otra parte, las relaciones existentes entre las componentes simétricas de las magnitudes de rama \mathcal{U}_{ab} , \mathcal{I}_{ab} y de las magnitudes de fase \mathcal{U}_a , \mathcal{I}_a , vienen dadas por

$$[\Delta V'_{\mu s}] = [T_{ab}][\Delta V'_{\nu s}] \quad ; \quad [\Delta I'_{\mu s}] = \frac{1}{3}[T_{ab}][\Delta I'_{\nu s}] \quad (12.57)$$

siendo

$$[T_{ab}] = \frac{\sqrt{3}}{2} \begin{bmatrix} \sqrt{3} & -1 & 0 & 0 \\ 1 & \sqrt{3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{3} & 1 \\ 0 & 0 & -1 & \sqrt{3} \end{bmatrix} \quad (12.58)$$

Los vectores $[\Delta I'_{\nu s}]$ y $[\Delta V'_{\nu s}]$ coinciden con los indicados en las ecuaciones (12.45) y (12.46) después de eliminar sus componentes homopolares. De esta manera se llega a

$$[\Delta I'_{\nu s}] = [H'_{\nu s}][\Delta V'_{\nu s}] \quad ; \quad [H'_{\nu s}] = 3[T_{ab}]^{-1}[H'_{\mu s}][T_{ab}] \quad (12.59)$$

La matriz $[H'_{\nu s}]$ contiene las sensibilidades de las corrientes de secuencia $I_{ri}^{(4)}$ e $I_{xi}^{(4)}$ con respecto a las tensiones de secuencia V_{rj} y V_{xj} en donde $i, j = 1, 2$.

12.5.4. Modelo de carga dinámica

La carga tipo 5 de la Figura 12.9 es estructuralmente equilibrada, por lo que puede representarse por tres admitancias de secuencia \mathcal{Y}_1 , \mathcal{Y}_2 e \mathcal{Y}_0 . Las admitancias \mathcal{Y}_2 e \mathcal{Y}_0 son fijas y presentan una relación intensidad-tensión como la indicada en (12.28). Por otra parte, la admitancia de secuencia directa \mathcal{Y}_1 no es fija, sino que depende del módulo de la tensión de secuencia directa V_1 y de las potencias de secuencia directa P_1 y Q_1 . Esta dependencia viene dada por

$$\mathcal{Y}_1 = \frac{P_1 - jQ_1}{3V_1^2} \quad (12.60)$$

Por consiguiente, la corriente de secuencia directa se expresa mediante

$$\mathcal{I}_1^{(5)} = \frac{P_1 - jQ_1}{3V_1^2} \mathcal{U}_1 \quad (12.61)$$

Como se comentó anteriormente, la potencia especificada puede referirse sólo a la secuencia directa, como en el caso de los nudos PV, en cuyo caso tenemos que

$$P_1 = P_1^{\text{esp}} \quad ; \quad Q_1 = Q_1^{\text{esp}} \quad (12.62)$$

o bien a la potencia total, con lo que

$$P_1 = P^{\text{esp}} - 3(G_2V_2^2 + G_0V_0^2) \quad ; \quad Q_1 = Q^{\text{esp}} + 3(B_2V_2^2 + B_0V_0^2) \quad (12.63)$$

en donde G_2 y G_0 son las conductancias de \mathcal{Y}_2 e \mathcal{Y}_0 , y B_2 y B_0 las susceptancias. Combinando la ecuación (12.61) con (12.62) u (12.63) se obtiene la corriente de la carga tipo 5.

Asimismo, descomponiendo esta corriente en sus partes real e imaginaria es posible determinar las sensibilidades de la corriente directa respecto a la tensión directa. Estas derivadas vienen dadas por

$$\frac{\partial I_{r1}^{(5)}}{\partial V_{r1}} = -\frac{\partial I_{x1}^{(5)}}{\partial V_{x1}} = \frac{P_1(V_{x1}^2 - V_{r1}^2) - 2Q_1V_{r1}V_{x1}}{3V_1^4} \quad (12.64)$$

$$\frac{\partial I_{r1}^{(5)}}{\partial V_{x1}} = \frac{\partial I_{x1}^{(5)}}{\partial V_{r1}} = \frac{Q_1(V_{r1}^2 - V_{x1}^2) - 2P_1V_{r1}V_{x1}}{3V_1^4} \quad (12.65)$$

Además, cuando se especifica la potencia total, hay que incluir las sensibilidades de la corriente directa respecto de la tensión inversa:

$$\frac{1}{V_{r2}} \frac{\partial I_{r1}^{(5)}}{\partial V_{r2}} = \frac{1}{V_{x2}} \frac{\partial I_{r1}^{(5)}}{\partial V_{x2}} = -2 \frac{G_2V_{r1} - B_2V_{x1}}{V_1^2} \quad (12.66)$$

$$\frac{1}{V_{r2}} \frac{\partial I_{x1}^{(5)}}{\partial V_{r2}} = \frac{1}{V_{x2}} \frac{\partial I_{x1}^{(5)}}{\partial V_{x2}} = -2 \frac{G_2V_{x1} + B_2V_{r1}}{V_1^2} \quad (12.67)$$

Expresiones similares se obtienen para las derivadas de la corriente directa respecto de la tensión homopolar.

Merece la pena destacar que, imponiendo la restricción de potencias idénticas en las tres fases de las cargas desequilibradas tipos 2 y 4, obtendríamos cargas con un comportamiento muy similar al de las cargas estructuralmente equilibradas, pero no idéntico. Surgirían ligeras diferencias por la presencia de tensiones nodales de secuencia inversa y homopolar.

Ejemplo 12.2:

Nudo	Sec. directa		Sec. inversa	
	V_1	θ_1	V_2	θ_2
1	1.1000	0.000	0.0498	-76.46
2	0.9837	-9.45	0.1248	-79.89
3	1.0500	-5.80	0.0612	-72.37

En este ejemplo se va a resolver la red del Ejemplo 1 aplicando el método de Newton-Raphson a las ecuaciones deducidas anteriormente. Los resultados obtenidos partiendo de perfil plano de tensiones se muestran en la siguiente tabla:

Estos resultados se alcanzan en 3 iteraciones con un error de cierre de 10^{-6} . El jacobiano consta de 10×10 elementos, y se actualiza en cada iteración aunque las variaciones de una a otra sean pequeñas.

Para ilustrar parcialmente este proceso, se muestran a continuación los valores en la primera iteración de algunos términos del jacobiano, correspondientes a la sensibilidad de la parte real de la corriente de secuencia directa del nudo 2 respecto a la parte imaginaria de las tensiones:

- Mismo nudo - misma secuencia: De las expresiones del Ejemplo 12.1, obtenemos directamente que,

$$\frac{\partial \Delta I_{r21}}{\partial V_{x21}} = \frac{\partial I_{r21}}{\partial V_{x21}} + 7,887$$

donde el término $\partial I_{r21}/\partial V_{x21}$ vale 0.4, como puede deducirse de los desarrollos realizados en el apartado correspondiente a este tipo de carga.

- Distinto nudo - misma secuencia: Del mismo modo, del Ejemplo 12.1 deducimos que

$$\frac{\partial \Delta I_{r21}}{\partial V_{x31}} = -4,587$$

- Distinto nudo - distinta secuencia: Análogamente se obtiene que

$$\frac{\partial \Delta I_{r21}}{\partial V_{x32}} = 0$$

lo que resulta evidente si se tiene en cuenta que las líneas son equilibradas.

De este modo se obtendrían los demás elementos del jacobiano. Aunque el último término calculado es nulo, el acoplamiento entre secuencias tiene lugar dentro del bloque diagonal correspondiente al nudo en cuestión, como puede observarse para el caso del nudo 2:

$$\begin{bmatrix} \Delta I_{r21} \\ \Delta I_{x21} \\ \Delta I_{r22} \\ \Delta I_{x22} \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} 0,706 & 8,287 & -0,423 & -0,333 \\ -7,487 & 2,706 & -0,333 & 0,423 \\ -0,423 & -0,333 & 2,283 & 7,554 \\ -0,333 & 0,423 & -8,620 & 2,129 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta V_{r21} \\ \Delta V_{x21} \\ \Delta V_{r22} \\ \Delta V_{x22} \end{bmatrix}$$

El acoplamiento entre las secuencias directa e inversa es apreciable, debido a la conexión de la carga desequilibrada conectada al nudo 2. Si toda la carga de este nudo fuese equilibrada, el flujo trifásico proporcionaría los mismos resultados que el caso monofásico examinado en el Capítulo 3. En este caso, los términos del jacobiano no presentarían acoplamientos entre secuencias, tal y como se muestra a continuación:

$$\begin{bmatrix} \Delta I_{r21} \\ \Delta I_{x21} \\ \Delta I_{r22} \\ \Delta I_{x22} \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} 0,706 & 8,287 & 0 & 0 \\ -7,487 & 2,706 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2,706 & 8,287 \\ 0 & 0 & -8,287 & 2,706 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta V_{r21} \\ \Delta V_{x21} \\ \Delta V_{r22} \\ \Delta V_{x22} \end{bmatrix}$$

12.6. Límites de potencia reactiva para los generadores

Un generador que funcione dentro de los límites de potencia reactiva se trata de la manera indicada en el apartado 12.2.2 para los nudos PV. Si los límites de reactiva (Q_G^{\min} , Q_G^{\max}) son superados, el generador debe representarse como carga PQ tipo 5. Si en lugar de especificar la potencia de secuencia directa se especifica la potencia total, el efecto de las potencias de secuencia inversa y homopolar de la relación (12.63) se tiene en cuenta por medio de las susceptancias B_2 y B_0 . Normalmente, las conductancias G_2 y G_0 se ignoran, puesto que las resistencias de los generadores son despreciables en comparación a las reactancias.

La discriminación entre funcionamiento PV o PQ de un generador se realiza en cada iteración del flujo de cargas acudiendo al cálculo de la potencia reactiva generada Q_{Gp} en el nudo genérico p . Si se opta por especificar la potencia total, el término Q_{Gp} se obtiene de

$$Q_{Gp} = Q_{Gp1} + 3(B_{p2}V_{p2}^2 + B_{p0}V_{p0}^2) \quad (12.68)$$

es decir, se considera el efecto de las componentes inversa y homopolar en la reactiva generada por la máquina. La componente de secuencia directa Q_{Gp1} se obtiene sumando el consumo local de la carga más lo que fluye por la red, es decir,

$$\frac{1}{3}Q_{Gp1} = \text{Im} \left\{ \mathcal{U}_{p1}\mathcal{I}_{p1}^* + \sum_{q=1}^n \sum_{j=0}^2 \mathcal{Y}_{pq1j}^* \mathcal{U}_{qj}^* \mathcal{U}_{p1} \right\} \quad (12.69)$$

Si lo que se especifica es la potencia de secuencia directa, solamente hay que calcular el término Q_{Gp1} en la ecuación (12.68). Del mismo modo que en los flujos de carga monofásicos, la transición de funcionamiento PV a PQ tiene lugar si $Q_{Gp} > Q_{Gp}^{\max}$ o $Q_{Gp} < Q_{Gp}^{\min}$. En el funcionamiento PQ, la potencia reactiva especificada Q_{Gp}^{esp} se hace igual a Q_{Gp}^{\max} o Q_{Gp}^{\min} . La transición de funcionamiento PQ a PV se activa si se cumplen las condiciones siguientes: $Q_{Gp}^{\text{esp}} = Q_{Gp}^{\max}$ y $V_{p1} > V_{p1}^{\text{esp}}$ o $Q_{Gp}^{\text{esp}} = Q_{Gp}^{\min}$ y $V_{p1} < V_{p1}^{\text{esp}}$.

12.7. Ejemplos de aplicación

En esta sección se van a presentar una serie de casos en donde se pone de manifiesto la utilidad y las prestaciones del flujo de cargas trifásico. Estos ejemplos se refieren a las redes del IEEE de 14 y 118 nudos y a una red de transporte española de casi 1 000 nudos.

12.7.1. Red IEEE de 14 nudos

Por su tamaño, reducido pero suficientemente realista, la red de 14 nudos del IEEE es utilizada universalmente para ilustrar el funcionamiento de numerosas herramientas de análisis. La Figura 12.10 muestra su diagrama unifilar, y las Tablas 12.3, 12.4 y 12.5 los datos de nudos, generadores y ramas respectivamente (la potencia base es 100 MVA). A esos

datos hay que añadir un banco de condensadores de 6.33 Mvar en el nudo 9. La solución del flujo de cargas monofásico, para las potencias y tensiones especificadas, se incluye también en la Tabla 12.3.

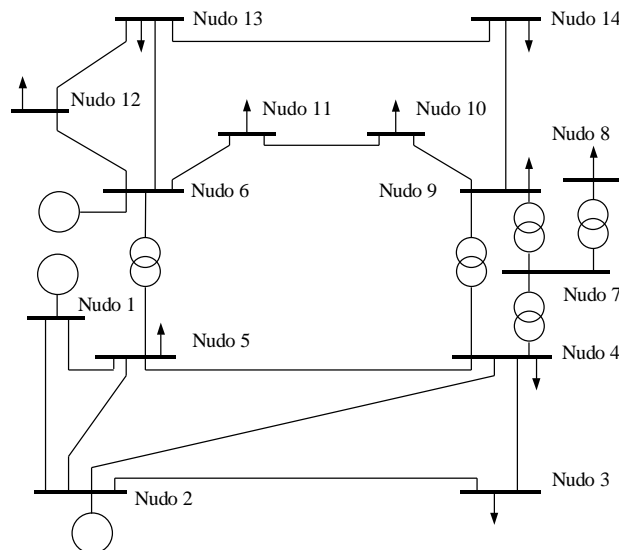


Figura 12.10. Red IEEE de 14 nudos.

Para el cálculo de flujos de cargas trifásicos deben especificarse además una serie de datos relativos a las secuencias inversa y homopolar y configuración del neutro:

1. Todas las cargas PQ se consideran aisladas de tierra y estructuralmente equilibradas (cargas tipo 3 según la notación de la Figura 12.9).
2. Las impedancias de los transformadores son iguales para las tres secuencias. Además, todos los devanados conectados en estrella están puestos a tierra.
3. Las reactancias subtransitorias de la Tabla 12.4 se utilizan para representar las reactancias a las secuencias inversa y homopolar de las máquinas síncronas.
4. Para todas las líneas se asumen los siguientes parámetros a la secuencia homopolar: una resistencia de $R_0 = 3R_1$ y una reactancia de $X_0 = 3,5X_1$, donde R_1 y X_1 son las indicadas en la Tabla 12.5. Es decir, todas las líneas se modelan en el caso base con una estructura equilibrada.
5. Para las siete líneas que conectan los nudos 1, 2, 3, 4, y 5 se supone además la siguiente susceptancia a la secuencia homopolar: $B_0 = 3,5B_1$.

Sobre esta red se han realizado dos simulaciones, con el objetivo de analizar separadamente el desequilibrio introducido por líneas y cargas estructuralmente desequilibradas.

Caso 1: Líneas desequilibradas

En este caso se analiza solamente el efecto del desequilibrio introducido por las líneas que unen los nudos 1, 2, 3, 4 y 5 de la Figura 12.10. Estas líneas son duplex, configuradas

Cuadro 12.3. Datos de nudos de la red IEEE de 14 nudos.

Nudo	Tipo	P_D (MW)	Q_D (Mvar)	V_1 (%)	θ_1 (°)
1	Osc.	0.000	0.000	106.000	0.00
2	PV	0.000	0.000	104.500	-4.58
3	PQ	80.000	20.000	98.740	-11.14
4	PQ	47.790	-3.900	100.962	-9.59
5	PQ	7.599	1.599	102.240	-8.40
6	PV	0.000	0.000	107.000	-14.64
7	PQ	0.000	0.000	98.730	-12.74
8	PQ	0.000	12.900	96.373	17.26
9	PQ	29.499	16.599	99.152	-14.43
10	PQ	9.000	5.799	99.756	-14.75
11	PQ	3.501	1.800	102.957	-14.79
12	PQ	6.099	1.599	105.099	-15.45
13	PQ	13.500	5.799	104.240	-15.41
14	PQ	14.901	5.001	100.063	-15.79

Cuadro 12.4. Datos de generadores de la red IEEE de 14 nudos.

Nudo	V_{esp} (%)	P_G (MW)	$X_{\text{subtr.}}$ (pu)
1	106.000	261.681	0.25
2	104.500	18.300	0.25
6	107.000	-11.200	0.25

en capa, y sus parámetros se especifican en la Tabla 12.6, dependiendo de que el conductor utilizado sea LA-180 o LA-280. La longitud y tipo de conductor que corresponde a cada línea se indica asimismo en la Tabla 12.7.

Con estas premisas, las tensiones resultantes del flujo de cargas trifásico son las que se muestran en la Tabla 12.8. Cabe destacar en el nudo 3 niveles del 0.5% para la componente homopolar y del 1.22% para la componente inversa.

Caso 2: Cargas desequilibradas

En el caso 2 se estudia solamente el efecto del desequilibrio introducido por las cargas. Para ello la carga de 80 MW y 20 Mvar conectada al nudo 3 se descompone en 4 cargas en paralelo con las características siguientes:

Cuadro 12.5. Datos de líneas y transformadores (secuencia directa) de la red IEEE de 14 nudos.

Rama	N_{inicial}	N_{final}	$R_1(\text{pu})$	$X_1(\text{pu})$	$B_1(\text{pu})$	$a(\text{pu})$	$\alpha_t(^{\circ})$
1	1	2	0.01937	0.05916	0.05279		
2	1	5	0.05402	0.22300	0.04920		
3	2	3	0.04697	0.19794	0.04380		
4	2	4	0.05810	0.17628	0.03740		
5	2	5	0.05693	0.17384	0.03386		
6	3	4	0.06700	0.17099	0.03460		
7	4	5	0.01335	0.04209	0.01280		
8	4	7	0.00000	0.20900	0.00000	1.0000	0.00
9	4	9	0.00000	0.55618	0.00000	1.0000	0.00
10	5	6	0.00000	0.25020	0.00000	1.0000	0.00
11	6	11	0.09495	0.19887	0.00000		
12	6	12	0.12285	0.25575	0.00000		
13	6	13	0.06613	0.13024	0.00000		
14	7	8	0.00000	0.17615	0.00000	1.0000	-30.00
15	7	9	0.00000	0.11000	0.00000	1.0000	0.00
16	9	10	0.03181	0.08448	0.00000		
17	9	14	0.01270	0.27033	0.00000		
18	10	11	0.08203	0.19202	0.00000		
19	12	13	0.22087	0.19985	0.00000		
20	13	14	0.17089	0.34795	0.00000		

- Tipo 1: $P_{t1} = 20 \text{ MW}$ y $Q_{t1} = 5 \text{ Mvar}$
- Tipo 2: $P_a = 20 \text{ MW}$ y $Q_a = 5 \text{ Mvar}$
- Tipo 3: $P_{t3} = 20 \text{ MW}$ y $Q_{t3} = 5 \text{ Mvar}$
- Tipo 4: $P_{ab} = 20 \text{ MW}$ y $Q_{ab} = 5 \text{ Mvar}$

Las tensiones resultantes del flujo de cargas se muestran en la Tabla 12.9. Se observa que aparecen niveles muy elevados de tensiones de secuencia inversa y homopolar. Las componentes homopolares son debidas a la carga monofásica tipo 2 mientras que las componentes de secuencia inversa son causadas por las cargas monofásicas tipo 2 y tipo 4. Es de destacar los niveles de tensión homopolar e inversa en el nudo 3, alcanzando valores de 9.8 % y 7.3 % respectivamente. En el resto de los nudos puede observarse que la tensión inversa supera el 2 %, presentando valores mayores que la tensión homopolar.

Si se analizase el efecto combinado de los desequilibrios considerados en los casos 1 y 2 las tensiones de secuencia homopolar e inversa en el nudo 3 alcanzarían los valores de 10.2 % y 7.6 % respectivamente. Por otra parte, comparando los resultados del caso 1 con los del caso 2, se deduce que el desequilibrio debido a las líneas es de un orden de magnitud inferior al debido a las cargas desequilibradas, lo cual justifica hasta cierto punto el que se realicen

Cuadro 12.6. Parámetros por km de líneas desequilibradas para conductores LA-180 y LA-280.

Fase	Línea con conductor LA-180			Línea con conductor LA-280		
	$R_{\alpha\beta}(\Omega)$	$X_{\alpha\beta}(\Omega)$	$B_{\alpha\beta}(\mu S)$	$R_{\alpha\beta}(\Omega)$	$X_{\alpha\beta}(\Omega)$	$B_{\alpha\beta}(\mu S)$
aa	0.1893	0.5849	3.4191	0.1494	0.5784	3.4973
ab	0.0875	0.3062	-0.6383	0.0875	0.3062	-0.6662
ac	0.0861	0.2630	-0.2104	0.0861	0.2630	-0.2170
bb	0.1907	0.5841	3.5221	0.1508	0.5777	3.6074
bc	0.0875	0.3062	-0.6383	0.0875	0.3062	-0.6662
cc	0.1893	0.5849	3.4191	0.1494	0.5784	3.4973

Cuadro 12.7. Tipo de conductor y longitud de cada línea.

Línea	Conductor	Longitud (km)
Nudo 1-Nudo 2	LA-180	26.702
Nudo 1-Nudo 5	LA-280	102.902
Nudo 2-Nudo 3	LA-280	91.338
Nudo 2-Nudo 4	LA-180	79.564
Nudo 2-Nudo 5	LA-180	78.463
Nudo 3-Nudo 4	LA-180	77.177
Nudo 4-Nudo 5	LA-180	18.997

flujos de cargas monofásicos aunque las líneas no estén perfectamente transpuestas en la práctica.

12.7.2. Red IEEE de 118 nudos

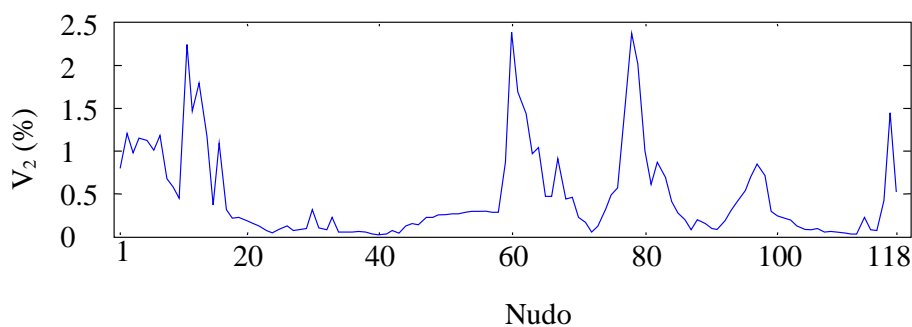
La red IEEE de 118 nudos constituye otra referencia importante para comprobar el comportamiento de los flujos de carga. Para realizar el flujo de cargas trifásico se ha supuesto que todos los generadores presentan una reactancia subtransitoria de 0.1 pu. El desequilibrio introducido en la red se ha realizado sustituyendo las cargas equilibradas tipo 3 de los nudos 11, 60 y 78 por sendas cargas monofásicas tipo 4 de acuerdo al esquema siguiente:

- Nudo 11: Tipo 4. $P_{ab} = 70 \text{ MW}$ y $Q_{ab} = 23 \text{ Mvar}$
- Nudo 60: Tipo 4. $P_{bc} = 78 \text{ MW}$ y $Q_{bc} = 3 \text{ Mvar}$
- Nudo 78: Tipo 4. $P_{ca} = 71 \text{ MW}$ y $Q_{ca} = 26 \text{ Mvar}$

En la Figura 12.11 se muestra el perfil de tensiones de secuencia inversa resultante de aplicar el flujo de cargas trifásico. Se observa que los mayores contenidos se obtienen, lógicamente, en los nudos de conexión de las cargas desequilibradas.

Cuadro 12.8. Resultados del flujo de cargas en el caso 1 (14 nudos).

Nudo	V_0 (%)	θ_0 (°)	V_1 (%)	θ_1 (°)	V_2 (%)	θ_2 (°)
1	0,260	-16,63	106,000	0,00	0,797	53,48
2	0,033	37,88	104,500	- 4,60	0,268	110,06
3	0,508	118,51	98,958	- 11,17	1,225	171,16
4	0,238	129,43	100,955	- 9,60	0,872	174,74
5	0,173	131,49	102,316	- 8,42	0,671	173,31
6	0,092	132,06	107,000	- 14,64	0,428	173,07
7	0,122	129,14	98,726	- 12,75	0,730	170,81
8	0,000	0,00	96,368	17,25	0,713	140,81
9	0,137	128,87	99,148	- 14,44	0,668	168,12
10	0,129	129,10	99,753	- 14,76	0,621	168,19
11	0,111	130,11	102,956	- 14,80	0,525	169,75
12	0,095	131,74	105,098	- 15,46	0,440	171,66
13	0,098	130,74	104,240	- 15,41	0,455	170,18
14	0,121	127,88	100,061	- 15,80	0,572	165,41

**Figura 12.11.** Perfil de tensiones de secuencia inversa del sistema de 118 nudos.

12.7.3. Red de gran dimensión

Por último, se ha tomado la red de transporte española de 935 nudos como sistema de gran tamaño para mostrar la robustez de la metodología basada en residuos de corriente en coordenadas cartesianas. En esta red se alimenta una línea de ferrocarril correspondiente a un tramo del enlace de alta velocidad Madrid-Barcelona.

La línea de alta velocidad se divide en varios tramos que se conectan a la red mediante transformadores monofásicos. La alimentación se efectúa por medio de 9 subestaciones, cada una de ellas constituida por dos transformadores monofásicos que suministran energía a dos tramos adyacentes de la línea. Es decir, la línea de ferrocarril está dividida en 18 tramos entre Madrid y Lérida.

Por cada tramo pueden circular simultáneamente varios trenes, los cuales demandan potencia de la red de alta tensión por medio de los transformadores monofásicos. Para re-

Cuadro 12.9. Resultados del flujo de cargas en el caso 2 (14 nudos).

Nudo	V_0 (%)	θ_0 (°)	V_1 (%)	θ_1 (°)	V_2 (%)	θ_2 (°)
1	1,224	- 125,70	106,000	0,00	3,010	- 99,21
2	2,030	- 132,45	104,500	- 4,61	3,541	- 101,73
3	9,782	- 141,88	98,174	- 11,17	7,311	- 107,46
4	2,465	- 130,74	100,815	- 9,62	4,098	- 104,29
5	1,890	- 128,07	102,147	- 8,43	3,685	- 102,71
6	0,996	- 127,67	107,000	- 14,67	2,226	- 104,36
7	1,267	- 130,97	98,622	- 12,77	3,480	- 107,79
8	0,000	0,00	96,265	17,23	3,397	- 137,79
9	1,428	- 131,18	99,064	- 14,46	3,213	- 110,14
10	1,351	- 130,88	99,684	- 14,78	3,016	- 109,89
11	1,177	- 129,72	102,920	- 14,82	2,618	- 107,94
12	1,029	- 128,02	105,092	- 15,49	2,270	- 105,82
13	1,058	- 128,95	104,228	- 15,44	2,326	- 107,18
14	1,270	- 131,88	100,007	- 15,82	2,802	- 112,19

ducir el nivel de desequilibrio se recurre a una conexión alternada a red de los distintos transformadores. Es decir, si los dos transformadores de una subestación presentan respectivamente una conexión a red ‘ab’ y ‘bc’, los transformadores de la subestación siguiente dispondrán de una conexión ‘ca’ y ‘ab’. De la misma manera se procede con el resto de los transformadores. En la Tabla 12.10 se muestra el tipo de conexión de los 18 transformadores que conforman la alimentación a la línea ferroviaria. Cada transformador se designa con el símbolo T seguido de un doble subíndice. El primer subíndice indica el número de subestación. Se observa además un nivel de carga muy fuerte, 337.22 MW, que se encuentra distribuido entre los 18 transformadores. Esta hipótesis pesimista supone que en cada tramo están circulando tres trenes simultáneamente. Con estos datos se analizan dos casos.

Caso 1

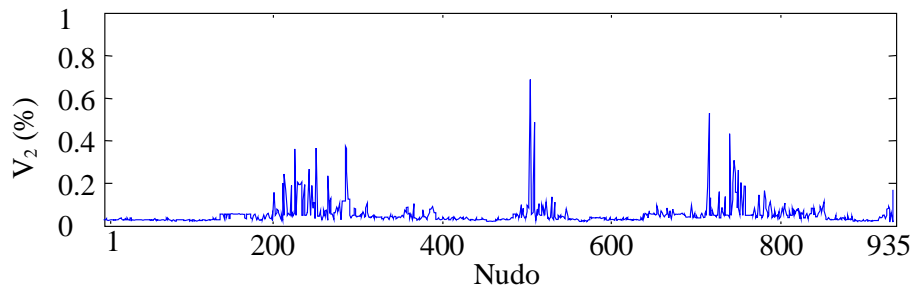
En el caso 1 se analiza solamente el efecto del desequilibrio introducido por una composición de cargas como la indicada en la Tabla 12.10. En la Figura 12.12 se muestra el perfil de tensiones de secuencia inversa en los nudos de la red. Se observa un moderado nivel de desequilibrio cuyo máximo es 0.67%.

Caso 2

En este caso se considera un fallo en los transformadores T_{42} y T_{51} que los deja fuera de servicio. Cuando ocurre esto, los transformadores T_{41} y T_{52} hacen frente a las cargas asignadas a los transformadores en fallo, asumiendo unas cargas de 46.1 MW y 46.3 MW respectivamente. De esta manera, se tiene un fuerte consumo de cargas monofásicas conectadas entre las fases b y c, dando lugar a un considerable incremento de la tensión inversa en la red, con un máximo de 2.9% (véase la Figura 12.13).

Cuadro 12.10. Detalle de transformadores y cargas desequilibradas para el sistema de 935 nudos.

Trafos	Carga (MW)	Conexión	Trafos	Carga (MW)	Conexión
T_{11}	17.00	bc	T_{52}	23.15	bc
T_{12}	17.00	ca	T_{61}	17.51	ca
T_{21}	17.60	ab	T_{62}	17.51	ab
T_{22}	17.60	bc	T_{71}	17.60	bc
T_{31}	17.40	ca	T_{72}	17.60	ca
T_{32}	17.40	ab	T_{81}	18.00	ab
T_{41}	23.05	bc	T_{82}	18.00	bc
T_{42}	23.05	ca	T_{91}	17.30	ca
T_{51}	23.15	ab	T_{92}	17.30	ab

**Figura 12.12.** Perfil de tensiones de secuencia inversa del sistema de 935 nudos (caso 1).

12.7.4. Resultados referentes a la convergencia

En los sistemas de 118 y 935 nudos se han considerado límites de potencia reactiva en los generadores. Para alcanzar la convergencia se han empleado dos estrategias:

- En la opción A se utiliza previamente un flujo de cargas monofásico (FC-1f) en donde las cargas PQ desequilibradas se convierten a equilibradas con el mismo consumo total. La solución de este flujo de cargas proporciona los valores iniciales para las tensiones de secuencia directa en el flujo de cargas trifásico (FC-3f) que se ejecuta a continuación.
- En la opción B se parte directamente de un flujo de cargas trifásico (FC-3f) adoptando un perfil plano para las tensiones iniciales de secuencia directa.

En ambas opciones se toman tensiones iniciales nulas para las secuencias inversa y homopolar. En la Tabla 12.11 se indica el número de iteraciones necesario para alcanzar la convergencia en los casos analizados para los tres sistemas. También se hace referencia al tiempo relativo de ordenador entre las opciones A y B (t_A/t_B). Se ha adoptado un error de cierre de 10^{-6} pu para las funciones de error. De acuerdo con los resultados de la tabla, se observa que la opción A es bastante interesante ya que el tiempo de ordenador es menor, llegando a ser sólo una tercera parte en la red de 935 nudos. Además, en todos los casos, el

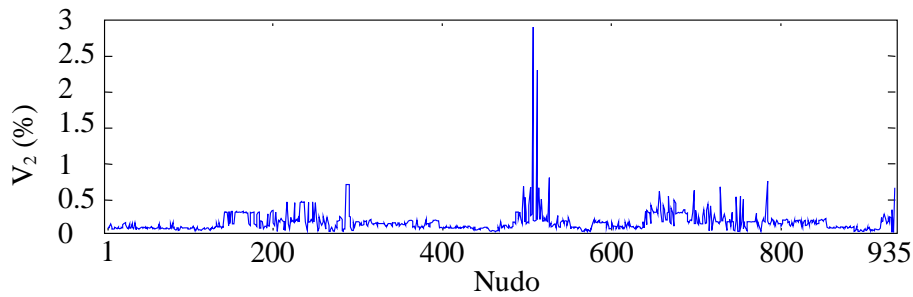


Figura 12.13. Perfil de tensiones de secuencia inversa del sistema de 935 nudos (caso 2).

flujo trifásico converge en 2 o 3 iteraciones. En la opción B la convergencia es muy buena a pesar de partir de perfil plano para las tensiones de secuencia directa.

Cuadro 12.11. Iteraciones para alcanzar la convergencia.

	Red 14 nudos		Red 118 nudos	Red 935 nudos	
	Caso 1	Caso 2		Caso 1	Caso 2
Opción A: FC-1f	3	3	4	6	6
Opción A: FC-3f	2	3	3	2	3
Opción B: FC-3f	4	4	5	7	7
t_A/t_B	100 %	100 %	58 %	32 %	36 %

Bibliografía

- [1] J. Arrillaga, D. Bradley y P. S. Bodger, *Power System Harmonics*, John Wiley & Sons, 1985.
- [2] J. Arrillaga y B. Smith, *AC-DC Power System Analysis*, The Institution of Electrical Engineers, London, 1998.
- [3] Bonneville Power Administration, *EMTP Theory Book*, Portland, Oregon, 1986.
- [4] V. M. Da Costa, N. Martins y J. L. R. Pereira, "Developments in the Newton Raphson Power Flow Formulation Based on Current Injections", *IEEE Transactions on Power Systems*, vol. 14(4), noviembre 1999, pp. 1320-1326.
- [5] T. J. Densem, P. S. Bodger y J. Arrillaga, "Three Phase Transmission Systems for Harmonic Penetration Studies", *IEEE Transactions on PAS*, vol. 103(2), febrero 1984, pp. 310-317.
- [6] J. García Mayordomo, M. López, R. Asensi, L. Beites y J.M. Rodríguez, "A General Treatment of Traction PWM Converters for Load Flow and Harmonic Penetration Studies", VIII IEEE International Conference on harmonics and Quality of Power, Atenas (Grecia), octubre 1998, pp. 685-692.

- [7] J. García Mayordomo, R. Asensi, A. Hernández, L. Beites y M. Izzeddine, "Iterative Harmonic Analysis of Line Side Commutated Converters Used in High Speed Trains", IX IEEE International Conference on harmonics and Quality of Power (ICHQP), Orlando, octubre 2000, pp. 846-851.
- [8] J. García Mayordomo, M. Izzeddine, S. Martínez, R. Asensi, A. Gómez Expósito y W. Xu, "A Compact and Flexible Three-Phase Power Flow Based on a Full Newton Formulation", *IEE Proc. C*, vol. 149(2), marzo 2002, pp. 225-232.
- [9] J. García Mayordomo, M. Izzeddine, S. Martínez y R. Asensi, "A Contribution for Three-Phase Power Flows Using the Current Injection Method", IX IEEE International Conference on harmonics and Quality of Power (ICHQP), Orlando, octubre 2000, pp. 295-300.
- [10] P. A. N. García, J. L. R. Pereira, J. R. Carneiro, V. M. Da Costa y N. Martins, "Three-Phase Power Flow Calculations Using the Current Injection Method", IEEE PES Summer Meeting 1999, Paper PE-026PRS.
- [11] K. S. Kundert y A. Sangiovanni-Vincentelli, *Sparse User's Guide. A Sparse Linear Equation Solver. Version 1.3a*, Universidad de California, Berkeley, abril 1988.
- [12] D. Reichelt, E. Ecknauer y H. Glavitsch, "Estimation of Steady-State Unbalanced System Conditions Combining Conventional Power Flow and Fault Analysis Software", *IEEE Transactions on Power Systems*, vol. 11(1), febrero 1996, pp. 422-427.
- [13] A. Robert y J. Marquet, WG CIGRE/CIREC CCO2, "Assessing Voltage Quality with Relation to Harmonics, Flicker and Unbalance", CIGRE, paper 36-203, 1992.
- [14] B. C. Smith y J. Arrillaga, "Power Flow Constrained Harmonic Analysis in AC-DC Power Systems", *IEEE Transactions on Power Systems*, vol. 14(4), noviembre 1999, pp. 1251-1259.
- [15] B. C. Smith y J. Arrillaga, "Improved Three-phase Load Flow Using Phase and Sequence Components", *IEE Proc. C*, vol. 145 (3), mayo 1998, pp. 245-250.
- [16] Task Force on Harmonics Modeling and Simulation, Transmission & Distribution Committee, "Test Systems for Harmonics Modeling and Simulation", *IEEE Transactions on Power Delivery*, vol. 14(2), abril 1999, pp. 579-585.
- [17] M. Valcárcel y J. García Mayordomo, "Harmonic Power Flow for Unbalanced Systems", *IEEE Transactions on Power Delivery*, vol. 8(4), octubre 1993, pp. 2052-2059.
- [18] W. Xu, J. R. Marti y H. W. Dommel, "A Multiphase Harmonic Load Flow Solution Technique", *IEEE Transactions on Power Systems*, vol. 6(1), febrero 1991, pp. 174-182.
- [19] X. P. Zhang, "Fast Three Phase Load Flow Methods", *IEEE Transactions on Power Systems*, vol. 11(3), agosto 1996, pp. 1547-1554.
- [20] X. P. Zhang, "Asymmetrical Three-phase Load Flow Study Based on Symmetrical Component Theory", *IEE Proc. C*, vol. 141(3), mayo 1994, pp. 248-252.

Apéndice A

Solución de sistemas de ecuaciones lineales

FERNANDO L. ALVARADO Y ANTONIO GÓMEZ EXPÓSITO

A.1. Introducción

En este apéndice se explican sucintamente las técnicas numéricas involucradas en la solución de grandes sistemas de ecuaciones lineales con la estructura dispersa e irregular característica de los sistemas eléctricos de potencia. Se incluyen una serie de tópicos avanzados, como la solución de sistemas modificados respecto a un caso base o el cálculo de ciertos elementos de la inversa de una matriz.

A.2. Eliminación gaussiana y factorización LU

En esta sección consideraremos la solución de un sistema lineal de ecuaciones

$$Ax = b \tag{A.1}$$

donde A es una matriz no singular y dispersa de dimensión $n \times n$, y b y x son vectores columna de n elementos.

En el análisis de sistemas de potencia el tamaño del sistema resultante, n , es habitualmente muy grande. Por ejemplo, en aplicaciones de flujos de cargas y estimación de estado el número de ecuaciones puede exceder de 5 000, pero en aplicaciones de optimización de la generación, donde existe acoplamiento temporal, este número llega a ser mucho mayor, especialmente si se modelan con detalle las restricciones de la red de transporte. El número de veces que estos sistemas de ecuaciones deben resolverse oscila entre 3 y 5, para un único flujo de cargas, hasta varios centenares en aplicaciones de análisis dinámico o de contingencias, de ahí la importancia de utilizar técnicas adecuadas que reduzcan al máximo el esfuerzo de cálculo.

En la gran mayoría de casos la matriz A es estructuralmente simétrica, es decir, cuando un elemento es no nulo su transpuesto también lo es. Esta característica se aprovecha

habitualmente a la hora de almacenar y acceder a los elementos no nulos de la matriz, puesto que sólo hay que almacenar la mitad de su estructura. Frecuentemente, A es también numéricamente simétrica, lo que supone un ahorro notable de operaciones si se respeta esa simetría durante el proceso de solución.

El método computacionalmente más eficaz y popular para resolver el sistema (A.1) es generalmente el de eliminación gaussiana. Como el lector seguramente sabrá, dicho método realiza sistemáticamente transformaciones elementales de las filas de A hasta convertirla en triangular superior. Estas transformaciones son de dos tipos: a) normalización de una fila, o sea, división de todos sus elementos por el elemento diagonal; b) combinación lineal de una fila con otra previamente normalizada para anular uno de sus elementos. La secuencia de eliminación de elementos de la parte inferior puede hacerse por filas o columnas, y el vector b se va transformando simultáneamente. A continuación, el sistema triangular resultante se resuelve por sustitución hacia atrás, comenzando con la última variable.

En muchos casos, es preciso volver a resolver el sistema con idéntica matriz A pero distinto vector independiente b . Cuando esto ocurre, el número de operaciones aritméticas se minimiza si las transformaciones se aplican sólo a b , lo cual requiere almacenar previamente los coeficientes que definen dichas transformaciones para luego aplicarlos cuantas veces sea necesario. Dado que tan sólo la parte triangular superior de A contiene información relevante para la sustitución hacia atrás, para el almacenamiento de los coeficientes de normalización se pueden utilizar las posiciones diagonales de A , que de otra manera valdrían 1, y para el almacenamiento de los coeficientes de transformación se pueden utilizar las posiciones de la parte triangular inferior de A , que de otro modo valdrían 0.

Las distintas posibilidades y refinamientos del proceso de eliminación gaussiana se pueden expresar de forma más elegante y compacta mediante un procedimiento matemático equivalente denominado factorización o descomposición triangular. Este método se basa en que toda matriz cuadrada no singular puede descomponerse de la siguiente forma:

$$A = L \cdot D \cdot U \quad (\text{A.2})$$

donde L y U son matrices triangulares, inferior y superior respectivamente, con diagonales unitarias, y D es una matriz estrictamente diagonal. Si A es numéricamente simétrica se cumple que $L = U^T$.

En la literatura especializada se encuentran variantes de la descomposición triangular donde la matriz D se asocia con L o con U en un solo factor. La ecuación anterior se reduce entonces a

$$A = L \cdot U \quad (\text{A.3})$$

dejando de ser unitaria la diagonal de L o la de U , según el caso. La expresión resultante hace que este procedimiento se conozca también con el nombre de Factorización LU .

Si A es completamente simétrica, la factorización puede hacerse de modo que $D^{1/2}$ se asocie tanto con L como con U , para que se mantenga la simetría de los factores. Este procedimiento, denominado descomposición de Choleski, requiere que se realicen raíces cuadradas, como puede apreciarse. Para una matriz real definida positiva puede garantizarse que los factores resultantes permanecen reales. En la práctica, para evitar el coste de las raíces cuadradas y el riesgo de que aparezcan números complejos, se prefiere calcular y manejar separadamente las matrices L y D , incluso para el caso de matrices simétricas.

Una vez realizada la descomposición LU la solución se obtiene resolviendo sucesivamente dos sistemas que involucran matrices triangulares. El procedimiento completo consta, en el caso general, de los tres pasos siguientes:

1. Factorización de la matriz de coeficientes:

$$A = L \cdot U$$

2. Obtención del vector intermedio y por eliminación o sustitución hacia adelante:

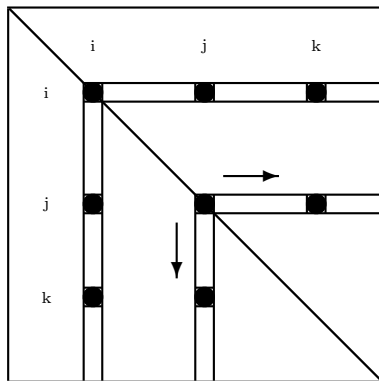
$$L \cdot y = b \quad \implies \quad y_1 \cdot \vec{\cdot} \cdot y_n$$

3. Obtención de x por sustitución hacia atrás:

$$U \cdot x = y \quad \implies \quad x_n \cdot \vec{\cdot} \cdot x_1$$

La eliminación gaussiana consiste básicamente en realizar simultáneamente los pasos 1 y 2, transformando la parte superior de A en U , y obteniendo L como subproducto en la parte inferior. En el caso particular de que el sistema se resuelva varias veces con la misma matriz de coeficientes, sólo hay que repetir los pasos 2 y 3.

Supongamos que A es estructuralmente simétrica, y que la estructura de una de sus mitades triangulares se almacena de modo que cada elemento y su transpuesto se acceden con el mismo índice. Como sugiere la siguiente figura, la parte triangular superior se recorre por filas y la triangular inferior por columnas (la diagonal se almacena normalmente en un vector aparte).



Con la notación de índices de la figura, y suponiendo que L y U contienen inicialmente los elementos de A , la descomposición LU se realiza mediante el siguiente pseudo-código:

Para $i = 1, n - 1$ Para todo j tal que $u_{ij} \neq 0$ $u_{ij} = u_{ij}/l_{ii}$ Para todo j tal que $u_{ij} \neq 0$ $l_{jj} = l_{jj} - l_{ji} \cdot u_{ij}$ Para todo $k > j$ tal que $u_{ik} \neq 0$ $l_{kj} = l_{kj} - l_{ki} \cdot u_{ij}$ $u_{jk} = u_{jk} - l_{ji} \cdot u_{ik}$

Puede observarse que, mediante esta variante, se consigue una matriz U con diagonal unitaria y que, salvo en el bucle que normaliza U , se recorren simultáneamente una fila de U y la columna respectiva de L .

El proceso de sustitución hacia adelante se realiza mediante el siguiente algoritmo:

Para $i = 1, n - 1$ $b_i = b_i/l_{ii}$ Para todo j tal que $l_{ji} \neq 0$ $b_j = b_j - l_{ji} \cdot b_i$ $b_n = b_n/l_{nn}$
--

Y el de sustitución hacia atrás:

Para $i = n - 1, 1$ Para todo j tal que $u_{ij} \neq 0$ $b_i = b_i - u_{ij} \cdot b_j$
--

El algoritmo de factorización LU anterior presupone que ninguno de los elementos diagonales es nulo en el momento de usarlo como pivote. Teóricamente, para evitar la acumulación inaceptable de errores de redondeo, es preceptivo en el caso general que el pivote tenga el mayor valor posible. En la práctica, es suficiente con permutar entre sí las filas necesarias para que el mayor elemento de la columna que se está eliminando se tome como pivote. La permutación de filas para mejorar la estabilidad numérica de la eliminación gaussiana es una técnica habitual cuando se trata de matrices asimétricas. Sin embargo, se intenta evitar esta técnica en el caso de matrices estructuralmente simétricas, puesto que el intercambio de filas destruye la simetría inicial. Una alternativa simple a la permutación de filas, que respeta la simetría, consiste en utilizar como pivote una matriz diagonal de 2×2 cuando el pivote escalar no es suficientemente grande, lo que equivale a eliminar dos filas/columnas simultáneamente. Los métodos y algoritmos se mantienen iguales, pero las operaciones aritméticas no se refieren ahora a multiplicaciones y sumas entre valores escalares, sino entre matrices de 2×2 y vectores de 2×1 . Los detalles de esta técnica pueden encontrarse en referencias especializadas [8].

Afortunadamente, puede demostrarse que si la matriz es definida positiva, o diagonalmente dominante, la descomposición LU es estable numéricamente si se toman como pivotes los elementos que de forma natural están en la diagonal, por lo que las permutaciones de

filas son superfluas en estos casos. Las matrices de admitancias que se utilizan en análisis de estabilidad o transitorios, los jacobianos de los flujos de cargas, las matrices de ganancia de la estimación de estado, etc., satisfacen generalmente una o ambas propiedades. Por tanto, en lo sucesivo se ignorará el problema de las permutaciones de filas para el mantenimiento de la estabilidad numérica de la factorización LU .

Otra observación extraordinariamente importante sobre el algoritmo de factorización, en el caso de matrices dispersas, se refiere a la creación de nuevos elementos no nulos conforme avanza el proceso. En efecto, considérese el código siguiente, que constituye el núcleo de la descomposición triangular,

$$\begin{aligned}l_{kj} &= l_{kj} - l_{ki} \cdot u_{ij} \\u_{jk} &= u_{jk} - l_{ji} \cdot u_{ik}\end{aligned}$$

Si existen los elementos u_{ij} , u_{ik} , y por tanto sus transpuestos, entonces el elemento u_{jk} , y su transpuesto, serán no nulos, salvo improbable cancelación numérica. Si previamente estos elementos eran nulos, la matriz dispersa pasa a tener dos elementos nuevos, conocidos en la literatura especializada como *fillins*. En sistemas grandes cuyas variables se hayan ordenado arbitrariamente, este fenómeno puede repetirse de forma acumulativa, produciéndose una especie de reacción en cadena que rápidamente llena por completo la parte inferior derecha de la matriz (se remite al lector a los ejemplos de la última sección del Capítulo 3). La aparición de *fillins* complica en cierta medida la manipulación de matrices dispersas, al tener que acomodar elementos nuevos, pero sobre todo aumenta el esfuerzo de cálculo hasta niveles inaceptables. El esfuerzo de cálculo para la factorización de matrices densas es proporcional a n^3 , mientras que para matrices dispersas típicas, ordenadas previamente para reducir el *fillin*, este coste crece algo más que linealmente con n (en ciertos casos se ha determinado empíricamente que es del orden de $n^{1.4}$).

Puesto que la determinación de la secuencia óptima en que deben eliminarse las filas, para minimizar el número de *fillins* creados, es un problema combinatorio, inabordable para sistemas realistas, se han desarrollado estrategias heurísticas pseudo-óptimas que reducen este efecto en la medida de lo posible con un sobre coste reducido. La idea básica en la que se inspiran estos procedimientos es que una fila con pocos elementos no nulos es menos propensa a crear *fillins* que otra fila con muchos elementos, por lo que debe eliminarse con anterioridad. Esta estrategia de ordenación se conoce como algoritmo de grado mínimo, entendiéndose por grado de una fila, o de un nudo en la terminología de grafos, el número de elementos no nulos de dicha fila, exceptuando la diagonal.

Históricamente, estas técnicas se desarrollaron para hacer competitiva la aplicación del método de Newton-Raphson al problema del flujo de cargas, y por ello en este texto se describen e ilustran en el Capítulo 3 [17].

A.3. Árbol de la factorización y vectores dispersos

En numerosas aplicaciones el vector b contiene muy pocos elementos no nulos, es decir, tanto A como b son dispersos. En el caso límite, tan solo el elemento i -ésimo, b_i , es distinto de cero, en cuyo caso podemos expresar b como,

$$b = b_i \cdot e_i$$

donde e_i es el vector unitario respectivo, es decir, la columna i -ésima de la matriz identidad. Consideraremos por simplicidad vectores unitarios, dado que el valor del escalar b_i es irrelevante para nuestro propósito. Posteriormente se generalizará el análisis para vectores con más de un elemento no nulo.

Supongamos en primer lugar que A es una matriz llena, por lo que también lo serán L y U . Ignorando la posibilidad de cancelaciones numéricas perfectas, resulta inmediato comprobar que la aplicación de la eliminación hacia adelante sobre un vector e_i conduce a un vector y en el que *todos* sus elementos y_k , $k \geq i$, son no nulos. De hecho, basta con empezar la eliminación a partir de la fila i , puesto que las primeras $i - 1$ filas involucrarían sólo operaciones con ceros.

Analicemos ahora lo que ocurre cuando A es dispersa, y por tanto también L y U si las ecuaciones se han ordenado adecuadamente. Sea j la fila correspondiente al primer elemento no nulo de la columna i de L (intercambiando fila por columna podemos también referirnos a U , debido a la simetría estructural supuesta). La aplicación del algoritmo de eliminación hacia adelante sobre e_i provoca un nuevo elemento no nulo en la fila j de y . Obsérvese, sin embargo, que los elementos de y comprendidos entre i y j permanecen nulos, y que las columnas de L dentro de ese rango no intervienen en el proceso, a diferencia del caso en que A es densa. Se trata precisamente de desarrollar un mecanismo automático para evitar realizar operaciones sobre estos elementos nulos [14].

Análogamente, el primer elemento no nulo de la columna j de L provoca otro *fillin* en la posición respectiva de y . Continuando este análisis recursivamente alcanzaríamos la última columna en un sistema de ecuaciones completamente acoplado (grafo asociado conexo). Se obtiene así una secuencia de columnas de L (o filas de U) i, j, \dots, n donde cada término de la secuencia es el primer elemento no nulo del anterior. Esta secuencia se conoce como *camino de la factorización* de la fila/columna i , y su obtención resulta inmediata con los esquemas de almacenamiento habituales que dan acceso directo al primer elemento no nulo de cada fila.

Es posible que en la columna i de L existan otros elementos no nulos en filas $k > j$, que crearán también *fillins* en las posiciones respectivas de y . Aunque no resulte evidente a primera vista, puede probarse que dichos *fillins* están ya incluidos en el camino de i definido anteriormente, por lo cual sólo hay que preocuparse del primer elemento no nulo de cada fila a estos efectos. Esto implica también que en el camino de la fila i aparecen necesariamente todas las filas relacionadas directamente con ella (nodos adyacentes en la terminología de grafos).

La unión de los caminos de todas las filas de la matriz, para un sistema conexo, se denomina *árbol de la factorización*. En el caso de un vector disperso compuesto por varios elementos no nulos, las filas estrictamente necesarias durante la eliminación hacia adelante se obtienen barriendo este árbol desde las filas inicialmente no nulas hasta la última fila, común a todos los caminos. Este proceso se denomina eliminación rápida hacia adelante. El árbol de la factorización representa de una forma extremadamente simple las relaciones de precedencia entre filas, que hay que respetar durante los procesos de factorización y eliminación, y encuentra aplicaciones tanto en computación paralela como en modificación y reducción de sistemas de ecuaciones (véanse las siguientes secciones).

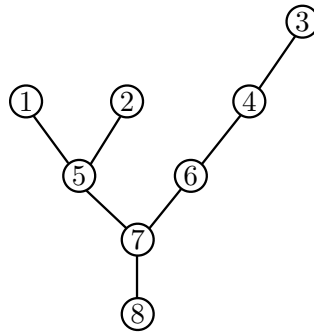


Figura A.1. Árbol de la factorización para el sistema de 8 nudos.

Considérese como ejemplo la siguiente matriz de 8×8 factorizada,

$$\begin{array}{c}
 \begin{array}{cccccccc}
 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\
 1 & \left[\begin{array}{cccccccc}
 x & & & & x & & & & \\
 & x & & & x & & & & \\
 & & & x & x & & x & & \\
 & & & x & x & & x & x & \\
 5 & x & x & & & x & & x & x \\
 6 & & & x & x & & x & o & x \\
 7 & & & & x & x & o & x & x \\
 8 & & & & & x & x & x & x
 \end{array} \right]
 \end{array}
 \end{array}$$

donde los elementos iniciales se representan con el símbolo ‘x’ y los *fillins* con el símbolo ‘o’. El árbol de la factorización resultante se muestra en la Figura A.1.

Para este sistema, un vector cuyos elementos no nulos estén en las posiciones 1 y 2 sólo involucra adicionalmente a las filas 5, 7 y 8, incluidas en el camino de ambas.

Existe otro tipo de aplicaciones de estas técnicas que surge cuando sólo se desean calcular unos cuantos elementos del vector de incógnitas. Supongamos en primer lugar que sólo interesa calcular la incógnita x_i . Cuando A es densa, es preciso calcular previamente *todas* las incógnitas x_k , para $k = i + 1, \dots, n$. Sin embargo, si A y por tanto U es dispersa, es fácil ver que el cálculo de x_i requiere obtener previamente sólo aquellas x_k tales que k pertenece al camino de la factorización de i , en este caso recorrido en sentido contrario. A este proceso se le denomina sustitución rápida hacia atrás. Si se desean calcular varias incógnitas, entonces las incógnitas adicionales necesarias se obtienen barriando el árbol de la factorización desde la última fila hasta alcanzar las filas deseadas en sentido ascendente.

En el sistema de 8 ecuaciones anterior, si deseamos obtener x_1 será preciso previamente calcular x_5, x_7 y x_8 , pero no las restantes incógnitas. Si además de x_1 se buscara x_4 , tal como indica el árbol, sería necesario calcular también x_6 . Lógicamente, un sistema tan pequeño no permite hacerse una idea clara del ahorro potencial que se consigue explotando el carácter disperso de los vectores mediante el árbol de la factorización. Sin embargo, baste decir que para un sistema de varios miles de variables, el número medio de filas involucradas en el camino de un vector unitario no excede típicamente de dos o tres decenas.

Los procesos de eliminación o sustitución rápida descritos anteriormente se conocen también con las siglas FF/FB utilizadas para avance/retroceso rápido en los reproductores de música.

Resulta evidente que la ordenación adoptada para el proceso de factorización afecta a la forma del árbol de la factorización y a la longitud media de los caminos. Por tanto, también condiciona el esfuerzo de cálculo en aplicaciones donde intervienen vectores dispersos. Lo ideal sería conseguir árboles con muchas ramas y con poca profundidad (es decir, arbustos más que cipreses), pero esta posibilidad está limitada por la estructura del sistema que se está resolviendo, el nivel de mallado, etc. Como hemos visto anteriormente, en el camino de una fila aparecen más tarde o más temprano todas las filas directamente relacionadas con ella. Consecuentemente, la estrategia heurística de mínimo grado utilizada para minimizar el *fillin* de L y U producirá en general resultados aceptables desde el punto de vista del camino de la factorización. Sin embargo, esto no siempre es así, y en cualquier caso el algoritmo de mínimo grado ofrece grados de libertad que pueden aprovecharse para mejorar el aspecto del árbol sin empeorar el *fillin* [10, 5]. Por ejemplo, una matriz tridiagonal está óptimamente ordenada desde el punto de vista de la factorización, pero su árbol coincide con el de una matriz densa, es decir, es el peor posible. Una simple modificación del algoritmo de ordenación para que, en caso de empate en el grado, dé preferencia a filas no relacionadas con las que se han eliminado previamente, disminuye notablemente la profundidad del árbol sin añadir *fillins*. Esta técnica se ha usado para ordenar las 8 ecuaciones del sistema anterior.

A.4. Inversa dispersa

La manera más rápida de calcular elementos individuales, arbitrariamente elegidos, de la inversa de una matriz es mediante operaciones de tipo FF/FB sobre vectores unitarios.

Si se trata de obtener columnas completas de la inversa, éstas se pueden calcular en cualquier orden mediante operaciones FF sobre vectores unitarios seguidas de sustitución hacia atrás completa. Ahora bien, cuando la matriz es simétrica, el número de operaciones se reduce casi a la mitad si se trabaja conceptualmente sólo con un triángulo (superior o inferior) de la inversa, en cuyo caso no se necesita el proceso FF pero hay que seguir un orden. Se obtiene el triángulo superior comenzando con la última columna y progresando secuencialmente hasta la primera. Los elementos del triángulo inferior que se necesitan en cada proceso de sustitución hacia atrás se toman de la parte ya calculada del triángulo superior.

Se denomina *inversa dispersa* al subconjunto de la inversa cuyo patrón de elementos no nulos coincide con el de los factores LU de la matriz original, incluyendo los diagonales. Este subconjunto, o buena parte de él, se necesita en algunas aplicaciones de análisis de sistemas de potencia (cortocircuitos, estimación de estado, contingencias, etc.) y puede obtenerse con un mínimo número de operaciones aritméticas sin tener que calcular ningún otro elemento [13]. El esfuerzo computacional del algoritmo de la inversa dispersa partiendo de la matriz ya factorizada crece linealmente con el número de elementos no nulos. Usualmente se requiere la variante de matrices simétricas, que es la única considerada aquí.

Como casi todos los procedimientos descritos en este apéndice, la inversa dispersa puede obtenerse por filas o por columnas con el mismo coste. En la versión por columnas, el

algoritmo calcula conceptualmente el triángulo superior de la inversa dispersa, comenzando por la última columna y progresando hasta la primera. Cada elemento de cada columna se obtiene por sustitución hacia atrás convencional, comenzando con el de la diagonal. En cada paso, todos los elementos involucrados han sido obtenidos previamente. Como consecuencia de la simetría, los elementos necesarios debajo de la diagonal se toman de sus transpuestos, obtenidos en la fila respectiva de columnas anteriores. Para el almacenamiento de la inversa dispersa se utilizan los mismos punteros que en los factores LU .

Un pseudo-código matlab del algoritmo de la inversa dispersa para matrices simétricas se muestra a continuación (se asume que las matrices L y D están disponibles):

```
for i=n:-1:1
  [J,I]=find(L(i+1:n,i));
  J=J+i;
  for jj=1:length(J)
    j=J(jj);
    Z(j,i)=-sum(Z(i+1:j,j).*L(i+1:j,i));
    Z(i,j)=Z(j,i);
  end
  Z(i,i)=1/D(i,i)-sum(Z(i+1:n,i).*L(i+1:n,i));
end
```

Como puede observarse, el paso crítico involucra el producto interior de columnas dispersas de Z y L . La siguiente figura ilustra la secuencia de cálculo de elementos de la inversa dispersa para una matriz de 20×20 .

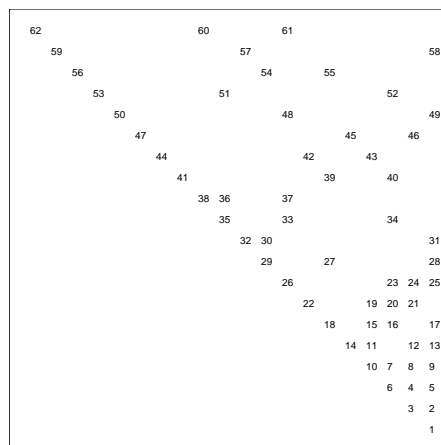


Figura A.2. Secuencia de cálculo de elementos de la inversa dispersa.

La secuencia mostrada es sólo una de las muchas posibles, puesto que la inversa dispersa puede calcularse siguiendo cualquier secuencia que respete las precedencias del árbol de la factorización. Merece la pena resaltar que, basándose en este mismo árbol, los cálculos pueden extenderse para incluir otros elementos de la inversa ajenos a la inversa dispersa,

que pueden requerirse en ciertas aplicaciones [6]. No obstante, para obtener la mayoría de estos elementos se necesitan elementos adicionales no deseados. El árbol puede también utilizarse para obtener partes concretas de la inversa dispersa. Para ello, debe tenerse en cuenta que el cálculo de una determinada columna requiere solamente que se hayan calculado previamente las columnas que le preceden en su camino de la factorización.

A.5. Modificación de la matriz de coeficientes

El paso más costoso en la solución de un sistema lineal disperso es generalmente la ordenación y factorización de la matriz. Cuando una matriz previamente factorizada se modifica, resulta normalmente ineficiente realizar de nuevo una factorización completa. Existen dos alternativas mejores para incorporar el efecto de los cambios en la matriz: (1) modificar los factores o (2) modificar la solución. En esta sección se discute la modificación de los factores LU .

Dentro de la categoría de modificación de factores existen dos variantes: una que *recalcula* una parte seleccionada de los factores, y otra que *actualiza* los valores antiguos de los mismos. La modificación puede referirse tanto a alteración de los valores numéricos como a la topología de la matriz original. Los cambios topológicos a su vez pueden dar lugar a la creación o eliminación de elementos. Finalmente, las modificaciones matriciales pueden ser temporales o permanentes. Las modificaciones temporales toman como partida un caso base y se aplican a un número limitado de soluciones, después de las cuales se vuelve a la situación base. Las modificaciones permanentes no revierten al caso base y se aplican a un número indefinido de soluciones posteriores. En general, para cambios permanentes es más eficiente modificar la solución en lugar de los factores. Sin embargo, si los cambios deben aplicarse a más de una solución, puede ser preferible la modificación de factores. El punto exacto en que una metodología es mejor que otra no puede establecerse mediante reglas simples, puesto que depende del problema concreto, pero más adelante se darán algunas guías.

La observación clave es que, cuando una matriz dispersa factorizada se modifica, sólo un subconjunto de los elementos de sus factores se ve afectado por la modificación. Si se modifica la fila k , la modificación afecta sólo a aquellas filas del camino de la factorización de k , es decir, las mismas que se verían involucradas en el proceso FF del vector unitario respectivo. Si se modifican varias filas, entonces se ven afectadas todas las filas del subárbol obtenido como unión de los caminos individuales.

Como se indicó anteriormente, existen dos categorías de métodos para modificar los factores de una matriz dispersa: *refactorización parcial*, donde un subconjunto de factores se recalcula partiendo prácticamente de cero, y *actualización de factores*, donde los valores de los factores calculados previamente simplemente se actualizan [7]. La actualización de factores tiende a ser más eficiente si el número de elementos modificados es pequeño, pero no necesariamente.

A.5.1. Refactorización parcial

Por simplicidad, sólo se considerarán aquí los cambios que afectan a los valores numéricos, pero no a la estructura de la matriz. En ocasiones, el valor numérico resultante tras la

modificación es nulo, lo cual debería reflejarse en dicha estructura. Sin embargo, esta posibilidad será ignorada ya que su aprovechamiento no suele acarrear ventajas por la lógica adicional necesaria.

Los pasos de la refactorización parcial son los siguientes:

1. Hacer los cambios en las filas $i, j, k \dots$ de la matriz original.
2. Encontrar el camino conjunto de las filas $i, j, k \dots$.
3. Sustituir las filas $i, j, k \dots$ de los factores con las filas modificadas $i, j, k \dots$ de la matriz.
4. Reemplazar las restantes filas de los factores incluidas en el camino con los valores no modificados de la matriz original.
5. Repetir la factorización de las filas del camino respetando las precedencias del mismo.

Una posible implementación en pseudo-código matlab es la siguiente:

```
while ~isempty(c)
    k=c(1);    c=c(2:length(c));
    [iDum,iSet,iVal]=find(A(k,1:k-1));
    while ~isempty(iSet)
        i=iSet(1); iSet=setdiff(iSet,i);
        if ismember(i,cpath),
            A(k,i)=A(k,i)/A(i,i);
        end
        [jDum,jSet,jVal]=find(A(i,i+1:n));
        jSet=jSet+i;
        jSet=unique(intersect(jSet,cpath));
        while ~isempty(jSet)
            j=jSet(1);    jSet=setdiff(jSet,j);
            if j<k, iSet=unique(union(iSet,j)); end
            A(k,j)=A(k,j)-A(k,i)*A(i,j);
        end
    end
end
end
```

Este algoritmo reemplazará los valores de A con los valores correspondientes de los nuevos factores, pero sólo para aquellas filas especificadas en el camino c , que debe corresponderse con el camino conjunto de las filas modificadas de A . Este camino conjunto se obtiene fácilmente como subconjunto del árbol de la factorización.

A.5.2. Actualización de factores LU

La refactorización parcial calcula nuevos factores en base a los valores originales de la matriz. La actualización de factores, por el contrario, modifica los factores existentes sin referirse a la matriz original pero, salvo errores de redondeo, el resultado es idéntico. La

diferencia estriba en el esfuerzo de cálculo, ya que el camino involucrado es también el mismo. El algoritmo puede generalizarse para cualquier número y tipo de cambios en la matriz, pero la versión más utilizada, y la discutida aquí, se refiere a modificaciones de rango 1. Mediante aplicación repetida de estas modificaciones elementales puede realizarse cualquier modificación más compleja. Las ventajas de la modificación de rango 1 son su simplicidad, el uso de un solo vector auxiliar de trabajo en el caso simétrico, y el hecho de que muchas aplicaciones prácticas requieren sólo este tipo de modificaciones.

Este procedimiento requiere que los cambios en la matriz se expresen como producto de matrices. En el caso de modificaciones de rango 1, los cambios en A deben expresarse como:

$$A' = A + B r C^T \quad (\text{A.4})$$

donde A es una matriz de $n \times n$, r es un escalar para cambios de rango 1, y B, C son n -vectores topológicos que definen los elementos de A afectados por los cambios. Usualmente estos vectores son nulos salvo uno o dos elementos que valen $+1$ o -1 .

Para una matriz estructuralmente simétrica factorizada como LDU , el algoritmo de actualización de factores de rango 1 se compone de una etapa preparatoria seguida de los pasos de cálculo propiamente dichos:

Etapa preparatoria. Se compone de los siguientes pasos:

- Establecer los vectores dispersos B y C .
- Encontrar el camino compuesto de los elementos no nulos de B y C .
- Sea $\beta \leftarrow r$ (el escalar β es modificado por el algoritmo).

Etapa de cálculo. Para todo i del camino:

1. Preparar la fila i -ésima:

$$\begin{aligned} d_{ii} &\leftarrow d_{ii} + B_i \beta C_i \\ C_1 &\leftarrow \beta B_i \\ C_2 &\leftarrow \beta C_i \end{aligned}$$

2. Procesar todos los elementos $u_{ij} \neq 0$, $i \neq j$. Para cada j procesar todos los $u_{ik} \neq 0$, $i \neq k$. Para dichos elementos hacer:

$$\begin{aligned} B_j &\leftarrow B_j - B_i \ell_{ki} \\ C_j &\leftarrow C_j - C_i u_{ik} \\ u_{ik} &\leftarrow u_{ik} - C_1 B_j / d_{ii} \\ \ell_{ki} &\leftarrow \ell_{ki} - C_2 C_j / d_{ii} \end{aligned}$$

3. Actualizar β :

$$\beta \leftarrow \beta - C_1 C_2 / d_{ii}$$

Los vectores de trabajo B y C sólo se llenan durante la actualización en las posiciones correspondientes al camino. Por tanto, sólo hay que poner a cero estas posiciones para cada actualización, lo cual se hace a la vez que se busca el camino.

La actualización de factores puede generalizarse para modificaciones de rango m haciendo que B y C sean matrices de conexión de $n \times m$ y sustituyendo el escalar β por una matriz de $m \times m$. El camino es entonces el camino conjunto de todos los elementos no nulos de B y C . La principal diferencia respecto a una secuencia de cambios de rango 1 es que la actualización se completa recorriendo una sola vez el camino compuesto. Las operaciones aritméticas sobre los factores son sin embargo las mismas que si se realizasen recorridos repetidos del camino. Lógicamente, se necesitan matrices de trabajo de $m \times n$ en lugar de un solo vector columna.

Una ventaja de la actualización de factores sobre la refactorización parcial es que no se requiere acceso a la matriz original, que en algunas aplicaciones no se almacena.

A.6. Reducciones y equivalentes

Otro tópico avanzado de interés es la reducción de matrices dispersas. Para los desarrollos que siguen, el conjunto de nudos se divide en nudos retenidos r y nudos eliminados e . Aunque a menudo estos dos subconjuntos se refieren a dos subredes distintas, realmente no existen restricciones topológicas sobre los mismos. El conjunto r puede subdividirse en nudos frontera b y nudos interiores i . Los nudos frontera están conectados tanto a nudos de e como a nudos de i . Por otro lado, los nudos de e no están conectados a los de i , y viceversa. El subconjunto i no juega ningún papel en la reducción, pero a menudo se manipula junto al conjunto b . En algunas aplicaciones, el conjunto i es vacío y el conjunto r está compuesto sólo por b .

En base a dichos conjuntos, la ecuación de nudos puede subdividirse en:

$$\begin{bmatrix} Y_{ee} & Y_{eb} & 0 \\ Y_{be} & Y_{bb} & Y_{bi} \\ 0 & Y_{ib} & Y_{ii} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_e \\ V_b \\ V_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_e \\ I_b \\ I_i \end{bmatrix} \quad (\text{A.5})$$

La eliminación del conjunto e da

$$(Y_{bb} - Y_{be}Y_{ee}^{-1}Y_{eb})V_b + Y_{bi}V_i = I_b - Y_{be}Y_{ee}^{-1}I_e \quad (\text{A.6})$$

que, usando nuevos símbolos, puede escribirse

$$Y'_{bb}V_b + Y_{bi}V_i = I'_b \quad (\text{A.7})$$

La matriz de admitancias reducida, Y_{eq} , y las inyecciones de corriente equivalentes, I_{eq} , son

$$Y_{eq} = -Y_{be}Y_{ee}^{-1}Y_{eb} \quad (\text{A.8})$$

$$I_{eq} = -Y_{be}Y_{ee}^{-1}I_e \quad (\text{A.9})$$

La reducción no se realiza invirtiendo explícitamente Y_{ee} sino eliminando un nudo cada vez. Realmente, la reducción no es más que una factorización ordinaria limitada a la

eliminación del conjunto e . Las operaciones que eliminan e modifican la submatriz Y_{bb} convirtiéndola en Y_{eq} , como indica (A.8). Si se necesitan también las inyecciones equivalentes, I_{eq} , éstas pueden obtenerse por eliminación hacia adelante parcial con los factores del equivalente, como muestra (A.9).

Las técnicas para calcular equivalentes difieren mucho dependiendo de que éstos sean grandes o pequeños. Un equivalente grande surge cuando se quiere retener una gran proporción de la red (reducción limitada). La noción de equivalente adaptativo explica cómo se puede obtener un equivalente incluso cuando la matriz original ha sido reemplazada por sus factores. Los equivalentes pequeños, finalmente, surgen cuando la red se reduce a unos pocos nudos (el equivalente Thevenin o Norton sería el caso límite).

A.6.1. Equivalentes grandes

Usualmente, el objetivo de un equivalente grande es reducir el coste computacional de trabajar repetidas veces con un sistema reduciendo la parte que se retiene. Para ello, es necesario tener en cuenta el aumento de elementos no nulos en el sistema retenido, ya que la eliminación de e crea nuevas ramas equivalentes entre nudos de b . A menos que se tomen medidas al seleccionar e (o r), la reducción del número de nudos puede quedar más que compensada con el aumento del número de elementos no nulos del sistema reducido, con lo que no se gana nada.

Si e representa una subred conexa, su eliminación creará ramas equivalentes (nuevos elementos no nulos) entre cada pareja posible de nudos de b . Si, por el contrario, e consiste en dos o más subredes conexas, la eliminación de cada subred sólo creará nuevas ramas entre las parejas de nudos del subconjunto de b al cual está conectada dicha subred. Es posible que, transfiriendo algunos nudos del conjunto e , inicialmente seleccionado, al conjunto r , el sistema eliminado quede dividido en varias subredes disconexas entre sí. Este reajuste de nudos, que reduce la densidad del equivalente, puede usarse de varias maneras en reducciones de matrices dispersas [16].

Una vez que e ha sido fijado, el *fillin* del conjunto b queda completamente determinado con independencia del orden que se siga al eliminar los nudos de e . No obstante, el almacenamiento intermedio necesario y el esfuerzo de cálculo sí pueden reducirse con técnicas apropiadas.

El número de ramas de un equivalente grande puede también reducirse descartando aquéllas cuya admitancia sea menor que un umbral, lo que puede hacerse durante o después de la reducción. En el primer caso, la ordenación y reducción deberían hacerse simultáneamente. Aunque esto representa una aproximación, su efecto sobre la precisión puede controlarse y ser aceptable en ciertas aplicaciones. El problema consiste en encontrar el punto de equilibrio adecuado entre precisión y velocidad de solución.

A.6.2. Reducción adaptativa

En lugar de obtener un solo equivalente grande para muchos problemas diferentes, resulta eficiente en algunas aplicaciones calcular equivalentes que se adaptan a los requisitos de cada problema individual, o incluso de las diferentes etapas de la solución de un mismo problema. La reducción adaptativa es un procedimiento para calcular equivalentes de una

matriz recuperando los resultados de sus factores [15, 9], lo cual es posible porque algunas de las operaciones necesarias para la reducción se realizan durante la factorización. Obsérvese que si los factores L , D y U se multiplican de nuevo se reconstruye la matriz original.

Una observación clave para la reducción adaptativa es que los nudos de cualquier camino, simple o compuesto, que finaliza en la última fila del sistema de ecuaciones pueden ser reenumerados en último lugar sin consecuencias para el proceso de factorización. Eso significa que, una vez formado un camino compuesto, todos sus nudos pueden colocarse en la parte inferior derecha de la matriz sin que se vean afectados los valores numéricos de los factores ni el patrón de elementos no nulos. Por otra parte, como se explicó anteriormente, la reducción equivale a una factorización que se detiene al llegar a los nudos retenidos. Ambas ideas pueden combinarse, haciendo que el conjunto de nudos retenidos contenga no sólo aquellos en los que realmente estamos interesados, sino también los que pertenezcan al camino conjunto de los mismos. De ese modo, la eliminación de los nudos externos no provoca más elementos nuevos en la matriz que los contemplados en su tabla de factores. Esta propiedad puede explotarse para recuperar selectivamente los valores originales de una matriz a partir de sus factores, modificar los valores recuperados, y refactorizar otra vez la porción recuperada.

Para explicar este concepto, expresamos una matriz en términos de sus factores como sigue:

$$\begin{bmatrix} Y_{ee} & Y_{eb} \\ Y_{be} & Y_{bb} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L_{ee} & \\ & L_{bb} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_{ee} & U_{eb} \\ & U_{bb} \end{bmatrix} \quad (\text{A.10})$$

Igualando el equivalente de (A.8) con las submatrices de (A.10) da,

$$\begin{aligned} Y_{be}Y_{ee}^{-1}Y_{eb} &= (L_{be}U_{ee})(L_{ee}U_{ee})^{-1}(L_{ee}U_{eb}) \\ &= L_{be}U_{ee}U_{ee}^{-1}L_{ee}^{-1}L_{ee}U_{eb} \\ &= L_{be}U_{eb} \end{aligned} \quad (\text{A.11})$$

Un examen de (A.11) muestra que el equivalente para el conjunto b puede calcularse mediante operaciones FF parciales sobre las columnas de U correspondientes al conjunto e . En la operación FF parcial sobre cada una de tales columnas, pueden saltarse todas las operaciones salvo las de las filas de b . En las columnas de L usadas para el FF parcial, todas las operaciones excepto aquéllas correspondientes a b pueden omitirse. Dicho de otro modo, sólo las operaciones que involucran directamente al conjunto b de (A.5) necesitan realizarse para calcular la reducción adaptativa de una matriz factorizada. Con la lógica adecuada, una reducción adaptativa puede obtenerse varias veces más rápido que un equivalente partiendo de cero.

La idea se puede implementar de varias formas. Un equivalente calculado mediante reducción adaptativa es siempre disperso porque no tiene *fillins* que no estuviesen presentes en la factorización original. El inconveniente, que tiende a contrarrestar esta ventaja, es que los nudos deseados tienen que ser aumentados con los (a veces muchos) nudos adicionales que completan el camino. Usualmente, esto conduce a un equivalente más grande de lo necesario.

A.6.3. Equivalentes pequeños

Con frecuencia, surge la necesidad de equivalentes consistentes en la reducción a sólo unos pocos nudos, y los métodos anteriores concebidos para equivalentes grandes pueden ser muy ineficientes (por ejemplo, el método de reducción adaptativa puede involucrar a cientos de nudos aunque sólo sea preciso retener 3). Estos equivalentes pequeños se calculan más eficientemente mediante operaciones FF/FB sobre vectores unitarios. Estas operaciones generan el equivalente inverso, que debe por tanto invertirse para calcular el equivalente deseado. Existen dos esquemas. Un ejemplo del primero se describe para una matriz estructuralmente simétrica, donde los pasos para calcular un equivalente de 3×3 para cualesquiera nudos i , j , y k son los siguientes:

1. Hallar el camino compuesto de i , j , k .
2. Formar el vector unitario i , y realizar el FF sobre el camino de i .
3. Realizar FB sobre el camino compuesto.
4. Salvar los elementos de las posiciones i , j , k obtenidos mediante el FB. Poner a cero el camino compuesto para la siguiente iteración.
5. Repetir los pasos (2) hasta (4) para los nudos j y k .

Los tres conjuntos de elementos obtenidos en i , j y k como resultado de los tres ciclos constituyen la inversa de 3×3 del equivalente. Si éste se necesita explícitamente, puede obtenerse mediante inversión, aunque en algunas aplicaciones puede usarse directamente tal cual o es suficiente con su factorización. Este ejemplo puede generalizarse fácilmente para equivalentes de cualquier tamaño. También merece la pena destacar que, para una matriz simétrica, algunas operaciones del FB pueden ahorrarse calculando sólo la mitad triangular de la inversa del equivalente.

Una segunda posibilidad (más eficiente para matrices simétricas) es como sigue:

1. Encontrar el camino de i .
2. Formar el vector unitario i , y realizar un FF sobre el camino omitiendo la operación diagonal. Sea F_i el vector resultante de dicha operación, el cual se almacena.
3. Dividir F_i por d_{ii} para obtener \tilde{F}_i .
4. Repetir los pasos (1)–(3) para j y k .
5. Calcular los únicos elementos diferentes del equivalente invertido de 3×3 mediante las operaciones siguientes con los seis vectores dispersos de los pasos (2) y (3):

$$\begin{aligned} z_{ii} &= \tilde{F}_i^T F_i \\ z_{ji} &= \tilde{F}_j^T F_i & z_{jj} &= \tilde{F}_j^T F_j \\ z_{ki} &= \tilde{F}_k^T F_i & z_{kj} &= \tilde{F}_k^T F_j & z_{kk} &= \tilde{F}_k^T F_k \end{aligned}$$

Este esquema es más rápido para matrices simétricas, porque los seis productos entre vectores dispersos requieren usualmente menos esfuerzo que las tres soluciones FB del primer esquema, a lo cual contribuyen esquemas de ordenación que reduzcan la longitud media del

camino. Conforme el tamaño del equivalente crece, la ventaja relativa del segundo método disminuye. Esto es debido a que el esfuerzo necesario para los productos entre vectores crece con el cuadrado del tamaño del equivalente, mientras que el esfuerzo de inversión crece con el cubo.

Cualquiera de los dos esquemas es práctico sólo hasta un cierto tamaño de equivalente, resultando más eficiente la técnica de equivalentes grandes a partir de un umbral. Existe, no obstante, un amplio rango de tamaños en el cual la elección de uno u otro método resulta irrelevante. Con carácter general, las matrices sólo deberían reducirse hasta que su carácter disperso comience a deteriorarse o, alternativamente, debería buscarse la reducción de matrices que sean relativamente pequeñas.

A.7. Compensación

La compensación es una técnica para obtener la solución del sistema de ecuaciones de una red, que ha cambiado localmente, sin modificar los factores de la matriz de coeficientes del sistema original [1]. La técnica se conoce también como el lema de la inversión de matrices [12] o como modificaciones de la inversa de rango 1 [11], entre otros nombres.

Supongamos que queremos resolver por compensación $(Y + \Delta Y)V = I$, donde

$$\Delta Y = BRC^T$$

siendo R un escalar o una matriz de rango pequeño.

La compensación puede organizarse en dos fases: la preparatoria y la de solución [2]. La fase preparatoria consiste en encontrar una matriz equivalente pequeña Y_{eq} , y un vector reducido I_{eq} , que incluyen todos los elementos que van a ser cambiados. Los cambios en la matriz se realizan en su lugar sobre la matriz equivalente Y_{eq} y el vector I_{eq} , lo que genera una nueva matriz Y_{mod} y vector I_{mod} . El vector solución de este pequeño problema se aplica entonces a la red reducida sin modificar para obtener

$$\hat{I}_{eq} = Y_{eq} V_{mod} \quad (\text{A.12})$$

y, como consecuencia, el vector de compensación de pequeña dimensión ΔI_{eq} :

$$\Delta I_{eq} = I_{eq} - \hat{I}_{eq}$$

Este vector, a su vez, se expande en un vector de compensación de tamaño completo pero disperso, ΔI , completando con ceros las posiciones necesarias (utilizando técnicas de matrices dispersas basta con establecer los índices adecuados). Finalmente, ΔI se aplica al sistema original (sin modificar) de dimensión completa. Los resultados son los mismos que si se hubiera modificado la red, se hubiesen construido la nueva matriz Y y el vector de inyección I , y se hubiese resuelto el sistema resultante.

En la fase de solución, el vector ΔI se utiliza para compensar la solución del caso base de modo que se reflejen los cambios en la red. En la práctica, dicha compensación puede hacerse en tres momentos distintos, conduciendo a tres variantes:

1. **Pre-compensación:** El vector ΔI se añade al vector de inyección de corrientes del caso base. A continuación, se realiza una solución completa con este vector modificado para obtener el vector de tensiones compensado.
2. **Compensación intermedia:** Se aplican procedimientos FF sobre cada vector ΔI disperso. Estos resultados se suman al vector intermedio obtenido tras la eliminación hacia adelante del caso base. Finalmente, el vector solución modificado se obtiene mediante sustitución hacia atrás completa.
3. **Post-compensación:** Mediante FF y sustitución hacia atrás sobre ΔI se obtiene un vector ΔV , el cual se añade a la solución del caso base V para obtener la solución compensada.

La variante más utilizada es la post-compensación, aunque la compensación intermedia es con frecuencia la más rápida.

Una variante interesante de la fase preparatoria expresa los cambios en la red mediante matrices de rango mínimo, lo que a menudo ahorra operaciones [4]. Sin embargo, en muchos casos prácticos, esta formulación equivale a las convencionales, en las que el tamaño de la modificación coincide con el número de nudos o ramas.

Supongamos que un conjunto de cambios afecta a los nudos i , j y k , y que no hay cambios en el vector I . En la variante orientada a nudos los pasos anteriores son:

Fase preparatoria: Se compone de los siguientes pasos:

1. Calcular el equivalente pequeño desde los nudos i , j y k , como se explicó en la Sección A.6.3 para obtener la inversa de 3×3 del equivalente, Z_{eq} (guardar los vectores que resultan tras el FF para ser usados en la fase de solución en la versión de compensación intermedia).
2. Invertir Z_{eq} para obtener Y_{eq} , el equivalente del caso base.
3. Obtener las corrientes del equivalente para el caso base, I_{eq} , de $I_{eq} = Y_{eq}V$. Los tres valores del vector V son los del caso base.
4. Modificar Y_{eq} según los cambios de la red para obtener Y_{mod} .
5. Calcular V_{mod} de $Y_{mod}V_{mod} = I_{eq}$.
6. Obtener $I_{mod} = Y_{eq}V_{mod}$.
7. Encontrar las tres corrientes de compensación, ΔI_{eq} , de $\Delta I_{eq} = I_{mod} - I_{eq}$.
8. Expresar ΔI_{eq} como vector disperso de dimensión completa ΔI .

Pre-compensación: Los pasos para la pre-compensación son:

- a. Sumar ΔI al vector independiente I previamente almacenado.
- b. Realizar la sustitución adelante/atrás ordinaria sobre el vector resultante del paso anterior para obtener el vector de tensiones compensado.

Compensación intermedia: Los pasos para esta variante son:

- a. Multiplicar cada uno de los tres vectores resultantes tras los procesos FF del paso (1) por sus corrientes de compensación individuales del paso (6).
- b. Añadir los tres vectores de (a) al vector que resulta tras la eliminación hacia adelante del caso base.
- c. Realizar la sustitución hacia atrás para obtener las tensiones modificadas.

Post-compensación: Se compone de los siguientes pasos:

- a. Realizar un FF seguido de sustitución hacia atrás completa sobre el vector disperso ΔI del paso (7), para obtener el vector de tensiones compensadoras.
- b. Añadir el vector calculado anteriormente al vector de tensiones del caso base para obtener las tensiones modificadas.

La inversa del equivalente obtenida en el paso 1 de la fase preparatoria puede obtenerse mediante operaciones FF/FB sobre los vectores de conectividad, para cada conjunto de cambios en la matriz original. En aplicaciones que hacen uso intensivo de compensación, puede ser más eficiente calcular todos los elementos de la inversa que se prevén anticipadamente como parte de los cálculos iniciales. A menudo, estos elementos necesarios están en la inversa dispersa.

Puede evitarse el cálculo explícito de la inversa del equivalente mediante factorización triangular. Esto resulta importante cuando el equivalente es grande. Los cambios sobre el vector independiente de inyecciones, que eventualmente vengán aparejados a los cambios topológicos, pueden tenerse en cuenta en la fase preparatoria añadiéndolos a las corrientes del equivalente para el caso base.

A.8. Factorización QR y rotaciones de Givens

Cualquier matriz A que no sea singular puede también descomponerse como producto de una matriz ortogonal Q y una matriz triangular superior R ,¹ de tal forma que $A = QR$. La importancia de esta descomposición es la siguiente: por definición, una matriz es ortogonal cuando $Q^{-1} = Q^T$. Por tanto, resolver un sistema de ecuaciones en base a la idea de usar una matriz ortogonal se traduce en los siguientes pasos:

1. Factorización ortogonal de la matriz de coeficientes:

$$A = QR$$

2. Obtención del vector intermedio y por multiplicación por Q^T :

$$y = Q^T b$$

¹ Esta matriz R no es la misma que la matriz U en la descomposición LU excepto en casos muy especiales.

3. Obtención de x por sustitución hacia atrás:

$$Rx = y \quad \Longrightarrow \quad x_n \cdot \dots \cdot x_1$$

La gran ventaja del uso de matrices ortogonales es que en general el método es mucho más robusto numéricamente que el método de eliminación gaussiana.² La desventaja del método es que en general requiere más cómputo y más *fillin*.

El paso más difícil de este método es la factorización misma. Hay varios métodos para la factorización ortogonal, pero el más compatible con matrices dispersas es el método de Givens. El método de Givens está basado en la construcción de una matriz ortogonal elemental diseñada para eliminar precisamente un elemento de la parte triangular inferior de A . Para ilustrar el método, consideremos una matriz de dimensión 2×2 . La matriz de rotación de Givens tiene la forma siguiente:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$$

El objetivo es la eliminación del término a_{21} . La matriz de rotación de Givens capaz de eliminar este término tiene la forma siguiente:

$$Q = \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix}$$

A pesar de tener cuatro términos, esta matriz tiene solamente un grado de libertad: el ángulo θ . Es muy fácil verificar que esta matriz Q es ortogonal de acuerdo a nuestra definición. Solamente hay que comprobar que:

$$\begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

para cualquier valor de θ . El valor específico de θ que resulta en la eliminación del término a_{21} es:

$$\theta = \arctan a_{21}/a_{11}$$

Si se multiplica la matriz A por la matriz Q , el resultado es una matriz triangular superior. Este resultado se generaliza para la eliminación de cualquier elemento a_{ij} de A .

Para el caso de aplicación al caso de matrices de mayor tamaño, la eliminación de los elementos en la parte triangular inferior de A se debe hacer uno por uno. El orden en que se tienen que eliminar estos elementos es por filas o por columnas, comenzando con el primer elemento de la segunda fila, y terminando con el elemento $n - 1$ de la fila n . Dos órdenes de eliminación posibles son:

$$\begin{bmatrix} x & x & x & x & x \\ 1 & x & x & x & x \\ 2 & 3 & x & x & x \\ 4 & 5 & 6 & x & x \\ 7 & 8 & 9 & 10 & x \end{bmatrix} \quad \text{o} \quad \begin{bmatrix} x & x & x & x & x \\ 1 & x & x & x & x \\ 2 & 5 & x & x & x \\ 3 & 6 & 8 & x & x \\ 4 & 7 & 9 & 10 & x \end{bmatrix}$$

² Una segunda gran ventaja es que el método de factorización ortogonal se puede usar con matrices A rectangulares, en cuyo caso el resultado x es la solución a norma mínima del problema.

Generalmente, el orden que se usa con el método de Givens es el orden por filas. Existe otro método, el método de reflexiones de Householder, que es más práctico para la eliminación por columnas, ya que permite la eliminación de columnas completas en un paso.

El resultado del proceso de Givens es una secuencia de τ matrices Q_k que, cuando se aplican a una matriz A , resultan en una matriz triangular superior (τ es el número de elementos no nulos incluyendo el denominado *fillin* intermedio). Es posible multiplicar todas estas matrices Q_k y construir una matriz única $Q = Q_\tau Q_{\tau-1} \cdots Q_1$. Sin embargo, esto es una mala estrategia para sistemas de gran dimensión. Cada una de las matrices Q_k se puede representar con tres números: las coordenadas i y j del elemento que se desea eliminar, y el valor del ángulo θ . Por tanto, las τ matrices requieren solamente 3τ elementos para representarse. Pero si se multiplican, generalmente el resultado es una matriz Q que tiene mucho más de τ entradas que no son cero. Aparte de eso, su representación no se puede interpretar tan elegantemente en términos de un ángulo de rotación θ . Por tanto, no se recomienda nunca construir la matriz combinada Q en forma explícita, a pesar de que esta matriz es también ortogonal (un producto de matrices ortogonales es siempre ortogonal).

Otra observación muy importante se refiere a la estructura de la matriz triangular superior R que resulta de este proceso. Para ilustrar el concepto y el problema, consideremos la siguiente matriz:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & & \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \\ & a_{32} & a_{33} & \end{bmatrix}$$

Si se desea hacer una factorización LU ordinaria (eliminación gaussiana), no ocurriría ningún *fillin* en el proceso de factorización. Sin embargo, cuando se desea hacer una factorización QR , apenas se elimine el elemento a_{21} ocurrirá al mismo tiempo un *fillin* en la posición a_{13} . Esto ocurre porque la multiplicación por la matriz Q_1 equivale a añadir un múltiplo de la fila 1 a un múltiplo de la fila 2, y al mismo tiempo añadir un múltiplo de la fila 2 a un múltiplo de la fila 1. Como la entrada a_{23} no es cero, esto resultará en un *fillin* en la posición a_{13} . El resultado es que la estructura de R tiende a tener la estructura de “segundos vecinos” de la matriz A (aunque ciertas cancelaciones sí son posibles bajo ciertas condiciones).

Por tanto, para obtener un mejor resultado cuando se hace una factorización QR , uno debe tratar de ordenar las columnas de A de tal forma que ocurra un número mínimo de *fillins* en R . Para ello, se debe usar un método como el de Tinney 2 para reducir el número de *fillins* en la matriz $A^T A$.³

Otro aspecto práctico muy importante para la factorización QR es el ordenamiento de las filas de A , sobre todo para el caso de matrices rectangulares. El ordenamiento de las filas de A no tiene ningún efecto en los *fillins* de R , pero sí tiene mucha importancia para el número de *fillins* intermedios que ocurren durante el proceso de factorización.

³ Se usa $A^T A$ y no A por dos motivos. Primero, los *fillins* dependen de la estructura de segundos vecinos (esto es, la estructura de $A^T A$), y segundo, de esta forma el método resulta directamente aplicable al caso de matrices rectangulares.

Finalmente, debemos mencionar una variante muy importante del método QR . Se trata del método híbrido (también conocido como el método CSNE, *Corrected Semi-Normal Equations*). Si tomamos nuestras ecuaciones ya factorizadas:

$$QRx = b$$

y las pre-multiplicamos por A^T (acordándonos de que $A^T = R^T Q^T$), el resultado es

$$R^T Q^T QRx = A^T b$$

el cual se reduce a

$$R^T Rx = A^T b$$

La conclusión es que, en primer lugar, no se necesita guardar la matriz Q . En segundo lugar, el método se reduce a una multiplicación de la matriz original por el vector b , una sustitución hacia adelante (usando R^T) y una sustitución hacia atrás (usando R).

Bibliografía

- [1] O. Alsaç, B. Stott y W. F. Tinney, "Sparsity-Oriented Compensation Methods for Modified Network Solutions", *IEEE Transactions on Power Apparatus and Systems*, vol. PAS-102, mayo 1983, pp. 1050-1060.
- [2] F. L. Alvarado, S. K. Mong y M. K. Enns, "A Fault Program with Macros, Monitors, and Direct Compensation in Mutual Groups", *IEEE Transactions on Power Apparatus and Systems*, vol. PAS-104(5), mayo 1985, pp. 1109-1120.
- [3] F. L. Alvarado, W. F. Tinney y M. K. Enns, "Sparsity in Large-Scale Network Computation", *Advances in Electric Power and Energy Conversion System Dynamics and Control* (C. T. Leonides, ed.), Control and Dynamic Systems, vol. 41, Academic Press, 1991, Part 1, pp. 207-272.
- [4] R. A. M. van Amerongen, "A Rank-Oriented Setup for the Compensation Algorithm", *IEEE Transactions on Power Systems*, vol. 5(1), febrero 1990, pp. 283-288.
- [5] R. Betancourt, "An Efficient Heuristic Ordering Algorithm for Partial Matrix Refactorization", *IEEE Transactions on Power Systems*, vol. 3(3), agosto 1988, pp. 1181-1187.
- [6] R. Betancourt y F. L. Alvarado, "Parallel Inversion of Sparse Matrices", *IEEE Transactions on Power Systems*, vol. 1(1), febrero 1986, pp. 74-81.
- [7] S. M. Chan y V. Brandwajn, "Partial Matrix Refactorization", *IEEE Transactions on Power Systems*, vol. 1(1), febrero 1986, pp. 193-200.
- [8] I. S. Duff, A. Erisman y J. Reid, *Direct Methods for Sparse Matrices*, Clarendon Press, 1986.
- [9] M. K. Enns y J. J. Quada, "Sparsity-Enhanced Network Reduction for Fault Studies", *IEEE Transactions on Power Systems*, vol. 6(2), mayo 1991, pp. 613-621.
- [10] A. Gómez y L. G. Franquelo, "Node Ordering Algorithms for Sparse Vector Method Improvement", *IEEE Transactions on Power Systems*, vol. 3(1), febrero 1988, pp. 73-79.
- [11] Householder, *The Theory of Matrices in Numerical Analysis*, Dover, 1974.
- [12] A. P. Sage y J. L. Melsa, *Estimation Theory with Applications to Communications and Control*, McGraw-Hill, 1971.
- [13] K. Takahashi, J. Fagan y M.S. Chen, "Formation of a Sparse Bus Impedance Matrix and its Application to Short Circuit Study", PICA Proceedings, mayo 1973, pp. 63-69.

- [14] W. F. Tinney, V. Brandwajn y S. Chan, "Sparse Vector Methods", *IEEE Transactions on Power Apparatus and Systems*, vol. PAS-104(2), febrero 1985, pp. 295-301.
- [15] W. F. Tinney y J. M. Bright, "Adaptive Reductions for Power Flow Equivalents", *IEEE Transactions on Power Systems*, vol. 2(2), mayo 1987, pp. 351-360.
- [16] W. F. Tinney, W. L. Powell y N. M. Peterson, "Sparsity-Oriented Network Reduction", PICA Proceedings, mayo 1973, pp. 384-390.
- [17] W. F. Tinney y J. W. Walker, "Direct Solutions of Sparse Network Equations by Optimally Ordered Triangular Factorization", *Proceedings IEEE*, vol. 55, 1967, pp. 1801-1809.

Apéndice B

Programación matemática

ANTONIO J. CONEJO

En este apéndice se describen los fundamentos de la programación matemática, lineal y no lineal. Desde un punto de vista práctico y de modelado, es conveniente el empleo de entornos de formulación y resolución de problemas de optimización, como GAMS [1] o AMPL [2], que permiten centrar la atención en la formulación del problema y variantes de la misma, y no en su resolución. Sin embargo, para analizar resultados, es conveniente conocer el fundamento de los algoritmos de optimización; por esta razón este apéndice proporciona una visión general de los algoritmos más empleados en la programación matemática. En lo que se refiere al modelado mediante programación matemática es de interés el texto de Castillo y cols. [3].

B.1. Programación lineal

La programación lineal permite formular un amplio número de problemas relacionados con el control, la explotación, la planificación, la economía y la regulación de los sistemas de energía eléctrica. Por otra parte, la solución de un problema de programación lineal (problema lineal), si éste está bien formulado, siempre puede encontrarse; esto es, la programación lineal es un procedimiento de solución robusto. Asimismo, es posible resolver problemas lineales realmente grandes (con decenas de miles de restricciones y decenas de miles de variables) empleando estaciones de trabajo de prestaciones medias en tiempos de cálculo del orden de segundos. Buenas referencias de programación lineal son los textos de Bazaraa y cols., Luenberger, Chvátal y Bradley y cols. [4, 5, 6, 7].

Considérese el siguiente ejemplo:

$$\begin{aligned} & \text{maximizar } 3x_1 + 5x_2 \\ & \text{sujeto a } 3x_1 + 2x_2 \leq 18 \\ & \quad x_1 \leq 4, \quad x_2 \leq 6, \quad x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0 \end{aligned} \tag{B.1}$$

A una variante de esta formulación es lo que llamaremos forma canónica de un problema de programación lineal. La Figura B.1 muestra la estructura geométrica de la región de factibilidad (lugar geométrico de los puntos que cumplen las restricciones) de este problema,

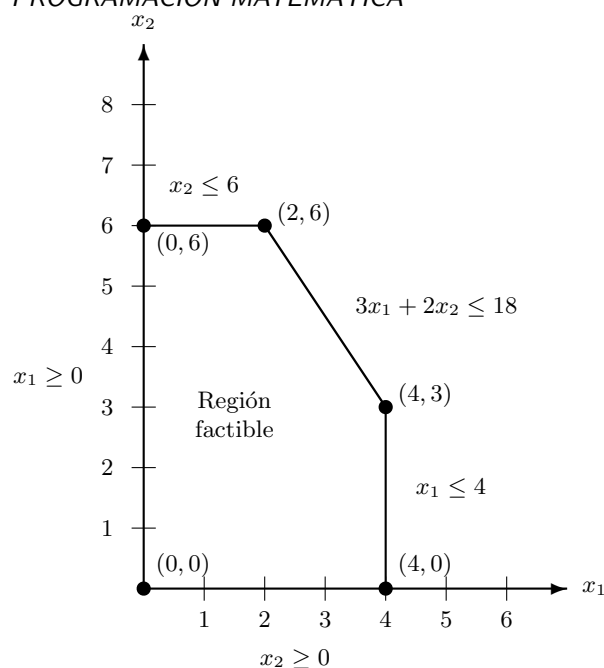


Figura B.1. Ejemplo de programación lineal.

que es un polígono en el plano. Veremos que son de particular interés los “rincones” de este polígono.

B.1.1. Formas estándar y canónica

En general un problema de programación lineal en forma canónica tiene la siguiente estructura:

$$\begin{aligned} &\text{minimizar } z = c^T x \\ &\text{sujeto a } Ax \leq b, \quad x \geq 0, \quad x \in \mathfrak{R}^n \end{aligned} \quad (\text{B.2})$$

donde x es el vector de incógnitas de dimensión n , c el vector de costes de dimensión n , A la matriz de los coeficientes de las restricciones de dimensión $m \times n$, y b el vector de términos independientes de las restricciones de dimensión m .

Si se expresa el ejemplo anterior en forma canónica, se tiene:

$$\begin{aligned} &\text{minimizar } z = -3x_1 - 5x_2 \\ &\text{sujeto a } \begin{aligned} &3x_1 + 2x_2 \leq 18 \\ &x_1 \leq 4, \quad x_2 \leq 6, \quad x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0 \end{aligned} \end{aligned} \quad (\text{B.3})$$

Nótese que maximizar una función objetivo equivale a minimizarla cambiada de signo. Obsérvese que en la forma canónica el objetivo es minimizar y que todas las restricciones son del tipo menor o igual, salvo las condiciones de no negatividad de todas las variables.

En el ejemplo anterior podemos observar que las curvas de nivel (lugar geométrico de los puntos para los que la función objetivo toma idéntico valor) de la función objetivo lineal

son líneas rectas. Obsérvese asimismo que el minimizador (punto para el que la función objetivo toma el valor mínimo) se encuentra en un rincón de la región de factibilidad. Nótese finalmente que en \mathfrak{R}^2 la forma canónica permite una interpretación geométrica en el plano.

Hay otra forma más común de expresar problemas de programación lineal, esta forma se denomina estándar. Es la siguiente:

$$\begin{aligned} & \text{minimizar } z = c^T x \\ & \text{sujeto a } Ax = b, \quad x \geq 0, \quad x \in \mathfrak{R}^n \end{aligned} \quad (\text{B.4})$$

donde x es el vector de incógnitas de dimensión n , c el vector de costes de dimensión n , A la matriz de los coeficientes de las restricciones de dimensión $m \times n$, b el vector de términos independientes de las restricciones de dimensión m (sin pérdida de generalidad este vector es no negativo).

Téngase en cuenta que para que un problema así formulado tenga solución habrá de cumplirse que m sea menor o igual que n ($m \leq n$).

Puesto que se trabaja habitualmente con la forma estándar, a continuación se establece cómo convertir un problema de programación lineal cualquiera a la forma estándar.

Si existen restricciones del tipo mayor o igual se introducen variables positivas de holgura (y_i). La restricción $\sum_j a_{ij}x_j \geq b_i$ se convierte en las siguientes dos restricciones:

$$\begin{aligned} \sum_j a_{ij}x_j - y_i &= b_i \\ y_i &\geq 0 \end{aligned} \quad (\text{B.5})$$

Asimismo, la restricción $\sum_j a_{ij}x_j \leq b_i$ se convierte en las siguientes dos restricciones:

$$\begin{aligned} \sum_j a_{ij}x_j + y_i &= b_i \\ y_i &\geq 0 \end{aligned} \quad (\text{B.6})$$

Si la variable x_i no está restringida en signo, esto es, $-\infty < x_i < \infty$, puede ser sustituida por dos variables restringidas en signo, esto es:

$$x_i = y_i - z_i, \quad y_i \geq 0, \quad z_i \geq 0 \quad (\text{B.7})$$

Finalmente, téngase en cuenta que maximizar una determinada función objetivo z equivale a minimizar su opuesta en signo, $-z$.

Se escribe a continuación el ejemplo anterior pero en forma estándar (x_3 , x_4 y x_5 son variables de holgura).

$$\begin{aligned} & \text{Minimizar } z = -3x_1 - 5x_2 \\ & \text{sujeto a } \begin{aligned} x_1 + x_3 &= 4 \\ x_2 + x_4 &= 6 \\ 3x_1 + 2x_2 + x_5 &= 18 \\ x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0, \quad x_3 \geq 0, \quad x_4 \geq 0, \quad x_5 \geq 0 \end{aligned} \end{aligned} \quad (\text{B.8})$$

B.1.2. Perspectiva algebraica

Partiendo de la forma estándar se considera la siguiente partición:

$$A \equiv [B|N], \quad x \equiv \begin{bmatrix} x_B \\ x_N \end{bmatrix}, \quad c \equiv \begin{bmatrix} c_B \\ c_N \end{bmatrix} \quad (\text{B.9})$$

donde B es una matriz cuadrada no singular de dimensión m que se denomina la base, N es una matriz de dimensión $m \times (n - m)$, x_B es un vector de dimensión m que contiene las denominadas variables básicas (se dice que estas variables están en la base), x_N es un vector de dimensión $n - m$ que contiene las denominadas variables no básicas (se dice que estas variables no están en la base), c_B es el vector de coeficientes de coste correspondientes a las variables básicas (su dimensión es m), c_N es el vector de coeficientes de coste correspondientes a las variables no básicas (su dimensión es $n - m$).

Se dice que un determinado vector x es una solución si cumple $Ax = b$, y una solución factible si cumple $Ax = b$, $x \geq 0$, y una solución básica factible si cumple $Ax = b$, $x \geq 0$, $x_N = 0$.

Obsérvese que soluciones básicas factibles, o no factibles, pueden obtenerse calculando $x_B = B^{-1}b$ y haciendo $x_N = 0$.

Volvamos al ejemplo tratado y obtengamos todas las posibles soluciones básicas factibles, que veremos que son de interés. Estas soluciones se obtienen formando todas las posibles submatrices B . El número de estas submatrices viene dado por el número de todas las combinaciones posibles de 5 columnas tomadas de 3 en 3. Las soluciones básicas factibles son (las no factibles no se escriben):

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 0 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 4 \\ 6 \\ 18 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 6 \\ 2 \end{bmatrix}, & z = -36 \\ \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_4 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 0 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 4 \\ 6 \\ 18 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \\ 3 \end{bmatrix}, & z = -27 \\ \begin{bmatrix} x_1 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 4 \\ 6 \\ 18 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 6 \\ 6 \end{bmatrix}, & z = -12 \\ \begin{bmatrix} x_2 \\ x_3 \\ x_5 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 4 \\ 6 \\ 18 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 4 \\ 6 \end{bmatrix}, & z = -30 \\ \begin{bmatrix} x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 4 \\ 6 \\ 18 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 6 \\ 18 \end{bmatrix}, & z = 0 \end{aligned}$$

Podemos observar que cada una de las soluciones básicas factibles se corresponde con un “rincón” del polígono de la Figura B.1. Geométricamente “vimos” que la solución óptima se encontraba precisamente en uno de estos rincones. Cabe concluir por tanto que la solución óptima corresponderá a una solución básica factible. En general, puede demostrarse que esto es así, de modo que una estrategia posible de solución consiste en obtener todas las soluciones básicas factibles, evaluar la función objetivo en ellas, y quedarse con aquella

que minimiza (o maximiza) el valor de la función objetivo. El teorema fundamental de la programación lineal, que no demostramos, dice precisamente eso (véase, por ejemplo, [5]). Si un problema de programación lineal tiene solución, esa solución es una solución básica factible.

La estrategia de determinar todas las soluciones básicas factibles es computacionalmente costosa, dado que una cota superior del número de soluciones básicas factibles es

$$\binom{n}{m} = \frac{n!}{m!(n-m)!} \quad (\text{B.10})$$

B.1.3. El mecanismo del Simplex

El mecanismo que se va a establecer a continuación se denomina Simplex revisado y permite resolver problemas lineales.

El problema del que partimos tiene la forma

$$\begin{aligned} &\text{minimizar } z = c^T x \\ &\text{sujeto a } Ax = b, \quad x \geq 0, \quad x \in \mathfrak{R}^n \end{aligned} \quad (\text{B.11})$$

Teniendo en cuenta la partición de la matriz A , se puede escribir

$$\begin{aligned} &\text{minimizar } z = c_B^T x_B + c_N^T x_N \\ &\text{sujeto a } Bx_B + Nx_N = b \\ &\quad x_B \geq 0, \quad x_N \geq 0, \quad x_B \in \mathfrak{R}^m, \quad x_N \in \mathfrak{R}^{n-m} \end{aligned} \quad (\text{B.12})$$

Se puede despejar x_B ya que la submatriz B es invertible, esto es,

$$x_B = B^{-1}b - B^{-1}Nx_N \quad (\text{B.13})$$

La función objetivo queda por tanto

$$z = c_B^T B^{-1}b - c_B^T B^{-1}Nx_N + c_N^T x_N \quad (\text{B.14})$$

Se definen a continuación los siguientes vectores y matrices que permanecen constantes mientras permanezca constante la base B ,

$$\tilde{b} \equiv B^{-1}b, \quad \lambda^T \equiv c_B^T B^{-1}, \quad Y \equiv B^{-1}N, \quad d^T \equiv \lambda^T N - c_N^T \quad (\text{B.15})$$

donde \tilde{b} es un vector columna de dimensión m , λ es un vector columna de dimensión m , Y es una matriz de dimensión $m \times (n-m)$, y d es un vector columna de dimensión $n-m$. Sustituyendo estos vectores y esta matriz, el problema original toma la forma:

$$\begin{aligned} &\text{minimizar } z = c_B^T \tilde{b} - d^T x_N \\ &\text{sujeto a } x_B = \tilde{b} - Yx_N \\ &\quad x_B \geq 0, \quad x_N \geq 0, \quad x_B \in \mathfrak{R}^m, \quad x_N \in \mathfrak{R}^{n-m} \end{aligned} \quad (\text{B.16})$$

El vector d se denomina vector de costes reducidos, y el vector λ es un vector de sensibilidades de especial importancia.

En la formulación anterior la función objetivo sólo depende de variables no básicas y las restricciones de igualdad expresan las variables básicas en función de las variables no básicas. Esta formulación nos permite pasar de una solución básica factible a otra sin más que aumentar una variable no básica hasta que una variable básica llega al valor cero. Justo en ese punto la variable no básica pasa a ser básica y la básica pasa a ser no básica.

El mecanismo del Simplex aprovecha esta formulación para “moverse” de solución básica factible en solución básica factible, disminuyendo en cada paso el valor de la función objetivo hasta que esto no sea posible. Cuando se alcanza ese punto se ha alcanzado la solución óptima.

Téngase en cuenta lo siguiente:

1. Si el elemento d_j del vector de costes reducidos es positivo, entonces la función objetivo decrece si la variable no básica x_{Nj} crece.
2. Si la variable no básica x_{Nj} crece, la variable básica x_{Bi} decrece si el elemento Y_{ij} de la matriz Y es positivo.
3. Si para j fijo, algunos elementos Y_{ij} 's son positivos, las correspondientes variables básicas x_{Bi} decrecen si la variable no básica x_{Nj} crece.
4. Si se quiere “saltar” de solución básica factible en solución básica factible, la variable no básica x_{Nj} puede crecer hasta que la primera variable básica se haga 0, esto es, hasta que $b_i - Y_{ij}x_{Nj}$ se haga 0 para la primera i . El valor de x_{Nj} pasa a ser $x_{Nj} = \text{mínimo}_{1 \leq i \leq m} \left\{ \frac{\tilde{b}_i}{Y_{ij}} : Y_{ij} > 0 \right\}$, mientras que x_{Bi} pasa a valer 0.

El algoritmo Simplex revisado consta pues de los siguientes pasos:

1. Obtener una solución básica factible inicial. Se ve posteriormente cómo hacer esto.
2. Determinar si la solución actual es óptima. Esto será así si todos los elementos del vector de costes reducidos son no positivos. En caso contrario se ha de continuar.
3. Determinar qué variable no básica ha de entrar en la base. Esto puede hacerse, por ejemplo, eligiendo aquélla cuyo elemento correspondiente en el vector de costes reducidos es más positivo.
4. Determinar cuál es la variable básica que sale de la base mediante el procedimiento arriba establecido.
5. Construir la nueva base, obtener una nueva solución básica factible y continuar en el paso 2.

Solución inicial

Una solución básica factible para un problema de programación lineal en forma estándar puede obtenerse resolviendo el problema de programación lineal que tiene una solución básica factible inicial trivial ($y = b$, $x = 0$), y que es

$$\begin{aligned} &\text{minimizar } z = \sum_{i=1}^m y_i \\ &\text{sueto a } Ax + y = b \\ &\quad x \geq 0, \quad y \geq 0, \quad x \in \mathfrak{R}^n, \quad y \in \mathfrak{R}^m \end{aligned} \tag{B.17}$$

La solución de este problema es lo que se denomina en la literatura técnica fase I del método Simplex.

Por otra parte, alternativamente a resolver el problema lineal en forma estándar puede resolverse el problema lineal también en forma estándar:

$$\begin{aligned} & \text{minimizar } z = c^T x + M^T y \\ & \text{sujeto a } Ax + y = b \\ & \quad x \geq 0, \quad y \geq 0, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad y \in \mathbb{R}^m \end{aligned} \quad (\text{B.18})$$

donde M es un vector columna de dimensión m de constantes positivas grandes. Una solución básica factible inicial para este problema es $y = b$, $x = 0$.

Obsérvese que las soluciones de los dos problemas anteriores son iguales siempre y cuando las constantes del vector M sean “suficientemente” grandes. Sin embargo, el cumplir esta condición puede originar un mal condicionamiento numérico.

Soluciones degeneradas

A veces algunas de las variables de la base toman el valor 0, decimos en este caso que la solución es degenerada. Esta degeneración puede originar un comportamiento cíclico del algoritmo Simplex; sin embargo, existen procedimientos adecuados para evitar este comportamiento cíclico, véase por ejemplo [5]. En general, este comportamiento es poco habitual y por esta razón no se analiza aquí.

B.1.4. Sensibilidad

Analizamos a continuación los llamados precios de sombra, parámetros de sensibilidad, o variables duales, de importancia fundamental para interpretar de una forma enjundiosa la solución de un problema de programación lineal.

Sea B^* la base asociada a la solución óptima de un problema de programación lineal, x_B^* la parte no nula del minimizador y z^* el valor óptimo de la función objetivo son respectivamente:

$$\begin{aligned} x_B^* &= B^{*-1}b \\ z^* &= c_B^T x_B^* \end{aligned} \quad (\text{B.19})$$

Consideremos un cambio marginal en el vector de términos independientes b , de forma tal que la base permanezca constante, esto es,

$$b^* \rightarrow b^* + \Delta b. \quad (\text{B.20})$$

Este cambio marginal en b origina cambios marginales en la parte no nula del minimizador y en el valor óptimo de la función objetivo que son respectivamente:

$$\begin{aligned} x_B^* &\rightarrow x_B^* + \Delta x_B \\ z^* &\rightarrow z^* + \Delta z \end{aligned} \quad (\text{B.21})$$

Teniendo en cuenta (B.19) los anteriores cambios marginales pueden calcularse de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} \Delta x_B &= B^{*-1} \Delta b \\ \Delta z &= c_B^T \Delta x_B \end{aligned} \quad (\text{B.22})$$

Se puede pues escribir:

$$\Delta z = c_B^T \Delta x_B = c_B^T B^{*-1} \Delta b \quad (\text{B.23})$$

Ahora bien, previamente a $c_B^T B^{*-1}$ se le ha llamado λ^{*T} . Por tanto,

$$\Delta z = \lambda^{*T} \Delta b \quad (\text{B.24})$$

Esto es,

$$\lambda_j^* = \frac{\Delta z}{\Delta b_j}, \quad \forall j = 1, 2, \dots, m \quad (\text{B.25})$$

Por consiguiente, λ_j^* es el cambio marginal en el valor óptimo de la función objetivo como resultado de un cambio marginal en el término independiente de la restricción j , siempre y cuando la base óptima permanezca inalterada.

B.1.5. Dualidad

La teoría de la dualidad, poderosa herramienta en las técnicas de optimización, se introduce a través de un ejemplo intuitivo.

Supongamos que se quiere fabricar un determinado aceite que contenga determinadas cantidades mínimas de m elementos lubricantes. Se fabricará este aceite mezclando n aceites naturales que se pueden encontrar en el mercado a precios c_1, c_2, \dots, c_n . Se denomina a_{ij} la cantidad de elemento lubricante i que se encuentra en una unidad de aceite natural j . Las cantidades mínimas de elementos lubricantes que ha de tener el aceite mezcla son b_1, b_2, \dots, b_m .

Si se denomina x_1, x_2, \dots, x_n las cantidades de aceites naturales a emplear en el aceite mezcla y se quiere que el coste de obtención del mismo sea mínimo, los valores de las cantidades de aceites naturales se pueden obtener resolviendo el problema:

$$\begin{aligned} \text{minimizar} \quad & z = \sum_{j=1}^n c_j x_j \\ \text{sujeto a} \quad & \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \geq b_i, \quad i = 1, 2, \dots, m \\ & x_j \geq 0, \quad j = 1, 2, \dots, n \end{aligned} \quad (\text{B.26})$$

Se supone, por otra parte, que Pepe Pérez fabrica los m elementos lubricantes necesarios para el aceite mezcla, y los vende a precios $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m$. Para que el negocio de Pepe tenga futuro, el coste de producir un aceite natural mediante lubricantes sintéticos será como mucho el precio de mercado del mencionado aceite natural, esto es,

$$\sum_{i=1}^m \lambda_i a_{ij} \leq c_j; \quad j = 1, 2, \dots, n \quad (\text{B.27})$$

Por otra parte, si Pepe quiere maximizar sus beneficios, habrá de vender sus lubricantes sintéticos a los precios $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m$ que se obtienen resolviendo el siguiente problema de programación lineal:

$$\begin{aligned} \text{maximizar} \quad & z = \sum_{i=1}^m \lambda_i b_i \\ \text{sujeto a} \quad & \sum_{i=1}^m \lambda_i a_{ij} \leq c_j, \quad j = 1, 2, \dots, n \\ & \lambda_i \geq 0, \quad i = 1, 2, \dots, m \end{aligned} \quad (\text{B.28})$$

Los dos problemas previamente definidos se denominan problemas duales. Obsérvese que corresponden a dos formas de mirar la misma realidad.

Por tanto, decimos que el problema dual del problema de programación lineal

$$\begin{aligned} &\text{minimizar } z = c^T x \\ &\text{sujeto a } Ax \geq b \\ &\quad x \geq 0, \quad x \in \mathfrak{R}^n \end{aligned} \tag{B.29}$$

es el problema de programación lineal

$$\begin{aligned} &\text{maximizar } z = \lambda^T b \\ &\text{sujeto a } \lambda^T A \leq c^T \\ &\quad \lambda \geq 0, \quad \lambda \in \mathfrak{R}^m \end{aligned} \tag{B.30}$$

Las reglas de conversión primal/dual se enuncian a continuación, dejándose al lector su demostración. Si el primal es un problema de minimización, el dual lo será de maximización; las restricciones de menor o igual del primal dan lugar a variables negativas en el dual, las restricciones de mayor o igual dan lugar a variables positivas en el dual, y las restricciones de igualdad en el primal dan lugar a variables en el dual sin restricciones de signo. Si por el contrario el primal es un problema de maximización, el dual lo será de minimización; las restricciones de menor o igual en el primal dan lugar a variables positivas en el dual, las restricciones de mayor o igual en el primal dan lugar a variables negativas en el dual, y finalmente las restricciones de igualdad en el primal dan lugar a variables en el dual no restringidas en signo. Puede también comprobarse fácilmente que el dual del dual es el primal.

Teoremas de dualidad

Se enuncian a continuación (sin demostrar) cuatro teoremas de dualidad que relacionan los problemas primales y duales.

Sea la pareja dual asimétrica

$$\begin{array}{ll} \text{minimizar } c^T x & \text{y} \quad \text{maximizar } \lambda^T b \\ \text{sujeto a } Ax = b, \quad x \geq 0, \quad x \in \mathfrak{R}^n & \text{sujeto a } \lambda^T A \leq c^T, \quad \lambda \in \mathfrak{R}^m \end{array}$$

El **teorema de dualidad débil** dice que si x es una solución factible para el problema primal y λ es una solución factible para el problema dual, entonces se cumple que $\lambda^T b \leq c^T x$.

El **teorema de dualidad fuerte** dice que si x^* es el minimizador del problema primal y λ^* es el maximizador del problema dual, entonces se cumple que $\lambda^{*T} b = c^T x^*$.

Basándonos en el teorema de dualidad fuerte es posible interpretar las variables duales como parámetros de sensibilidad y por eso las hemos llamado de igual manera.

El valor óptimo de la función objetivo es $z^* = c^T x^* = c_B^T x_B^*$. El minimizador (parte no nula) se obtiene como $x_B^* = B^{*-1}b$. Por tanto podemos escribir $z^* = c^T x^* = c_B^T B^{*-1}b$. Puesto que el teorema de dualidad fuerte dice que $c^T x^* = \lambda^{*T} b$, podemos concluir que $\lambda^{*T} = c_B^T B^{*-1}$. Esto es, las variables duales coinciden con los parámetros de sensibilidad.

Considerando la pareja dual asimétrica, el **teorema de holgura complementaria** dice que si x es una solución factible para el problema primal y λ es una solución factible para el problema dual, una condición necesaria y suficiente para que ambas sean optimizadores de sus respectivos problemas es que para todo i , se cumple que

$$\begin{aligned} x_i > 0 &\Rightarrow \lambda^T [A]_i = c_i \\ x_i = 0 &\Leftarrow \lambda^T [A]_i < c_i \end{aligned} \tag{B.31}$$

donde $[A]_i$ es la columna i -ésima de la matriz A .

Esto es, si la sensibilidad es no nula, entonces la restricción está activa (se cumple con igualdad); y si por el contrario, la restricción no está activa (se cumple con desigualdad), entonces la sensibilidad es nula.

Si se considera la pareja dual simétrica

$$\begin{array}{ll} \text{minimizar } c^T x & \text{maximizar } \lambda^T b \\ \text{sujeto a } Ax \geq b & \text{y sujeto a } \lambda^T A \leq c^T \\ x \geq 0, \quad x \in \Re^n & \lambda \geq 0, \quad \lambda \in \Re^m \end{array}$$

el **teorema de holgura complementaria** dice que si x es una solución factible para el problema primal y λ es una solución factible para el problema dual, una condición necesaria y suficiente para que ambas soluciones sean óptimas es que para todo i y para todo j se cumpla que

$$\begin{aligned} \lambda_j > 0 &\Rightarrow [A]^j x = b_j \\ \lambda_j = 0 &\Leftarrow [A]^j x > b_j \\ x_i > 0 &\Rightarrow \lambda^T [A]_i = c_i \\ x_i = 0 &\Leftarrow \lambda^T [A]_i < c_i \end{aligned} \tag{B.32}$$

donde $[A]^j$ es la fila j -ésima de la matriz A .

La interpretación de este teorema es también inmediata. Si una determinada sensibilidad del problema primal es positiva, la restricción correspondiente del mismo está activa. Si por el contrario una determinada restricción del problema primal no está activa, su parámetro de sensibilidad asociado es nulo. Análogamente, si una determinada sensibilidad del problema dual es positiva, la restricción correspondiente del mismo está activa. Si por el contrario una determinada restricción del problema dual no está activa, su parámetro de sensibilidad asociado es nulo.

B.2. Programación lineal entera mixta

Un problema de programación lineal entera mixta es un problema de programación lineal en el que algunas variables han de ser enteras. Si las variables enteras son binarias el problema se denomina de programación lineal entera mixta 0/1. Estos son los problemas de mayor interés en la práctica. Si, por otra parte, todas las variables han de ser enteras el problema se dice de programación lineal entera estricta.

Un problema de programación lineal entera mixta se formula, por tanto, de la siguiente forma:

$$\begin{aligned}
 &\text{minimizar} && \sum_{j=1}^n c_j x_j \\
 &\text{sujeto a} && \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j = b_i; \quad \forall i = 1, 2, \dots, m \\
 & && x_j \geq 0; \quad \forall j = 1, 2, \dots, n \\
 & && x_j \in \mathcal{I}; \quad \forall \text{ o algún } j = 1, 2, \dots, n
 \end{aligned} \tag{B.33}$$

Entre las referencias más relevantes de la programación lineal entera mixta cabe destacar la excelente monografía de Nemhauser y Wolsey [8] y el texto orientado a aplicaciones de Bradley y cols. [7].

El método de solución habitualmente empleado en la resolución de problemas de programación lineal entera mixta es el denominado “ramificación y cotas” (*branch and bound* en lengua inglesa). Actualmente están disponibles procedimientos muy eficientes que aúnan técnicas de ramificación y de cortes (restricciones adicionales).

B.2.1. El método de ramificación y cotas

El método de ramificación y cotas resuelve un problema de programación lineal entera mixta mediante la resolución de múltiples problemas de programación lineal, es decir, problemas en los que se relajan las restricciones de integralidad. Estos problemas incluyen restricciones adicionales en cada paso del procedimiento de resolución, por lo que están cada vez más restringidos. Estas restricciones adicionales separan la región de factibilidad en subregiones complementarias.

El procedimiento de ramificación y cotas establece inicialmente una cota superior y otra cota inferior al valor óptimo de la función objetivo del problema a resolver. Mediante procedimientos de “ramificación”, el valor de la cota superior se reduce y el de la cota inferior se aumenta de forma sistemática a medida que se generan mejores soluciones factibles del problema de programación lineal entera mixta. La diferencia entre el valor de la cota superior y el de la cota inferior es una medida de la proximidad de la cota superior al valor óptimo de la función objetivo del problema.

Nótese que si el problema que se trata de resolver es de minimización, una cota inferior del valor óptimo de la función objetivo se obtiene relajando las condiciones de integralidad y resolviendo el problema de programación lineal asociado. Nótese asimismo que cualquier solución al problema de minimización que sea entera constituye una cota superior del valor óptimo de la función objetivo.

El procedimiento de ramificación y cotas para problemas de programación lineal entera mixta de minimización sigue los siguientes pasos:

- i) **Inicialización.** Establecer una cota superior (∞) y otra inferior ($-\infty$) del valor óptimo de la función objetivo. Resolver el problema inicial relajado (sin restricciones de integralidad). Si la solución obtenida cumple las restricciones de integralidad esa solución es el minimizador y el procedimiento concluye. Si el problema inicial relajado es infactible, el problema original no tiene solución y el procedimiento concluye. En cualquier otro caso, se continúa.

- ii) **Ramificación.** A partir de una variable que no cumple su restricción de integralidad se “ramifica” en dos subproblemas de la siguiente forma. Si el valor de la variable x_k es “ $a.b$ ” (por ejemplo $x_k = 5,3$), el primer problema fruto de la ramificación será el problema tratado con la restricción adicional $x_k \leq a$ (por ejemplo $x_k \leq 5$); el segundo problema fruto de la ramificación será el problema tratado con la restricción adicional $x_k \geq a + 1$ (por ejemplo $x_k \geq 6$). Los problemas así generados se colocan en una lista de problemas a procesar, secuencialmente o en paralelo. Obsérvese que este procedimiento de partición del espacio de soluciones cubre completamente el mencionado espacio.
- iii) **Resolución.** Se resuelve el primer problema en la lista.
- iv) **Actualización de cotas.** Si la solución del problema tratado cumple las restricciones de integralidad y además el valor de la función objetivo es menor que la cota superior actual, la cota superior se actualiza al valor de la función objetivo en la solución encontrada y ésta se almacena como mejor candidato a minimizador. Si por el contrario las restricciones de integralidad no se cumplen y el valor de la función objetivo en el punto encontrado es mayor que la actual cota inferior y menor que la actual cota superior, la cota inferior puede actualizarse y el problema ramificarse, lo que origina nuevos problemas que se añaden a la lista de problemas a procesar.
- v) **Podar.** Si la solución del problema tratado cumple las restricciones de integralidad, la rama en cuestión no puede ramificarse adicionalmente por lo que se dice que se “poda”. Si las restricciones de integralidad no se cumplen y el punto encontrado presenta un valor de función objetivo superior a la cota superior actual, no podrá encontrarse ninguna solución entera mejor que la solución entera ya encontrada a partir de constreñir adicionalmente esa rama. Por tanto, se poda esa rama. Puede también ocurrir que el problema relajado con restricciones adicionales sea infactible por lo que se poda su rama correspondiente ya que si el problema se restringe todavía más dará lugar a problemas también infactibles. Estas podas dan lugar a la eliminación de los correspondientes problemas de la lista de problemas a procesar.
- vi) **¿Optimalidad?** Comprobar si la lista de problemas a procesar está vacía; si es así, el procedimiento concluye; la solución óptima es la mejor solución encontrada que cumple las restricciones de integralidad. Si la lista de problemas a procesar no está vacía, volver al paso de ramificación.

Es posible, por tanto, detener el proceso de ramificación, es decir, podar, por tres razones, a saber: (i) el problema es infactible, (ii) la solución cumple las condiciones de integralidad, (iii) la cota inferior obtenida es mayor que la cota superior actual. En el primer caso se dice que la rama se poda por infactibilidad, en el segundo por integralidad, y en el tercero por cotas.

B.2.2. Estrategias de ramificación y procesado

Diversas variables pueden ramificarse en cada paso de ramificación del algoritmo de ramificación y cotas. El elegir una frente a otras puede reducir drásticamente el tiempo de

resolución. Un conocimiento de la realidad física que se modela suele proporcionar criterios apropiados de discriminación de unas variables frente a otras en el proceso de ramificación.

Los problemas en espera para ser procesados lo pueden ser mediante una estrategia de búsqueda en profundidad, una estrategia de búsqueda en anchura o una estrategia mixta. La selección de la estrategia correcta puede reducir drásticamente el tiempo de resolución. Asimismo, un conocimiento de la realidad física que se modela suele proporcionar criterios apropiados para establecer una adecuada estrategia de búsqueda.

Una estrategia de búsqueda en profundidad genera “pronto” problemas infactibles lo que da lugar a podas. Asimismo proporciona buenas cotas inferiores al provenir éstas de problemas cada vez más condicionados. Una estrategia de búsqueda en anchura permite procesar problemas casi idénticos lo que supone una ventaja computacional.

Por último, debe notarse que cualquier estrategia de búsqueda puede abordarse mediante técnicas de procesamiento paralelo.

B.3. Programación no lineal. Condiciones de optimalidad

A continuación, se establecen las condiciones que ha de cumplir un punto para ser un minimizador local en un problema de programación no lineal. Un problema de programación no lineal es un problema de optimización que puede tener o no restricciones, y en el que la función objetivo y o algunas restricciones son funciones no lineales. Un punto es un minimizador local cuando el valor de la función objetivo en él es localmente menor que el valor de la función objetivo en puntos “próximos” al mismo. El concepto de minimizador local se establece más formalmente a continuación. Se establecen asimismo condiciones de optimalidad necesarias y suficientes. Las condiciones necesarias las cumplirán los minimizadores pero también otros puntos; esto es, un punto que cumple las condiciones necesarias no es necesariamente un minimizador. Por el contrario, las condiciones suficientes las cumplirán sólo los minimizadores; esto es, un punto que cumple las condiciones suficientes es un minimizador. Sin embargo, téngase en cuenta que puede haber puntos que no cumplen las condiciones suficientes y que son minimizadores. Las condiciones que se establecerán serán de primer o segundo orden. Las de primer orden emplean solamente derivadas primeras, mientras que las de segundo orden emplean también derivadas segundas. El estudio de las condiciones de optimalidad es un paso previo necesario para entender el funcionamiento de los diversos métodos computacionales de solución de problemas diversos de programación no lineal.

Se echará mano frecuentemente de los desarrollos de Taylor para funciones de \mathfrak{R}^n en \mathfrak{R} . Estos desarrollos tienen la siguiente forma:

$$(1) \text{ Desarrollo de primer orden: } f(x + d) \approx f(x) + d^T \nabla f(x).$$

$$(2) \text{ Desarrollo de segundo orden: } f(x + d) \approx f(x) + d^T \nabla f(x) + \frac{1}{2} d^T \nabla^2 f(x) d.$$

El material de este capítulo se trata con mayor profundidad en el excelente texto de Bazaraa y cols. [9], y en los textos de Gill y cols. [10], Luenberger [5] y Bertsekas [11].

B.3.1. Problemas sin restricciones

Un problema sin restricciones tiene la forma:

$$\begin{aligned} &\text{minimizar} && f(x) \\ &&& x \in \mathfrak{R}^n \end{aligned} \tag{B.34}$$

donde $f(x)$ es una función de \mathfrak{R}^n en \mathfrak{R} con hasta derivadas segundas continuas, esto es, $f(x) : \mathfrak{R}^n \rightarrow \mathfrak{R}, f(x) \in C^2$.

Se definen a continuación de forma precisa los conceptos de minimizador local y minimizador local estricto.

Minimizador local: Un punto $x^* \in \mathfrak{R}^n$ es un minimizador local de $f(x)$ si existe un valor $\epsilon > 0$ tal que $f(x^*) \leq f(x), \forall x \in \mathfrak{R}^n$ y $|x - x^*| < \epsilon$.

Minimizador local estricto: Un punto $x^* \in \mathfrak{R}^n$ es un minimizador local estricto de $f(x)$ si existe un valor $\epsilon > 0$ tal que $f(x^*) < f(x), \forall x \in \mathfrak{R}^n, x \neq x^*$ y $|x - x^*| < \epsilon$.

Las condiciones necesarias de optimalidad de primer orden para problemas sin restricciones se establecen a continuación.

Teorema B.1 Sea una función $f(x) : \mathfrak{R}^n \rightarrow \mathfrak{R}$, tal que $f(x) \in C^1$, y un punto $z \in \mathfrak{R}^n$. Si $\nabla f(z) \neq 0$, entonces z no es un minimizador local.

Demostración B.1 Considérese un punto cualquiera $z \in \mathfrak{R}^n$ tal que $\nabla f(z) \neq 0$. Puesto que el problema tratado no tiene restricciones, es posible encontrar una dirección de movimiento d de forma tal que avanzando a lo largo de ella, la función objetivo decrezca. Esto ocurre porque la proyección de la dirección d sobre la dirección del menos-gradiente es positiva, o lo que es lo mismo $-d^T \nabla f(z) > 0$. Ahora bien, en un punto en el que el gradiente se anule, el anterior producto escalar será necesariamente nulo y no será posible disminuir el valor de la función objetivo a partir de ese punto; siendo por tanto el punto un candidato a minimizador local.

Las condiciones suficientes de segundo orden tienen la forma que se establece a continuación.

Teorema B.2 Sea una función $f(x) : \mathfrak{R}^n \rightarrow \mathfrak{R}$, tal que $f(x) \in C^2$ y sea un punto $x^* \in \mathfrak{R}^n$. Si $\nabla f(x^*) = 0$ y $\nabla^2 f(x^*) > 0$, entonces el punto x^* es un minimizador local estricto de $f(x)$.

Demostración B.2 El que la matriz hessiana sea definida positiva en el punto considerado [$\nabla^2 f(x^*) > 0$] implica una geometría localmente convexa (piénsese en una función cuadrática en \mathfrak{R}^2). Esto unido a la condición de gradiente nulo [$\nabla f(x^*) = 0$] hace que se pueda garantizar que el punto considerado es un minimizador local.

B.3.2. Problemas con restricciones de igualdad y desigualdad

Un problema de programación no lineal con restricciones tiene la forma

$$\begin{aligned} &\text{minimizar} && f(x) \\ &\text{sujeto a} && h(x) = 0 \\ &&& g(x) \leq 0 \\ &&& x \in \mathfrak{R}^n \end{aligned} \tag{B.35}$$

donde $f(x)$ es una función de \mathfrak{R}^n en \mathfrak{R} , $h(x)$ una función de \mathfrak{R}^n en \mathfrak{R}^m y $g(x)$ una función de \mathfrak{R}^n en \mathfrak{R}^p . Esto es $f(x) : \mathfrak{R}^n \rightarrow \mathfrak{R}$, $h(x) : \mathfrak{R}^n \rightarrow \mathfrak{R}^m$, $g(x) : \mathfrak{R}^n \rightarrow \mathfrak{R}^p$, donde $m \leq n$.

Las funciones $h(x)$ y $g(x)$ se suelen expresar por componentes, esto es,

$$h(x) = \begin{bmatrix} h_1(x) \\ h_2(x) \\ \vdots \\ h_m(x) \end{bmatrix} \quad y \quad g(x) = \begin{bmatrix} g_1(x) \\ g_2(x) \\ \vdots \\ g_p(x) \end{bmatrix} \quad (\text{B.36})$$

Se supondrá asimismo que

$$f(x) \in C^2; \quad h_i(x) \in C^2 \quad \forall i = 1, 2, \dots, m; \quad g_i(x) \in C^2 \quad \forall i = 1, 2, \dots, p \quad (\text{B.37})$$

Se definen a continuación de forma precisa los conceptos de minimizador local y minimizador local estricto.

Minimizador local: Un punto $x^* \in \mathfrak{R}^n$, $h(x^*) = 0$, $g(x^*) \leq 0$ es un minimizador local de $f(x)$ sujeto a $h(x) = 0$, $g(x) \leq 0$, si existe un valor $\epsilon > 0$ tal que $f(x^*) \leq f(x)$, $\forall x \in \mathfrak{R}^n$ tal que $h(x) = 0$, $g(x) \leq 0$ y $|x - x^*| < \epsilon$.

Minimizador local estricto: Un punto $x^* \in \mathfrak{R}^n$, $h(x^*) = 0$, $g(x^*) \leq 0$ es un minimizador local estricto de $f(x)$ sujeto a $h(x) = 0$, $g(x) \leq 0$, si existe un valor $\epsilon > 0$ tal que $f(x^*) < f(x)$, $\forall x \in \mathfrak{R}^n$ tal que $h(x) = 0$, $g(x) \leq 0$, $x \neq x^*$ y $|x - x^*| < \epsilon$.

Se define a continuación el concepto de punto regular. Considérese que el conjunto de aquellas restricciones de desigualdad que están activas se denomina Ω .

Punto regular: Un punto $z \in \mathfrak{R}^n$ que satisface las restricciones $h_i(z) = 0$ ($i = 1, 2, \dots, m$), $g_j(z) = 0$ ($j = 1, 2, \dots, p$) se dice que es un punto regular de esas restricciones si los gradientes de las restricciones activas en ese punto son linealmente independientes. Esto es, si los vectores $\nabla h_i(z)$, $i = 1, 2, \dots, m$; $\nabla g_j(z)$, $j \in \Omega$ son linealmente independientes.

La condición de regularidad de las restricciones en un punto permite establecer las condiciones de optimalidad que se expondrán a continuación. Los puntos no regulares podrán ser o no ser minimizadores, pero no pueden ser caracterizados de la forma que se establece a continuación. Si un punto es regular es posible definir el plano tangente. Este plano se define a continuación.

Plano tangente: Si z es un punto regular de las restricciones $h_i(x) = 0$ ($i = 1, 2, \dots, m$), $g_j(x) = 0$ ($j = 1, 2, \dots, p$) el subespacio $T \equiv \{y : \nabla h_i(z)^T y = 0, \nabla g_j(z)^T y = 0 \forall j \in \Omega\}$ es el plano tangente en z .

Las condiciones necesarias de optimalidad de primer orden se formulan en los siguientes párrafos.

Teorema B.3 Si

- (1) x^* es un minimizador local de $f(x)$ sujeto a $h(x) = 0$, $g(x) \leq 0$ y
- (2) x^* es un punto regular de $h(x) = 0$, $g(x) \leq 0$;

entonces

existe un vector $\lambda \in \mathbb{R}^m$ y un vector $\mu \in \mathbb{R}^p$, $\mu \geq 0$, tal que

$$\begin{aligned}\nabla f(x^*) + \lambda^T \nabla h(x^*) + \mu^T \nabla g(x^*) &= 0 \\ \mu^T g(x^*) &= 0\end{aligned}$$

Demostración B.3 La demostración de estas condiciones requiere una cierta elaboración, por lo que simplemente se mostrará su validez en \mathbb{R}^2 cuando hay una única restricción de desigualdad. La restricción de desigualdad separa \mathbb{R}^2 en dos regiones, en una región la restricción se cumple, en la otra no. Son factibles por tanto puntos de la frontera y puntos de la región factible. Si la curvatura de las curvas de nivel de la restricción y de la función objetivo coinciden (gradientes paralelos y en el mismo sentido en el minimizador), la solución está en el interior de la región factible y la restricción no está activa, siendo pues $\mu = 0$. Si por el contrario la curvatura de las curvas de nivel de la restricción y la función objetivo son opuestas (gradientes paralelos en sentido opuesto en el minimizador), la solución está en la frontera de la restricción, siendo por tanto la restricción activa, y tomando μ un valor positivo para que los dos gradientes sean linealmente dependientes. Puesto que sólo existen estas dos posibilidades, se infiere que $\mu \geq 0$.

El concepto de restricción degenerada se establece a continuación.

Restricción degenerada: Una restricción de desigualdad activa se dice degenerada si su componente en el vector μ vale 0 y no degenerada en caso contrario.

En lo que sigue supondremos que las restricciones de desigualdad activas son no degeneradas. En general, esta suposición no entraña limitaciones en la práctica y simplifica en gran medida lo que se establece a continuación. Las condiciones de optimalidad arriba establecidas pueden formularse de forma compacta a través del lagrangiano, que se define a continuación.

Lagrangiano: El lagrangiano del problema de optimización

$$\begin{aligned}\text{minimizar} & f(x) \\ \text{sujeto a} & h(x) = 0, \quad g(x) \leq 0\end{aligned}\tag{B.38}$$

se define como $\mathcal{L}(x, \lambda, \mu) \equiv f(x) + \lambda^T h(x) + \mu^T g(x)$.

En función del lagrangiano y suponiendo que las restricciones de desigualdad son no degeneradas, las condiciones de optimalidad de primer orden son:

$$\begin{aligned}\nabla_x \mathcal{L}(x, \lambda, \mu) &= 0 \\ \nabla_\lambda \mathcal{L}(x, \lambda, \mu) &= 0 \\ \text{Si } g_i < 0 &\Rightarrow \mu_i = 0 \\ \text{Si } g_i = 0 &\Rightarrow \mu_i > 0\end{aligned}\tag{B.39}$$

Las condiciones anteriores constituyen un sistema de ecuaciones e inecuaciones no lineales. La resolución de un problema de optimización no lineal con restricciones de igualdad y desigualdad es equivalente por tanto a la resolución de un sistema de ecuaciones e inecuaciones no lineales. Obsérvese que la resolución de este tipo de sistemas no es sencilla en general.

Las condiciones suficientes de segundo orden se formulan a continuación.

Teorema B.4 Si

(1) x^* satisface $h(x^*) = 0$ y $g(x^*) \leq 0$,

(2) $\lambda \in \mathfrak{R}^m$ y $\mu \geq 0 \in \mathfrak{R}^p$ satisfacen

$$\begin{aligned} \nabla f(x^*) + \lambda^T \nabla h(x^*) + \mu^T \nabla g(x^*) &= 0 \\ \mu^T g(x^*) &= 0, \end{aligned}$$

(3) $\nabla^2 f(x^*) + \sum_{i=1}^m \lambda_i \nabla^2 h_i(x^*) + \sum_{j \in \Omega} \mu_j \nabla^2 g_j(x^*) > 0$

en el subespacio

$\{y : \nabla h(x^*)^T y = 0, \nabla g_j(x^*)^T y = 0 \ \forall j \in \Omega\}$, donde Ω es el conjunto de los índices de las restricciones de desigualdad que están activas;

entonces

x^* es un minimizador local estricto de $f(x)$ sujeto a $h(x) = 0$ y $g(x) \leq 0$.

La demostración de estas condiciones suficientes es relativamente elaborada por lo que no se reproduce aquí. El lector interesado puede consultar, por ejemplo, [5] o [10].

Los vectores de multiplicadores λ y μ son interpretables en términos de vectores de parámetros de sensibilidad, como se demuestra en el siguiente teorema.

Teorema B.5 Se considera el problema

$$\begin{aligned} &\text{minimizar} && f(x) \\ &\text{sujeto a} && h(x) = c \\ &&& g(x) \leq d \end{aligned} \tag{B.40}$$

tal que $f(x) \in C^2$, $h_i(x) \in C^2$, ($i = 1, 2, \dots, m$) y $g_j(x) \in C^2$, ($j = 1, 2, \dots, p$).

Para $c = 0$ y $d = 0$, sea x^* un punto tal que $h(x^*) = 0$ y $g(x^*) \leq 0$. Supóngase que es asimismo un punto regular. Este punto y sus vectores de multiplicadores de Lagrange asociados, λ y μ , cumplen las condiciones suficientes de segundo orden para un minimizador local estricto. Asimismo, ninguna restricción activa es degenerada.

Entonces $\forall c \in \mathfrak{R}^m$ y $\forall d \in \mathfrak{R}^p$ en una región en torno a $(0,0)$, x es parametrizable en función de c y d , esto es, $x(c, d)$ y cumple lo siguiente:

(1) $x(0, 0) = x^*$,

(2) $x(c, d)$ es un minimizador local del problema original,

(3) $\nabla_c f(x(c, d)) \Big|_{(0,0)} = -\lambda^T$,

$$\nabla_d f(x(c, d)) \Big|_{(0,0)} = -\mu^T.$$

La demostración de este teorema de sensibilidad es relativamente elaborada por lo que no se reproduce aquí. El lector interesado puede consultar, por ejemplo, [5] o [10].

B.4. Problemas sin restricciones. Métodos de solución

El objeto de esta sección es el análisis de métodos computacionales para la resolución de problemas no lineales sin restricciones.

Estos problemas tienen la forma siguiente:

$$\begin{array}{ll} \text{minimizar} & f(x) \\ \text{sujeito a} & x \in \mathfrak{R}^n \end{array} \quad (\text{B.41})$$

donde $f(x) : \mathfrak{R}^n \rightarrow \mathfrak{R}$ y $f(x) \in C^2$.

El material desarrollado en este apartado puede ampliarse usando el excelente manual de Bazaraa y cols. [9], el manual de Gill y cols. [10] y el manual de Luenberger [5].

A continuación, se analiza el método del gradiente, el método de Newton, métodos cuasi-Newton, métodos de direcciones conjugadas, y el método de descenso por coordenadas. El análisis está orientado a la aplicación y utilización de estos métodos más que al estudio de sus fundamentos.

Todos los métodos que se estudian a continuación parten de un determinado punto inicial con un valor determinado de la función objetivo, determinan una dirección de descenso, y un paso de avance sobre la misma, de tal forma que se obtenga un nuevo punto en el que la función objetivo tiene un valor menor que el que previamente tenía. Este proceso continúa iterativamente hasta que no es posible disminuir más el valor de la función objetivo.

Debe tenerse en cuenta que el procedimiento anterior “busca” mínimos locales pero no puede asegurar que el mínimo local encontrado sea un mínimo global.

B.4.1. El método del gradiente

Considérese un punto inicial x_0 , el menos-gradiente como dirección de movimiento, y un paso de avance α , esto es, $x_\alpha = x_0 - \alpha \nabla f(x_0)$, $\alpha > 0$, de donde se deduce que $x_\alpha - x_0 = -\alpha \nabla f(x_0)$

Desarrollando por Taylor la función objetivo y evaluándola en el punto x_α se obtiene

$$\begin{aligned} f(x_\alpha) &\approx f(x_0) + \nabla f(x_0)^T (x_\alpha - x_0) = f(x_0) - \nabla f(x_0)^T \alpha \nabla f(x_0) \\ &= f(x_0) - \alpha [\nabla f(x_0)]^2 \end{aligned} \quad (\text{B.42})$$

Por tanto, para un α suficientemente pequeño, y si $\nabla f(x_0) \neq 0$ se puede afirmar que $f(x_\alpha) < f(x_0)$; esto es, la dirección del menos-gradiente es una dirección de “descenso”.

Se analiza a continuación la posibilidad de modificar la dirección del menos-gradiente. Considérese la iteración $x_\alpha = x_0 + \alpha d$, tal que (i) $\alpha \geq 0$, (ii) $\nabla f(x_0) \neq 0$, (iii) $d \in \mathfrak{R}^n$ y $\nabla f(x_0)^T d < 0$. Desarrollando la función objetivo por Taylor y evaluándola en x_α se obtiene

$$\begin{aligned} f(x_\alpha) &\approx f(x_0) + \nabla f(x_0)^T (x_\alpha - x_0) \\ &= f(x_0) + \alpha \nabla f(x_0)^T d \end{aligned} \quad (\text{B.43})$$

y puesto que $\nabla f(x_0)^T d < 0$ se concluye que $f(x_\alpha) < f(x_0)$ para un α suficientemente pequeño. También es de interés considerar la iteración $x_\alpha = x_0 - \alpha D \nabla f(x_0)$, tal que (i)

$\alpha \geq 0$, y (ii) D es una matriz definida positiva. Desarrollando la función objetivo por Taylor y evaluándola en x_α se obtiene

$$\begin{aligned} f(x_\alpha) &\approx f(x_0) + \nabla f(x_0)^T (x_\alpha - x_0) \\ &= f(x_0) - \alpha \nabla f(x_0)^T D \nabla f(x_0) \end{aligned} \quad (\text{B.44})$$

y puesto que $\nabla f(x_0)^T D \nabla f(x_0) > 0$ por ser $D > 0$, se concluye que $f(x_\alpha) < f(x_0)$ para un α suficientemente pequeño.

Las dos iteraciones que se describen en los siguientes párrafos son por tanto iteraciones de descenso:

Iteración 1 tipo gradiente: $x_{k+1} = x_k + \alpha_k d_k$ $k = 1, 2, \dots$, en la que (i) $\alpha_k \geq 0$, (ii) $\nabla f(x_k)^T d_k < 0$ si $\nabla f(x_k) \neq 0$, y (iii) $d_k = 0$ si $\nabla f(x_k) = 0$.

Iteración 2 tipo gradiente: $x_{k+1} = x_k - \alpha_k D_k \nabla f(x_k)$ $k = 1, 2, \dots$, en la que (i) $\alpha_k \geq 0$, y (ii) D_k es una matriz definida positiva. Si en esta iteración se hace D_k igual a la matriz identidad, la iteración resultante corresponde al llamado método del gradiente.

Los métodos tipo gradiente llevan a cabo los siguientes pasos en cada iteración: (i) seleccionar una dirección de descenso, d_k , o bien $-D_k \nabla f(x_k)$, y (ii) seleccionar un paso de avance α_k tal que la función objetivo decrezca.

Una alternativa interesante a utilizar la dirección del menos-gradiente es elegir la matriz D_k como una matriz diagonal cuyos elementos son todos positivos (matriz definida positiva). Cada elemento de la diagonal modifica escalarmente una componente del vector gradiente, modificando por tanto la dirección de avance resultante, potencialmente de una manera beneficiosa.

La selección del paso de descenso normalmente se lleva a cabo bien mediante una búsqueda lineal, bien mediante reglas que garantizan un avance suficiente. La estructura de una búsqueda lineal se establece a continuación.

Búsqueda lineal: Fijada la dirección de avance d_k el problema a resolver es determinar un α_k tal que α_k es el argumento que minimiza en α la función $\phi(\alpha)$, donde $\phi(\alpha) = f(x_k + \alpha d_k)$, con x_k y d_k fijos.

Esta minimización lineal puede llevarse a cabo de formas diversas. Obsérvese que $\alpha \in \Re$ y por tanto el problema es de dimensión 1. Métodos posibles de solución son pues: (i) búsqueda de Fibonacci, (ii) búsqueda áurea, (iii) ajuste de una función cuadrática, y (iv) ajuste de una función cúbica. Estos métodos se describen en detalle, por ejemplo, en [5].

Por otro lado, las reglas de avance son computacionalmente poco costosas y determinan rápidamente el paso de avance a costa de que ese avance no sea todo lo bueno que pudiera haber sido. Todas las reglas aseguran que el avance es “suficientemente” grande y no es “demasiado” pequeño. Entre las reglas más habituales cabe destacar la regla de Armijo y la de Goldstein [5].

Aunque es relativamente laborioso, no es complicado probar que el método del gradiente y sus variantes producen secuencias de descenso a un minimizador local. Esto es, la convergencia a un minimizador local está garantizada. Puede demostrarse que la velocidad de convergencia del método del gradiente es lineal en el sentido que se establece a continuación. Para una secuencia de soluciones $\{x_k\}$ generada por el método del gradiente se cumple que

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\|x_{k+1} - x^*\|}{\|x_k - x^*\|} = \frac{1}{a}, \quad a > 0 \quad (\text{B.45})$$

Esto es, la distancia al minimizador en la iteración $k+1$ es a veces menor que la distancia al minimizador en la iteración k .

Puede asimismo demostrarse que también se cumple que

$$f(x_{k+1}) - f(x^*) \leq \left(\frac{L-l}{L+l} \right)^2 [f(x_k) - f(x^*)] \quad (\text{B.46})$$

donde L y l son respectivamente el mayor autovalor y el menor autovalor de la matriz hessiana de la función objetivo en el minimizador. Esto es, el error de la función objetivo en la iteración $k+1$ es menor que o igual al error de la función objetivo en la iteración k , multiplicado por un coeficiente que depende de los autovalores de la matriz hessiana de la función objetivo en el minimizador. Si todos los autovalores son iguales ($L=l$) el error se anula en un paso. En \mathfrak{R}^2 , tratándose de funciones cuadráticas, esto es intuitivo, ya que es el resultado de una geometría esférica. Si $L \gg l$, el error disminuye de una iteración a la siguiente pero lo hace en una cantidad muy pequeña. Por tanto, serán necesarias muchas iteraciones para alcanzar el minimizador. En \mathfrak{R}^2 , tratándose asimismo de funciones cuadráticas, este comportamiento es fruto de una geometría elipsoidal muy alargada.

La conclusión es clara, deberá buscarse una geometría esférica y no una geometría elipsoidal. Desgraciadamente no hay reglas generales que permitan garantizar una geometría esférica en las proximidades del minimizador. Existen, sin embargo, reglas útiles.

Una posibilidad de interés es llevar a cabo un cambio de variables. Sin embargo, difícilmente puede establecerse *a priori* el cambio de variables que mejore la geometría en el entorno del minimizador. Aunque existen notables contraejemplos, un buen heurístico es llevar a cabo un cambio de variables que haga que todos los componentes del minimizador sean similares en magnitud. Si cada componente x_j de x está acotada de la forma $a_j \leq x_j \leq b_j$, el cambio de variables

$$y_j = \frac{2x_j}{b_j - a_j} - \frac{a_j + b_j}{b_j - a_j} \quad \forall j \quad (\text{B.47})$$

hace que cada variable y_j esté comprendida entre -1 y 1. Este cambio de variables es en general una buena estrategia cuando se carece de información adicional que pueda permitir aprovechar ventajosamente la estructura del problema. Otro posible cambio de variables es $y_j = \frac{x_j - a_j}{b_j - a_j} \quad \forall j$, que hace que cada variable y_j esté comprendida entre 0 y 1.

Las iteraciones previamente establecidas acaban mediante el cumplimiento de una o varias de la condiciones siguientes:

1. Que la función objetivo no derezca suficientemente, esto es, $\frac{|f(x_{k+1}) - f(x_k)|}{|f(x_{k+1})| + 1} < \epsilon_1$.
2. Que el punto no cambie suficientemente, esto es, $\frac{\|x_{k+1} - x_k\|}{\|x_{k+1}\| + 1} < \epsilon_2$.
3. Que el gradiente esté suficientemente próximo a cero, esto es, $\|\nabla f(x_{k+1})\| < \epsilon_3$.

B.4.2. El método de Newton

A continuación, se analiza el método de Newton. Si se lleva a cabo una aproximación de segundo orden en x_k de la función objetivo empleando un desarrollo de Taylor, se obtiene

$$f(x) \approx f(x_k) + \nabla f(x_k)^T \Delta x + \frac{1}{2} \Delta x^T \nabla^2 f(x_k) \Delta x \quad (\text{B.48})$$

El objetivo es determinar un Δx de forma que la anterior aproximación cuadrática alcance su minimizador, por tanto se iguala a cero la derivada con respecto a Δx , resulta pues,

$$\nabla f(x_k) + \nabla^2 f(x_k) \Delta x = 0 \quad (\text{B.49})$$

de donde se concluye que

$$\Delta x = -[\nabla^2 f(x_k)]^{-1} \nabla f(x_k) \quad (\text{B.50})$$

La iteración a llevar a cabo será pues

$$x_{k+1} = x_k - [\nabla^2 f(x_k)]^{-1} \nabla f(x_k) \quad (\text{B.51})$$

La iteración de Newton tiene por tanto la forma siguiente: $x_{k+1} = x_k - [\nabla^2 f(x_k)]^{-1} \nabla f(x_k)$, $k = 1, 2, \dots$

Varias observaciones son pertinentes:

1. En las proximidades de un minimizador local la matriz hesiana es definida positiva y por tanto el método está bien definido.
2. Fuera de las proximidades de un minimizador local la matriz hesiana puede no ser definida positiva, e incluso puede ser singular, por lo que $-\nabla^2 f(x_k)^{-1} \nabla f(x_k)$, de poderse calcular, puede no ser una dirección de descenso.
3. Puede demostrarse que el orden de convergencia del método de Newton es cuadrático en el sentido que se establece a continuación. Para una secuencia de soluciones $\{x_k\}$ generada por el método de Newton se cumple que

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\|x_{k+1} - x^*\|}{\|x_k - x^*\|^2} = \frac{1}{b}, \quad b > 0 \quad (\text{B.52})$$

Esto es, la distancia al minimizador en la iteración $k + 1$ es b veces menor que el cuadrado de la distancia al minimizador en la iteración k .

El método de Newton es pues muy eficaz si converge, pero puede no converger.

Variantes habituales del método de Newton son:

1. Factorizar la matriz hesiana no cada iteración sino una vez cada varias iteraciones. En las iteraciones en las que no se lleva a cabo una factorización se emplean los factores de la matriz hesiana previa.
2. Calcular numéricamente la matriz hesiana si su expresión analítica no está disponible y factorizarla posteriormente.
3. Emplear una matriz hesiana en la que solamente se consideran los elementos diagonales de la misma.

B.4.3. Métodos cuasi-Newton

Los métodos cuasi-Newton [5, 10] tienen la estructura del método de Newton. Sin embargo, la inversa de la matriz hessiana se aproxima utilizando diversas formas de actualización. La diferencia entre los métodos cuasi-Newton estriba en la forma de aproximar la inversa de la matriz hessiana. El método de Davidon-Fletcher-Powell tiene la siguiente forma:

1. Comenzar con una matriz definida positiva cualquiera H_0 y un punto inicial x_0 . Hacer también $k = 0$.
2. Hacer $g_k = \nabla f(x_k)$ y $d_k = -H_k g_k$.
3. Minimizar $f(x_k + \alpha d_k)$ con respecto a $\alpha > 0$ para obtener $x_{k+1} = x_k + \alpha_k d_k$, $p_k = \alpha_k d_k$ y también $g_{k+1} = \nabla f(x_{k+1})$.
4. Hacer $q_k = g_{k+1} - g_k$, y determinar $H_{k+1} = H_k + \frac{p_k p_k^T}{p_k^T q_k} - \frac{H_k q_k q_k^T H_k}{q_k^T H_k q_k}$. Actualizar k y volver al paso 1.

Obsérvese que la inversa de la matriz hessiana se aproxima empleando información basada en los gradientes de iteraciones sucesivas.

El método de Broyden-Fletcher-Goldfarb-Shanno es análogo al anterior pero actualizando la aproximación a la inversa de la matriz hessiana mediante la iteración:

$$H_{k+1} = H_k + \left(1 + \frac{q_k^T H_k q_k}{q_k^T p_k}\right) \frac{p_k p_k^T}{p_k^T q_k} - \frac{p_k q_k^T H_k + H_k q_k p_k^T}{q_k^T p_k} \quad (\text{B.53})$$

Si en esta iteración se hace $H_k = I$, la matriz identidad, el método resultante no requiere almacenar la matriz H_k y su comportamiento es, en general, razonablemente bueno.

Puede demostrarse asimismo que la siguiente actualización fomenta un buen escalado de la aproximación a la inversa de la matriz hessiana:

$$H_{k+1} = \left(H_k - \frac{H_k q_k q_k^T H_k}{q_k^T H_k q_k}\right) \frac{p_k^T q_k}{q_k^T H_k q_k} + \frac{p_k p_k^T}{p_k^T q_k} \quad (\text{B.54})$$

Las ecuaciones de aproximación sucesiva a la inversa de la matriz hessiana que se han mostrado se construyen de forma tal que la matriz aproximación es definida positiva.

Se debe tener en cuenta que la determinación del paso de avance que se requiere en el paso 3 de un método cuasi-Newton debe ser precisa para que la aproximación a la inversa de la matriz hessiana sea a su vez precisa.

B.4.4. Métodos de direcciones conjugadas

Los métodos de direcciones conjugadas [10, 5] se basan en extrapolaciones de las propiedades de las funciones cuadráticas. Su derivación es compleja, pero su estructura simple. El algoritmo de direcciones conjugadas de Fletcher-Reeves tiene la siguiente forma:

1. Comenzar con x_0 , calcular $g_0 = \nabla f(x_0)$ y hacer $d_0 = -g_0$.
2. Para $k = 0, 1, \dots, n - 1$ llevar a cabo los siguientes pasos:

- i) Comprobar si se cumplen los criterios habituales de convergencia. Si se cumplen, parar. Si no, continuar.
 - ii) Hacer $x_{k+1} = x_k + \alpha_k d_k$ donde α_k minimiza $f(x_k + \alpha d_k)$.
 - iii) Calcular $g_{k+1} = \nabla f(x_{k+1})$.
 - iv) Mientras que $k \neq n - 1$, hacer $d_{k+1} = -g_{k+1} + \beta_k d_k$ donde $\beta_{k+1} = \frac{g_{k+1}^T g_{k+1}}{g_k^T g_k}$
3. Reemplazar x_0 con x_n e ir al paso 1.

El método de Polak-Ribiere es análogo al anteriormente descrito de Fletcher-Reeves pero actualizando el parámetro β_k de la forma

$$\beta_k = \frac{(g_{k+1} - g_k)^T g_{k+1}}{g_k^T g_k} \tag{B.55}$$

Este último método en general funciona mejor.

B.4.5. Métodos que no requieren derivadas

Los métodos que no requieren derivadas son en general de convergencia lenta y normalmente no es posible garantizar la misma. Sin embargo, si no se dispone de derivadas de la función objetivo, estos métodos pueden ser de interés.

- 1. Comenzar con un punto inicial x_0 .
- 2. Mejorar iterativamente $f(x_0)$ resolviendo para $i = 1, 2, \dots, n$

$$\text{minimizar}_{x_i} f(x_1, x_2, \dots, x_n) \tag{B.56}$$

- 3. Repetir el paso anterior hasta lograr convergencia.

Obsérvese que este método no requiere evaluar el gradiente. Esto es su ventaja y desventaja: no tener que evaluar el gradiente es una ventaja, pero no disponer de la “rica” información que proporciona el gradiente es una desventaja.

B.5. Problemas con restricciones. Métodos de solución

El objeto de este apartado es el análisis de métodos computacionales para la resolución del problema

$$\begin{aligned} &\text{minimizar} && f(x) \\ &\text{sujeto a} && x \in \mathcal{S} \end{aligned} \tag{B.57}$$

donde $f(x) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) \in C^2$ y $\mathcal{S} \subset \mathbb{R}^n$

El conjunto \mathcal{S} representa restricciones de igualdad, de desigualdad y cotas superiores e inferiores sobre las variables. En el caso de restricciones de igualdad, el conjunto \mathcal{S} tiene la forma $\mathcal{S} = \{x : h_i(x) = 0, \forall i = 1, 2, \dots, m\}$. En el caso de restricciones de desigualdad, el conjunto \mathcal{S} tiene la forma $\mathcal{S} = \{x : g_i(x) \leq 0, \forall i = 1, 2, \dots, p\}$. El material presentado en

este apartado puede ampliarse en el excelente texto de Bazaraa y cols. [9] y en los manuales de Gill y cols. [10], Luenberger [5] y Bertsekas [11].

Entre los muchos métodos existentes para la resolución de problemas no lineales con restricciones, este capítulo proporciona una introducción a un número pequeño de ellos. El lector interesado en otros métodos y en un tratamiento más en profundidad de los métodos expuestos debe consultar la bibliografía al final de este apéndice. En lo que sigue se estudian métodos de penalización, métodos de barrera, métodos basados en el Lagrangiano aumentado y el método primal dual de punto interior.

B.5.1. Métodos de penalización

Se analizan a continuación los métodos de penalización, también llamados de penalización exterior.

El problema original con restricciones

$$\begin{aligned} & \text{minimizar} && f(x) \\ & \text{sujeto a} && x \in \mathcal{S} \end{aligned} \tag{B.58}$$

se sustituye por el siguiente problema penalizado sin restricciones

$$\text{minimizar } f(x) + c P(x) \tag{B.59}$$

donde

$$c \in \Re, c > 0$$

$$P(x) : \Re^n \rightarrow \Re \text{ tal que}$$

$$P(x) \text{ es una función continua,}$$

$$P(x) \geq 0 \quad \forall x \in \Re^n,$$

$$P(x) = 0 \text{ si y sólo si } x \in \mathcal{S}.$$

En el caso de restricciones de igualdad, $\mathcal{S} = \{x : h_i(x) = 0, \forall i = 1, 2, \dots, m\}$, la función de penalización $P(x)$ puede tener la siguiente forma $P(x) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^m (h_i(x))^2$. En el caso de restricciones de desigualdad, $\mathcal{S} = \{x : g_i(x) \leq 0, \forall i = 1, 2, \dots, p\}$, la función de penalización $P(x)$ puede tener la siguiente forma $P(x) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^p (\text{máximo } [0, g_i(x)])^2$. Los métodos de penalización tienen la siguiente estructura:

1. Establecer una secuencia $\{c_k\}$, $k = 1, 2, \dots$, tal que $c_k > 0$, $c_{k+1} > c_k$.
2. Determinar la función penalizada $q(c_k, x) = f(x) + c_k P(x)$.
3. Resolver para cada valor de k el problema minimizar $q(c_k, x)$ y obtener x_k . Volver al paso 1, obtener un nuevo parámetro de penalización y emplear x_k en el paso 2 como punto inicial. Parar cuando todos o algunos de los criterios habituales de convergencia se cumplan.

Puede demostrarse fácilmente que el límite de una secuencia de soluciones $\{x_k\}$ generada mediante el método de penalización es una solución del problema original (B.58).

B.5.2. Penalización y multiplicadores de Lagrange

La relación entre los parámetros de penalización y los multiplicadores de Lagrange se establece a continuación. Se estudian inicialmente problemas con restricciones de igualdad. Considérese el problema

$$\text{minimizar } f(x) + c_k \gamma(h(x)) \quad (\text{B.60})$$

donde $h(x) : \mathfrak{R}^n \rightarrow \mathfrak{R}^m$, y $\gamma(h) : \mathfrak{R}^m \rightarrow \mathfrak{R}$ es la función de penalización.

La condición de optimalidad de primer orden en x_k tienen la forma

$$\nabla f(x_k) + c_k \nabla_h \gamma(h(x_k)) \nabla h(x_k) = 0 \quad (\text{B.61})$$

y la condición de optimalidad del problema original tiene la forma

$$\nabla f(x_k) + \lambda_k^T \nabla h(x_k) = 0 \quad (\text{B.62})$$

Para que ambas condiciones de optimalidad se cumplan en el minimizador habrá de cumplirse que

$$\lambda_k^T = c_k \nabla_h \gamma(h(x_k)) \quad (\text{B.63})$$

Debe notarse que a medida que $x_k \rightarrow x^*$ se cumplirá que $\lambda_k \rightarrow \lambda^*$, donde x^* es un punto regular de $h(x)$ y una solución del problema

$$\begin{array}{ll} \text{minimizar} & f(x) \\ \text{sujeto a} & h(x) = 0 \end{array} \quad (\text{B.64})$$

y λ^* es el vector de multiplicadores asociado a esa solución.

Seguidamente se estudian problemas con restricciones de desigualdad. Las penalizaciones asociadas a las restricciones de desigualdad presentan discontinuidades. Sin embargo, los métodos de penalización evolucionan siempre desde el exterior de la región de factibilidad, donde las mencionadas penalizaciones son continuas, al igual que sus derivadas primeras y segundas. Por tanto, para estudiar el comportamiento de estas penalizaciones no es necesario tener en cuenta las discontinuidades que tienen lugar en la frontera.

Considérese el problema

$$\text{minimizar } f(x) + c_k \gamma(g(x)) \quad (\text{B.65})$$

donde $g(x) : \mathfrak{R}^n \rightarrow \mathfrak{R}^m$, y $\gamma(g) : \mathfrak{R}^m \rightarrow \mathfrak{R}$ es la función de penalización.

Las condiciones de optimalidad de primer orden en el punto x_k tienen la forma

$$\nabla f(x_k) + c_k \nabla_g \gamma(g(x_k)) \nabla g(x_k) = 0 \quad (\text{B.66})$$

y las condiciones de optimalidad del problema original tienen la forma

$$\nabla f(x_k) + \mu_k^T \nabla g(x_k) = 0, \quad \mu_k \geq 0 \quad (\text{B.67})$$

Por tanto, en el minimizador habrá de cumplirse que

$$\mu_k^T = c_k \nabla_g \gamma(g(x_k)) \quad (\text{B.68})$$

Debe notarse que a medida que $x_k \rightarrow x^*$ se cumplirá que $\mu_k \rightarrow \mu^*$, donde x^* es un punto regular de $g(x)$ y una solución del problema

$$\begin{array}{ll} \text{minimizar} & f(x) \\ \text{sujeto a} & g(x) \leq 0 \end{array} \quad (\text{B.69})$$

y μ^* el vector de multiplicadores asociado a esa solución.

Téngase en cuenta que a aquellas restricciones no activas en el minimizador les corresponderá un multiplicador nulo.

Se estudia a continuación la estructura del hesiano. Sea la función penalizada

$$q(c, x) = f(x) + c \gamma(e(x)) \quad (\text{B.70})$$

donde $e(x)$ representa indistintamente restricciones de igualdad o desigualdad.

El gradiente tiene la forma $\nabla q(c, x) = \nabla f(x) + c \nabla_e \gamma(e(x)) \nabla e(x)$, y el hesiano tiene la forma

$$\nabla^2 q(c, x) = \nabla^2 f(x) + c \nabla_e \gamma(e(x)) \nabla^2 e(x) + c \nabla e(x)^T \nabla_e^2 \gamma(e(x)) \nabla e(x) \quad (\text{B.71})$$

Sea $\nabla^2 \mathcal{L}(x) = \nabla^2 f(x) + \lambda^T \nabla^2 e(x)$, donde $\lambda = \nabla_e \gamma(e(x))$; por tanto, el hesiano tiene la forma

$$\nabla^2 q(c, x) = \nabla^2 \mathcal{L}(x) + c \nabla e(x)^T \nabla_e^2 \gamma(e(x)) \nabla e(x) \quad (\text{B.72})$$

Son pertinentes dos observaciones:

1. La matriz $\nabla^2 \mathcal{L}(x)$ tiende al hesiano de la función lagrangiana del problema original a medida que x_k se aproxima al minimizador x^* , y, por tanto, tiene un límite que no depende de c ; su número de condición no depende, por tanto, de c .
2. La matriz $[c \nabla e(x)^T \nabla_e^2 \gamma(e(x)) \nabla e(x)]$ tiende a infinito a medida que c tiende a infinito.

Se puede concluir pues que a medida que crece c , la matriz hesiana del problema penalizado tiende a estar peor condicionada, lo que puede originar diversos problemas de convergencia.

B.5.3. Métodos de barrera

Se estudian a continuación los métodos de penalización interior o barrera. Para que pueda emplearse un método de barrera o de penalización interior, la región de factibilidad del problema habrá de ser un conjunto con interior no vacío.

El problema original con restricciones

$$\begin{array}{ll} \text{minimizar} & f(x) \\ \text{sujeto a} & x \in \mathcal{S} \end{array} \quad (\text{B.73})$$

se sustituye por el siguiente problema penalizado sin restricciones

$$\text{minimizar } f(x) + \frac{1}{c} B(x) \quad (\text{B.74})$$

donde

$$c \in \Re, c > 0$$

$$B(x) : \Re^n \rightarrow \Re$$

$B(x)$ es una función continua,

$$B(x) > 0 \quad \forall x \in \Re^n,$$

$B(x) \rightarrow \infty$ si x se aproxima a la frontera de \mathcal{S} .

En el caso de restricciones de desigualdad, la función de barrera $B(x)$ puede tener la siguiente forma $B(x) = -\sum_{i=1}^p \frac{1}{g_i(x)}$.

Los métodos de barrera tienen la siguiente estructura:

1. Establecer una secuencia $\{c_k\}$, $k = 1, 2, \dots$, tal que $c_k > 0$, $c_{k+1} > c_k$.
2. Determinar la función penalizada $r(c_k, x) \equiv f(x) + \frac{1}{c_k} B(x)$.
3. Resolver para cada valor de k el problema

$$\begin{aligned} &\text{minimizar} && r(c_k, x) \\ &\text{sujeto a} && x \in \text{interior de } \mathcal{S} \end{aligned} \tag{B.75}$$

y obtener x_k . Parar si se cumplen todas o algunas de las condiciones habituales de parada. Si no, volver al paso 1, obtener un nuevo parámetro de penalización y emplear x_k en el paso 2 como punto inicial.

Puede demostrarse fácilmente que el límite de una secuencia de soluciones $\{x_k\}$, generada mediante el método de barrera, es la solución del problema original

$$\begin{aligned} &\text{minimizar} && f(x) \\ &\text{sujeto a} && x \in \mathcal{S} \end{aligned} \tag{B.76}$$

B.5.4. Barreras y multiplicadores de Lagrange

Se estudia a continuación la relación entre los parámetros de barrera y los multiplicadores de Lagrange. Considérese el problema

$$\text{minimizar } f(x) + \frac{1}{c_k} \eta(g(x)) \tag{B.77}$$

donde $g(x) : \Re^n \rightarrow \Re^p$, y $\eta(g) : \Re^p \rightarrow \Re$ es la función barrera.

La condición de optimalidad de primer orden en el punto x_k tiene la forma

$$\nabla f(x_k) + \frac{1}{c_k} \nabla_g \eta(g(x_k)) \nabla g(x_k) = 0 \tag{B.78}$$

y la condición de optimalidad del problema original tiene la forma

$$\nabla f(x_k) + \mu_k^T \nabla g(x_k) = 0 \tag{B.79}$$

Para que ambas condiciones se cumplan en el minimizador habrá de cumplirse que

$$\mu_k^T = \frac{1}{c_k} \nabla_g \eta(g(x_k)) \tag{B.80}$$

Debe notarse que a medida que $x_k \rightarrow x^*$ se cumplirá que $\mu_k \rightarrow \mu^*$, donde x^* es un punto regular de $g(x)$ y una solución del problema

$$\begin{array}{ll} \text{minimizar} & f(x) \\ \text{sujeto a} & g(x) \leq 0 \end{array} \quad (\text{B.81})$$

y μ^* el vector de multiplicadores asociado a esa solución.

Puede demostrarse fácilmente que el hessiano de una función con barrera sufre el mismo fenómeno de mal condicionamiento que el que sufre el hessiano de las funciones penalizadas. El análisis es análogo al realizado para las funciones de penalización y por eso no se reproduce aquí.

B.5.5. Métodos basados en el lagrangiano aumentado

A continuación, se analiza el método del Lagrangiano aumentado o método de los multiplicadores. Sea el problema con restricciones de igualdad

$$\begin{array}{ll} \text{minimizar} & f(x) \\ \text{sujeto a} & h(x) = 0 \end{array} \quad (\text{B.82})$$

El lagrangiano aumentado se define como

$$\mathcal{L}(x, \lambda) \equiv f(x) + \lambda^T h(x) + \frac{1}{2}c[h(x)]^2 \quad (\text{B.83})$$

donde $c \in \Re$ es una constante positiva.

Considérese el problema de optimización con restricciones de igualdad

$$\begin{array}{ll} \text{minimizar} & f(x) + \lambda^T h(x) \\ \text{sujeto a} & h(x) = 0 \end{array} \quad (\text{B.84})$$

Obsérvese que la función de penalización cuadrática de este problema es precisamente el lagrangiano aumentado del problema inicial.

Si se considera por otra parte el problema de optimización con restricciones de igualdad

$$\begin{array}{ll} \text{minimizar} & f(x) + \frac{1}{2}c[h(x)]^2 \\ \text{sujeto a} & h(x) = 0 \end{array} \quad (\text{B.85})$$

Obsérvese que la función lagrangiana de este problema es precisamente el lagrangiano aumentado del problema inicial.

Los fundamentos del método del lagrangiano aumentado se establecen a continuación. Sea el problema (B.82) y sea λ^* el vector óptimo de multiplicadores de este problema.

La condición de optimalidad de primer orden para este problema tiene la forma

$$\nabla f(x) + \lambda^{*T} \nabla h(x) = 0 \quad (\text{B.86})$$

Considérese asimismo el problema de optimización con restricciones de igualdad

$$\begin{array}{ll} \text{minimizar} & f(x) + \lambda_k^T h(x) \\ \text{sujeto a} & h(x) = 0 \end{array} \quad (\text{B.87})$$

y sea $\bar{\lambda}$ el vector de multiplicadores óptimo de este problema.

La condición de optimalidad de primer orden para este problema tiene la forma

$$\nabla f(x) + \lambda_k^T h(x) + \bar{\lambda}^T \nabla h(x) = 0 \quad (\text{B.88})$$

Obsérvese que las soluciones de los dos problemas anteriormente formulados son las mismas. Teniendo en cuenta las condiciones de optimalidad de estos dos problemas se concluye que $\bar{\lambda} = \lambda^* - \lambda_k$

Por otra parte, obsérvese que el problema penalizado que se obtiene del problema

$$\begin{array}{ll} \text{minimizar} & f(x) + \lambda_k^T h(x) \\ \text{sujeto a} & h(x) = 0 \end{array} \quad (\text{B.89})$$

tiene la forma

$$f(x) + \lambda_k^T h(x) + \frac{1}{2}c[h(x)]^2 \quad (\text{B.90})$$

El valor del vector de multiplicadores de Lagrange asociado a este problema penalizado puede calcularse como se ha establecido anteriormente y tiene la forma

$$\bar{\lambda} = c \nabla_h \left[\frac{1}{2} (h(x))^2 \right] = c h(x_k) \quad (\text{B.91})$$

donde x_k es la solución del problema penalizado.

Los vectores de multiplicadores de Lagrange definidos están relacionados de la siguiente forma

$$\begin{array}{ll} \bar{\lambda} &= \lambda^* - \lambda_k \\ \bar{\lambda} &= c h(x_k) \end{array} \quad (\text{B.92})$$

Se concluye que $\lambda^* = \lambda_k + c h(x_k)$. Una buena aproximación al multiplicador λ^* es pues

$$\lambda_{k+1} = \lambda_k + c h(x_k). \quad (\text{B.93})$$

El método tiene, por tanto, la estructura siguiente:

1. Comenzar con un valor inicial del vector de multiplicadores λ_k . Una buena aproximación para este valor inicial se obtiene habitualmente teniendo en cuenta el problema real que se modela.
2. Determinar x_k resolviendo el problema de minimización sin restricciones:

$$\text{minimizar } f(x) + \lambda_k^T h(x) + \frac{1}{2}c[h(x)]^2.$$

3. Actualizar el vector de multiplicadores mediante $\lambda_{k+1} \leftarrow \lambda_k + c h(x_k)$.
4. Repetir los pasos 2 y 3 hasta alcanzar convergencia en λ .

Puede demostrarse que para un valor de c suficientemente grande, el procedimiento anterior converge a la solución del problema original. El que el valor de c no deba ser demasiado grande hace que el mal condicionamiento habitual en los métodos de penalización no aparezca en este método. Es posible asimismo derivar métodos más eficaces de actualización del vector de multiplicadores empleando derivadas segundas. El lector interesado puede consultar [10] o [12]. La constante de penalización puede incrementarse en cada iteración del algoritmo anterior para aumentar la eficiencia computacional.

El método del lagrangiano aumentado anteriormente establecido puede extenderse para tratar restricciones de desigualdad. El cómo hacerlo es sin embargo relativamente engorroso por lo que no se expone aquí. El lector interesado puede consultar [12].

Sin embargo, es de interés observar que las restricciones de desigualdad se pueden convertir en restricciones de igualdad mediante diversos métodos, por ejemplo el que se expone a continuación.

Sea el problema de optimización con restricciones de desigualdad

$$\begin{array}{ll} \text{minimizar} & f(x) \\ \text{sujeto a} & g_j(x) \leq 0 \quad \forall j = 1, 2, \dots, p \end{array} \quad (\text{B.94})$$

Este problema puede sustituirse por una secuencia de problemas con barrera logarítmica de la forma

$$\begin{array}{ll} \text{minimizar} & f(x) + \frac{1}{c} \sum_{j=1}^p \ln(z_j) \\ \text{sujeto a} & g_j(x) + z_j = 0 \quad \forall j = 1, 2, \dots, p \end{array} \quad (\text{B.95})$$

donde c es el parámetro de penalización de la barrera.

B.5.6. Método primal dual de punto interior

Los algoritmos de punto interior se desarrollaron inicialmente para problemas lineales; hoy, sin embargo, están plenamente desarrollados y disponibles para problemas convexos en general. En este apartado se establece el algoritmo primal dual de punto interior para problema lineales, su extensión a problemas convexos es inmediata. Una referencia de interés para estudiar métodos de punto interior es [13].

Considérese el problema

$$\begin{array}{ll} \text{minimizar} & c^T x \\ \text{sujeto a} & Ax = b, \quad x \geq 0 \end{array} \quad (\text{B.96})$$

donde $x, c \in \mathbb{R}^n$, $b \in \mathbb{R}^m$ y $A \in \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n$.

El problema dual del problema anterior es

$$\begin{array}{ll} \text{maximizar} & b^T y \\ \text{sujeto a} & A^T y \leq c \end{array} \quad (\text{B.97})$$

Si se convierten las desigualdades en igualdades mediante variables de holgura, el problema anterior pasa a ser

$$\begin{array}{ll} \text{maximizar} & b^T y \\ \text{sujeto a} & A^T y + z = c, \quad z \geq 0 \end{array} \quad (\text{B.98})$$

Las variables duales son por tanto $y \in \mathfrak{R}^m$ y $z \in \mathfrak{R}^n$.

Para eliminar las restricciones de no negatividad se emplean barreras logarítmicas,

$$\begin{aligned} & \text{maximizar} && b^T y + \mu \sum_{j=1}^n \ln z_j \\ & \text{sujeto a} && A^T y + z = c \end{aligned} \quad (\text{B.99})$$

El método de punto interior resuelve el problema anterior para distintos valores del parámetro μ . Este parámetro se define de forma que $\mu_0 > \mu_1 > \mu_2 > \dots > \mu_\infty = 0$. El siguiente teorema establece la razón de esta elección.

Teorema B.6 La secuencia de parámetros $\{\mu_k\}_{k=0}^\infty$ genera una secuencia de problemas del tipo (B.99), cuya secuencia de soluciones, $\{x_k\}_{k=0}^\infty$, se aproxima a la solución del problema original (B.98). Una demostración de este teorema puede encontrarse en [13].

El lagrangiano del problema (B.99) es

$$\mathcal{L}(x, y, z, \mu) = b^T y + \mu \sum_{j=1}^m \ln z_j - x^T (A^T y + z - c) \quad (\text{B.100})$$

Nótese que los multiplicadores de Lagrange, x , son las variables del problema original (primal). Empleando este lagrangiano, las condiciones de optimalidad de primer orden del problema (B.99) son

$$\begin{aligned} \nabla_x \mathcal{L}(\cdot) &= A^T y + z - c = 0 \\ \nabla_y \mathcal{L}(\cdot) &= Ax - b = 0 \\ \nabla_z \mathcal{L}(\cdot) &= XZe - \mu e = 0 \end{aligned} \quad (\text{B.101})$$

donde

$$\begin{aligned} X &\equiv \text{diag}(x_1, x_2, \dots, x_n) \\ Z &\equiv \text{diag}(z_1, z_2, \dots, z_m) \\ e &= (1, 1, \dots, 1)^T \end{aligned} \quad (\text{B.102})$$

La dimensión de e es $n \times 1$.

Para resolver por el método de Newton el sistema de ecuaciones (B.101), x , y y z se sustituyen respectivamente por $x + \Delta x$, $y + \Delta y$ y $z + \Delta z$; si se desprecian los términos de segundo orden, el sistema anterior se convierte en el siguiente sistema incremental:

$$\begin{aligned} Z\Delta x + X\Delta z &= \mu e - XZe \\ A\Delta x &= 0 \\ A^T \Delta y + \Delta z &= 0 \end{aligned} \quad (\text{B.103})$$

Las direcciones primal y dual de búsqueda se obtienen resolviendo (B.103) para Δy , Δz y Δx , esto es,

$$\begin{aligned} \Delta y &= -(AXZ^{-1}A^T)^{-1}AZ^{-1}v(\mu) \\ \Delta z &= -A^T \Delta y \\ \Delta x &= Z^{-1}v(\mu) - XZ^{-1}\Delta z \end{aligned} \quad (\text{B.104})$$

donde $v(\mu) = \mu e - XZe$.

Se lleva a cabo una iteración de Newton para obtener la siguiente solución:

$$\begin{aligned}x^{k+1} &= x^k + \alpha_p \Delta x \\y^{k+1} &= y^k + \alpha_d \Delta y \\z^{k+1} &= z^k + \alpha_d \Delta z\end{aligned}\tag{B.105}$$

donde $0 \leq \alpha_p \leq 1$, $0 \leq \alpha_d \leq 1$ son los pasos de avance primal y dual, respectivamente.

El paso de avance primal se aplica a las variables primales x , mientras que el paso de avance dual se aplica a las variables duales y y z . La selección de α_p y α_d se lleva a cabo de forma que x y z se mantengan positivas (y no tiene que ser positiva). Para asegurar la positividad, se emplea el parámetro σ ($0 < \sigma < 1$). Por tanto,

$$\alpha_x = \text{mínimo} \left\{ \frac{-x_i}{\Delta x_i} \text{ tal que } \Delta x_i < -\delta \right\}, \quad \alpha_p = \text{mínimo} \{1, \sigma \alpha_x\}\tag{B.106}$$

$$\alpha_z = \text{mínimo} \left\{ \frac{-z_j}{\Delta z_j} \text{ tal que } \Delta z_j < -\delta \right\}, \quad \alpha_d = \text{mínimo} \{1, \sigma \alpha_z\}\tag{B.107}$$

donde δ es una tolerancia (por ejemplo $\delta = 0,0001$) y σ toma típicamente el valor 0,99995.

Los ajustes anteriores juegan un papel relevante cuando se producen grandes incrementos Δx_i y Δz_j .

Es interesante determinar el valor del agujero de dualidad, que es la diferencia entre el valor de la función objetivo del problema primal y el valor correspondiente de la función objetivo del problema dual. Para valores factibles de x e y , el agujero de dualidad viene dado por $c^T x - b^T y$. Este agujero de dualidad se emplea como medida de la proximidad a la condición de optimalidad.

Se trata a continuación el problema de la factibilidad inicial. Si la solución inicial no es factible, la aplicación del método de Newton al sistema (B.101) (condiciones de optimalidad de primer orden) da lugar al siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{aligned}Z\Delta x + X\Delta z &= \mu e - XZe \\A\Delta x &= b - Ax \\A^T\Delta y + \Delta z &= c - A^T y - z\end{aligned}\tag{B.108}$$

cuya solución es

$$\begin{aligned}\Delta y &= -(AXZ^{-1}A^T)^{-1}(AZ^{-1}v(\mu) - AXZ^{-1}r_d - r_p) \\ \Delta z &= -A^T\Delta y + r_d \\ \Delta x &= Z^{-1}v(\mu) - XZ^{-1}\Delta z\end{aligned}\tag{B.109}$$

donde

$$\begin{aligned}r_p &= b - Ax \\ r_d &= c - A^T y - z\end{aligned}\tag{B.110}$$

son los residuos primal y dual respectivamente.

Si el punto inicial no es factible, tanto la factibilidad como la optimalidad se alcanzan simultáneamente a medida que progresa el algoritmo de punto interior, esto es, los residuos y el agujero de dualidad de aproximan a cero simultáneamente.

El parámetro de barrera μ se puede actualizar de la siguiente forma. Empleando las condiciones de optimalidad (B.101), se puede escribir $\mu = \frac{z^T x}{n}$. Para impedir una aproximación prematura a la frontera de la región factible y conseguir un camino centrado, se introduce el parámetro ρ . Por tanto,

$$\mu = \rho \frac{z^T x}{n} \tag{B.111}$$

Los valores del parámetro ρ se ajustan experimentalmente. Una elección razonable es [14]

$$\rho = \begin{cases} 0,1 & \text{si } c^T x > b^T y \\ 0,2 & \text{si } c^T x < b^T y \end{cases} \tag{B.112}$$

Nótese que si $c^T x = b^T y$ se ha encontrado la solución óptima.

Un criterio de parada adecuado es la consecución de un agujero de dualidad suficientemente pequeño, esto es,

$$\frac{|c^T x^k - b^T y^k|}{\max\{1, |c^T x^k|\}} < \varepsilon \tag{B.113}$$

donde ε un parámetro unitario de tolerancia.

El numerador de la expresión anterior es el agujero de dualidad, el denominador es el máximo entre 1 y el valor absoluto de la función objetivo primal. Este criterio de parada impide la división por cero.

La extensión de los resultados anteriores al problema con cotas superiores (u) e inferiores (l) que tiene la forma

$$\begin{aligned} &\text{minimizar} && c^T x \\ &\text{sujeto a} && Ax = b, \quad l \leq x \leq u \end{aligned} \tag{B.114}$$

es inmediata, y se deja como ejercicio al lector.

La selección de un adecuado punto inicial se trata a continuación según [14]. En primer lugar, se calcula cada componente del vector \hat{x}

$$\hat{x}_j = \frac{1}{\|A_j\|_2 + 1} \tag{B.115}$$

donde A_j es la columna j de la matriz de restricciones A , y $\|\cdot\|$ es la norma cuadrática.

A continuación, se calcula el escalar β

$$\beta = \frac{\|b\|_2 + 1}{\|A\hat{x}\|_2 + 1} \tag{B.116}$$

La solución inicial x^0 se calcula finalmente como

$$x^0 = 10 \beta \hat{x} \tag{B.117}$$

Si cualquier componente del vector x es mayor que la mitad de su cota superior, se fija a ese valor. El vector de variables duales y se hace cero, y el vector de variables duales z se inicializa en función del vector x de la siguiente manera:

Si x_j tiene una cota superior finita, entonces

$$z_j^0 = \begin{cases} 1 & \text{si } c_j < 0 \\ c_j + 1 & \text{en otro caso} \end{cases} \quad (\text{B.118})$$

Si, por el contrario, la cota superior de x_j es infinita, entonces

$$z_j^0 = \begin{cases} 1 & \text{si } c_j < 1 \\ c_j & \text{en otro caso} \end{cases} \quad (\text{B.119})$$

Finalmente, se establecen los pasos del algoritmo primal dual de punto interior:

1. Hacer $k = 0$ y seleccionar un punto inicial (x^0, y^0, μ_0) . Este punto inicial puede ser (primal y/o dual) factible, o no.
2. Calcular el vector de variables duales de holgura $z^k = c - A^T y^k$, y definir las matrices diagonales $X^k = \text{diag}(x_1^k, x_2^k, \dots, x_n^k)$ y $Z^k = \text{diag}(z_1^k, z_2^k, \dots, z_m^k)$.
3. Calcular el vector $v(\mu_k) = \mu_k e - X^k Z^k e$, y los vectores de residuos $r_p = Ax - b$ y $r_d = c - A^T y - z$. Si la solución actual es primal y dual factible, los vectores de residuos son cero.
4. Calcular las direcciones de búsqueda, Δy , Δz y Δx , resolviendo el correspondiente sistema de Newton. Emplear (B.109).
5. Calcular los pasos de avance α_p y α_d . Emplear (B.106) y (B.107).
6. Actualizar las variables primales y duales empleando (B.105).
7. Si el agujero de dualidad es suficientemente pequeño [ecuación (B.113)], parar; se ha encontrado una solución con un nivel de precisión ε . En otro caso, hacer $k \leftarrow k + 1$ y continuar.
8. Actualizar el parámetro de barrera μ_k [ecuaciones (B.111) y (B.112)] e ir al paso 1.

Bibliografía

- [1] A. Brooke, D. Kendrick y A. Meeraus, *Release 2.25 GAMS A User's Guide*. The Scientific Press. South San Francisco, 1992.
- [2] R. Fourer, D. M. Gay y B. W. Kernighan, *AMPL: A Modeling Language for Mathematical Programming*. Second Edition. Duxbury Press/Brooks/Cole Publishing Company, 2000.
- [3] E. Castillo, A. J. Conejo, P. Pedregal, R. García y N. Alguacil, *Building and Solving Mathematical Programming Models in Engineering and Science*. John Wiley & Sons. New York, 2001.
- [4] M. S. Bazaraa, J. J. Jarvis y H. D. Sherali, *Linear Programming and Network Flows*. Second Edition. John Wiley and Sons. New York, 1990.
- [5] D. G. Luenberger, *Linear and Nonlinear Programming*. Second Edition. Addison-Wesley Publishing Company. Reading, Massachusetts, 1984.

- [6] V. Chvátal, *Linear Programming*. W. H. Freeman and Company. New York, 1983.
- [7] S. P. Bradley, A. C. Hax y T. L. Magnanti, *Applied Mathematical Programming*. Addison-Wesley Publishing Company. Reading, Massachusetts, 1977.
- [8] G. L. Nemhauser y L. A. Wolsey, *Integer and Combinatorial Optimization*. John Wiley and Sons. New York, 1988.
- [9] M. S. Bazaraa, H. O. Sherali y C. M. Shetty, *Nonlinear Programming: Theory and Algorithms*. Second Edition. John Wiley and Sons. New York, 1993.
- [10] P. E. Gill, W. Murray y M. H. Wright, *Practical Optimization*. Academic Press, Inc. London, 1981.
- [11] D. P. Bertsekas, *Nonlinear Programming*. Athena Scientific. Belmont, Massachusetts, 1995.
- [12] D. P. Bertsekas, *Constrained Optimization and Lagrange Multiplier Methods*. Academic Press, Inc. New York, 1982.
- [13] S. J. Wright, *Primal-Dual Interior-Point Methods*, Siam, Philadelphia, 1997.
- [14] R. J. Vanderbei, *Linear Programming - Foundations and Extensions*. Second Edition. Kluwer Academic Publishers. International Series in Operations Research and Management Science. Boston, 2001.

Índice alfabético

- AGC, 31, 248
- Agentes del mercado, 285
 - comercializador, 305
 - CONCO, 285
 - DISTCO, 285
 - ESCO, 285
 - GENCO, 285
 - ISO, *véase* Operador del sistema
 - TRANSCO, 285
- Alarmas, 356
- Algoritmos de integración numérica, 559
 - método de Euler, 560
 - método de Euler predictor-corrector, 560
 - regla trapezoidal, 561
- Amortiguamiento, 572
- Análisis de transitorios electromagnéticos, 392
 - técnicas analíticas, 393
 - técnicas gráficas, 399
 - técnicas numéricas, 412
- Ángulo
 - crítico de despeje, 550
 - de despeje, 550
 - máximo, 550
- Armónicos, 623
 - característicos, 625
 - efectos negativos, 623
 - tasa de, 623
- Autovalor, 575
 - mecánico, 588
- Autovector, 575
- AVR, 222

- Beneficios varados, 62
- Bifurcaciones, 602
 - de Hopf, 609
 - límite, 606
 - silla, 602
- Bolsa de la energía, *véase* *Power exchange*

- Cables aislados
 - apantallamiento, 92
 - campo eléctrico, 90
 - componentes, 89
 - pérdidas dieléctricas, 94
- Calidad de servicio, 8, 20, 47, 50, 51, 54, 55, 65
- Característica frecuencia-potencia, 237
- Cargas no lineales
 - compensador TCR, 642
 - horno de arco, 637
 - punto de funcionamiento, 646
 - rectificador, 632
- Centrales, 21, 39
 - biomásicas, 24
 - células de combustible, 66
 - de ciclo combinado, 18, 23, 26, 40, 42
 - de turbinas de gas, 23, 40
 - eólicas, 3, 12, 24, 66
 - embotellar las, 40
 - fotovoltaicas, 12, 24
 - hidráulicas, 22
 - minihidráulicas, 12
 - mínimo técnico de, 40
 - nucleares, 22, 24, 39
 - térmicas, 22, 39, 40
- Cierre de mercado, 285
 - subasta mono-periodo, 286
 - subasta multi-periodo, 290
 - subasta walrasiana, 294
- Circuito equivalente para transitorios
 - capacidad, 394, 414
 - inductancia, 394, 414
 - línea ideal, 398, 416
 - resistencia, 393, 413
- Coefficientes de reflexión, 402
- Colapso de tensión, 349, 542, 594, 603
- Comercialización, 8, 46–48, 50, 54, 56, 58, 63, 65
- Compensación, teorema de, 321, 422
- Compensador TCR
 - ángulo de conducción, 645

- ángulo de disparo, 643, 644
- emisión armónica, 645
- modelo, 642
- Componentes simétricas
 - líneas eléctricas, 477
 - máquinas asíncronas, 499
 - máquinas síncronas, 495
 - teoría y fundamentos, 472
 - transformadores, 478
- Condiciones de optimalidad, 737
 - problemas con restricciones, 739
 - problemas sin restricciones, 738
- Consumidor, 307
- Consumo, 15, 16, 33
 - calidad de servicio, 8, 20, 47, 50, 51, 54, 55, 65
 - demanda eléctrica, *véase* Demanda específico, 262
 - factor de potencia, 20
 - índices de, 12
 - modelos estacionarios, 132
 - modelos funcionales, 133
 - modelos predictivos, 134
 - monótona de, 378, 379, 382, 384
 - perfil de, 15, 16
- Contingencias, 312
 - actuaciones preventivas, 347–353
 - análisis, 315–327, 348
 - criterio N-1, 315, 376
 - criterio N-2, 315, 376
 - índice de severidad, 317, 323
 - enmascaramiento, 323
 - planes de emergencia, 348
 - planes de salvaguarda, 348
 - preselección, 315
 - screening*, 318
- Contratos, 42, 45, 47, 50, 56, 57, 59, 60
- Control de tensión, 31, 32, 44, 50, 51, 217, 222
 - regulación primaria, 222
 - regulación secundaria, 243
- Control del sistema, 217
 - estructura del, 219
 - servicio complementario, 220
- Control frecuencia-potencia, 217
 - AGC, 31
 - control terciario, 31, 259
 - regulación primaria, 31, 44, 220, 232
 - regulación secundaria, 31, 247
 - regulador de velocidad, 31
 - reserva primaria, 31
 - reserva secundaria, 32
- Control primario de frecuencia, 232
 - amplificador hidráulico, 234
 - estructura, 232
 - función de transferencia, 236
 - generador, modelo eléctrico, 234
 - regulador primario, modelo del, 235
 - sistema eléctrico, respuesta del, 238
 - sistema turbina-generador, 232
- Control primario de tensión, 222
 - adelanto de fase, 228
 - circuito estabilizador, 231
 - efecto de la carga, 231
 - estructura del, 222
 - función de transferencia, 225
 - lugar de las raíces, 227–229
 - repuesta dinámica, 227
 - repuesta en bucle cerrado, 226
 - repuesta estática, 226
 - respuesta temporal, 226, 230
- Control secundario de frecuencia, 247
 - estrategias de participación, 250
 - intercambios, 247
 - interconexión elástica, 254
 - interconexión rígida, 256
 - sistema multiárea, 252, 258
- Control secundario de tensión, 243
 - flujo de cargas extendido, 244
 - funcionamiento del, 247
 - ley de control, 245
 - nudos pilotos, 243
 - nudos pilotos, selección de, 244, 245
- Coordinación hidrotérmica, 280
- Cortocircuitos
 - con máquinas asíncronas, 498
 - con máquinas síncronas, 491
 - fenómenos transitorios, 464
 - puestas a tierra, 500
- Cortocircuitos desequilibrados
 - análisis matricial, 490
 - línea-línea, 487
 - línea-línea-tierra, 489
 - línea-tierra, 485
- Cortocircuitos equilibrados
 - en redes eléctricas, 469
 - potencia de cortocircuito, 471
- Coste, 262
 - convexo, 268
 - cuadrático, 265
 - de comercialización, 34

- de distribución, 34
- de diversificación, 34
- de generación, 34, 262, 278
- de inversión, fijo, 18, 24, 27, 30, 36, 38, 52, 55
- de las instituciones, 34
- de operación, variable, 18, 24, 36, 38, 55
- de servicios complementarios, 53
- de transacción, 49
- de transición a la competencia, CTC, 34, 47, 61, 64
- de transporte, 34
- diferencial del, 264
- extrapeninsular, 34
- fijo, 265
- función convexa de, 264
- incremental, 264, 266, 361
- incremental, igualdad de, 268
- incurrido, 8
- marginal, 45, 264, 267
- marginal por nudo, 273
- medioambiental, 15, 50, 62
- regulatorio, 34
- Criterio de igualdad de áreas, 548
- Cuenca hidráulica, 284, 300
- Cuota-precio, curva, 303
- Demanda
 - consumo de electricidad, *véase* Consumo
 - curva de carga, 16, 19
 - curva monótona de, 18
 - elasticidad, 15
 - gestión de, 14, 62, 65, 67
- Deslastre de cargas, 313, 337, 341, 591
- Despacho económico, 262, 353
 - básico, 262
 - con límites de generación, 267
 - con límites de red, 276
 - con pérdidas, 269
 - efecto de las pérdidas, 274
 - sin límites de generación, 263
 - sin pérdidas, 263, 267
- Detección de medidas erróneas
 - residuos normalizados, 198
 - test χ^2 , 197
- Diagrama reticular, 405, 407, 409
- Distribución
 - actividad de, 8, 30, 47, 51, 54
 - red de, 28, 30, 47, 51, 54
 - remuneración de la, 55, 65
- Distribución normal, 177
- Economía del sector
 - competencia, 8
 - economías de escala, 7, 26, 46
 - liquidación, 59
 - monopolio, 8, 45, 46, 58
 - riesgos, 38, 41, 42, 56, 57
- Ecuaciones normales, 180
 - alternativas, 192
 - inconvenientes, 191
 - matriz de ganancia, 180
- Efecto *flicker*, 637
- Electricidad, producto
 - características del, 1, 10
 - historia del, 5
- Electrificación rural, 66
- Eliminación gaussiana, 702
- Energía no suministrada, 380
- Enlaces en corriente continua, 591, 594
- Equivalentes de redes, 331, 713
 - adaptativos, 715
 - grandes, 714
 - pequeños, 716
- Errores topológicos, 208
 - detección, 209
 - modelo de interruptor, 211
 - tipos, 209
- Estabilidad, 356
 - clasificación, 543
 - de gran perturbación, 547
 - de pequeña perturbación, 570
 - de tensiones, 594
 - definición, 543
- Estabilizadores del sistema de potencia, 542, 581, 584, 591
- Estados del sistema eléctrico, 312, 329
 - clasificación, 312
- Estimación de estado
 - bloques constructivos, 172
 - datos erróneos, 195
 - ecuaciones normales, 179
 - elementos del jacobiano, 180
 - formulación, 175
 - mínimos cuadrados, 178
 - modelo estadístico, 176
 - observabilidad, 185
 - orígenes, 172
 - proceso iterativo, 180
 - tipos de medidas, 174

- vector de estado, 175
- Estimación de máxima verosimilitud, 177
- Estimación de parámetros, 204
 - impedancias, 206
 - tomas de transformadores, 208
- Estimador de estado generalizado, 211
- Estimador desacoplado rápido, 183
 - proceso iterativo, 184
- Estimadores robustos, 201
 - mínimos valores absolutos, 202
- Estructura del sector, 62
 - economías de escala, 7, 26, 46
 - empresa eléctrica, 7, 9, 34, 47, 61
 - integración vertical, 7–9, 45, 47, 52, 61–63
 - monopolio, 8, 45, 46, 49, 51, 62
 - nacionalizaciones, 8
 - organización, 11, 45–47, 49, 61
- Factor de amortiguamiento, 546
- Factor de participación, 577
- Factores de distribución, 266, 317–325, 338
- Factorización *LU*, 702
 - estabilidad numérica, 704
 - fillins*, 705
 - refactorización parcial, 321, 711
- Factorización *QR*, 192, 719
 - rotaciones de Givens, 720
- FACTS, 29, 67, 220, 591
- Faltas, *véase* Cortocircuitos
- Ferromagnética, 440
- Fiabilidad, 36, 37, 41, 315, 375–385
 - cálculo de índices de, 381
 - garantía de suministro, 8, 37, 38, 63, 65, 67
 - índices de, 380
 - jerarquía en los estudios de, 379
 - modelos de los elementos, 377
 - seguridad, 37, 38, 41, 44, 50, 60
- Flujo de cargas, 270, 297, 372
 - ajustes a la solución, 158
 - ecuaciones del, 270, 271, 278
 - ecuaciones en forma compleja, 141
 - ecuaciones linealizadas, 271
 - en continua, 318
 - en el análisis de contingencias, 315, 325–327
 - formulación básica, 140
 - formulación polar, 142
 - intercambio entre áreas, 161
 - límites de reactiva en nudos PV, 159
 - redes radiales, 162
 - solución con matriz de impedancias, 147
 - tipos de nudos, 141
 - transformadores reguladores, 160
- Flujo de cargas óptimo, 328–336, 362
 - algoritmos, 328
 - con restricciones de seguridad, 329, 348
 - ecuaciones del sistema, 330
 - estructura, 335
 - formulación, 329
 - minimizar costes de generación, *véase* Reparto óptimo de cargas
 - objetivos, 329
 - reglas heurísticas, 332
 - restricciones, 331
- Flujo de cargas armónico
 - aplicaciones, 661
 - cargas no lineales, 622
 - estructura modular, 658
 - interacción armónica, 653
 - objetivo, 622
 - procedimiento iterativo, 660
 - propagación de armónicos, 649
 - restricciones de contorno, 657
 - sensibilidades *i-v*, 649
- Flujo de cargas desacoplado rápido, 152
 - en el análisis de contingencias, 315, 325
 - hipótesis simplificadoras, 153
 - proceso iterativo, 154
 - variante BX, 154
- Flujo de cargas en continua, 156, 331, 362
- Flujo de cargas trifásico
 - aplicación a red española, 696
 - aplicación a red IEEE, 692, 695
 - cargas desequilibradas con neutro, 686
 - cargas desequilibradas sin neutro, 687
 - cargas equilibradas, 684
 - cargas rotativas, 689
 - elementos *shunt*, 678
 - límites de potencia reactiva, 691
 - líneas, 680
 - métodos de solución, 670
 - nudos PQ, 673
 - nudos PV, 674
 - origen de desequilibrios, 669
 - residuos de intensidad; ventajas, 671
 - solución por Newton-Raphson, 675
 - transformadores, 680
- Frecuencia
 - corrección de desviación, 250

- evolución de, 240–243
 - restablecimiento de la, 252, 253
- Frecuencia de resonancia, 652
- Frecuencia natural, 572
- Garantía de suministro, 8, 63, 67
- Gauss-Seidel, 145
 - tratamiento de nudos PV, 146
- Generación, 261
 - centralizada, 262
 - cogeneración, 3, 12, 24, 26, 34, 49, 66
 - competitiva, 284
 - distribuida, 26, 66
 - mix tecnológico de, 18, 24
 - operación de la, 261
 - operador del sistema, *véase* Operador del sistema
 - régimen especial, 12, 49, 50, 59, 65
 - régimen ordinario, 49
 - renovable, 12, 24, 26, 34, 49, 50, 66
- Hachtel, matriz de, 194
- Horno de arco
 - ángulo crítico, 641
 - emisión armónica, 641
 - modelo, 637
 - modos de funcionamiento, 638
- Identificación de medidas erróneas
 - residuos normalizados, 198
 - test de hipótesis, 200
- Inercia, 545
- Interacción
 - Pf, 218
 - QV, 218
- Interacción armónica, 636, 653
 - balance de corrientes armónicas, 654
 - mecanismo de, 654
 - sistema monopuerta, 654
 - sistema multipuerta, 656
- Inversa dispersa, 708
- Línea aérea ideal
 - circuito equivalente, 398, 416
 - constante de propagación de ondas, 395
 - impedancia característica, 396, 400
 - velocidad de propagación de ondas, 400
- Líneas eléctricas
 - capacidad, 86
 - conductancia, 88
 - ecuaciones, 96
 - efecto corona, 88
 - inductancia, 79
 - límites de funcionamiento, 98
 - modelo π , 98
 - modelo serie, 98
 - pérdidas de aislamiento, 88
 - parámetros distribuidos, 97
 - resistencia, 77
- Magnificación de tensión, 446
- Máquinas asíncronas
 - modelo, 128
- Máquinas síncronas
 - límites de funcionamiento, 124
 - potencias, 122
 - reacción de inducido, 120
 - reactancia síncrona, 120
 - rotor cilíndrico, 117
 - rotor de polos salientes, 126
- Matriz
 - definida positiva, 702, 704
 - dispersa, 319, 701
 - estructuralmente simétrica, 701
 - triangular, 702
- Matriz de sensibilidad residual, 196
- Medidas críticas, 197
- Medidas virtuales
 - medidas de gran peso, 191
 - restricciones de igualdad, 193
- Medioambiente
 - efecto invernadero, 10
 - emisiones, 9, 39, 67
 - impacto, 9, 10, 15, 24, 26, 35, 39, 50, 62, 65, 66
 - renovables, 12, 24, 26, 34, 49, 50, 66
 - residuos radioactivos, 9, 15
- Mercado
 - de futuros, opciones, 43, 47, 57, 60
 - de servicios complementarios, 43, 44
 - diario de energía, 43, 44, 64
 - eléctrico, 284
 - eléctrico centroamericano, 9
 - interior de la electricidad UE, 8
 - intradía, 44
 - libre acceso de terceros a las redes, 358
 - mayorista, 8, 45, 47, 52, 56, 57, 59, 63, 66
 - mercosur, 9
 - minorista, 47
 - nacional australiano, 8
 - poder de mercado, 359

- regionales, 8, 9, 67
- spot, 47, 50, 56, 57
- Método de continuación, 613
- Método de Lyapunov, 559
- Mínimos cuadrados ponderados, 178
- Modelos armónicos lineales
 - cargas, 629
 - elementos *shunt*, 630
 - generadores, 627
 - líneas, 626
 - transformadores, 628
- Monótona de consumo, 378, 379, 382, 384
- Monte Carlo, simulación mediante, 384
- Newton-Raphson, 147
 - elementos del jacobiano, 149, 152, 675, 676
 - flujo de cargas trifásico, 675
 - formulación polar, 148
 - formulación rectangular, 151
 - proceso iterativo, 149, 676
- NIEPI, 381
- Niveles de tensión, 3, 5, 6, 11, 30
- Normativa sobre armónicos, 665
- Nudo balance, 142
- Nudos, ecuaciones de, 140
- Número de condición, 191
- Observabilidad de redes, 185
 - isla observable, 187
 - numérica, 186
 - topológica, 189
- Ondas viajeras, 401
 - propagación, 401
 - reflexión, 402
- Operador del mercado, 34, 59, 66, 285, 359
- Operador del sistema, 34, 42, 51–53, 66, 285, 358, 359
- Optimal Power Flow*, véase Flujo de cargas óptimo
- Optimización
 - AMPL, 725
 - entorno de, 261, 725
 - GAMS, 261, 725
- Optimizador, 261
 - CPLEX, 261
 - MINOS, 261
- Organismos
 - AIE, 34
 - CEI, 6
 - CNE, 26, 34, 64, 65
 - OCDE, 34
 - OMEL, 26, 64
 - operador del mercado, 34, 59, 66
 - operador del sistema, 34, 42, 51–53, 66
 - REE, 17, 26, 41, 42, 63, 64
 - RTOs, 9
 - Unión Europea, 8
- Pancaking*, 54, 58
- Par
 - amortiguador, 545, 571
 - eléctrico, 545
 - mecánico, 545
 - sincronizante, 570
- Pararrayos de óxidos metálicos, 448
- Penetración de armónicos, 649
 - equivalente de red, 651
 - objetivo, 650
 - resonancia, 652
- Pérdidas, 5, 20, 29, 38, 52–54, 56, 59, 263, 269, 270, 369
 - asignación del coste de las, 297, 371
 - cálculo de las, 271, 369
 - coeficientes de sensibilidad, 270–273, 372
 - diferencial de las, 273
 - fórmulas explícitas, 270
 - minimización de las, 278
 - óhmicas, 55
 - sensibilidad de las, 270
- Perfil plano, 143
- Perturbaciones electromagnéticas, 622
 - nivel de compatibilidad, 665
 - nivel de emisión, 665
 - nivel de inmunidad, 665
 - normativa, 665
- Potencia de cortocircuito, 471
- Potencia intercambiada, 255
 - evolución temporal de la, 255
 - transitorio del balance de la, 257
- Potencia no suministrada, 380
- Power exchange*, 59, 285
- Precios
 - de área, 361
 - de distribución, 56
 - del mercado, 42, 53
 - marginal, 57
 - medio, 34, 56
 - nodales, 52, 53, 361
 - ofertas, 43, 57, 60, 64

- peajes de red, 9, 34, 45, 47, 53, 54, 56, 58
- regulados, 8
- tarifas, 16, 34, 35, 41, 55–58, 65
- Price-cap*, 55
- Probabilidad de pérdida de carga, 380
- Problemas con restricciones, solución, 747
 - barreras y multiplicadores, 751
 - método de punto interior, 754
 - método primal dual, 754
 - métodos de barrera, 750
 - métodos de penalización, 748
 - métodos lagrangiano aumentado, 752
 - penalización y multiplicadores, 749
- Problemas sin restricciones, solución, 742
 - método de Fletcher-Reeves, 746
 - método de Newton, 745
 - método de Polak-Ribiere, 747
 - método del gradiente, 742
 - métodos cuasi-Newton, 746
 - métodos cuasi-Newton, BFGS, 746
 - métodos cuasi-Newton, DFP, 746
 - métodos de direcciones conjugadas, 746
 - métodos sin derivadas, 747
- Productor, 298
 - fijador de precios, 303
 - hidroeléctrico, 300
 - precio-aceptante, 298
- Programación horaria de centrales, 40, 280
- Programación lineal, 725
 - dualidad, 732
 - formas estándar y canónica, 726
 - holgura complementaria, 734
 - perspectiva algebraica, 728
 - sensibilidades, 729
 - simplex, algoritmo del, 730
 - simplex, mecanismo del, 729
 - solución inicial, 730
 - soluciones degeneradas, 731
 - teorema de dualidad débil, 733
 - teorema de dualidad fuerte, 734
 - teoremas de dualidad, 733
- Programación lineal entera mixta, 735
 - estrategias de procesado, 737
 - estrategias de ramificación, 737
 - ramificación y cortes, 735
 - ramificación y cotas, 735
- Programación matemática, 725
 - modelado, 725
- Protecciones de distancia
 - características, 523
- Protecciones de sobreintensidad
 - características, 518
 - en redes malladas, 523
 - en redes radiales, 520
- Protecciones diferenciales
 - características, 533
 - de barras, 535
- Rectificador
 - ángulo de conmutación, 633
 - ángulo de disparo, 633
 - emisión armónica, 637
 - instante de disparo, 634
 - modelo, 632
 - nivel de rizado, 633
 - reactancia de conmutación, 632
- Red
 - acceso a la, 9, 45, 47, 50, 52–54, 58, 61, 65
 - de distribución, 11, 12
 - de reparto, 11, 12
 - descargos de, 39
 - peajes de, 9, 34, 45, 47, 53, 54, 56, 58
- Redes de referencia, 55
- Regulador de tensión, 541, 581
- Reparto óptimo de cargas, 278
- Reposición del servicio, 313, 356–357
 - actividades previas, 357
 - desfases inadmisibles, 357
 - predicción de demanda, 357
- Representación de componentes en transitorios electromagnéticos, 433
 - dependencia de parámetros con la frecuencia, 435
 - directrices, 438
 - selección de modelos, 433
- Residuos de medidas
 - covarianzas, 196
 - normalizados, 199
 - propiedades, 196
- Resistencias de frenado, 591
- Resonancia, 652
 - sobretensiones armónicas, 652, 653
- Restricciones técnicas de red, 9, 52–54, 59–61, 67, 358
 - resolución de saturaciones, 297, 311, 358, 359
- Revenue-cap*, 55
- Saturaciones, *véase* Restricciones técnicas de

- red
- SCADA, 30, 171
- Seguridad, concepto de, 315
- Sensibilidades, 729
 - flujos de potencia, *véase* Factores de distribución
 - problemas con restricciones, 741
 - programación lineal, 729, 731
- Servicios complementarios, 43, 44, 50, 51, 53, 59, 61, 64, 359, 373
 - de potencia reactiva, 374
 - de regulación, 374
 - de reservas, 374
- Simplex, algoritmo del, 730
- Simplex, mecanismo del, 729
- Sistema español, datos, 2, 3, 6, 26, 34, 64
- Sistemas
 - AGC, 31
 - CECOEL, 41
 - de control, 11, 28, 31, 32, 41
 - de medida, 11, 28, 48, 56, 59, 67
 - de protección, 11, 20, 28, 32
 - SCADA, 30, 171
- Sistemas de ecuaciones modificados, 710
 - actualización de factores, 711
 - compensación, 717
 - refactorización parcial, 711
- Sistemas de excitación estáticos, 582, 583, 590
- Sistemas de gran dimensión, 163
 - estructura del jacobiano, 163
 - métodos de ordenación de Tinney, 166
 - reducción y equivalentes, 713
- Sistemas de protección
 - características funcionales, 507
 - elementos, 512
 - estructura, 510
 - funciones de protección, 516
 - interruptor automático, 514
 - relés, 513
 - tipos constructivos, 537
- Sobrecargas, corrección de, 337
- Sobretensiones, 389, 439, 460
 - características, 456
 - clasificación, 439
 - de frente lento, 439, 446, 460
 - de frente muy rápido, 440
 - de frente rápido, 439, 448, 460
 - frecuencia, 438, 456
 - métodos de protección, 458
 - temporales, 439, 440, 460
 - valor de cresta, 456
- Solución de ecuaciones algebraico-diferenciales
 - solución particionada, 565
 - solución simultánea, 565
- Solución de transitorios electromagnéticos
 - algoritmo de Dommel, 418
 - ecuaciones nodales, 417
 - método de compensación, 422
 - oscilaciones numéricas, 420
 - proceso de cálculo, 419
 - redes con interruptores, 419
 - redes lineales, 417
 - redes no lineales, 422
 - regla trapezoidal, 412
- Subasta de energía, *véase* Cierre de mercado
- Subestaciones, 11, 28, 32
- Superposición, principio de, 318
- Tarifas
 - de conexión, 358
 - de transporte, 368
- Tasas
 - de fallo, 377
 - de reparación, 377
- Tensiones, *véase* Control de tensión
 - corrección de, 343
 - perfil óptimo, 354
 - sensibilidades, 344
 - servicio complementario, 374
- Tiempo crítico de despeje, 541, 551, 555
 - efecto del modelado, 587
- Tiempo de interrupción, 380
- TIEPI, 380
- Transacciones bilaterales, 359, 361, 367
- Transformada de Laplace, 393
- Transformadores
 - de tres devanados, 112
 - monofásicos, 105
 - rectificadores y hornos, 648
 - regulación de ángulo, 116
 - regulación de módulo, 114
 - trifásicos, 108
- Transición a la competencia, 47, 61
 - costes de, CTC, 34, 61, 64
- Transitorios electromagnéticos, 389
- Transporte
 - actividad de, 8, 27, 51
 - líneas de, 2, 5, 28
 - remuneración del, 52, 65
- Turbina, 232

- de vapor, 233, 584
- de vapor multi-etapa, 233
- de vapor tres etapas, 234
- hidráulica, 233

Unit commitment, véase Programación horaria de centrales

Valores por unidad

- definición, 71
- transformadores, 75
- valores base, 71

Válvulas

- de control, 584
- de interceptación, 584, 591

Vectores dispersos, 705

- árbol de la factorización, 706
- FF/FB, 708
- ordenación de nudos, 708

Yardstick competition, 55